

# РАССЕЯНИЕ СВЕТА ПРОФИЛИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

*Н. А. Жарова<sup>a\*</sup>, А. А. Жаров<sup>b</sup>, А. А. Жаров, мл.<sup>b</sup>*

*<sup>a</sup> Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

*<sup>b</sup> Институт физики микроструктур Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2019 г.,  
после переработки 2 апреля 2019 г.  
Принята к публикации 2 апреля 2019 г.

Проведено численное исследование особенностей рассеяния падающего излучения на периодически модулированной границе среды гиперболического типа. Найдена оптимальная (на определенном классе функций) — пилообразная — форма профиля, обеспечивающая минимум отражения в широком диапазоне длин волн. Показано, что при определенной ориентации оптических осей гиперболической среды на пилообразной границе возникают «горячие точки», отвечающие субволновой локализации поля. Проведено обобщение численного метода расчета полей, основанного на применении второго тождества Грина.

DOI: 10.1134/S0044451019090025

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Возникший в последние годы большой интерес исследователей к так называемым гиперболическим средам (ГС) [1–7] обусловлен их необычными и полезными для приложений электромагнитными свойствами. ГС — это анизотропная среда, которая характеризуется изочастотной поверхностью гиперболического типа, а не эллипсоидальной, как для диэлектрических анизотропных сред. Гиперболический характер изочастотной поверхности (поверхности волновых векторов) обусловлен разными знаками компонент тензора диэлектрической проницаемости вдоль и поперек оси анизотропии.

Уникальные свойства ГС могут найти множество приложений, среди которых отрицательная рефракция [8, 9], создание субволновых изображений [10–15], локализация света в широком частотном диапазоне [16, 17]. Высокая плотность фотонных состояний в ГС [18–20] обеспечивает эффективный излучательный теплообмен [4–6], что может использоваться в дизайне наноразмерных устройств нагрева/охлаждения.

В видимом и ближнем ИК-диапазонах ГС может быть реализована, например, как метаматериал с элементарной ячейкой специального дизайна (металло-диэлектрическая планарная наноструктура либо решетка металлических нанопроволок или металлических наночастиц с анизотропной поляризуемостью в диэлектрической матрице).

Гиперболический тип дисперсии метаматериала достигается лишь при достаточно высокой объемной доле металла в композите, что неизбежно приводит к омическим потерям. Поглощение излучения становится существенным для мелкомасштабных мод, фазовая скорость которых направлена вдоль образующей резонансного конуса. Для оптической литографии и создания изображений с субволновым разрешением омические потери нежелательны, с другой стороны, сильное поглощение в гиперболических метаматериалах может быть использовано для дизайна поглощающих покрытий. В работе [21] был предложен дизайн поглощающего покрытия на основе неоднородного гиперболического метаматериала. Оказывается, что почти полное поглощение света в широкой полосе частот видимого спектра можно реализовать в тонком слое гиперболического метаматериала при условии плавно меняющейся ориентации оптической оси от параллельной к нормальной по отношению к границе раздела. Однако

\* E-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

при изготовлении такого покрытия трудно на наномасштабе контролировать заданным образом меняющееся направление оптической оси метаматериала (например, ориентацию металлических проводочных включений).

Идеальный поглотитель должен обеспечивать минимальное отражение излучения. Одним из возможных способов снижения коэффициента отражения является структурирование поверхности поглощающего материала, иными словами, профилирование его границы раздела. В данной работе мы изучаем особенности рассеяния падающего электромагнитного излучения слоем ГС с периодически профилированной границей. Рассматривается влияние формы профиля, а также амплитуды и периода модуляции на коэффициент отражения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дисперсионное уравнение для электромагнитного излучения в одноосной анизотропной среде,

$$(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 - \varepsilon_{\perp} k_0^2) \left( \frac{k_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{k_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} - k_0^2 \right) = 0,$$

описывает две взаимно ортогональные поляризации поля, отвечающие двум собственным (нормальным) модам среды — обыкновенной и необыкновенной. Здесь индексы  $\parallel$  и  $\perp$  определяют направления вдоль и поперек оси анизотропии, а  $k_{\parallel, \perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel, \perp}$  обозначают проекции волнового вектора на эти направления и соответствующие компоненты тензора диэлектрической проницаемости.

Гиперболическая среда характеризуется разными знаками продольной и поперечной компонент диэлектрического тензора,  $\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} < 0$ . Если  $\varepsilon_{\perp} > 0$  и  $\varepsilon_{\parallel} < 0$ , то изочастотная поверхность является сферой для обыкновенных волн и представляет собой двухполостный гиперboloид вращения для необыкновенных волн. В случае  $\varepsilon_{\parallel} > 0$  и  $\varepsilon_{\perp} < 0$  среда оказывается непрозрачной для обыкновенных волн, распространяться могут лишь необыкновенные волны, и изочастотная поверхность для них имеет форму однополостного гиперboloида вращения. Во всех этих случаях осевая симметрия изочастотной поверхности определяется осью анизотропии среды.

В силу ортогональности нормальные волны в однородной среде являются независимыми. Однако в неоднородной среде (например, при наличии границ раздела) ортогональность нормальных мод может нарушиться, что приводит к их линейной трансформации, сопровождающейся обменом энергией.

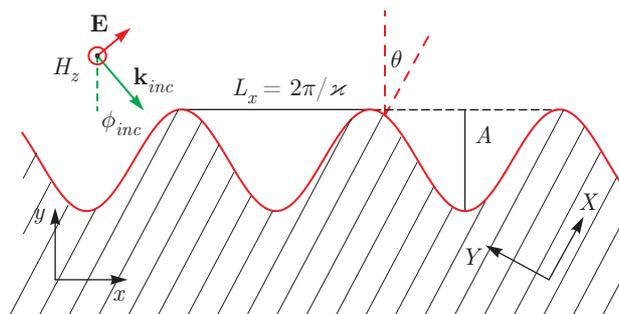


Рис. 1. (В цвете онлайн) Геометрия задачи: периодически модулированная граница разделяет свободное пространство (вверху) и гиперболическую среду (внизу). Рассеяние падающего излучения на такой границе зависит от формы профиля, периода модуляции  $L_x = 2\pi/\alpha$  и амплитуды модуляции  $A$ . Кроме того, на результат рассеяния существенно влияет ориентация оси анизотропии среды, которая определяется ориентацией металлических проволок в так называемой «проволочной среде» или направлением нормали к слоям в слоистом металло-диэлектрическом метаматериале (схематически совпадает с направлением штриховки и направлена под углом  $\theta$  к вертикали). При  $\theta \neq 0$  тензор диэлектрической проницаемости диагонален в системе координат  $(X, Y)$ , где  $X = x \cos \theta + y \sin \theta$ ,  $Y = y \cos \theta - x \sin \theta$

Линейная трансформация может оказаться существенной, в частности, при рассеянии электромагнитных волн в ГС с гофрированной поверхностью. Учет эффектов линейной трансформации чрезвычайно усложняет аналитические и численные расчеты процессов рассеяния излучения. Значительные трудности возникают также при оптимизации формы гофрировки в дизайне поглотителя. Поэтому ниже мы ограничимся изучением рассеяния оптического излучения двумерно-гофрированной границей гиперболической среды в двумерной постановке, т. е. будем полагать, что все поля зависят лишь от координат  $x, y$  и оптическая ось также лежит в плоскости  $(x, y)$ .

В этом случае линейная трансформация обыкновенной ( $\mathbf{H}^o = \mathbf{x}_0 H_x + \mathbf{y}_0 H_y$ ,  $\mathbf{E}^o = \mathbf{z}_0 E_z$ , ТЕ-поляризация) и необыкновенной ( $\mathbf{E}^e = \mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y$ ,  $\mathbf{H}^e = \mathbf{z}_0 H_z$ , ТМ-поляризация) волн на границе отсутствует. В дальнейшем мы ограничимся физически более содержательным случаем излучения ТМ-поляризации.

Геометрия задачи иллюстрируется на рис. 1. Падающее из свободного пространства излучение рассеивается на границе гиперболической среды, которая характеризуется формой профиля, периодом  $L_x$  (можно также ввести характерное волновое число

модуляции профиля  $\kappa = 2\pi/L_x$ ) и амплитудой  $A$  модуляции. Для случая ТМ-поляризации магнитное поле  $H$  направлено по оси  $z$ , а у электрического поля есть компоненты  $E_x, E_y$ .

Гиперболическая среда описывается диэлектрическим тензором

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

с компонентами  $\epsilon_{\perp}, \epsilon_{\parallel}$  ( $\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp} < 0$ ) в направлении оптических осей. Если направление оптических осей совпадает с осями  $x, y$ , то тензор  $\hat{\epsilon}$  в этой системе координат диагонален,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{\perp}, \epsilon_{yy} = \epsilon_{\parallel}$ , и уравнение для магнитного поля  $H$  в такой среде имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon_{yy}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon_{xx}} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_0^2 H = 0,$$

где  $k_0 = \omega/c$  — волновое число в свободном пространстве. При этом компоненты электрического поля выражаются как

$$E_x = -\frac{1}{ik_0\epsilon_{xx}} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik_0\epsilon_{yy}} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

В случае, когда оптические оси не совпадают с осями  $x, y$  и повернуты относительно них на угол  $\theta$  (см. рис. 1), компоненты диэлектрического тензора (в осях  $x, y$ ) становятся функциями  $\theta$ :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \sin^2 \theta, \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta, \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = (\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta.$$

Соответственно модифицируются также уравнение для  $H$ :

$$\epsilon_{xx} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2\epsilon_{xy} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \epsilon_{yy} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp} k_0^2 H = 0,$$

и связь компонент электрического поля с магнитным:

$$E_x = -\frac{1}{ik_0\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}} \left( \epsilon_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} - \epsilon_{xy} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \\ E_y = -\frac{1}{ik_0\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}} \left( \epsilon_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} - \epsilon_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right).$$

Следует заметить, что в такой постановке эффект рассеяния симметричен по отношению к выбору знака компонент тензора проницаемости  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  и, соответственно, к типу возникающей изочастотной поверхности. Действительно, изменение знаков  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  на противоположные отвечает повороту оптической оси на  $\pi/2$ .

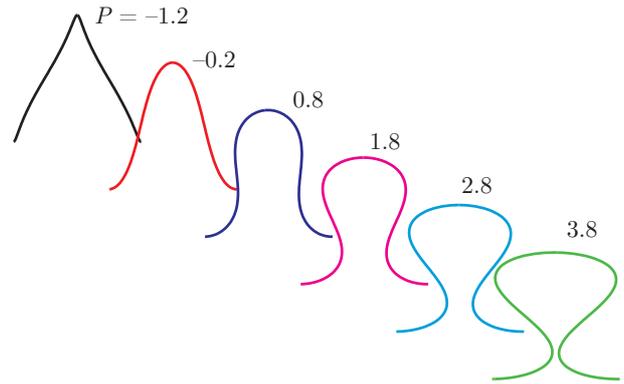


Рис. 2. (В цвете онлайн) Форма профиля  $y_B(x_B)$  периодической границы (элементарная ячейка) для различных значений параметра  $P$

Граница  $x_B(\tau), y_B(\tau)$ , разделяющая свободное пространство и ГС, является периодической функцией параметра  $\tau$  (длина вдоль границы) и характеризуется масштабом вдоль границы  $L_x$ , амплитудой модуляции  $A$  и формой профиля. В дальнейшем мы будем полагать, что период модуляции  $L_x$  меньше вакуумной длины волны, так что все высшие пространственные гармоники рассеянного поля являются неизлучающими и отражение от границы оказывается зеркальным.

Параметрическое задание формы профиля позволяет рассматривать в том числе и неоднозначные функции  $y_B(x_B)$  (см. рис. 2). Выбрав для анализа конкретную зависимость  $x_B(\tau), y_B(\tau)$  с характерным масштабом  $L_0$  и амплитудой  $A_0$ , можно изменять период и амплитуду профиля простым масштабированием,  $x_B(\tau) \rightarrow (L_x/L_0)x_B(\tau), y_B(\tau) \rightarrow (A/A_0)y_B(\tau)$ . Задачу выбора формы также можно свести к перебору значений некоторого параметра  $P$ , задающего зависимости  $x_B(\tau, P), y_B(\tau, P)$  математической формулой. В дальнейшем мы используем следующий алгоритм, параметрически задающий профиль  $x_B, y_B$  в виде функции  $\tau$ :

$$x_B = \frac{F_x(\tau, P)}{F_x(3\pi/2, P)}, \quad y_B = \frac{F_y(\tau)}{F_y(3\pi/2)}, \quad (1)$$

где

$$F_x(\tau, P) = \int_{-\pi/2}^{\tau} \cos \alpha(\tau') d\tau' - \frac{P \sin(2\tau)}{\pi}, \\ F_y(\tau) = \int_{-\pi/2}^{\tau} \sin \alpha(\tau') d\tau', \quad (2)$$

$\alpha = -0.4\pi \cos \tau$  и элементарная ячейка профиля получается при изменении  $\tau$  от  $-\pi/2$  до  $3/2\pi$ . Управ-

ляющий параметр  $P$  меняет форму профиля от почти пилообразной к синусоидальной и до профиля, напоминающего греческую букву  $\Omega$ . На рис. 2 приведены в качестве иллюстрации кривые  $y_B(x_B)$  для набора значений  $P$ .

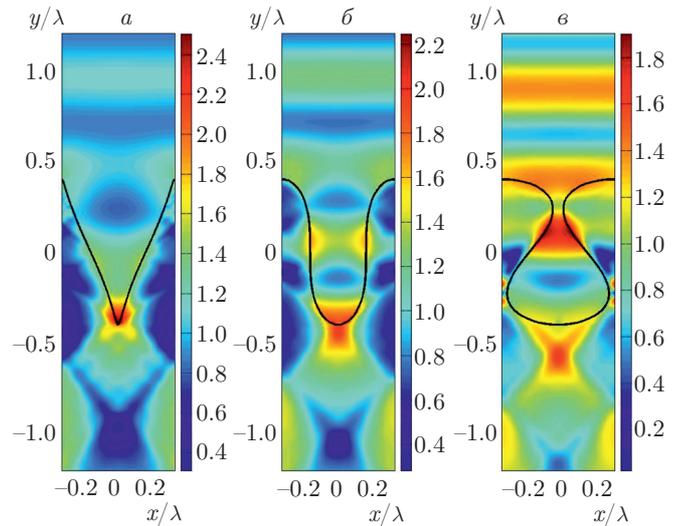
Перебирая различные значения параметра  $P$ , масштаба элементарной ячейки вдоль границы  $L_x$  и амплитуды профиля  $A$ , можно найти такое их сочетание, которое обеспечивает слабое отражение падающего излучения от границы ГС. Дополнительным параметром может служить также угол  $\theta$  ориентации главных (оптических) осей ГС по отношению к осям  $x, y$ .

Задача об отражении падающего излучения от полупространства ГС с профилированной границей может быть решена численно методом конечных элементов (ФЕМ). Однако при расчетах с помощью доступного коммерческого ФЕМ-кода мы столкнулись, в частности, с тем, что в нем нет опции задания периодических по  $x$  граничных условий, причем от границ расчетного интервала происходит заметное отражение излучения, что вносит ошибки в результаты расчета коэффициента отражения. Более удобным оказался поэтому другой подход, основанный на использовании второго тождества Грина (Green's second identity), подробное описание которого дается в Приложении.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Тестирование метода и соответствующей расчетной программы проводилось для предельных случаев (1) слабой модуляции границы, (2) одинаковых диэлектрических характеристик двух сред и (3) малого характерного периода модуляции, когда применимо приближение эффективной среды. Расчетные и теоретические значения коэффициента отражения совпали в этих случаях с точностью порядка 1% (ошибка обусловлена дискретизацией вычислений)<sup>1)</sup>. Кроме того, проводилось сравнение распределения полей, полученного этим методом и рассчитанного стандартной ФЕМ-программой, и это сравнение показало хорошее совпадение.

Параметры гиперболической среды, использованные в численном моделировании, были найдены для метаматериала, представляющего собой диэлек-



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Распределение модуля магнитного поля  $|H(x, y)|$  (показан один период структуры) при нормальном падении плоской волны  $H^{inc} = \exp(-ik_0y)$  на периодически модулированную границу гиперболической среды. Амплитуда модуляции  $A = 0.8\lambda_0$ , период структуры в  $x$ -направлении  $\lambda_0/1.5$ , (вакуумная) длина волны излучения  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм, угол ориентации оптической оси ГС  $\theta = 0$ , параметр  $P$ , контролирующий форму модуляции (см. формулу (1)),  $P = -1.2$  (а),  $0.5$  (б),  $3.5$  (в). Рассчитанный для этих трех вариантов коэффициент отражения  $R = 0.01$  (а),  $0.057$  (б),  $0.148$  (в)

трическую матрицу с металлическими проволочными включениями. В приближении эффективной среды компоненты диэлектрического тензора  $\hat{\epsilon}$  вдоль проволок ( $\epsilon_{\parallel}$ ) и поперек них ( $\epsilon_{\perp}$ ) находятся по формулам гомогенизации [22]:

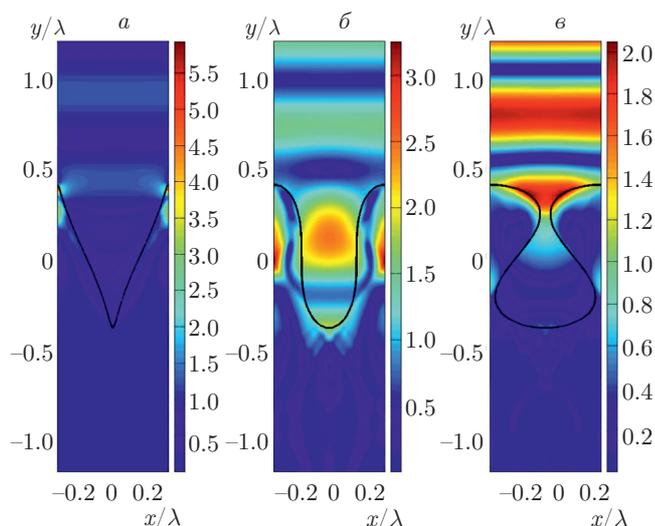
$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_D \frac{\epsilon_M(1 + \rho_M) + \epsilon_D(1 - \rho_M)}{\epsilon_D(1 + \rho_M) + \epsilon_M(1 - \rho_M)}, \quad (3)$$

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_M \rho_M + \epsilon_D(1 - \rho_M),$$

где  $\epsilon_M$  — диэлектрическая проницаемость металла,  $\epsilon_D$  — проницаемость диэлектрической матрицы,  $\rho_M$  — объемная доля металла в составе композита. Далее мы используем для расчетов параметры стекла ( $\epsilon_D = 2.1590$ ) и серебра с объемной долей  $\rho_M = 0.25$ . Дисперсионная зависимость проницаемости серебра  $\epsilon_M(\lambda)$  бралась из базы данных [23]. Для вакуумной длины волны излучения  $\lambda_0 = 0.6$  мкм величина  $\epsilon_M = -15.9822 + 0.5899i$ , и расчеты по формулам (3) дают значения  $\epsilon_{\parallel} = -2.3763 + 0.1475i$ ,  $\epsilon_{\perp} = 4.2660 + 0.0318i$ .

Все последующие рисунки иллюстрируют результаты расчета рассеяния излучения на периодически профилированной границе ГС с помощью метода, описанного в Приложении. В качестве приме-

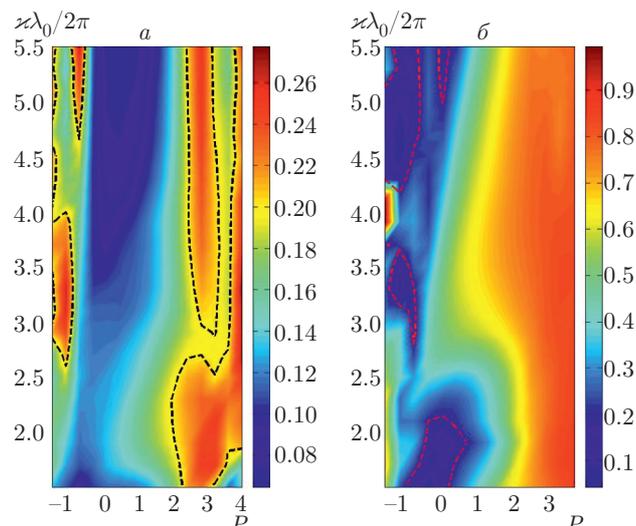
<sup>1)</sup> Коэффициент отражения  $R$  вычислялся как  $R = P_{sct}/P_{inc}$ , где  $P_{inc}$  ( $P_{sct}$ ) — интеграл по периоду  $L_x$  от  $y$ -компоненты вектора Пойнтинга падающего (рассеянного) излучения.



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) То же, что на рис. 3, но угол ориентации оптической оси ГС  $\theta = \pi/2$ . Рассчитанный для этих трех вариантов коэффициент отражения  $R = 0.14$  (а), 0.22 (б), 0.84 (в)

ра на рис. 3 приведены рассчитанные распределения поля для трех различных типов профиля границы гиперболической среды при нормальном падении излучения. Для этих вариантов расчета вакуумная длина волны  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм, угол ориентации оптической оси ГС  $\theta = 0$ . Коэффициент отражения плоской волны  $H^{inc} = \exp(-ik_0y)$  оказывается равным  $R = 0.01, 0.057, 0.148$ . Оптимальной формой границы, обеспечивающей минимум отражения, является пилообразный профиль (а). В случае (б) (квазисинусоидальный профиль) отражение примерно вдвое меньше, чем от плоской границы полупространства с  $\varepsilon = \varepsilon_{\perp}$ , но максимальное отражение наблюдается от  $\Omega$ -подобного профиля (в), и коэффициент отражения в этом случае заметно больше, чем от плоской границы.

Отражение существенно зависит от ориентации осей анизотропии ГС по отношению к границе. При повороте осей на  $90^\circ$  ( $\theta = \pi/2$ ), когда отрицательной становится компонента тензора проницаемости вдоль границы,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\parallel} = -2.3763 + 0.1475i$ , коэффициент отражения от плоской границы близок к единице, и профилирование границы уменьшает отражение. Соответствующая структура поля для ориентации  $\theta = \pi/2$  оптической оси ГС и таких же, как на рис. 3, параметров границы, приведена на рис. 4. Несмотря на значительный рост отражения при такой ориентации оптических осей, зависимость коэффициента отражения от параметра формы оказывается похожей: минимальное отражение достига-



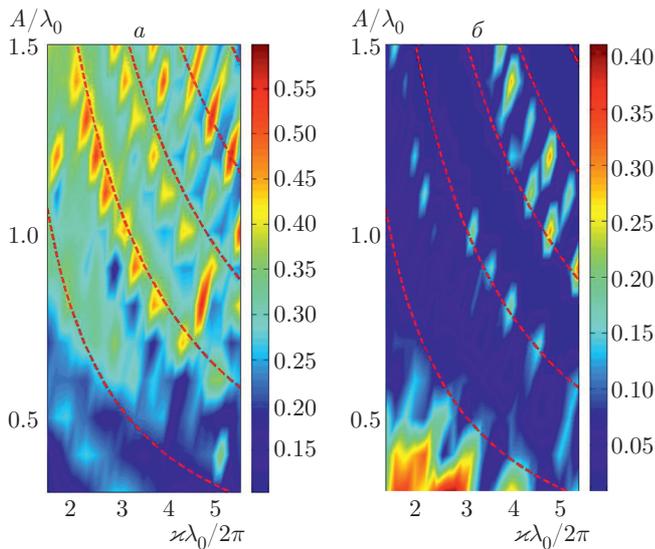
**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Коэффициент отражения от профилированной границы как функция параметра формы  $P$  и нормированного волнового числа модуляции  $k\lambda_0/2\pi = (L_x/\lambda_0)^{-1}$ . Угол поворота осей анизотропии  $\theta = 0$  (а),  $\pi/2$  (б), длина волны излучения  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм, амплитуда модуляции  $A = 0.3\lambda_0 = 0.18$  мкм. Данные усреднены по углам падения  $\phi_{inc} = 0 : 80^\circ$ . Штриховые линии отвечают значению  $\langle R \rangle = 0.2$

ется для пилообразного профиля, а максимальное — для  $\Omega$ -профиля.

Следует отметить, что при нормальном падении на плоскую границу гиперболическая среда ведет себя как диэлектрик ( $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\perp} > 1$ ) для случая  $\theta = 0$  и как металл ( $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\parallel} < 0$ ) для  $\theta = \pi/2$ . Модуляция границы приводит к тому, что на процесс рассеяния начинает влиять компонента  $\varepsilon_{yy}$  тензора проницаемости. Поэтому неудивительно, что гофрировка улучшает согласование при  $\theta = \pi/2$  и ухудшает при  $\theta = 0$ .

Более информативной для выбора формы (параметра  $P$ ) является зависимость коэффициента отражения от нескольких параметров, например, функция  $R(P, k\lambda_0/2\pi)$ , которая приведена на рис. 5 для двух ориентаций ( $\theta = 0, \pi/2$ ) оптической оси ГС и фиксированных амплитуде модуляции  $A = 0.3\lambda_0 = 0.18$  мкм и длине волны излучения  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм<sup>2</sup>). Анализ этой зависимости, а также данных, полученных при других амплитудах модуляции и других частотах, показал преимущество пилообразного профиля, и для дальнейшего исследования мы остановились на форме модуляции профиля

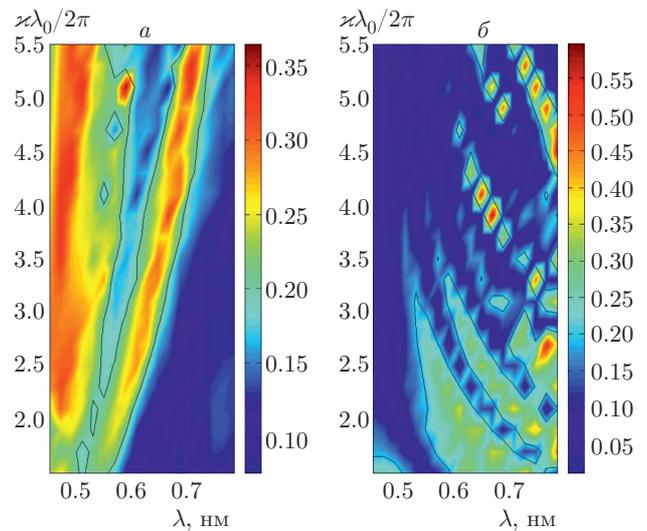
<sup>2</sup>) С целью уменьшить число параметров значения коэффициента отражения, приведенные на рис. 5 и всех последующих рисунках, усреднены по углам падения излучения в интервале  $\phi_{inc} = 0 : 80^\circ$ .



**Рис. 6.** (В цвете онлайн) Коэффициент отражения от профилированной границы с параметром формы  $P = -1.2$  как функция амплитуды модуляции  $A/\lambda_0$  и нормированного волнового числа модуляции  $\kappa/k_0 = (L_x/\lambda_0)^{-1}$ . Угол поворота осей анизотропии  $\theta = 0$  (а),  $\pi/2$  (б), длина волны излучения  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм. Штриховые линии отвечают постоянным значениям произведения  $A\kappa$

с параметром  $P = -1.2$  (форма профиля изображена на рис. 3а, 4а).

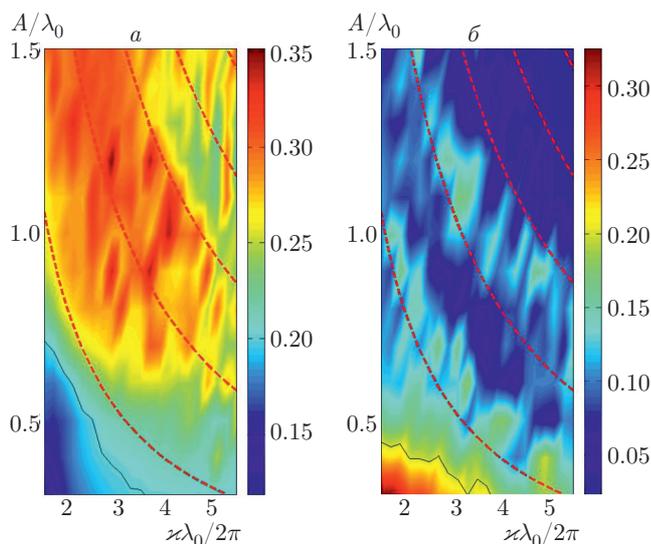
Зафиксировав параметр формы, мы существенно упростим задачу, поскольку теперь выбор структуры поглощающей поверхности ограничивается лишь двумя параметрами: амплитудой модуляции  $A$  и волновым числом модуляции  $\kappa$ . На рис. 6 приведены зависимости  $R(A/\lambda_0, \kappa\lambda_0/2\pi)$ , вычисленная для  $\lambda = \lambda_0 = 0.6$  мкм,  $P = -1.2$  и двух ориентаций  $\theta = 0, \pi/2$ . Результаты расчетов показывают, что рост как амплитуды  $A$ , так и волнового числа модуляции  $\kappa$  одинаковым образом влияет на коэффициент отражения, увеличивая его в среднем для случая  $\theta = 0$  (а) и уменьшая для ориентации  $\theta = \pi/2$  (б). Анализ полученных результатов позволяет заключить, что основным параметром, определяющим отражение (по крайней мере, при достаточно сильной модуляции границы), является отношение поперечного (амплитуды модуляции  $A$ ) и продольного ( $L_x = 2\pi/\kappa$ ) масштабов модуляции, т. е. параметр  $g = A\kappa/2\pi$ . Линии уровня функции  $g$  (штриховые на рис. 6) практически ложатся на последовательность максимумов коэффициента отражения для обеих ориентаций оси анизотропии ГС. Таким образом, для пилообразного профиля одинаковый коэффициент отражения наблюда-



**Рис. 7.** (В цвете онлайн) Коэффициент отражения от профилированной границы с параметром формы  $P = -1.2$  как функция параметров  $\kappa\lambda_0/2\pi$  и  $\lambda$ . Данные усреднены по углам падения  $\phi_{inc} = 0 : 80^\circ$ . Угол поворота осей анизотропии  $\theta = 0$  (а),  $\pi/2$  (б), амплитуда модуляции  $A = 0.5\lambda_0 = 0.3$  мкм. Контур отвечает значению  $\langle R \rangle = 0.2$

ется как при относительно длинноволновой модуляции с большой амплитудой, так и при слабой, но мелкомасштабной модуляции.

Оптимальный поглотитель должен быть широкополосным, т. е. должен, кроме прочего, обеспечивать минимум отраженной мощности при падении излучения в широком диапазоне длин волн, где диэлектрическая проницаемость металла (здесь серебра) обладает заметной дисперсией. Частотно-зависимый характер коэффициента отражения иллюстрируется рис. 7, где приведены результаты вычисления  $R(\lambda, \kappa\lambda_0/2\pi)$  при фиксированной амплитуде модуляции  $A = 0.5\lambda_0 = 0.3$  мкм. Поэтому при выборе оптимальных параметров границы имеет смысл сравнивать коэффициенты отражения, усредненные не только по углам падения  $\phi_{inc}$ , но также и по длинам волн  $\lambda$ . Данные, полученные при усреднении коэффициента отражения по углам  $\phi_{inc} = 0 : 80^\circ$  и длинам волн  $\lambda = 0.45 : 0.8$  мкм (в этом диапазоне  $\lambda$  выполняются условия гиперболичности среды, т. е.  $\text{Re}\epsilon_{\parallel} \text{Re}\epsilon_{\perp} < 0$  для компонент эффективного тензора диэлектрической проницаемости, вычисленных по формулам (3)), приведены на рис. 8. Штриховыми линиями отмечены на плоскости параметров ( $\kappa\lambda_0/2\pi, A/\lambda_0$ ) линии уровня функции  $A\kappa$ , и можно заметить, что тенденция зависимости коэффициента отражения от произведения  $A\kappa$  сохраняется (см. рис. 6) и после усреднения по длинам волн.



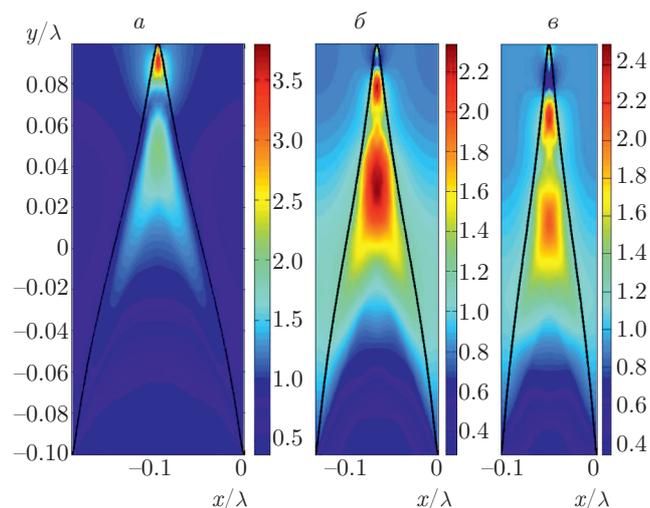
**Рис. 8.** (В цвете онлайн) Коэффициент отражения от профилированной границы с параметром формы  $P = -1.2$  как функция параметров  $x\lambda_0/2\pi$  и  $A/\lambda_0$  ( $\lambda_0 = 0.6$  мкм). Данные усреднены по углам падения  $\phi_{inc} = 0 : 80^\circ$  и длинам волн  $\lambda = 0.45 : 0.8$  мкм. Угол поворота осей анизотропии  $\theta = 0$  (а),  $\pi/2$  (б). Контур отвечает значению  $\langle R \rangle = 0.2$ . Штриховые линии отвечают постоянным значениям произведения  $A\kappa$

Результаты расчетов показывают, что минимум отражения обеспечивает ориентация оси анизотропии ГС с  $\theta = \pi/2$ , причем одинаковый эффект достигается как для крупномасштабной модуляции поверхности с большой амплитудой, так и для мелкомасштабной модуляции с малой амплитудой.

Интересный эффект имеет место для угла поворота осей анизотропии  $\theta = \pi/2$  при рассеянии падающего излучения на пилообразном профиле. При достаточно узких зубцах «пилы» поле локализуется в ГС и представляет собой последовательность нескольких максимумов, расположенных вдоль оси клина, причем расстояние между максимумами и их ширина растут при удалении от вершины клина. Характерные распределения поля приведены на рис. 9. Эти «горячие точки» имеют субволновой характерный масштаб и напоминают распределения поля, полученные в численном эксперименте [16], где также указывалось на субволновую локализацию и эффективное поглощение излучения в малом объеме.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод расчета полей, рассеянных профилированной границей, разделяющей



**Рис. 9.** (В цвете онлайн) Распределение модуля магнитного поля  $|H(x, y)|$  (показан один период структуры) при нормальном падении плоской волны  $H^{inc} = \exp(-ik_0y)$  на периодически модулированную границу гиперболической среды. Амплитуда модуляции  $A = 0.2\lambda_0$ , параметр  $P$ , контролирующей форму модуляции,  $P = -1.2$ , волновое число модуляции  $\kappa = 5 \cdot 2\pi/\lambda_0$  (а),  $7 \cdot 2\pi/\lambda_0$  (б),  $9 \cdot 2\pi/\lambda_0$  (в). Угол поворота осей анизотропии  $\theta = \pi/2$ . Коэффициент отражения для этих вариантов 0.01 (а), 0.043 (б), 0.009 (в)

однородные изотропную и анизотропную гиперболическую среды для случая, когда профиль границы является произвольной периодической функцией координаты вдоль границы. Естественное обобщение второго тождества Грина (см. Приложение) позволило рассмотреть нетривиальный случай, когда одна из сред представляет собой среду гиперболического типа, характеризующуюся условием  $\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} < 0$ . В этом случае перенормировка координат превращает уравнение гиперболического типа в (эллиптическое) уравнение Гельмгольца, записанное, однако, в комплексных пространственных переменных. Метод применим и в поглощающей/активной среде, когда сами компоненты диэлектрического тензора являются комплексными величинами.

С помощью развитого метода численно исследованы особенности рассеяния падающего излучения слоем ГС с периодически профилированной границей, в частности, влияние формы, продольного и поперечного характерного масштаба неоднородности профиля на коэффициент отражения. Численное моделирование показало, что достаточно мелкомасштабное профилирование границы приводит к уменьшению отражения по сравнению с плоской границей практически для

всех рассмотренных форм профиля (при изменении управляющего параметра форма профиля меняется от почти пилообразной до почти синусоидальной и напоминающей греческую букву  $\Omega$ ). Однако оптимальной формой оказывается пилообразная, и чем сильнее форма профиля отклоняется от пилообразной, тем в среднем бóльшим оказывается коэффициент отражения.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-02-00556), разработка численного метода (Приложение) проводилась при поддержке государственного контракта с Федеральным исследовательским центром Институт прикладной физики Российской академии наук (проект № 0035-2019-0004).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Метод расчета полей при рассеянии плоской волны на периодически модулированной границе гиперболической среды**

Метод основан на использовании второго тождества Грина (Green’s second identity) и сводит задачу рассеяния падающего излучения на границе однородной среды к вычислению поверхностных (для двумерного случая контурных) интегралов от функции Грина и ее производной по нормали к поверхности. Похожая методика применялась в публикации [24] для решения уравнения Гельмгольца в акустике, но в данной работе проведено обобщение, позволяющее рассматривать анизотропную среду гиперболического типа, в которой обычное (эллиптическое) уравнение Гельмгольца фактически становится гиперболическим уравнением.

Второе тождество Грина формулируется следующим образом. Если  $\psi$  и  $\phi$  дважды непрерывно дифференцируемы в области  $U \in R^3$ , тогда

$$\int_U (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dV = \oint_{\partial U} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (4)$$

В рассматриваемом двумерном случае лапласиан  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , интегрирование по объему заменяется на интегрирование по  $x$ -,  $y$ -координатам, а граница области  $\partial U$  представляет собой (параметрически заданную) линию  $x_B(\tau)$ ,  $y_B(\tau)$  (см. (1)).

Возьмем в качестве  $\phi$  рассеянное магнитное поле  $h^{sct}$ , а в качестве  $\psi$  функцию Грина  $G$  двумерной задачи, в которой точка особенности расположена на границе области  $U$ .

Для излучения ТМ-поляризации уравнение Гельмгольца в свободном пространстве имеет вид

$$\Delta h + k_0^2 h = 0, \quad (5)$$

где  $h \equiv h_z$  — (единственная)  $z$ -компонента магнитного поля. Для функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta G + k_0^2 G = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (6)$$

известно аналитическое выражение  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = i/4H_0^1(k_0\rho)$ , где  $H_0^1$  — функция Ханкеля нулевого порядка и  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

Нетрудно заметить, что при таком выборе  $\phi$  и  $\psi$  интеграл в левой части равенства (4) равен нулю, а правая часть задает соотношение между значениями рассеянного магнитного поля  $h^{sct}$  и его производной по нормали  $\partial h^{sct}/\partial n$  в точках на границе  $(x_B(\tau_i), y_B(\tau_i))$ , причем аналогичное соотношение можно записать для каждой  $i$ -й из  $N$  граничных точек, используя соответствующие функции Грина,  $G_{ij} \equiv G(k_0\rho_{ij})$ , где

$$\rho_{ij} = \sqrt{[x_B(\tau_i) - x_B(\tau_j)]^2 + [y_B(\tau_i) - y_B(\tau_j)]^2}.$$

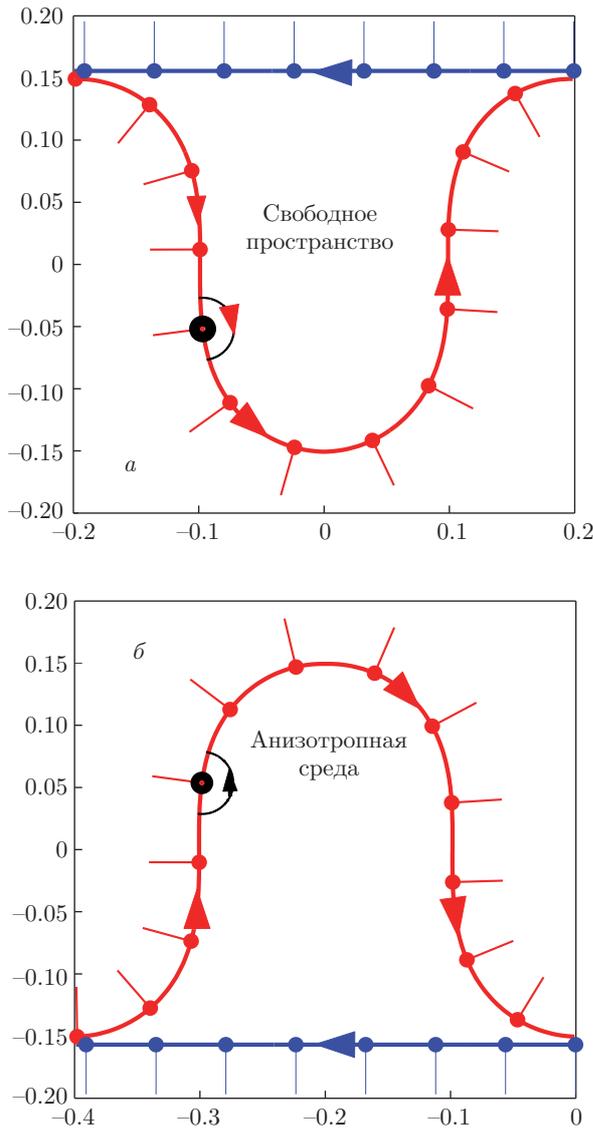
Таким образом, для  $2N$  неизвестных (значения  $h^{sct}$  и  $\partial h^{sct}/\partial n$ ) имеем  $N$  уравнений, полученных из соотношений (4),

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial n_j} h_j^{sct} d\tau_j - G_{ij} \frac{\partial h_j^{sct}}{\partial n_j} d\tau_j = 0, \quad (7)$$

где  $d\tau_j = \sqrt{dx_j^2 + dy_j^2}$  и, как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Недостающие  $N$  уравнений находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе  $x_B(\tau_i)$ ,  $y_B(\tau_i)$ . В простейшем случае, когда падающее излучение рассеивается на идеально отражающем металле, эти условия сводятся к равенству нулю нормальной производной полного (рассеянное плюс падающее) магнитного поля,  $\partial h^{sct}/\partial n = -\partial h^{inc}/\partial n$ .

Если граница  $x_B(\tau)$ ,  $y_B(\tau)$  разделяет свободное пространство и диэлектрик характеризуется проницаемостью  $\epsilon_D$ , то в области диэлектрика волновое число  $k = \sqrt{\epsilon_D}k_0$  и функция Грина перенормируется как  $\tilde{G} = G(k\rho/k_0)$ . Прошедшее магнитное поле  $h^{tr}$  и его нормальная производная на границе удовлетворяет уравнению (4) с этой новой функцией Грина  $\tilde{G}$ , а условия непрерывности полей записываются как

$$h^{tr} = h^{sct} + h^{inc}, \quad \frac{\partial h^{tr}}{\partial n} = -\epsilon_D \left( \frac{\partial h^{sct}}{\partial n} + \frac{\partial h^{inc}}{\partial n} \right)$$



**Рис. 10.** (В цвете онлайн) Геометрия задачи. *а*) Замкнутый контур, используемый для расчета рассеянных полей в свободном пространстве; показано направление нормалей, стрелки указывают направление обхода контура. На синей части контура применяются условия радиационного излучения (см. текст). *б*) То же для области анизотропной среды

(знак « $-$ » здесь учитывает противоположное направление векторов нормали для области свободного пространства и области диэлектрика, см. рис. 10) в каждой из  $N$  граничных точек. Таким образом, мы имеем  $4N$  уравнений для  $4N$  неизвестных, что единственным образом определяет решение.

Следует отметить, что при вычислении коэффициентов матричного уравнения (7) (и аналогичного уравнения для поля и его нормальной производной в области диэлектрика) возникает проблема

сингулярности функции Грина  $G_{ii}$  и ее производной  $\partial G_{ii}/\partial n_i$ . Очевидно, что требуется более точное вычисление диагональных коэффициентов в уравнении (7). Правильный результат дает сдвиг контура интегрирования таким образом, чтобы точка особенности оставалась вне области  $U$ , как это иллюстрируется на рис. 10. Соответственно, интеграл вычисляется вдоль верхней полуокружности для полей в области свободного пространства и вдоль нижней полуокружности для полей в диэлектрике (см. рис. 10).

Задача усложняется в случае, когда рассеяние происходит на границе среды с тензорной проницаемостью  $\hat{\epsilon}$ , например, метаматериала. Уравнение Гельмгольца для магнитного поля в такой среде имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon_{YY}} \frac{\partial^2 h^{tr}}{\partial X^2} + \frac{1}{\epsilon_{XX}} \frac{\partial^2 h^{tr}}{\partial Y^2} + k_0^2 h^{tr} = 0, \quad (8)$$

где  $X$  и  $Y$  — главные оси, в которых диэлектрический тензор диагонален (в общем случае оси  $X, Y$  повернуты на некоторый угол  $\theta$  относительно осей  $x, y$ , определяющих ориентацию границы:  $X = x \cos \theta + y \sin \theta$ ,  $Y = y \cos \theta - x \sin \theta$ ),  $\epsilon_{XX} = \epsilon_{\perp}$ ,  $\epsilon_{YY} = \epsilon_{\parallel}$ .

Нетрудно заметить, что заменой

$$\xi = \sqrt{\epsilon_{YY}} X, \quad \eta = \sqrt{\epsilon_{XX}} Y \quad (9)$$

уравнение (8) приводится к каноническому виду (5), и функция Грина в этих переменных по-прежнему выражается через функцию Ханкеля нулевого порядка,

$$\tilde{G} = \frac{i}{4H_0^1(k_0 \tilde{\rho})},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} = \\ &= \sqrt{\epsilon_{YY}(X - X_0)^2 + \epsilon_{XX}(Y - Y_0)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому естественным для решения задачи представляется следующий алгоритм: в области расчета, относящейся к анизотропной среде, вводятся по формулам (9) координаты  $\xi, \eta$ , определяются граничные точки  $\xi_B, \eta_B$ , соответствующие реальным граничным точкам  $x_B, y_B$  в свободном пространстве, и векторы нормали  $\tilde{\mathbf{n}}$  ( $\tilde{n}_{\xi} = d\eta/d\tilde{\tau}$ ,  $\tilde{n}_{\eta} = -d\xi/d\tilde{\tau}$ , где  $d\tilde{\tau} = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ ) в этом нормированном пространстве. Интегрирование уравнений (4) в пространстве  $\xi, \eta$  дает, как и раньше,  $N$  уравнений, связывающих  $h^{tr}$  и  $\partial h^{tr}/\partial \tilde{n} = \tilde{n}_{\xi} \partial h^{tr}/\partial \xi + \tilde{n}_{\eta} \partial h^{tr}/\partial \eta$ . Заключительным шагом является использование условий непрерывности магнитного и

тангенциального электрического поля на границе между областями.

Нас интересует случай, когда диэлектрическая среда является гиперболической средой, в которой продольная и поперечная компоненты диэлектрического тензора имеют разные знаки (для определенности будем считать, что  $\epsilon_{XX} > 0$ ,  $\epsilon_{YY} < 0$ ). При этих условиях нормированные координаты  $\xi$  оказываются мнимыми, понятие вектора нормали как вектора единичной длины теряет смысл. Что более важно, эффективное расстояние до источника в функции Грина  $\tilde{\rho}$  стремится к нулю в направлении резонансного конуса (при  $(X - X_0)/(Y - Y_0) = \sqrt{-\epsilon_{XX}/\epsilon_{YY}}$ ), а поле в этом направлении бесконечно велико. Ситуацию, как всегда, спасает учет затухания в среде, однако при этом комплексными становятся как  $\xi$ , так и  $\eta$ , и интегрирование уравнения (4) приходится проводить в комплексном пространстве.

Однако можно свести вычисление коэффициентов матричного уравнения (7) к интегрированию в обычном пространстве. Действительно, учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}'_{ij}}{\partial \tilde{n}_j} d\tilde{\tau}_j &= \frac{\tilde{G}'_{ij} k_0}{\tilde{\rho}_{ij}} [(\xi_j - \xi_i) d\eta_j - (\eta_j - \eta_i) d\xi_j] = \\ &= \sqrt{\epsilon_{XX}\epsilon_{YY}} \frac{\tilde{G}'_{ij} k_0}{\tilde{\rho}_{ij}} [(x_j - x_i) dy_j - (y_j - y_i) dx_j] = \\ &= \sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}} \frac{\tilde{G}'_{ij} k_0}{\tilde{\rho}_{ij}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_j d\tau_j, \end{aligned}$$

где  $G'$  означает производную от функции Грина по аргументу. Аналогично можно записать выражение для величины

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j^{tr}}{\partial \tilde{n}_j} d\tilde{\tau}_j &= \frac{\partial h_j^{tr}}{\partial \xi} d\eta_j - \frac{\partial h_j^{tr}}{\partial \eta} d\xi_j = \\ &= \sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}} \left( \frac{\partial h_j^{tr}}{\partial X} dY_j \frac{1}{\epsilon_{YY}} - \frac{\partial h_j^{tr}}{\partial Y} dX_j \frac{1}{\epsilon_{XX}} \right) = \\ &= \sqrt{\epsilon_{XX}\epsilon_{YY}} ik_0 (E_X^{tr} dX_j + E_Y^{tr} dY_j) = \\ &= \sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}} ik_0 E_{\tau}^{tr} d\tau_j, \end{aligned}$$

где  $E_{\tau}^{tr}$  — тангенциальная компонента электрического поля в прошедшей волне в граничных точках.

Таким образом, уравнение (7) модифицируется для случая среды с тензорной диэлектрической проницаемостью следующим образом:

$$\sum_j \left[ \frac{\tilde{G}'_{ij} k_0}{\tilde{\rho}_{ij}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_j h_j^{tr} d\tau_j - ik_0 \tilde{G}_{ij} (E_{\tau}^{tr})_j d\tau_j \right] = 0, \quad (10)$$

и аналогичное соотношение записывается для рассеянного поля в свободном пространстве:

$$\sum_j \left[ \frac{G'_{ij} k_0}{\rho_{ij}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_j h_j^{sct} d\tau_j - ik_0 G_{ij} (E_{\tau}^{sct})_j d\tau_j \right] = 0. \quad (11)$$

Условие непрерывности тангенциальных электрического и магнитного полей приводит к равенствам

$$h_j^{tr} = h_j^{sct} + h_j^{inc}, \quad (E_{\tau}^{tr})_j = (E_{\tau}^{sct})_j + (E_{\tau}^{inc})_j. \quad (12)$$

Описанная выше постановка задачи непосредственно применима для расчета рассеяния плоской волны на диэлектрическом/метаматериальном объекте конечных размеров. В этом случае граница двух сред является замкнутым контуром  $\partial U$  в формуле (4) для ГС, а бесконечно удаленная граница свободного пространства не влияет на процесс рассеяния. Если же мы рассматриваем рассеяние падающего излучения на периодическом профиле и хотим ограничиться численными расчетами полей в пределах элементарной ячейки, имея в виду применение в дальнейшем теоремы Блоха, то замкнутый контур  $\partial U$  в формуле (4), ограничивающий область свободного пространства, необходимо содержит участки, которые не граничат с областью ГС и для которых поэтому неприменимо граничное условие (12). Соответствующие участки имеются также на замкнутом контуре, ограничивающем область ГС (см. рис. 10). На этих участках границы следует использовать условия радиационного излучения (условия излучения Зоммерфельда), которые связывают между собой тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей (для свободного пространства магнитное поле и его нормальную производную). Учет этой связи позволяет полностью рассчитать задачу и найти распределение тангенциальных компонент полей на границе  $\partial U$  и тем самым коэффициент отражения.

Если же кроме коэффициента отражения нас интересует распределение полей внутри этого замкнутого контура, то необходимо найти амплитуды эффективных источников  $V_i$ , которые мы должны расположить лишь на части контура  $\partial U$ , разделяющей свободное пространство и ГС и которые должны создавать на этой части контура рассчитанное выше распределение полей. Математически задача сводится к решению матричного уравнения

$$V_i G_{ij} = h_j^{sct}$$

и аналогично

$$\tilde{V}_i \tilde{G}_{ij} = h_j^{tr},$$

где  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  принадлежат граничной части контура  $\partial U$ . Соответственно поля в части свободного пространства и ГС, ограниченных контурами  $\partial U$  и  $\tilde{\partial U}$  вычисляются как

$$h(x, y) = V_i G \left( k_0 \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right) + h^{inc}(x, y),$$

$$\tilde{h}(X, Y) = \tilde{V}_i G \left( k_0 \sqrt{\varepsilon_{YY}(X-X_i)^2 + \varepsilon_{XX}(Y-Y_i)^2} \right),$$

где  $h^{inc}(x, y)$  — магнитное поле в падающей плоской волне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Poddubny, I. Iorsh, P. Belov, and Y. Kivshar, *Nat. Photon.* **7**, 948 (2013).
2. D. Lu and Z. Liu, *Nat. Commun.* **3**, 1205 (2012).
3. I. V. Iorsh, I. S. Mukhin, I. V. Shadrivov, P. A. Belov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. B* **87**, 075416 (2013).
4. Y. Guo, C. L. Cortes, S. Molesky, and Z. Jacob, *Appl. Phys. Lett.* **101**, 131106 (2012).
5. S. M. Hashemi and I. S. Nefedov, *Phys. Rev. B* **86**, 195411 (2012).
6. I. S. Nefedov, C. A. Valagiannopoulos, S. M. Hashemi, and E. I. Nefedov, *Sci. Rep.* **3**, 2662 (2013).
7. I. S. Nefedov, C. A. Valagiannopoulos, and L. A. Melnikov, *J. Opt.* **15**, 114003 (2013).
8. J. Yao, Z. Liu, Y. Liu et al., *Science* **321**, 930 (2008).
9. A. J. Hoffman, L. Alekseyev, S. S. Howard, K. J. Franz et al., *Nat. Mater.* **6**, 946 (2007).
10. Z. Jacob, L. V. Alekseyev, and E. Narimanov, *Opt. Express* **14**, 8247 (2006).
11. J. Sun, M. Shalaev, and N. Litchinitser, *Nat. Commun.* **6**, 7201 (2015).
12. T. U. Tumkur, L. Gu, J. K. Kitur, E. E. Narimanov, and M. A. Noginov, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 161103 (2012).
13. T. U. Tumkur, J. K. Kitur, B. Chu et al., *Appl. Phys. Lett.* **101**, 091105 (2012).
14. Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang, *Science* **315**, 1686 (2007).
15. K. Mantel, D. Bachstein, and U. Peschel, *Opt. Lett.* **36**, 199 (2011).
16. Y. Cui, K. H. Fung, J. Xu et al., *Nano Lett.* **12**, 1443 (2012).
17. H. Hu, D. Ji, X. Zeng, K. Liu, and Q. Gan, *Sci. Rep.* **3**, 1249 (2013).
18. Z. Jacob, J.-Y. Kim, G. V. Naik et al., *Appl. Phys. B* **100**, 215 (2010).
19. P. Shekhar, J. Atkinson, and Z. Jacob, *Nano Convergence* **1**, 1 (2014).
20. N. A. Zharova, A. A. Zharov, and A. A. Zharov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **33**, 594 (2016).
21. N. A. Zharova, A. A. Zharov, and A. A. Zharov Jr., *Adv. Cond. Mat. Phys.* **2018**, 4578148 (2018); <https://doi.org/10.1155/2018/4578148>.
22. L. Ferrari, C. Wu, D. Lepage, X. Zhang, and Z. Liu, *Prog. Quant. Electron.* **40**, 1 (2015).
23. [www.refractiveindex.info](http://www.refractiveindex.info).
24. Q. Sun, E. Klaseboer et al., *Roy. Soc. Open Sci.* **2**, 140520 (2015).