

# ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИКИ С ПРИЛИВНЫМ ЗАРЯДОМ

С. О. Алексеев<sup>a,b\*</sup>, Б. Н. Латош<sup>c,d</sup>, В. А. Прокопов<sup>a,b\*\*</sup>, Е. Д. Емцова<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия

<sup>b</sup> Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия

<sup>c</sup> Department of Physics and Astronomy, University of Sussex  
BN1 9QH, Brighton, United Kingdom

<sup>d</sup> Государственный университет «Дубна»  
141982, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2018 г.,  
после переработки 10 декабря 2018 г.  
Принята к публикации 11 декабря 2018 г.

Предложено простое феноменологическое расширение метрики черной дыры с приливным зарядом, так как данные о черной дыре Sgr A\*, полученные из наблюдений, можно интерпретировать феноменологическим обобщением пространства-времени Рейснера – Нордстрема. Тем не менее метрика Рейснера – Нордстрема способна учесть лишь ведущий вклад от возможных гравитационных эффектов, лежащих за пределами ОТО. Предложенная нами метрика позволяет учесть более тонкие гравитационные эффекты. В работе обсуждаются физические проявления предлагаемой метрики: размер тени, отбрасываемой черной дырой, и радиус последней устойчивой орбиты.

DOI: 10.1134/S0044451019050080

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности (ОТО), являясь общепризнанной теорией гравитации, предоставляет корректное описание многих гравитационных явлений [1, 2]. В то же время существование феноменов темной материи и темной энергии дает основание полагать, что ОТО корректно описывает гравитационные явления лишь на малых пространственных масштабах [3–5]. Базовые физические принципы, лежащие в основе модификации ОТО, в настоящее время широко обсуждаются в литературе [6, 7]. Спектр таких теорий включает разнообразные модели  $f(R)$  гравитации, скалярно-тензорные построения, включая модели Хорндески [8–10].

Модель модифицированной гравитации стоит рассматривать как альтернативу ОТО в случае лучшего описания ею гравитационных явлений, хотя бы на одном пространственном масштабе. Вследствие этого, особый интерес представляют модели, удовлетворяющие гравитационным тестам в Солнечной системе, а именно, модели, пост-ньютоновские (а также пост-кеплеровские) параметры которых согласуются с эмпирическими данными [1, 7, 11].

Далее, в рамках ОТО невращающаяся черная дыра без электрического заряда описывается метрикой Шварцшильда. В то же время данные наблюдений черной дыры Sgr A\* [12–14] лучше согласуются с метрикой Рейснера – Нордстрема при ненулевом заряде [15]. Реальная («астрофизическая») черная дыра с ненулевым электрическим зарядом неустойчива. Однако в модифицированных моделях гравитации, а именно, в моделях класса Рандалл – Сандрум, метрика, аналогичная метрике Рейснера – Нордстрема, является точным решением [16]. Это решение описывает электрически нейт-

\* E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

\*\* E-mail: slaprok777@gmail.com

ральную черную дыру, характеризующуюся дополнительным параметром — приливным зарядом, возникающим из-за выхода гравитационного поля в пространство дополнительных измерений. Так как масса такой черной дыры на бране не определяется дополнительными измерениями, она совпадает с массой черной дыры Шварцшильда [17]. Заметим, что приливный заряд может иметь и противоположный знак по отношению к заряду метрики Рейснера–Нордстрема. Это свойство позволяет отличить электрический заряд от приливного. В данной работе мы будем следовать терминологии работы [15] и называть метрику [16] метрикой с приливным зарядом.

Так как данные наблюдений Sgr A\* согласуются с метрикой Рейснера–Нордстрема, есть основания считать, что внешнее гравитационное поле этой черной дыры можно описать пространством-временем более общим, чем упомянутая метрика Рейснера–Нордстрема. В нашей работе мы предлагаем обобщение метрики Рейснера–Нордстрема, способное учесть влияние более тонких гравитационных эффектов, лежащих за пределами применимости ОТО и спадающих быстрее чем  $r^{-2}$ . Эти эффекты будут наблюдаемы в ближайшем будущем благодаря проектам, направленным на изучение свойств теней черных дыр [18, 19]. Таким образом, цель настоящей работы состоит в установлении связи между наблюдательными данными и новым параметром метрики, точнее говоря, в изучении влияния эффектов модифицированной гравитации на радиус последней устойчивой орбиты и тень от черной дыры.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы предлагаем модифицированную метрику и обсуждаем ее свойства. В разд. 3 мы изучаем свойства тени, отбрасываемой таким объектом. Раздел 4 посвящен обсуждению свойств последней устойчивой орбиты. В разд. 5 приведены выводы, полученные в работе.

## 2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МЕТРИКА

Простейшая статическая, асимптотически плоская метрика со сферической симметрией имеет следующий вид (в планковской системе единиц  $G = c = \hbar = 1$ ):

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

Вид функции  $\Delta$  определяется физическими симметриями задачи. В случае метрики Рейснера–Норд-

стрема эта функция задана следующим выражением:

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_{electric}^2}{r^2}. \quad (2)$$

В случае черной дыры с приливным зарядом [16] функция имеет схожую форму:

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q_{tidal}}{r^2}, \quad (3)$$

где величина  $Q_{tidal}$  может быть как отрицательной, так и положительной. Обе эти метрики могут описать все новые эффекты модифицированной гравитации, спадающие быстрее чем  $r^{-2}$ . Следуя этой логике, мы можем попробовать учесть влияние более тонких эффектов, введя новый член, убывающий как  $r^{-3}$ . Мы рассмотрим его в виде

$$\Delta(\hat{r}) = 1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}. \quad (4)$$

Данное выражение записано в единицах длины  $\hat{r} = r/M$ , параметры  $q$  и  $\alpha$  безразмерны. Заметим, что обсуждаемую метрику можно рассматривать как разложение любой статической сферически-симметричной метрики в произвольной модели гравитации в ряд по малому параметру  $\hat{r}^{-1} = M/r$ . Таким образом, коэффициенты этой метрики можно напрямую связать с параметрами метрики в произвольной модифицированной модели гравитации. Также важно отметить, что метрика (4) не является точным решением какой-то конкретной модели гравитации, мы используем ее в качестве анзаца, пригодного для описания эмпирических данных. При этом будем рассматривать эту метрику в качестве точного решения, что позволит связать ее параметры ( $M$ ,  $q$  и  $\alpha$ ) с наблюдательными данными, такими как размер тени, отбрасываемой объектом. Таким образом, метрику (4) можно рассматривать как простейшую модель, позволяющую установить связь между параметрами решения в рамках произвольной модели гравитации и эмпирическими данными.

Для использования предложенной техники необходимо прежде всего установить область применимости обсуждаемой метрики. Так как эта метрика — ряд по малым  $\hat{r}^{-1}$ , ее нельзя применять в области малых  $\hat{r}$ . Метрика имеет три параметра, определяющих область ее применимости. Установить эту границу применимости можно, вычислив положение горизонта событий, так как его положение определяет границу области, где гравитация входит в режим сильного поля. Радиус горизонта событий получим из уравнения  $\Delta(\hat{r}_h) = 0$ . Функция (4) — многочлен

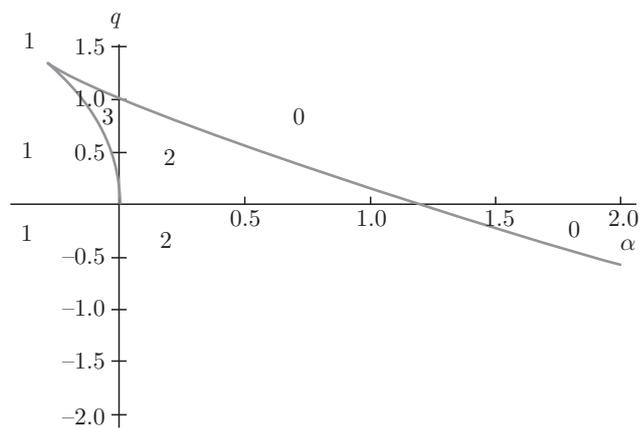


Рис. 1. Конфигурационное пространство метрики (4), разделенное на области с разным числом горизонтов, соответствующим приведенным на рисунке цифрам

третьего порядка, поэтому уравнение  $\Delta(\hat{r}) = 0$  имеет три корня, следовательно, описываемый метрикой объект может включать до трех горизонтов. На рис. 1 приведена фазовая диаграмма, показывающая число горизонтов, которые допускает метрика. Верхняя кривая задана уравнением

$$\alpha = \frac{2}{27} (\sqrt{4 - 3q} - 1) (\sqrt{4 - 3q} + 2)^2. \quad (5)$$

Нижняя кривая определена уравнением

$$\alpha = -\frac{2}{27} (\sqrt{4 - 3q} + 1) (\sqrt{4 - 3q} - 2)^2. \quad (6)$$

В отличие от пространства-времени Рейснера–Нордстрема, рассматриваемая метрика может генерировать дополнительный внешний горизонт из-за дополнительного корня функции (4). Будь эта метрика точным решением, внешний наблюдатель зафиксировал бы конечный сдвиг радиуса горизонта. В дальнейшем будем называть это явление сдвигом горизонта. Приведенные на рис. 2 кривые 2–6 показывают, как метрика (4) формирует новый внешний горизонт. Конфигурации, соответствующие сдвигу горизонта, находятся на кривой 5. Графики, показывающие критические кривые, приведены на рис. 1 и 4. В то же время условие исчезновения горизонта (см. рис. 1) требует обращения в нуль функции  $\Delta$  и ее первой производной:

$$\Delta(\hat{r}) = 0, \quad \frac{d\Delta(\hat{r})}{d\hat{r}} = 0. \quad (7)$$

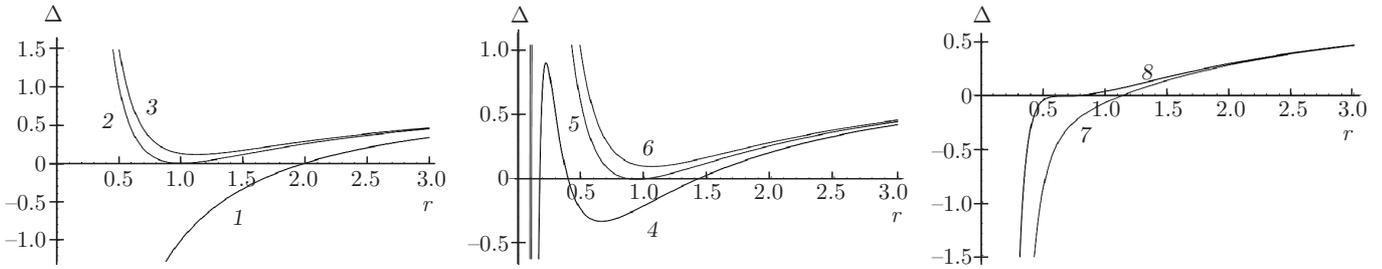
Следует еще раз подчеркнуть важность учета области применимости модели. Мы рассматриваем

это обобщение метрики Рейснера–Нордстрема как разложение по малому параметру  $\hat{r}^{-1}$ , применимое для описания эмпирических данных. Другими словами, метрика применяется для описания внешнего гравитационного поля черной дыры. При этом метрика не всегда неприменима для описания и внутренней структуры черной дыры. Так как внешний горизонт отмечает границу, на которой гравитация входит в режим сильного поля, метрика (4) не всегда может быть согласованно применена в режиме сильного поля. Если же метрика не имеет горизонта, то единственное естественное условие, определяющее ее применимость, состоит в малости параметров  $M \ll r, q \ll 1, \alpha \ll 1$ . Благодаря этому, вклад области пространства-времени под горизонтом не важен для изучения частиц и света вне такового.

### 3. СВОЙСТВА ТЕНИ

Тень черной дыры возникает из-за того, что фотоны, движущиеся вблизи этой черной дыры, захватываются ее гравитационным полем. Гамма-квант, излученный внешним источником, может либо рассеяться на черной дыре и достичь удаленного наблюдателя, либо быть захваченным черной дырой. Удаленный наблюдатель регистрирует, естественно, лишь рассеянные фотоны, из-за чего земные телескопы увидят светлое пятно, образованное ими. На месте фотонов, захваченных черной дырой, образуется темное пятно, называемое тенью черной дыры. Размер и форма тени определяются параметрами черной дыры. Отметим, что расстояние до наблюдателя и его ориентация по отношению к угловому моменту черной дыры также важны. Так как мы рассматриваем метрику, описывающую черную дыру без углового момента, последний фактор для рассматриваемой модели не важен. Далее, применим метод изучения размера черной дыры, не зависящий от расстояния до наблюдателя. Таким образом, главная задача этого раздела — изучить свойства тени объекта, описываемого метрикой (4).

Фотоны на траектории, когда они не способны ни уйти на пространственную бесконечность, ни упасть на черную дыру, образуют так называемую фотонную сферу. Радиус этой сферы определяется процессом формирования тени. В рамках ОТО этот масштаб можно вычислить из метрики Шварцшильда. Заметим, что для этой цели применимы и другие метрики ОТО, например Шварцшильда–де Ситтера. Мы ограничиваемся более простым случаем, так как вклад глобального гравитационно-



**Рис. 2.** Графики функции  $\Delta$  метрики (4) для различных значений  $q$  и  $\alpha$ : 1 —  $\alpha = 0, q = 0$ ; решение Шварцшильда; 2 —  $\alpha = 0, q = 1$ , решение Рейснера–Нордстрема с критическим зарядом; 3 —  $\alpha = 0, q = 9/8$ , «голая сингулярность», описываемая метрикой Рейснера–Нордстрема; 4 —  $\alpha = -0.1, q = 0.89$ , метрика (4) с тремя горизонтами; 5 —  $\alpha = -0.1, q = 1.1$ , метрика (4) с двумя горизонтами; 6 —  $\alpha = -0.1, q = 1.2$ , метрика (4) с одним компактным горизонтом; 7 —  $\alpha = -0.4, q = 1.33$ , метрика (4) с одним горизонтом; 8 —  $\alpha = -0.296, q = 1.33$ , конечная точка кривой исчезновения горизонта

го поля, генерируемого крупномасштабной структурой пространства-времени на поле черной дыры, в рамках данной локальной задачи не существует. Для метрики Шварцшильда радиус фотонной сферы составляет  $3/2$  от радиуса горизонта. Метрика (4) использует малый параметр  $M/r$  для описания поправок к пространству-времени Рейснера–Нордстрема. В рамках ОТО этот параметр равен  $2/3$ , что указывает на то, что процесс формирования тени черной дыры лежит на границе применимости используемой метрики. Однако, как мы покажем ниже, новые параметры  $q$  и  $\alpha$  влияют на радиус фотонной сферы, вследствие чего можно утверждать, что новые гравитационные эффекты меняют радиус фотонной сферы, что улучшает сходимость метрики.

Для вычисления размера тени необходимо решить задачу рассеяния света на массивном объекте, точнее говоря, найти сечение гравитационного захвата фотона черной дырой. Для этого удобно использовать прицельный параметр  $D$  фотона (измеряемый в единицах массы черной дыры) в качестве динамической переменной. Фотоны с малыми параметрами  $D$  захватываются черной дырой и не достигают удаленного наблюдателя, в то время как фотоны с большими значениями  $D$  избегают гравитационного захвата и достигают пространственной бесконечности. Размер тени определяется критическим значением  $D_c$  прицельного параметра, формирующим фотонную сферу. Чаще всего под размером тени черной дыры понимается угловой размер темного пятна, отбрасываемого черной дырой. В таком случае, как было отмечено ранее, размер тени будет зависеть от расстояния до наблюдателя. В результате этого, для того чтобы вычислить размер черной дыры, необходимо знать расстояние до нее. Чтобы

обойти это ограничение и получить описание тени, рассмотрим линейный размер тени, а именно, критическое значение прицельного расстояния. При таком подходе угловой размер тени можно установить, разделив ее линейный размер на расстояние до черной дыры. Стоит также отметить, что метод применим лишь в асимптотически плоских пространствах. Такой подход вполне приемлем, так как при имеющемся уровне точности современных инструментов можно изучать лишь ближайшие черные дыры. Таким образом, несмотря на то, что в самом общем случае ускоренное расширение Вселенной должно быть принято во внимание, на практическом уровне его влияние на объекты, доступные для изучения, будет пренебрежимо мало.

Случай  $\alpha = 0$  соответствует решению Рейснера–Нордстрема и был изучен ранее [15]. При этом было установлено, что при  $q > 9/8$  метрика не имеет тени. Точнее говоря, было показано, что размер тени не имеет гладкой зависимости от  $q$ . Критическое значение прицельного параметра  $D$  убывает с ростом  $q$  до точки  $q = 9/8$ , где  $D_c \approx 3.674$ . В этой точке размер тени испытывает конечный сдвиг до нуля и тень исчезает.

Далее заметим, что метрика Рейснера–Нордстрема с  $q > 1$  описывает голую сингулярность. Подобная метрика служит решением одной из моделей класса Рандалл–Сандрум [16], вследствие чего ее можно рассматривать как реальный объект без горизонта, но с ненулевым размером тени. В нашем подходе такая интерпретация некорректна, так как параметр  $q$  не является малым. Мы интерпретируем данный результат как то, что метрика (4) может описывать лишь объекты с  $D \leq 4$ .

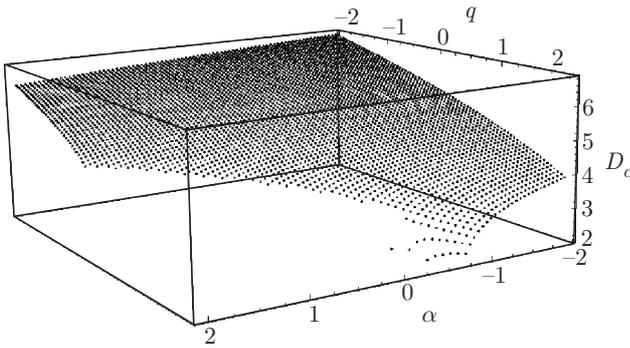


Рис. 3. Зависимость критического прицельного параметра  $D_c$  от  $q$  и  $\alpha$

Уравнение геодезической для фотона имеет следующий вид:

$$\left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right) \frac{L^2}{\hat{r}^2} = E^2, \quad (8)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{\hat{r}^2}, \quad (9)$$

где  $E$  — энергия фотона,  $L$  — его угловой момент, а  $\tau$  — аффинный параметр. Будем использовать угловую координату  $\phi$  фотона в качестве параметра, описывающего его траекторию, что приведет к следующему виду уравнений движения:

$$u(r) = \left(\frac{d\hat{r}}{d\phi}\right)^2 = \frac{\hat{r}^4}{D^2} - \hat{r}^2 \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right), \quad (10)$$

где  $D = L/E$  — прицельный параметр. Величина  $u = (d\hat{r}/d\phi)^2$  всегда положительна, поэтому движение возможно лишь в областях, где правая часть уравнения (10) положительна.

Радиус фотонной сферы определяется уравнениями

$$u(r) = 0, \quad \frac{du(r)}{dr} = 0. \quad (11)$$

Система (11) решена нами численно, полученные графики критического прицельного параметра приведены на рис. 3.

Для некоторых значений параметров исследуемой метрики система (11) не имеет решения. В полной аналогии с метрикой Рейснера – Нордстрема отсутствие решений указывает на отсутствие тени у такого объекта.

Конфигурации с тенью и без нее разделены кривой, определяемой уравнениями

$$u(r) = 0, \quad \frac{du(r)}{dr} = 0, \quad \frac{d^2u(r)}{dr^2} = 0. \quad (12)$$

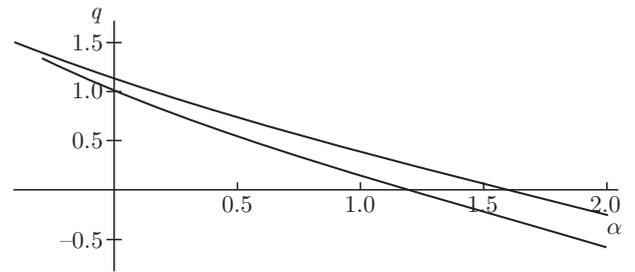


Рис. 4. Критические кривые, соответствующие конечному сдвигу радиуса горизонта и размера тени. Верхняя кривая — сдвиг размера тени, нижняя — сдвиг радиуса горизонта

Решение этой системы также было получено численно и приведено на рис. 4.

Следуя стандартному подходу [20], мы установили критическое значение прицельного параметра  $D_c = D_c(q, \alpha)$ . В случае метрики Шварцшильда ( $\alpha = q = 0$ ) это критическое значение вычисляется точно:  $D_c = 3\sqrt{3}$  [20]. При  $\alpha = 0$  задача сводится к случаю Рейснера – Нордстрема [15].

Как уже отмечалось, метрика может спровоцировать конечный сдвиг радиуса горизонта. Схожее явление происходит и с размером тени, который может испытать конечный сдвиг при малом изменении параметров метрики. График поведения соответствующих критических кривых приведен на рис. 4. Отметим, что кривые на рис. 4 не пересекаются и могут быть продолжены бесконечно далеко лишь в одном направлении.

Для положительных значений  $\alpha$  тень исчезает, когда объект теряет горизонт. При  $-0.296 < \alpha < 0$  размер тени испытывает конечный сдвиг, но объект сохраняет горизонт. Конфигурации с  $\alpha < -0.296$  имеют только один горизонт.

Важно подчеркнуть, что между размером тени и параметрами метрики  $q$  и  $\alpha$  нет взаимно однозначного соответствия. Вследствие этого, невозможно вычислить значения  $q$  и  $\alpha$  при помощи только одного источника данных.

Гравитационное линзирование дает дополнительную информацию о параметрах метрики, так как в этом случае две конфигурации с одинаковым размером тени для удаленного наблюдателя могут проявляться по-разному. Для описания линзирования необходимо решить систему (10). Нами численно получены зависимости угла отклонения света и положения удаленной звезды на плоскости изображения от параметров метрики  $(q, \alpha)$ . Эти результаты показывают, что две черные дыры с одним и тем же размером тени могут иметь различные па-

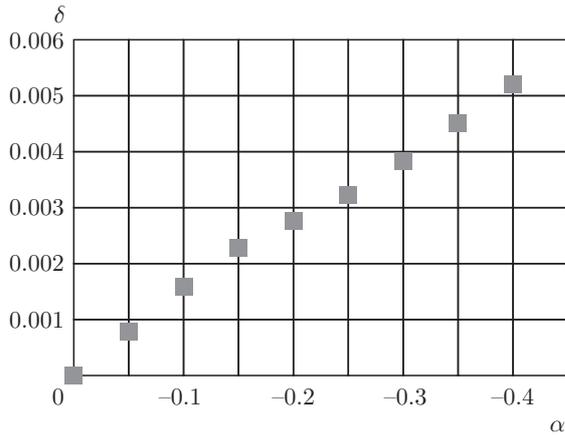


Рис. 5. Параметр отклонения  $\delta = |D(\alpha) - D(0)|/D(0)$  для черной дыры с тенью, соответствующей  $D_{sh} = 3\sqrt{3}$

параметры  $\alpha$ . Поэтому и возможно параметризовать конфигурации с одним и тем же размером тени при помощи параметра  $\alpha$ . Используем конфигурации с  $\alpha = 0$  как начальную точку отчета для того, чтобы показать, как положение  $D$  (прицельный параметр) удаленной звезды на плоскости изображения зависит от  $\alpha$ . На рис. 5 мы приводим зависимость параметра отклонения  $\delta$  для объекта, размер тени которого соответствует прицельному параметру  $D_{sh} = 3\sqrt{3}$ , а угол отклонения света от источника принимаем равным  $\phi = \pi/2$ . Параметр отклонения определен следующим выражением:

$$\delta = \frac{|D(\alpha) - D(0)|}{D(0)}. \tag{13}$$

На рис. 5 видно, что поправка к критическому прицельному параметру, связанная с ненулевым значением  $\alpha$ , на три порядка меньше значения самого параметра. Таким образом, для того чтобы определить значение  $\alpha$  при помощи гравитационного линзирования, требуется проводить точные измерения.

#### 4. ПОСЛЕДНЯЯ УСТОЙЧИВАЯ ОРБИТА

Радиус последней устойчивой орбиты задает пространственный масштаб орбитального движения. Так как орбитальное движение при меньших радиусах невозможно, он определяет границу внутреннего радиуса аккреционного диска, вследствие чего может быть ограничен при помощи прямых наблюдений. Случай  $\alpha = 0$  соответствует метрике Рейснера–Нордстрема и был изучен в работе [21]. В рамках ОТО радиус последней устойчивой орбиты в три раза больше радиуса горизонта событий,

что дает дополнительное основание считать применение обсуждаемой метрики корректным. Как отмечено выше, мы рассматриваем это обобщение как степенной ряд по малому параметру  $M/r$ . Его значение в рамках ОТО равно  $1/3 \ll 1$ , что указывает на то, что метрика имеет сходимость, достаточную для согласованного описания орбитального движения. Хотя поправки, связанные с новыми гравитационными эффектами, могут изменить радиус последней устойчивой орбиты, необходимо вычислить данный радиус, чтобы судить о их влиянии.

Используем стандартный метод изучения последней устойчивой орбиты [20]. Уравнения движения для пробной частицы с единичной массой имеют следующий вид:

$$\left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + U = E^2, \tag{14}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{\hat{r}^2}, \tag{15}$$

$$U = \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right) \left(1 + \frac{L^2}{\hat{r}^2}\right), \tag{16}$$

где  $E$  — энергия частицы,  $L$  — ее угловой момент, а  $U$  — потенциальная энергия. Движение возможно в области  $E^2 \geq U$ . Орбита круговая, если ее радиус статичен:  $d\hat{r}/d\tau = 0$ , что эквивалентно уравнению  $U(\hat{r}_{circ}, L_{circ}) = E^2$ . Орбита устойчива, если  $U(\hat{r}_{circ}, L_{circ})$  — точка локального минимума. Таким образом, последняя устойчивая орбита находится на точке перегиба потенциальной энергии:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad \frac{d^2U}{dr^2} = 0. \tag{17}$$

Для некоторых значений параметров  $q$  и  $\alpha$  метрика имеет несколько решений уравнения (17). В этом случае мы считаем последней устойчивой орбитой решение с наибольшим радиусом. Связано это с тем, что используемое нами обобщение метрики Рейснера–Нордстрема теряет свойства сходимости при малых  $r$ , и у нас нет основания полагать, что формальные решения (17) с малыми  $r$  лежат в области применимости метрики.

Имеются также экзотические решения:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad L = 0. \tag{18}$$

Эти решения впервые были описаны в работе [21] и соответствуют частице, неподвижно находящейся на некотором расстоянии от черной дыры. В точке,

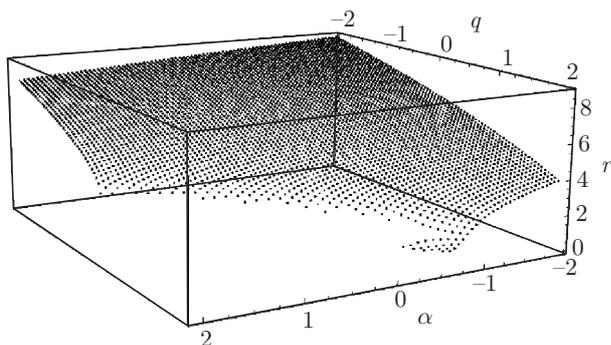


Рис. 6. Радиус последней устойчивой орбиты  $r(q, \alpha)$

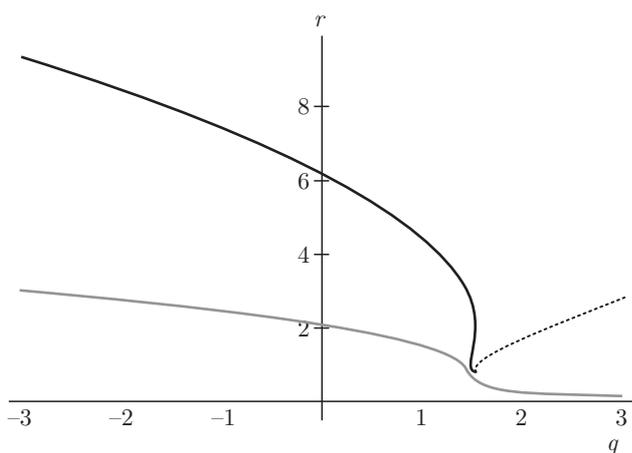


Рис. 7. Радиус последней устойчивой орбиты (верхняя кривая) для  $\alpha = -0.4$ . Нижняя кривая соответствует радиусу горизонта событий. Пунктирная линия соответствует орбитам с нулевым угловым моментом

где находится такая частица, суммарная гравитационная сила, действующая на нее, равна нулю. Такие точки равновесия возможны из-за того, что в функцию (4) входят члены с разными знаками. В работе [21] такие точки были названы орбитами с нулевым угловым моментом. Несмотря на то что такие решения существуют и в исследуемой метрике, мы их не рассматриваем, так как они не влияют на орбитальное движение.

Зависимость радиуса последней устойчивой орбиты от  $q$  и  $\alpha$  приведена на рис. 6. Частный случай зависимости радиуса последней устойчивой орбиты от  $q$  при фиксированном значении  $\alpha = -0.4$  приведен на рис. 7.

### 5. ВЫВОДЫ

В данной работе изучено обобщение метрики Рейснера–Нордстрема, осуществленное введением

в функцию  $\Delta(r)$  члена, пропорционального  $r^{-3}$ . Это позволяет учесть влияние новых гравитационных эффектов, лежащих за границей применимости ОТО, которые не могут быть описаны метрикой Рейснера–Нордстрема [15, 19, 21]. Мы рассматриваем эту метрику как феноменологический анзац, позволяющий связать параметры черной дыры с наблюдательными данными. В то же время мы рассматриваем ее и как степенное разложение любой статической сферически-симметричной метрики из произвольной модели модифицированной гравитации. Такой подход позволяет связать параметры модифицированной гравитации с метрическими функциями и эмпирическими данными.

Метрика Рейснера–Нордстрема (с обоими значениями знака при члене  $r^{-2}$ ) была рассмотрена в работах [15, 19, 21], где было показано, что тень черной дыры достигает своего минимального значения, когда зарядовый параметр равен единице,  $q = 1$ , что соответствует прицельному параметру фотонов  $D = 4$ . В то же время радиус последней устойчивой орбиты равен  $r_{ISCO} = 4$ . Фазовая диаграмма для данной метрики приведена выше на рис. 1. Кривые, соответствующие конечному сдвигу радиуса горизонта событий в зависимости от размера черной дыры, приведены на рис. 4.

Аналогично метрике Рейснера–Нордстрема, исследуемая нами метрика описывает как черные дыры, так и голые сингулярности с различными размерами теней. Отличает же исследуемую метрику то, что она описывает конечный сдвиг горизонта событий при малом изменении параметров метрики. Такое же явление возможно и для размера тени, так как он может скачкообразно измениться при малом изменении параметров метрики. Более того, черные дыры, описываемые предложенной метрикой, могут иметь произвольно малую тень ( $D < 4$ ) и радиус последней устойчивой орбиты  $\hat{r} < 4$ . Подобный эффект отсутствует в метрике Рейснера–Нордстрема, так как ее конфигурационное пространство меньше.

Рассматривая предложенное обобщение метрики как степенной ряд, возможно установить границы ее применимости. Так как метрика имеет три свободных параметра ( $M, q$  и  $\alpha$ ), они все оказывают влияние на границу применимости, несмотря на то, что разложение осуществляется по параметру  $M/r$ . Радиус горизонта событий является пространственным масштабом, естественно определяющим границу, где гравитация входит в режим сильного поля, а метрика теряет свойства сходимости и не может быть применена.

Подчеркнем, что уменьшение наблюдаемого размера черной дыры также может вызываться присутствием плазмы, окружающей черную дыру [22, 23]. Несмотря на то, что эти эффекты могут присутствовать совместно, плазменные эффекты зависят от длины волны наблюдаемого света, что позволит однозначно их идентифицировать и отделить при помощи наблюдения в различных частях электромагнитного спектра.

**Финансирование.** Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований №16-02-00682, а также Программой развития Московского государственного университета «Ведущие научные школы МГУ (физика звезд, релятивистские компактные объекты и галактики)».

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Will, *Living Rev. Rel.* **17**, 4 (2014); arXiv:1403.7377.
2. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 221101 (2016); arXiv:1602.03841.
3. S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
4. D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez et al., *Astrophys. J.* **648**, L109 (2006); arXiv:astro-ph/0608407.
5. P. A. R. Ade, N. Aghanin, M. Arnaud et al., *Astron. Astrophys.* **594**, A13 (2016); arXiv:1502.01589.
6. S. Capozziello and M. De Laurentis, *Phys. Rep.* **509**, 167 (2011); arXiv:1108.6266.
7. E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso et al., *Class. Quant. Grav.* **32**, 243001 (2015); arXiv:1501.07274.
8. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010); arXiv:0805.1726.
9. A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010); arXiv:1002.4928.
10. C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 051101 (2012); arXiv:1106.2000.
11. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, arXiv:1811.05393, doi:10.1093/mnras/sty3094.
12. A. Y. Bin-Nun, *Phys. Rev. D* **81**, 123011 (2010); arXiv:0912.2081.
13. A. Y. Bin-Nun, *Phys. Rev. D* **82**, 064009 (2010); arXiv:1004.0379.
14. A. Y. Bin-Nun, *Class. Quant. Grav.* **28**, 114003 (2011); arXiv:1011.5848.
15. A. F. Zakharov, *Phys. Rev. D* **90**, 062007 (2014); arXiv:1407.7457.
16. N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000); arXiv:hep-th/0003061.
17. S. O. Alexeyev, A. N. Petrov, and B. N. Latoш, *Phys. Rev. D* **92**, 104046 (2015); arXiv:1503.06780.
18. V. L. Fish, S. S. Doelman, C. Beaudoin et al., *Astrophys. J.* **727**, L36 (2011); arXiv:1011.2472.
19. A. F. Zakharov, arXiv:1804.10374.
20. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford (1992).
21. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **83**, 024021 (2011); arXiv:1012.5411.
22. V. Perlick, O. Yu. Tsupko, and G. S. Bisnovatyi-Kogan, *Phys. Rev. D* **92**, 104031 (2015); arXiv:1507.04217.
23. V. Perlick and O. Yu. Tsupko, *Phys. Rev. D* **95**, 104003 (2017); arXiv:1702.08768.