

# ПРОЦЕССЫ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ ЛЕПТОННОГО АРОМАТА В КВАНТОВОМ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОМ ПОДХОДЕ

*И. П. Волобуев<sup>а</sup>, В. О. Егоров<sup>а,б\*</sup>*

<sup>а</sup> *Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобелъцына,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>б</sup> *Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 ноября 2018 г.,  
после переработки 14 января 2019 г.  
Принята к публикации 15 января 2019 г.

Осциллирующие вероятности процессов нейтринных осцилляций, меняющих аромат лептонов, где нейтрино детектируются во взаимодействии со слабыми заряженным и нейтральным токами, рассчитываются в рамках квантового теоретико-полевого подхода к осцилляциям нейтрино, основанного на модификации фейнмановского пропагатора в импульсном представлении. Подход наиболее похож на стандартную диаграммную технику Фейнмана в импульсном представлении. Обнаружено, что осциллирующие зависящие от расстояния вероятности обнаружения электрона в экспериментах с рождением нейтрино при мюонном распаде  $\pi^+$ -мезона и регистрацией рожденного нейтрино во взаимодействиях с заряженным и нейтральным токами точно совпадают с соответствующими вероятностями, рассчитанными в стандартном подходе.

DOI: 10.1134/S0044451019050079

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Осцилляции нейтрино являются экспериментально подтвержденным явлением, широко обсуждаемым в теоретической физике. Обычно они понимаются как переход нейтрино одного аромата в нейтрино другого аромата в зависимости от пройденного расстояния [1–3]. Эта интерпретация основана на стандартном квантовомеханическом описании осцилляций нейтрино, при котором предполагается, что состояния нейтрино с определенным ароматом являются суперпозициями состояний с определенными массами, описываемых плоскими волнами, и постулируется, что именно флейворные состояния рождаются в слабых взаимодействиях. Однако в локальной квантовой теории поля 4-импульс сохраняется в каждой вершине взаимодействия, что приводит к тому, что разные массовые компоненты в составе одного флейворного

состояния имеют разные импульсы и энергии. В результате в стандартном квантовомеханическом описании осцилляций нейтрино в терминах плоских волн возникает проблема с нарушением закона сохранения энергии-импульса, которая широко обсуждалась в литературе (см., например, [4–8]). Эта проблема может быть решена в рамках описания нейтринных осцилляций в терминах волновых пакетов [1], что, с другой стороны, существенно усложняет соответствующие вычисления.

Другое решение проблемы может быть найдено путем рассмотрения нейтрино вне массовой поверхности. Идея трактовать массовые собственные состояния нейтрино как виртуальные частицы и описывать их движение до точки регистрации пропагаторами Фейнмана была впервые высказана в работе [4]. Позже этот подход был развит в работах [5, 6]. В таком подходе осцилляции нейтрино возникают в результате интерференции амплитуд процессов, обусловленных всеми тремя промежуточными массовыми собственными состояниями нейтрино. Однако вычисления амплитуд в этом подходе

\* E-mail: egorov@theory.sinp.msu.ru

существенно отличаются от стандартных вычислений в рамках диаграммной техники Фейнмана в импульсном представлении. Это связано со стандартным  $S$ -матричным формализмом в квантовой теории поля, который неудобен для описания процессов на конечных расстояниях и конечных временных интервалах. Чтобы описать локализацию частиц или ядер, которые рождают и детектируют нейтрино, приходится использовать волновые пакеты, что делает вычисления довольно сложными.

В работе [9] был предложен модифицированный пертурбативный  $S$ -матричный формализм, позволяющий последовательно описать процессы осцилляций нейтрино в рамках квантовой теории поля, используя только плоские волны. Формализм основан на фейнмановской диаграммной технике в координатном представлении [10], дополненной модифицированными правилами перехода к импульсному представлению. Собственно процедура расчета очень похожа на диаграммную технику Фейнмана в импульсном представлении, в которой используется модифицированный пропагатор Фейнмана. Подход был развит в работе [11], где мы явно показали, что предлагаемый формализм точно воспроизводит результаты стандартного подхода в случае, когда нейтрино (вместе с позитронами) образуются во взаимодействии с заряженными токами ядер и детектируются во взаимодействии как с нейтральными, так и с заряженными токами электронов.

В настоящей статье мы будем использовать модифицированный  $S$ -матричный формализм для расчета вероятностей процессов нейтринных осцилляций, недиагональных по лептонным ароматам. А именно, мы рассмотрим процессы, в которых нейтрино рождается в мюонном распаде  $\pi^+$ -мезона, а регистрируется во взаимодействии с нейтральным и заряженным токами электрона. Мы покажем, что результаты нашего подхода снова в точности совпадают с теми, что ожидаются из стандартного формализма.

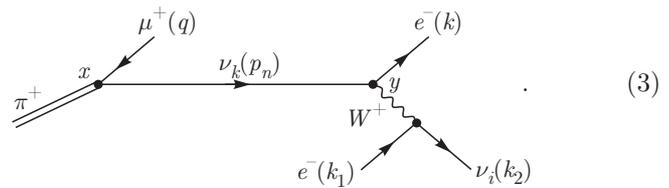
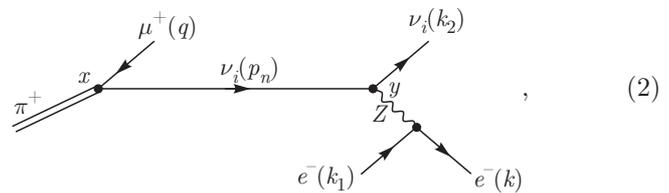
## 2. ОСЦИЛЛЯЦИИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ДЕТЕКТИРОВАНИЕМ НЕЙТРИНО ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С НЕЙТРАЛЬНЫМ И ЗАРЯЖЕННЫМ ТОКАМИ

Рассматривается минимальное расширение Стандартной модели правыми синглетами нейтрино. После диагонализации членов, полуторалинейных по полям нейтрино, лагранжиан взаимодействия слабых заряженных токов лептонов принимает вид

$$L_{cc} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{i,k=1}^3 \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ik} \nu_k W_\mu^- + \text{H.c.} \right), \quad (1)$$

где  $l_i$  обозначает поле заряженного лептона  $i$ -го поколения,  $\nu_k$  — поле массового собственного состояния нейтрино, а  $U_{ik}$  — матрицу Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты (PMNS-матрица).

Мы собираемся рассмотреть процесс, когда нейтрино образуется при распаде  $\pi^+$ -мезона, а регистрируется во взаимодействии с заряженным и нейтральным токами электрона. Благодаря структуре лагранжиана взаимодействия процесс представлен в низшем порядке следующими двумя диаграммами:



В диаграмме (3) все три виртуальных массовых собственных состояния нейтрино дают вклад, поэтому соответствующая амплитуда должна суммироваться по индексу  $k = 1, 2, 3$ . В то же время обе диаграммы имеют массовое собственное состояние нейтрино  $\nu_i$  в конечном состоянии, поэтому мы должны просуммировать результирующую вероятность по  $i$ , чтобы получить вероятность регистрации электрона.

Обозначим 4-импульсы частиц так, как это изображено на диаграммах: импульс антимюона равен  $q$ , импульс виртуального нейтрино —  $p_n$ , импульс выходящего электрона —  $k$ , импульс входящего электрона —  $k_1$ , импульс выходящего нейтрино —  $k_2$ .

Можно выписать амплитуду в координатном представлении, соответствующую диаграммам (1), (2), используя стандартные правила Фейнмана, сформулированные, например, в учебнике [12]. Далее, согласно предписанию  $S$ -матричного формализма, чтобы перейти к импульсному представлению, нужно проинтегрировать амплитуду по

$x$  и  $y$  по пространству Минковского, что означает, что процесс рассматривается происходящим во всем пространстве-времени Минковского и что итоговая вероятность процесса будет вероятностью на единицу объема и на единицу времени.

Однако такое интегрирование привело бы к потере информации о пространственно-временном интервале между событием рождения и событием регистрации, поскольку в экспериментах по нейтринным осцилляциям подразумевается, что расстояние между точкой рождения и точкой детектирования вдоль направления распространения нейтрино остается неизменным. Чтобы обобщить стандартный формализм  $S$ -матрицы на случай процессов, проходящих на фиксированных расстояниях, введем под интеграл дельта-функцию  $\delta(\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{p}| - L)$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс виртуальных нейтрино, а  $L$  — расстояние между источником и детектором нейтрино. Поступая так, мы фиксируем расстояние между событиями рождения и регистрации и только затем интегрируем амплитуду по  $x$  и  $y$  по пространству Минковского. Таким образом, как и в стандартном  $S$ -матричном формализме, мы рассматриваем процесс, происходящий во всем пространстве-времени Минковского, но расстояние между событиями рождения и детектирования вдоль импульса нейтринного пучка теперь фиксируется дельта-функцией. Это эквивалентно замене стандартного фейнмановского фермионного пропагатора в координатном представлении  $S_i^c(y-x)$  на  $S_i^c(y-x)\delta(\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{p}| - L)$ .

Преобразование Фурье этого выражения дает нам так называемый зависящий от расстояния пропагатор массового собственного состояния нейтрино  $\nu_i$  в импульсном представлении [9, 11]. Однако в [11] утверждается, что этот зависящий от расстояния пропагатор неудобен для вычислений, поскольку его обратное преобразование Фурье не может быть определено, если импульс преобразования Фурье совпадает с импульсом виртуальных нейтрино в аргументе дельта-функции, что необходимо для описания процессов нейтринных осцилляций. Чтобы обойти эту проблему, вводим под интеграл другую дельта-функцию  $\delta(y^0 - x^0 - T)$ , которая фиксирует промежуток времени между событиями рождения и детектирования. Позже мы сможем выразить временной интервал  $T$  через расстояние, пройденное нейтрино, в соответствии с формулой  $T = Lp^0/|\mathbf{p}|$ , которая часто используется при описании процессов нейтринных осцилляций.

Теперь введение дельта-функции эквивалентно замене стандартного фермионного пропагатора Фейнмана в координатном представлении  $S_i^c(y-x)$

на  $S_i^c(y-x)\delta(y^0 - x^0 - T)$ . В этом случае преобразование Фурье дает нам так называемый зависящий от времени пропагатор массового собственного состояния нейтрино  $\nu_i$  в импульсном представлении, определяемый соотношением

$$S_i^c(p_n, T) = \int dx \exp(ip_n x) S_i^c(x) \delta(x^0 - T). \quad (4)$$

Этот интеграл может быть посчитан точно [9,11]:

$$S_i^c(p_n, T) = \frac{\hat{p}_n - \gamma_0 \left( p_n^0 - \sqrt{(p_n^0)^2 + m_i^2 - p_n^2} \right) + m_i}{2\sqrt{(p_n^0)^2 + m_i^2 - p_n^2}} \times \exp \left\{ i \left( p_n^0 - \sqrt{(p_n^0)^2 + m_i^2 - p_n^2} \right) T \right\}, \quad (5)$$

где использовано стандартное обозначение  $\hat{p}_n = \gamma_\mu p_n^\mu$ . Обратное преобразование Фурье этого зависящего от времени пропагатора хорошо определено, что позволяет нам сохранить стандартную диаграммную технику Фейнмана в импульсном представлении, просто заменив пропагатор Фейнмана данным зависящим от времени пропагатором.

В работе [5] было показано, что виртуальные частицы, распространяющиеся на большие макроскопические расстояния (или, что то же самое, распространяющиеся в течение макроскопических времен), находятся почти на массовой поверхности, и это означает, что  $|p_n^2 - m_i^2| / (p_n^0)^2 \ll 1$ . Поэтому, пренебрегая  $|p_n^2 - m_i^2| / (p_n^0)^2$  всюду, кроме показателя экспоненты, где оно умножается на большое макроскопическое время  $T$ , и применяя также приближение малых масс нейтрино, т. е. пренебрегая  $m_i/p_n^0 \ll 1$ , мы можем представить зависящий от времени пропагатор нейтрино в импульсном представлении в виде [11]

$$S_i^c(p_n, T) = i \frac{\hat{p}_n}{2p_n^0} \exp \left( -i \frac{m_i^2 - p_n^2}{2p_n^0} T \right). \quad (6)$$

Этот зависящий от времени пропагатор будет использоваться в расчетах ниже, заменяя стандартный пропагатор Фейнмана. Такая техническая простота является очевидным преимуществом обсуждаемого подхода.

Теперь мы готовы выписать амплитуды, соответствующие диаграммам (2), (3) в случае, когда разница во времени  $y^0 - x^0$  фиксирована и равна  $T$ . Мы предполагаем, что передача импульса в процессах рождения и детектирования мала, поэтому

можем использовать приближение взаимодействия Ферми. Вершина распада пиона описывается в соответствии с формулами из § 5 учебника [13]. Амплитуда в импульсном представлении, соответствующая диаграмме (2), имеет вид

$$M_{nc}^{(i)} = -\frac{G_F^2}{2p_n^0} \cos \theta_c f_\pi \varphi_\pi m_{(\mu)} U_{2i}^* \times \\ \times \exp\left(-i\frac{m_i^2 - p_n^2}{2p_n^0} T\right) \bar{\nu}_i(k_2) \gamma^\mu \hat{p}_n (1 + \gamma^5) v(q) \times \\ \times \left[ \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(k_1) + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta_W \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 + \gamma^5) u(k_1) \right], \quad (7)$$

где  $\theta_c$  — угол Кабиббо,  $f_\pi$  — постоянная распада пиона размерности массы,  $\varphi_\pi$  — (постоянная) волновая функция пиона,  $m_{(\mu)}$  — масса мюона, и мы уже применили условие сохранения 4-импульса в вершине рождения. Здесь и далее опускаем индексы поляризации фермионов.

Аналогично амплитуда, соответствующая диаграмме (3), просуммированная по типу  $k$  промежуточного виртуального нейтрино, может быть записана в виде

$$M_{cc}^{(i)} = \frac{G_F^2}{2p_n^0} \cos \theta_c f_\pi \varphi_\pi m_{(\mu)} U_{1i}^* \sum_{k=1}^3 U_{1k} U_{2k}^* \times \\ \times \exp\left(-i\frac{m_k^2 - p_n^2}{2p_n^0} T\right) \bar{\nu}_i(k_2) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \times \\ \times u(k_1) \bar{u}(k) \gamma^\mu \hat{p}_n (1 + \gamma^5) v(q). \quad (8)$$

Удобно использовать тождество Фирца для того, чтобы переставить спиноры  $\bar{u}(k)$  и  $\bar{\nu}_i(k_2)$  в последней амплитуде, что делает ее похожей на первую. Мы также вводим следующие обозначения для зависящих от времени факторов:

$$A_i = U_{2i}^* \exp\left(-i\frac{m_i^2 - p_n^2}{2p_n^0} T\right), \\ B_i = U_{1i}^* \sum_{k=1}^3 U_{1k} U_{2k}^* \exp\left(-i\frac{m_k^2 - p_n^2}{2p_n^0} T\right). \quad (9)$$

Полная амплитуда процесса с нейтрино  $\nu_i$  в конечном состоянии, которая является суммой амплитуд  $M_{nc}^{(i)}$  и  $M_{cc}^{(i)}$ , принимает форму

$$M_{tot}^{(i)} = -\frac{G_F^2}{2p_n^0} \cos \theta_c f_\pi \varphi_\pi m_{(\mu)} \bar{\nu}_i(k_2) \gamma^\mu \hat{p}_n (1 + \gamma^5) \times \\ \times v(q) \left[ \left( B_i + A_i \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \right) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \times \right. \\ \left. \times u(k_1) + A_i \sin^2 \theta_W \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 + \gamma^5) u(k_1) \right]. \quad (10)$$

Можно заметить, что эта амплитуда имеет необычную размерность. Формально она соответствует процессу, в котором разница во времени  $y^0 - x^0$  между рождением и регистрацией точно равна  $T$ . Однако в действительности процесс регистрации не является мгновенным, он занимает некоторое время  $\Delta t$ ,  $\Delta t/T \ll 1$ . Чтобы найти амплитуду процесса со временем регистрации  $\Delta t$ , мы должны проинтегрировать амплитуду (10) по  $T$  от  $T - \Delta t/2$  до  $T + \Delta t/2$ . После отбрасывания слагаемых порядка  $\Delta t/T$ , которые пренебрежимо малы, интегрирование приводит к умножению амплитуды на  $\Delta t$ . Следовательно, выражение (10) следует понимать как амплитуду в единицу времени.

Нашим следующим шагом будет вычисление квадрированной амплитуды, усредненной по поляризациям входящих частиц и просуммированной по поляризациям исходящих частиц. Операция усреднения и суммирования будет обозначаться угловыми скобками. Применяя снова приближение малых масс почти реальных промежуточных нейтрино,  $p_n^2 = 0$ , находим, что квадрированная амплитуда факторизуется следующим образом:

$$\langle |M_{tot}^{(i)}|^2 \rangle = \langle |M_1|^2 \rangle \langle |M_2^{(i)}|^2 \rangle \frac{1}{4(p_n^0)^2}, \quad (11)$$

$$\langle |M_1|^2 \rangle = 4G_F^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^2 m_{(\mu)}^2 (p_n q), \quad (12)$$

$$\langle |M_2^{(i)}|^2 \rangle = 64G_F^2 \left[ \left| B_i + A_i \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \right|^2 \times \right. \\ \times (k_1 p_n)^2 + |A_i|^2 \sin^4 \theta_W (k p_n)^2 - \left( \text{Re}(A_i B_i^*) + \right. \\ \left. + |A_i|^2 \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \right) \sin^2 \theta_W m^2 (k_2 p_n) \left. \right]. \quad (13)$$

Здесь  $\langle |M_1|^2 \rangle$  — квадрированная амплитуда процесса распада  $\pi^+$ -мезона на антимюон и безмассовый фермион,  $\langle |M_2^{(i)}|^2 \rangle$  — квадрированная амплитуда процесса рассеяния безмассового фермиона и начального электрона,  $m$  — масса электрона.

Обозначим 4-импульс распадающегося пиона через  $p_\pi$ , а 4-импульс регистрируемых нейтрино через  $p$ . Экспериментальная ситуация определяет, что импульс  $\mathbf{p}$  направлен от источника к детектору и удовлетворяет условию сохранения импульса  $\mathbf{p}_\pi - \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0$  в вершине рождения. Другими словами,  $\mathbf{p}$  — это одно конкретное значение  $\mathbf{p}_n$ , имеющее

направление от источника к детектору. Фактически выбор единственного значения  $\mathbf{p}$  импульсов детектируемых нейтрино является приближением, которое применимо, когда расстояние между источником и детектором намного больше, чем их собственные размеры. Напомним также, что мы применяем приближение  $p^2 = 0$ . Следуя рецепту, сформулированному в работе [11], чтобы найти дифференциальную вероятность процесса, нужно умножить амплитуду  $\langle |M_{tot}^{(i)}|^2 \rangle$  на дельта-функцию закона сохранения энергии-импульса  $(2\pi)^4 \delta(p_\pi + k_1 - q - k - k_2)$  и на дельта-функцию  $2\pi \delta(p_\pi - q - p)$ , которая фиксирует импульс промежуточных нейтрино, подставить  $p$  вместо  $p_n$  и проинтегрировать результат по импульсам конечных частиц, а именно, антимюона, электрона и нейтрино, в соответствии со стандартными правилами расчета вероятностей. Коэффициент  $2\pi$  перед последней дельта-функцией возникает после усреднения по импульсам детектируемых нейтрино, которые из-за ненулевых размеров источника и детектора в действительности лежат внутри малого усеченного конуса с осью вдоль вектора  $\mathbf{p}$ .

Благодаря факторизации квадрированной амплитуды дифференциальная вероятность факторизуется следующим образом:

$$\frac{dW^{(i)}}{d\mathbf{p}} = \frac{dW_1}{d\mathbf{p}} W_2^{(i)}, \quad (14)$$

$$\frac{dW_1}{d\mathbf{p}} = \frac{1}{2p_\pi^0} \frac{1}{(2\pi)^3 2p^0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} \times \langle |M_1|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta(p_\pi - q - p), \quad (15)$$

$$W_2^{(i)} = \frac{1}{2p^0 2k_1^0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \times \langle |M_2^{(i)}|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta(k_1 + p - k - k_2). \quad (16)$$

Здесь  $dW_1/d\mathbf{p}$  — дифференциальная вероятность распада  $\pi$ -мезона на антимюон и безмассовый фермион с фиксированным импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $W_2^{(i)}$  — вероятность процесса рассеяния электрона и безмассового фермиона с образованием электрона и массового собственного состояния нейтрино  $\nu_i$ .

Чтобы найти полную дифференциальную вероятность обнаружения электрона в конечном состоянии, мы должны просуммировать дифференциальную вероятность  $dW^{(i)}/d\mathbf{p}$  по  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку  $dW_1/d\mathbf{p}$  не зависит от  $i$ , мы должны просуммировать только  $W_2^{(i)}$ ; результат будет обозначен как

$W_2$ . Тогда полная дифференциальная вероятность обнаружения электрона в конечном состоянии может быть записана как

$$\frac{dW}{d\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dW^{(i)}}{d\mathbf{p}} = \frac{dW_1}{d\mathbf{p}} W_2. \quad (17)$$

Поскольку импульс  $p_n$  промежуточных виртуальных нейтрино теперь фиксирован и равен  $p$ , мы можем подставить  $T = Lp^0/|\mathbf{p}|$  во все формулы с этого момента. Эта замена является последовательной, поскольку нейтрино находятся почти на массовой поверхности, и  $|\mathbf{p}|/p^0$  можно рассматривать как скорость нейтрино с очень высокой точностью. Строгое доказательство этой формальной процедуры может быть получено в подходе в терминах волновых пакетов (см. [1], § 8.2).

Далее мы видим, что экспериментальная ситуация фиксирует только направление импульса нейтрино, но не его модуль  $|\mathbf{p}_n| = |\mathbf{p}|$ . Поэтому, чтобы найти вероятность процесса, мы должны проинтегрировать (17) по  $|\mathbf{p}|$  по всем допустимым значениям. Максимальное значение величины  $|\mathbf{p}|$  определяется процессом рождения, а минимальное — процессом регистрации. Здесь процесс рождения представляет собой двухчастичный распад, что означает, что модули импульсов нейтрино и антимюона уже зафиксированы законом сохранения энергии-импульса. Это приводит к тому, что  $dW_1/d\mathbf{p}$  сингулярна, и эта сингулярность устраняется интегрированием. Окончательный результат для вероятности процесса выглядит следующим образом:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int \frac{dW}{d\mathbf{p}} |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = \frac{dW_1}{d\Omega} W_2|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}|^*}. \quad (18)$$

Здесь

$$\frac{dW_1}{d\Omega} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^2}{8(2\pi)^2} \frac{m_{(\mu)}^2}{p_\pi^0 (p_\pi^0 - |\mathbf{p}_\pi| \cos \theta)} \left( \frac{m_\pi^2 - m_{(\mu)}^2}{p_\pi^0} \right)^2 \quad (19)$$

— дифференциальная вероятность распада  $\pi$ -мезона на антимюон и безмассовый фермион с фиксированным направлением импульса, а

$$|\mathbf{p}|^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(p_\pi^0 - |\mathbf{p}_\pi| \cos \theta)}; \quad (20)$$

система координат выбрана таким образом, что импульс пиона  $\mathbf{p}_\pi$  направлен вдоль оси  $z$ , а  $\theta$  — полярный угол  $\mathbf{p}$ . После всех этих преобразований вероятность (18) можно интерпретировать как вероятность на единицу длины источника и на единицу длины детектора.

Легко видеть, что дифференциальная вероятность (19) имеет максимум при  $\theta = 0$ , т.е. в направлении импульса исходного пиона. Поэтому естественно разместить детектор в этом направлении от источника, чтобы зарегистрировать максимально возможное количество событий.

Поскольку азимутальный угол  $\varphi$  не определен для  $\theta = 0$ , для нахождения дифференциальной вероятности  $dW_1/\sin\theta d\theta$  при  $\theta = 0$  сначала нужно усреднить дифференциальную вероятность  $dW_1/d\Omega$  по углу  $\varphi$ , а затем взять предел  $\theta \rightarrow 0$ . В результате получаем следующую дифференциальную вероятность процесса рождения нейтрино в направлении импульса начального пиона:

$$\left. \frac{dW_1}{\sin\theta d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{G_F^2 \cos^2\theta_c f_\pi^2}{8(2\pi)^2} \times \frac{m_{(\mu)}^2 (m_\pi^2 - m_{(\mu)}^2)^2}{p_\pi^0 (p_\pi^0 - |\mathbf{p}_\pi|)^2}. \quad (21)$$

Рассмотрим подробнее вероятность регистрации  $W_2$ . После всех подстановок абсолютные значения и произведения зависящих от времени факторов  $A_i$  и  $B_i$ , определенных в (9), выражаются в виде

$$|A_i|^2 = |U_{2i}|^2, \quad (22)$$

$$|B_i|^2 = |U_{1i}|^2 \times \sum_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^3 \left[ -4 \operatorname{Re}(U_{1k}U_{1l}^*U_{2k}^*U_{2l}) \sin^2\left(\frac{m_k^2 - m_l^2}{4|\mathbf{p}|}L\right) + 2 \operatorname{Im}(U_{1k}U_{1l}^*U_{2k}^*U_{2l}) \sin\left(\frac{m_k^2 - m_l^2}{2|\mathbf{p}|}L\right) \right], \quad (23)$$

$$\operatorname{Re}(A_i B_i^*) = \operatorname{Re} \left( U_{1i} U_{2i}^* \sum_{k=1}^3 U_{1k}^* U_{2k} \times \exp\left(-i \frac{m_i^2 - m_k^2}{2|\mathbf{p}|}L\right) \right). \quad (24)$$

Подставляя эти выражения в (13), просуммировав по  $i$  и вводя специальное обозначение

$$P_{\mu e}(L) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^3 \left[ -4 \operatorname{Re}(U_{1k}U_{1l}^*U_{2k}^*U_{2l}) \sin^2\left(\frac{m_k^2 - m_l^2}{4|\mathbf{p}|}L\right) + 2 \operatorname{Im}(U_{1k}U_{1l}^*U_{2k}^*U_{2l}) \sin\left(\frac{m_k^2 - m_l^2}{2|\mathbf{p}|}L\right) \right] \quad (25)$$

для выражения, которое в стандартном подходе называется зависящей от расстояния вероятностью перехода  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , получаем

$$\sum_{i=1}^3 \left\langle |M_2^{(i)}|^2 \right\rangle = 64G_F^2 \left\{ \left[ 2 \sin^2\theta_W P_{\mu e}(L) + \left( -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W \right)^2 (k_1 p)^2 + \sin^4\theta_W (k p)^2 - \left[ P_{\mu e}(L) + \left( -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W \right) \right] \times \sin^2\theta_W m^2 (k_2 p) \right] \right\}. \quad (26)$$

Теперь нужно подставить это выражение в (16), просуммировав по  $i$ . Используя формулы для кинематики нейтрино-электронного рассеяния, представленные в § 16 учебника [13], вычисляя интеграл и подставляя  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|^*$ , определенное в (20), приходим к следующему результату:

$$W_2 = \frac{G_F^2 m}{2\pi} \frac{2(|\mathbf{p}|^*)^2}{2|\mathbf{p}|^* + m} \times \left[ 1 + 4 \sin^4\theta_W \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2|\mathbf{p}|^*}{2|\mathbf{p}|^* + m} \right)^2 \right) + 2 \sin^2\theta_W \left( 1 + \frac{2|\mathbf{p}|^*}{2|\mathbf{p}|^* + m} \right) \times \left( 2 P_{\mu e}(L)|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}|^*} - 1 \right) \right]. \quad (27)$$

В приближении безмассовых нейтрино  $dW_1/d\Omega$  совпадает с потоком вероятности нейтрино, а  $W_2$  совпадает с сечением процесса рассеяния безмассового фермиона на электроны, которое может быть выражено как

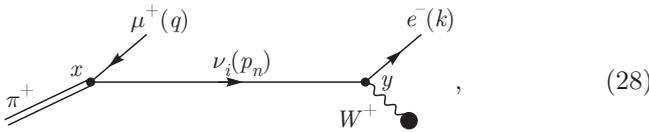
$$W_2 = P_{\mu e}(L) \sigma_{\nu_e e} + (1 - P_{\mu e}(L)) \sigma_{\nu_\mu e}.$$

Таким образом, мы получили, что вероятность регистрации электрона равна вероятности рождения в источнике нейтрино с импульсом, направленным в сторону детектора, умноженной на вероятность взаимодействия нейтрино в детекторе, которая выражается в терминах сечений взаимодействия мюонного и электронного нейтрино и стандартной зависящей от расстояния вероятности перехода  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , т.е. мы фактически точно воспроизвели результат стандартного подхода к описанию осцилляций нейтрино в рамках квантовой теории поля без использования флейворных состояний нейтрино и трудностей, связанных с применением волновых пакетов.

Поскольку входящие  $\pi$ -мезоны всегда имеют распределение по импульсам, вероятность процесса можно получить, выполнив усреднение  $dW/d\Omega$  по распределению по импульсам входящих  $\pi$ -мезонов. В этом случае модуль импульса виртуальных нейтрино уже не является фиксированным, что приводит к размытию интерференционной картины и появлению соответствующей длины когерентности. Количество событий в детекторе в единицу времени можно найти путем интегрирования соответствующей вероятности и плотности  $\pi$ -мезонов и электронов по объемам источника и детектора нейтрино.

### 3. ОСЦИЛЛЯЦИИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ДЕТЕКТИРОВАНИЕМ НЕЙТРИНО ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОЛЬКО С ЗАРЯЖЕННЫМ ТОКОМ

Рассмотрим процесс, где нейтрино рождается в мюонном распаде  $\pi^+$ -мезона, как и в предыдущем случае, но регистрируется только во взаимодействии с заряженным током ядра. Процесс описывается в низшем порядке диаграммой



которая должна быть просуммирована по типу  $i = 1, 2, 3$  промежуточного массового состояния нейтрино. Закрашенный кружок обозначает матричный элемент  $j_\mu$  слабого заряженного адронного тока. Поскольку энергия нейтрино в мюонном распаде пиона составляет не менее 30 МэВ, взаимодействие виртуальных нейтрино с ядром может привести к распаду последнего. Для определенности рассмотрим сначала только двухчастичное конечное состояние и предположим, что начальное ядро  ${}^A_Z X$  поглощает  $W^+$ -бозон и превращается в конечное ядро  ${}^A_{Z+1} X$ , таким образом

$$j_\mu = \langle {}^A_{Z+1} X | j_\mu^{(h)} | {}^A_Z X \rangle.$$

Снова используя приближение взаимодействия Ферми, можно выписать амплитуду в импульсном представлении, соответствующую диаграмме (28), просуммированной по всем трем массовым собственным состояниям нейтрино в случае, когда разница во времени  $y^0 - x^0$  между точками рождения и детектирования фиксирована и равна  $T$ :

$$M = -i \frac{G_F^2}{2p_n^0} \cos \theta_c f_\pi \varphi_\pi m_{(\mu)} \sum_{i=1}^3 U_{1i} U_{2i}^* \times \exp \left( -i \frac{m_i^2 - p^2}{2p_n^0} T \right) j_\mu \bar{u}(k) \times \gamma^\mu \hat{p}_n (1 + \gamma^5) v(q). \quad (29)$$

Здесь 4-импульсы частиц определены аналогично определению в предыдущем разделе, как это показано на диаграмме.

Квадрированная амплитуда, усредненная по поляризациям входящих частиц и просуммированная по поляризациям исходящих частиц, факторизуется следующим образом:

$$\langle |M|^2 \rangle = \langle |M_1|^2 \rangle \langle |M_2|^2 \rangle \frac{1}{4(p_n^0)^2} P_{\mu e}(L), \quad (30)$$

где  $\langle |M_1|^2 \rangle$  — квадрированная амплитуда распада пиона на антимюон и безмассовый фермион, даваемая формулой (12),

$$\langle |M_2|^2 \rangle = 4G_F^2 [k^\mu p_n^\nu + k^\nu p_n^\mu - (p_n k) g^{\mu\nu} + i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha p_{n\beta}] \left( W_{\mu\nu}^{(S)} + iW_{\mu\nu}^{(A)} \right) \quad (31)$$

— квадрированная амплитуда процесса рассеяния начального ядра и безмассового фермиона, приводящего к образованию конечного ядра и электрона,  $P_{\mu e}(L)$  — зависящая от расстояния вероятность перехода  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  в стандартном подходе, даваемая (25). Здесь ядерный тензор  $W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^{(S)} + iW_{\mu\nu}^{(A)} = \langle j_\mu j_\nu^+ \rangle$  характеризует взаимодействие ядра с виртуальным  $W^+$ -бозоном, его симметричная часть  $W_{\mu\nu}^{(S)}$  является действительной, а антисимметричная  $iW_{\mu\nu}^{(A)}$  — мнимой.

Обозначим снова 4-импульс  $\pi^+$ -мезона через  $p_\pi$ , а 4-импульсы начального и конечного ядер соответственно через  $P = (E, \mathbf{P})$  и  $P' = (E', \mathbf{P}')$ . Следуя изложенному рецепту, чтобы найти вероятность процесса, нужно умножить амплитуду  $\langle |M|^2 \rangle$  на дельта-функцию закона сохранения энергии-импульса  $(2\pi)^4 \delta(p_\pi + P - q - k - P')$  и на дельта-функцию  $2\pi \delta(p_\pi - q - p)$ , которая фиксирует импульс промежуточных нейтрино, подставить  $p$  вместо  $p_n$  и проинтегрировать по импульсам конечных частиц. Мы также можем заменить временной интервал  $T$  на  $Lp^0/|\mathbf{p}|$  для перехода от зависящего от времени фактора к фактору, зависящему от расстояния, поскольку импульс  $p_n$  теперь выбран равным  $p$ . Результат должен быть проинтегрирован по  $|\mathbf{p}|$ , и это интегрирование выполняется при помощи дополнительной дельта-функции. В результате всех этих преобразований имеем

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int \frac{dW}{d\mathbf{p}} |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = \frac{dW_1}{d\Omega} W_2 P_{\mu e}(L)|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}|^*}, \quad (32)$$

где  $|\mathbf{p}|^*$  определяется (20),  $dW_1/d\Omega$  обозначает дифференциальную вероятность распада  $\pi$ -мезона в антимюон и безмассовый фермион с фиксированным направлением импульса, заданную (19), и

$$W_2 = \frac{1}{2p^0 2E} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3 2E'} \times \langle |M_2|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta(P + p - P' - k) \quad (33)$$

— вероятность процесса рассеяния ядра и безмассового фермиона, приводящего к образованию конечного ядра и электрона. Фактически эта вероятность должна быть заменена вероятностью инклюзивного процесса рассеяния, где регистрируется только конечный электрон. Однако это не влияет на то, что коэффициент в формуле (32) точно совпадает с тем, который мы ожидаем для вероятности перехода  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  в общепринятом подходе. Количество событий в детекторе можно найти точно так же, как это было объяснено в конце предыдущего раздела.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы показали, что процессы нейтринных осцилляций, меняющие аромат лептона, могут быть последовательно описаны в квантовой теории поля с использованием только плосковолновых состояний участвующих частиц. В рамках Стандартной модели, минимально расширенной правыми синглетами нейтрино, мы использовали модифицированный пертурбативный формализм, предложенный в [9] и разработанный в [11]. Он основан на традиционном  $S$ -матричном подходе, дополненном модифицированными правилами перехода от координатного представления к импульсному. Эти правила позволяют нам построить модифицированный пропагатор Фейнмана в импульсном представлении, соответствующий имеющейся экспериментальной ситуации, который мы называем зависящим от времени пропагатором. В отличие от стандартного формализма  $S$ -матрицы, наш подход применим для описания процессов, проходящих на конечных расстояниях и конечных временных интервалах. Расчеты просты и очень похожи на те, которые используются в стандартном пертурбативном  $S$ -матричном формализме в импульсном представлении. Модифицированный формализм  $S$ -матрицы физически прозрачен и имеет такое преимущество, что он не нарушает сохранение энергии-импульса.

Важно отметить, что мы не используем флейворные состояния нейтрино в модели, работая только с массовыми собственными состояниями нейтрино.

Этот метод использовался для расчета осциллирующих вероятностей процессов, в которых нейтрино образуются в мюонном распаде  $\pi^+$ -мезона и детектируются во взаимодействиях с нейтральными и заряженными токами электронов или только с заряженными токами ядер. Было четко показано, что подход точно воспроизводит результаты стандартного формализма.

**Благодарности.** Авторы благодарны Э. Э. Боосу, А. Е. Лобанову и М. Н. Смолякову за прочтение рукописи и важные замечания, а также А. Е. Пухову и Л. М. Сладю за полезные обсуждения. Аналитические расчеты амплитуд проводились с помощью пакетов COMFHEP и REDUCE.

**Финансирование.** Работа В. О. Егорова поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford, UK, Univ. Pr. (2007).
2. S. Bilenky, *Lect. Notes Phys.* **817**, 1 (2010).
3. K. Nakamura and S. T. Petcov, in: K. A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).
4. C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee, and U. W. Lee, *Phys. Rev. D* **48**, 4310 (1993).
5. W. Grimus and P. Stockinger, *Phys. Rev. D* **54**, 3414 (1996).
6. M. Beuthe, *Phys. Rep.* **375**, 105 (2003).
7. A. G. Cohen, S. L. Glashow, and Z. Ligeti, *Phys. Lett. B* **678**, 191 (2009).
8. А. Е. Лобанов, *ТМФ* **192**(1), 70 (2017).
9. I. P. Volobuev, *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, 1850075 (2018).
10. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).
11. V. O. Egorov and I. P. Volobuev, *Phys. Rev. D* **97**, 093002 (2018).
12. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1984).
13. Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки*, Наука, Москва (1990).