

ЭЛЕКТРОН-ФОНОННАЯ СВЯЗЬ В ТЕОРИИ ЭЛИАШБЕРГА – МАКМИЛЛАНА ЗА ПРЕДЕЛАМИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

*М. В. Садовский**

*Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук
620016, Екатеринбург, Россия*

*Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620108, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 14 августа 2018 г.,
после переработки 14 августа 2018 г.
Принята к публикации 20 сентября 2018 г.

Теория сверхпроводимости Элиашберга – Макмиллана основана на применимости адиабатического приближения. Параметр малости теории возмущений имеет при этом вид $\lambda\Omega_0/E_F \ll 1$, где λ — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия, Ω_0 — характерная частота фононов, а E_F — энергия Ферми электронов. В данной работе предпринята попытка описания электрон-фононного взаимодействия в рамках подхода Элиашберга – Макмиллана в ситуации, когда характерная частота фононов Ω_0 становится достаточно большой (сравнимой или превышающей энергию Ферми E_F). Рассматривается общее определение спаривательной электрон-фононной константы связи λ , с учетом конечности частоты фононов. Получено простое выражение для обобщенной константы связи $\tilde{\lambda}$, определяющей перенормировку массы, с учетом конечной ширины зоны проводимости, описывающее плавный переход от адиабатического режима в область неадиабатичности. В условиях сильной неадиабатичности, когда $\Omega_0 \gg E_F$, в теории возникает новый параметр малости $\lambda E_F/\Omega_0 \sim \lambda D/\Omega_0 \ll 1$ (D — полуширина электронной зоны), а поправки к электронному спектру становятся несущественными. В то же время, температура сверхпроводящего перехода T_c и в антиадиабатическом пределе определяется спаривательной константой связи Элиашберга – Макмиллана λ , а предэкспоненциальный множитель в формуле для T_c , сохраняющей типичный вид для приближения слабой связи, определяется шириной зоны (энергией Ферми). Для случая взаимодействия с одним оптическим фононом получена единая формула для T_c , справедливая как в адиабатическом, так и в антиадиабатическом режимах. Полученные результаты обсуждаются в контексте проблемы высокотемпературной сверхпроводимости в системе FeSe/STO.

DOI: 10.1134/S0044451019030155

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория сверхпроводимости Элиашберга – Макмиллана является наиболее совершенным подходом к микроскопическому описанию свойств традиционных сверхпроводников с электрон-фононным механизмом куперовского спаривания [1–3]. Ее основные положения могут быть непосредственно обобщены и для рассмотрения нефононных механизмов спаривания в новых высокотемпературных сверхпроводниках. В последнее время эта теория была успешно

применена для описания рекордной сверхпроводимости в соединениях водорода под высоким давлением [4].

Хорошо известно, что теория сверхпроводимости Элиашберга – Макмиллана целиком основана на применимости адиабатического приближения и теореме Мигдала [5], позволяющей пренебречь вершинными поправками при расчетах, связанных с электрон-фононным взаимодействием в типичных металлах. При этом реальный параметр малости теории возмущений имеет вид $\lambda\Omega_0/E_F \ll 1$, где λ — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия Элиашберга – Макмиллана, Ω_0 — характерная частота фононов, а E_F — энергия Ферми электронов. В частности, это ведет к распростра-

* E-mail: sadovski@iep.uran.ru

ненному мнению о том, что вершинными поправками в этой теории можно пренебречь даже при $\lambda > 1$, благодаря выполнению неравенства $\Omega_0/E_F \ll 1$, характерного для типичных металлов. Это безусловно верно в континуальном приближении, когда пренебрегается эффектами дискретности решетки в электронном спектре.

Учет дискретности решетки ведет к нарушению применимости теоремы Мигдала при $\lambda \sim 1$, связанному с проявлением поляронных эффектов [6, 7]. В то же время, в области $\lambda < 1$ этими эффектами можно пренебречь [7]. В дальнейшем изложении мы будем вести все рассмотрение в континуальном приближении, имея в виду область не слишком больших констант электрон-фононного взаимодействия λ .

В последнее время был открыт ряд сверхпроводников, где адиабатическое приближение не может считаться выполненным, а характерные частоты фононов порядка или даже превышают энергии Ферми электронов. Имеются в виду, главным образом, высокотемпературные сверхпроводники на основе монослоев FeSe, прежде всего системы типа монокристаллического слоя FeSe на подложке типа SrTiO₃ (FeSe/STO) [8]. Впервые на это обстоятельство в применении к таким системам обратил внимание Горьков [9, 10] при обсуждении идеи о возможном механизме повышения температуры сверхпроводящего перехода T_c в системе FeSe/STO за счет взаимодействия с высокоэнергетическими оптическими фононами в SrTiO₃ [8].

2. СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ И КОНСТАНТА ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим диаграмму второго порядка (по электрон-фононному взаимодействию), показанную на рис. 1. Для начала достаточно рассмотреть металл в нормальном (несверхпроводящем) состоянии. Рассмотрение можно вести как в мацубаровской технике ($T \neq 0$), так и в технике $T = 0$. В частности, проведя вычисления в технике конечных температур, после аналитического продолжения с мацубаровских частот на действительные $i\omega_n \rightarrow \varepsilon \pm i\delta$ и в пределе $T = 0$, вклад диаграммы рис. 1 можно записать в стандартном виде [1, 11]:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}', \alpha} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^\alpha|^2 \left\{ \frac{f_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^\alpha - i\delta} + \frac{1 - f_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^\alpha + i\delta} \right\}, \quad (1)$$

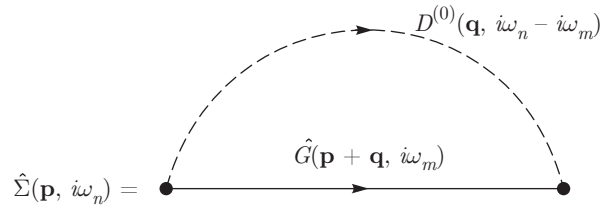


Рис. 1. Диаграмма второго порядка для собственно-энергетической части. Штриховая линия — функция Грина фонона $D^{(0)}$, сплошная линия — функция Грина электрона G в мацубаровском представлении

где в обозначениях с рис. 1 имеем $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. Здесь $g_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^\alpha$ — фреilihовская константа электрон-фононного взаимодействия, $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — спектр электронов, отсчитанный от уровня Ферми, $\Omega_{\mathbf{q}}^\alpha$ — фононный спектр, $f_{\mathbf{p}}$ — фермиевская функция (ступенька).

В частности, для мнимой части собственной энергии при положительных частотах отсюда получаем

$$\text{Im } \Sigma(\varepsilon > 0, \mathbf{p}) = -\pi \sum_{\mathbf{p}', \alpha} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^\alpha|^2 (1 - f_{\mathbf{p}'}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^\alpha). \quad (2)$$

В этих выражениях индекс α нумерует ветви фононного спектра. Далее, для краткости, мы его просто опускаем.

Уравнение (1) можно тождественным образом переписать как

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \int d\omega \sum_{\mathbf{p}'} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \times \left\{ \frac{f_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \omega - i\delta} + \frac{1 - f_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \omega + i\delta} \right\}. \quad (3)$$

В подходе Элиашберга–Макмиллана избавляются от явной зависимости от импульсов, проводя усреднение матричного элемента электрон-фононного взаимодействия по изоэнергетическим поверхностям, соответствующим энергиям электрона с начальным и конечным импульсами \mathbf{p} и \mathbf{p}' , что обычно совпадает с усреднением по соответствующим поверхностям Ферми, поскольку рассеяние на фононах происходит в узком энергетическом слое вблизи уровня Ферми шириной порядка удвоенной дебаевской частоты $2\Omega_D$, причем в типичных металлах всегда $\Omega_D \ll E_F$. Достигается это следующей заменой:

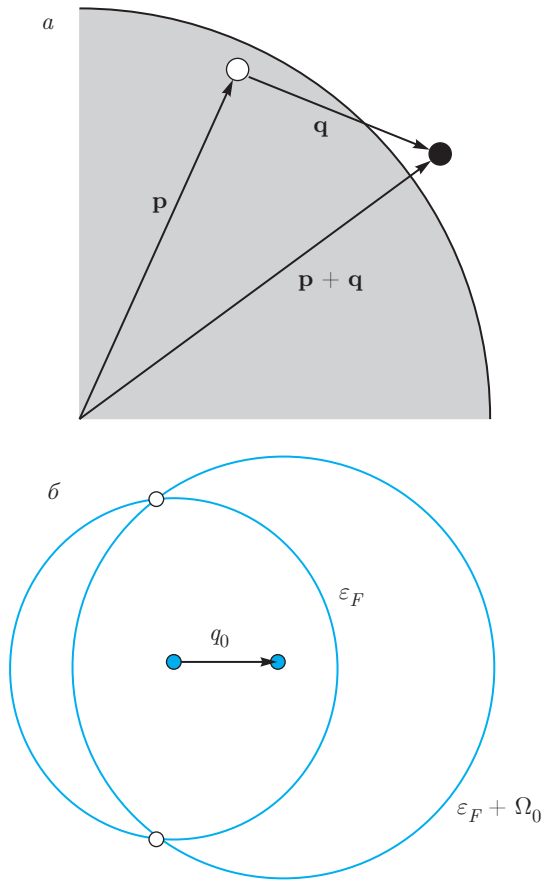


Рис. 2. а) Элементарный акт рассеяния электрона из окрестности поверхности Ферми на фоне. б) Поверхности постоянной энергии для начального и конечного состояний электрона при рассеянии на оптическом фоне с энергией сравнимой с энергией Ферми. Усреднение матричного элемента взаимодействия в (12) или в (14) идет по области их пересечения

$$|g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \Rightarrow \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}'} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \times \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}) \equiv \frac{1}{N(0)} \alpha^2(\omega) F(\omega), \quad (4)$$

где в последней строке введено определение функции Элиашберга $\alpha^2(\omega)$, а

$$F(\omega) = \sum_{\mathbf{q}} \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{q}})$$

— фононная плотность состояний.

В случае, когда энергия фонана становится сопоставимой или, тем более, превышает энергию Ферми, рассеяние электронов идет не в узком слое вблизи поверхности Ферми, а в более широком интервале энергий порядка $\Omega_0 \sim E_F$, где Ω_0 — характерная частота (например, оптического) фонана. Тогда при

начальном $|\mathbf{p}| \sim p_F$ усреднение по \mathbf{p}' в выражении типа (4) надо вести по изоэнергетической поверхности, соответствующей $E_F + \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}$, как это показано, например, на рис. 2. Соответственно, выражение (4) непосредственно обобщается как

$$|g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \Rightarrow \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{N(0)} \times \sum_{\mathbf{p}'} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}) \equiv \frac{1}{N(0)} \alpha^2(\omega) F(\omega), \quad (5)$$

что в последней δ -функции просто соответствует переходу от химического потенциала μ к $\mu + \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}$. Напомним, что у нас, как всегда, все энергии отсчитываются от $\mu = 0$.

После замены типа (4) или (5) явная зависимость от импульсов в собственно-энергетической части пропадает и мы, фактически, работаем далее с усредненной по поверхности Ферми величиной

$$\Sigma(\varepsilon) \equiv \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}),$$

которая теперь записывается как

$$\Sigma(\varepsilon) = \int d\varepsilon' \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \left\{ \frac{f(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon' + \omega - i\delta} + \frac{1 - f(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i\delta} \right\}. \quad (6)$$

Это выражение, фактически, лежит в основе теории Элиашберга – Макмиллана и определяет структуру уравнений Элиашберга для описания сверхпроводимости.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ И КОНСТАНТА ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В случае собственно-энергетической части, зависящей только от частоты (но не от импульса), мы имеем следующие простые формулы, связывающие перенормировку массы электрона с вычетом в полюсе функции Грина [12]:

$$Z^{-1} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (7)$$

$$m^* = \frac{m}{Z} = m \left(1 - \left. \frac{\partial \Sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right). \quad (8)$$

Тогда из (6) непосредственными вычислениями (все интегралы здесь берутся в бесконечных пределах) получаем

$$-\frac{\partial \Sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int d\varepsilon' \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \left\{ \frac{f(\varepsilon')}{(\omega - \varepsilon' - i\delta)^2} + \frac{1 - f(\varepsilon')}{(\omega + \varepsilon' + i\delta)^2} \right\} = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega), \quad (9)$$

так что, вводя безразмерную константу электрон-фононного взаимодействия Элиашберга – Макмиллана как

$$\lambda = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega), \quad (10)$$

немедленно получаем стандартное выражение для перенормировки массы электрона за счет взаимодействия с фононами:

$$m^* = m(1 + \lambda). \quad (11)$$

Функция $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ в выражении для элиашберговской константы электрон-фононного взаимодействия (10) должна вычисляться по (4) или (5) в зависимости от соотношения энергии Ферми E_F и характерной частоты фононов Ω (грубо оцениваемой из Ω_D). Покуда $\Omega \ll E_F$, можно использовать стандартное выражение (4), тогда как в случае $\Omega \sim E_F$ нужно использовать (5). В принципе, все это давно известно — в неявном виде такой результат фигурировал еще в работе Аллена [13], но иногда в этом вопросе возникают недоразумения [14]. Используя (5), можно переписать (10) в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2}{N(0)} \int \frac{d\omega}{\omega} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \delta(\omega - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}) \times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}), \quad (12)$$

что и задает наиболее общий способ вычисления электрон-фононной константы λ , определяющей куперовское спаривание в теории Элиашберга – Макмиллана.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ОПТИЧЕСКИМИ ФОНОНАМИ, РАССЕЙВАЮЩИМИ «ВПЕРЕД»

Открытие высокотемпературной сверхпроводимости в монослоях FeSe на подложках типа SrTiO₃ (FeSe/STO) с рекордной для сверхпроводников на

основе железа критической температурой T_c , почти на порядок превышающей ее значение в объемном FeSe (см. обзор [8]), обострило проблему поиска микроскопических механизмов повышения T_c . Последовавшее за этим открытие в ARPES-экспериментах существования в системе FeSe/STO так называемых «реплик» зоны проводимости [15] привело к идее о повышении T_c за счет взаимодействия электронов проводимости с оптическими фононами SrTiO₃, обладающими высокой энергией (частотой) около 100 мэВ, и рассеивающими электроны «почти вперед» (т. е. с малым передаваемым импульсом фонона) за счет особенностей взаимодействия с оптически активными диполями Ti–O на интерфейсе STO. Модель такого рассеяния, предложенная в работе [15], возродила интерес к предложенной ранее в работах Долгова и Кулича модели повышения T_c за счет взаимодействия с рассеянием «вперед» [16, 17], что получило дальнейшее развитие, уже в применении к FeSe/STO, в работах [18, 19]. Эта модель действительно объясняет ряд экспериментальных фактов, таких как появление «реплик» зон проводимости и возможность достижения высоких значений T_c , однако ее основные выводы были подвергнуты критике (с разных точек зрения) в работах [20–22] и остаются дискуссионными.

Одним из важных обстоятельств, которому не было уделено достаточного внимания в работах [15, 18, 19], был отмеченный Горьковым [9, 10] неадиабатический характер взаимодействия электронов FeSe с оптическими фононами STO. Энергия Ферми в зоне проводимости FeSe/STO мала, порядка 50–60 мэВ [8, 15], что само по себе представляет собой серьезную проблему для теоретического объяснения [20, 21]. Соответственно, энергия оптических фононов (около 100 мэВ) превышает ее практически в два раза, приводя к достаточно сильному нарушению условия адиабатичности. Посмотрим, прежде всего, к чему это может привести при расчете спаривательной электрон-фононной константы связи в подходе Элиашберга – Макмиллана.

Рассмотрим частный пример взаимодействия электронов с одиночной оптической (эйнштейновской) фононной модой с достаточно большой частотой Ω_0 , которая рассеивает, в основном, «вперед». Общая качественная картина такого рассеяния показана на рис. 2. В этом случае в (12) плотность фононных состояний есть просто $F(\omega) = \delta(\omega - \Omega_0)$, а для импульсной зависимости взаимодействия с оптическим фононом на интерфейсе FeSe/STO можно принять характерную зависимость, полученную в [15]:

$$g(\mathbf{q}) = g_0 \exp(-|\mathbf{q}|/q_0), \quad (13)$$

где типичное значение величины $q_0 \sim 0.1\pi/a \ll p_F$ (a — постоянная решетки, а p_F — импульс Ферми), приводящую к рассеянию электронов на оптических фононах почти «вперед».

Тогда безразмерная спаривательная константа электрон-фононного взаимодействия в теории Элиашберга записывается как

$$\lambda = \frac{2}{N(0)\Omega_0} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} |g_{\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \Omega_0). \quad (14)$$

Поскольку в системе FeSe/STO фактически выполняется неравенство $\Omega_0 > E_F$, очевидно, что в данном случае конечность этой частоты во второй δ -функции в этом выражении должна учитываться.

Для простых оценок предположим линеаризованный характер спектра электронов: $\varepsilon_{\mathbf{p}} \approx v_F(|\mathbf{p}| - p_F)$ (v_F — скорость Ферми), что позволяет провести все вычисления явно в аналитическом виде. Теперь, подставляя (13) в (14) и рассматривая двумерный случай, после вычисления всех необходимых интегралов получим [21]

$$\lambda = \frac{g_0^2 a^2}{\pi^2 v_F^2} K_1 \left(\frac{2\Omega_0}{v_F q_0} \right), \quad (15)$$

где $K_1(x)$ — функция Бесселя от чисто мнимого аргумента (функция Макдональда). Применяя хорошо известную асимптотику $K_1(x)$ и отбрасывая ряд несущественных констант, имеем

$$\lambda \sim \lambda_0 \frac{q_0}{4\pi p_F}, \quad (16)$$

при $\Omega_0/v_F q_0 \ll 1$, и

$$\lambda \sim \lambda_0 \frac{\Omega_0}{\pi E_F} \sqrt{\frac{v_F q_0}{\Omega_0}} \exp\left(-\frac{2\Omega_0}{v_F q_0}\right), \quad (17)$$

при $\Omega_0/v_F q_0 \gg 1$.

Здесь мы ввели стандартную безразмерную константу электрон-фононного взаимодействия:

$$\lambda_0 = \frac{2g_0^2}{\Omega_0} N(0), \quad (18)$$

где $N(0)$ — плотность электронных состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина.

Результат (16) известен [18, 19] и сам по себе достаточно неблагоприятен для существенного повышения T_c в рассматриваемой модели. Еще хуже обстоит дело с учетом большой величины частоты Ω_0 , поскольку спаривательная константа взаимодействия оказывается экспоненциально подавлен-

ной при $\Omega_0/v_F q_0 > 1$, что типично для интерфейса FeSe/STO, где $\Omega_0 > E_F \gg v_F q_0$ [8]. Это делает увеличение T_c благодаря взаимодействию электронов FeSe с оптическими фононами STO весьма маловероятным. Фактически, сходные выводы были сделаны, исходя из расчетов *ab initio*, и в работе [23], где также анализировались зависимости элиашберговской константы связи от частоты оптического фонона в STO. При этом, однако, эффект подавления этой константы был заметно меньше, что, вероятно, связано с нереалистически большим значением энергии Ферми, полученным в LDA-расчетах электронного спектра системы FeSe/STO, не учитывающих роль корреляций [23]. Соответственно в работе [23] всегда выполнялось неравенство $\Omega_0 \ll E_F$. Учет корреляций в рамках LDA+DMFT-расчетов, проведенных в работах [20, 21], позволил получить значения энергии Ферми в зоне проводимости FeSe/STO, соответствующие данным ARPES-экспериментов, из которых следует, что в этой системе мы сталкиваемся с антиадиабатической ситуацией, когда $\Omega_0 > E_F$.

Разумеется, полученные выше результаты в асимптотике высоких частот Ω_0 зависят от вида импульсной зависимости в выражении (13). Например, при выборе гауссового закона убывания взаимодействия с передаваемым импульсом мы получим более быстрое гауссово убывание константы взаимодействия с частотой в асимптотике (17). В общем случае, при достаточно быстром убывании взаимодействия (13) на масштабе q_0 , мы всегда получим достаточно быстрое уменьшение константы взаимодействия при $\Omega_0 \gg v_F q_0$.

Более реалистичный случай, когда оптический фонон рассеивает электроны не только «вперед», но и в широком интервале передаваемых импульсов (как это следует, например, из расчетов *ab initio* [23]), в приведенных выше формулах нужно просто взять достаточно большое значение параметра q_0 . Выбирая, например, $q_0 \sim 4\pi p_F$ и используя низкочастотный предел (16), немедленно получаем $\lambda \approx \lambda_0$, т. е. стандартный результат. Аналогичным образом, параметр q_0 можно взять равным вектору обратной решетки $2\pi/a$. Принимая $q_0 \sim 2\pi/a$, из (16) получаем

$$\lambda \sim \lambda_0 \frac{1}{2p_F a} \sim \lambda_0 \quad (19)$$

при типичном $p_F \sim 1/2a$. В общем случае тут всегда остается зависимость от величины импульса Ферми и параметра обрезания (ср. аналогичное рассмотрение в книге [12]).

В предельном случае (17), полагая $q_0 \sim p_F$, немедленно получаем

$$\lambda \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lambda_0 \sqrt{\frac{\Omega_0}{E_F}} \exp\left(-\frac{\Omega_0}{E_F}\right), \quad (20)$$

что просто означает эффективное обрезание взаимодействия для $\Omega_0 > E_F$ в антиадиабатическом пределе. Это обстоятельство подчеркивалось в работах Горькова [9, 10].

5. ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ ЗОНЫ И АНТИАДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Как уже отмечалось, обычный подход Мигдала–Элиашберга полностью основан на адиабатическом приближении, связанном с наличием в обычных электрон-фононных системах (металлах) малого параметра $\Omega_D/E_F \ll 1$ (или $\Omega_0/E_F \ll 1$ для случая одного оптического фонона с частотой Ω_0). Фактическим параметром теории возмущений при этом оказывается $\lambda(\Omega_0/E_F)$, который мал даже при $\lambda \sim 1$. Наличие такого малого параметра позволяет ограничиться простой диаграммой второго порядка по электрон-фононному взаимодействию, рассмотренной выше, и пренебречь всеми вершинными поправками (теорема Мигдала) [5]. Эти условия нарушаются в системе FeSe/STO, где $\Omega_0 \sim 2E_F$.

Рассмотрение, проведенное выше, неявно предполагало бесконечную ширину зоны проводимости. Ясно, что в случае достаточно большой характерной частоты фононов она может оказаться сравнимой не только с энергией Ферми, но и с шириной зоны проводимости. Ниже мы покажем, что в пределе очень сильной неадиабатичности, когда $\Omega_0 \gg E_F \sim D$ (D — полуширина зоны проводимости), фактически, возникает ситуация, когда в теории появляется новый малый параметр теории возмущений $\lambda D/\Omega_0 \sim \lambda E_F/\Omega_0$.

Для этого рассмотрим случай зоны проводимости конечной ширины $2D$ с постоянной плотностью состояний (что отвечает, формально, двумерному случаю). Уровень Ферми считаем, как и выше, соответствующим началу отсчета энергии и подразумеваем типичный случай полузаполненной зоны. Тогда (6) сводится к

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon) &= \int_{-D}^D d\varepsilon' \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \\ &\times \left\{ \frac{f(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon' + \omega - i\delta} + \frac{1 - f(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i\delta} \right\} = \\ &= \int_0^D d\varepsilon' \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon' + \omega - i\delta} + \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i\delta} \right\} = \\ &= \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \\ &\times \left\{ \ln \frac{\varepsilon + D + \omega - i\delta}{\varepsilon - D - \omega + i\delta} - \ln \frac{\varepsilon + \omega - i\delta}{\varepsilon - \omega + i\delta} \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Для модели с одним оптическим фононом $F(\omega) = \delta(\omega - \Omega_0)$ и мы сразу же получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon) &= \alpha^2(\Omega_0) F(\Omega_0) \times \\ &\times \left\{ \ln \frac{\varepsilon + D + \Omega_0 - i\delta}{\varepsilon - D - \Omega_0 + i\delta} - \ln \frac{\varepsilon + \Omega_0 - i\delta}{\varepsilon - \Omega_0 + i\delta} \right\} = \\ &= \alpha^2(\Omega_0) F(\Omega_0) \ln \left\{ \frac{\varepsilon + D + \Omega_0 - i\delta}{\varepsilon - D - \Omega_0 + i\delta} \frac{\varepsilon - \Omega_0 + i\delta}{\varepsilon + \Omega_0 - i\delta} \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Соответственно, из (21) получаем

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \Sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2 \int_0^D d\varepsilon' \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{1}{(\omega + \varepsilon')^2} = \\ &= 2 \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{D}{\omega(\omega + D)}, \quad (23) \end{aligned}$$

так что можно ввести, по определению, обобщенную константу связи в виде

$$\tilde{\lambda} = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{D}{\omega + D}, \quad (24)$$

которая при $D \rightarrow \infty$ сводится к обычной константе Элиашберга–Макмиллана (10), а при $D \rightarrow 0$ дает «антиадиабатическую» константу связи

$$\lambda_D = 2D \int \frac{d\omega}{\omega^2} \alpha^2(\omega) F(\omega). \quad (25)$$

Выражение (24) описывает плавный переход между пределами широкой и узкой зон проводимости. Перенормировка массы, в общем случае, определяется константой $\tilde{\lambda}$:

$$m^* = m(1 + \tilde{\lambda}). \quad (26)$$

В предельно антиадиабатическом случае $D \ll \Omega_0$, после элементарных вычислений, из (21) получим

$$\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon) = 2D \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \omega^2}, \quad (27)$$

а из (22)

$$\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon) = \alpha^2(\Omega_0) \frac{2D\varepsilon}{\varepsilon^2 - \Omega_0^2} = \lambda_D \frac{\Omega_0^2 \varepsilon}{\varepsilon^2 - \Omega_0^2}. \quad (28)$$

Для модели одного оптического фонона с частотой Ω_0 имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{2}{\Omega_0} \alpha^2(\Omega_0) \frac{D}{\Omega_0 + D} = \lambda \frac{D}{\Omega_0 + D} = \\ &= \lambda_D \frac{\Omega_0}{\Omega_0 + D}, \quad (29) \end{aligned}$$

где константа связи Элиашберга – Макмиллана

$$\lambda = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) = \alpha^2(\Omega_0) \frac{2}{\Omega_0}, \quad (30)$$

а λ_D сводится к

$$\lambda_D = 2\alpha^2(\Omega_0) \frac{D}{\Omega_0^2} = 2\alpha^2(\Omega_0) \frac{1}{\Omega_0} \frac{D}{\Omega_0}, \quad (31)$$

где в последнем выражении выделен возникающий в сильном антиадиабатическом пределе новый малый параметр $D/\Omega_0 \ll 1$. Соответственно, в этом пределе всегда имеем

$$\lambda_D = \lambda \frac{D}{\Omega_0} \sim \lambda \frac{E_F}{\Omega_0} \ll \lambda, \quad (32)$$

так что при разумных значениях λ (вплоть даже до области сильной связи, когда $\lambda \sim 1$) «антиадиабатическая» константа связи остается малой. Очевидно, что и вершинные поправки также становятся в этом пределе малыми, что было показано непосредственными вычислениями в работе [24], во многом оставшейся незамеченной. Таким образом, мы приходим к неожиданному выводу — в пределе сильной неадиабатичности электрон-фононная связь становится слабой!

Для мнимой части собственной энергии в сильном антиадиабатическом пределе нетрудно получить

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Sigma(\varepsilon > 0) &= -i2\pi D\varepsilon \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \delta(\varepsilon^2 - \omega^2) = \\ &= -i2\pi D\varepsilon \int d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{1}{2\varepsilon} \{\delta(\varepsilon - \omega) + \delta(\varepsilon + \omega)\} = \\ &= -i\pi D\alpha^2(\varepsilon) F(\varepsilon), \quad (33) \end{aligned}$$

что в модели с одним оптическим фононом сводится к

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Sigma(\varepsilon > 0) &= -i\pi D\alpha^2(\Omega_0) \delta(\varepsilon - \Omega_0) = \\ &= -\frac{i\pi}{2} \lambda_D \Omega_0^2 \delta(\varepsilon - \Omega_0). \quad (34) \end{aligned}$$

Из этих формул очевидно, что мнимая часть в этом пределе не особо актуальна (отлична от нуля только при $\varepsilon = \Omega_0$), а уравнение для действительной части электронной дисперсии

$$\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon) = 0 \quad (35)$$

приобретает вид

$$\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \alpha^2(\Omega_0) \frac{2D\varepsilon}{\varepsilon^2 - \Omega_0^2} = 0. \quad (36)$$

Соответственно, при $\varepsilon \sim \varepsilon_{\mathbf{p}}$ можем написать

$$\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \alpha^2(\Omega_0) \frac{2D\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_0^2} = 0, \quad (37)$$

что при $\varepsilon_{\mathbf{p}} \rightarrow 0$ дает малую поправку к спектру:

$$\varepsilon \approx \varepsilon_{\mathbf{p}} - \alpha^2(\Omega_0) \frac{2D}{\Omega_0^2} \varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \lambda_D \varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} (1 - \lambda_D), \quad (38)$$

очевидно, сводящуюся к малой ($\lambda_D \ll 1$) перенормировке эффективной массы (26).

Физический смысл слабости электрон-фононной связи в сильном неадиабатическом пределе достаточно ясен из качественных соображений, — когда ионы двигаются существенно быстрее электронов, последние не успевают «подстраиваться» к быстро меняющейся конфигурации ионов и, в этом смысле, слабо реагируют на их движение.

6. УРАВНЕНИЯ ЭЛИАШБЕРГА И ТЕМПЕРАТУРА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА

Выше все рассмотрение проводилось для нормального состояния металла. Возникает вопрос, в какой мере полученные результаты можно распространить на случай металла в сверхпроводящем состоянии? В частности, какая константа связи (λ , $\tilde{\lambda}$ или λ_D) определяет температуру сверхпроводящего перехода T_c в антиадиабатическом пределе? Проведем соответствующий анализ с помощью надлежащего обобщения уравнений Элиашберга.

С учетом того, что и в антиадиабатическом приближении вершинные поправки несущественны, и в пренебрежении вкладом прямого кулоновского взаимодействия, уравнения Элиашберга могут быть

выведены путем расчета диаграммы рис. 1, в которой электронная функция Грина в сверхпроводящем состоянии берется в матричном представлении Намбу. Для действительных частот она записывается в следующем стандартном виде [2]:

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{Z(\varepsilon)\varepsilon\tau_0 + \varepsilon_{\mathbf{p}}\tau_3 + Z(\varepsilon)\Delta(\varepsilon)\tau_1}{Z^2(\varepsilon)\varepsilon^2 - Z^2(\varepsilon)\Delta^2(\varepsilon) - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2}, \quad (39)$$

что соответствует матричной собственной энергии вида

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = [1 - Z(\varepsilon)]\varepsilon\tau_0 + Z(\varepsilon)\Delta(\varepsilon)\tau_1, \quad (40)$$

где τ_i — стандартные матрицы Паули, а функции перенормировки массы $Z(\varepsilon)$ и энергетической щели $\Delta(\varepsilon)$ определяются из решения интегральных уравнений Элиашберга, которые в представлении действительных частот записываются в следующем виде [2]:

$$[1 - Z(\varepsilon)]\varepsilon = - \int_{-D}^D d\varepsilon' K(\varepsilon', \varepsilon) \times \operatorname{Re} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon'^2 - \Delta^2(\varepsilon')}} \operatorname{sign} \varepsilon, \quad (41)$$

$$Z(\varepsilon)\Delta(\varepsilon) = \int_{-D}^D K(\varepsilon', \varepsilon) \times \operatorname{Re} \frac{\Delta(\varepsilon')}{\sqrt{\varepsilon'^2 - \Delta^2(\varepsilon')}} \operatorname{sign} \varepsilon, \quad (42)$$

где интегральное ядро имеет вид

$$K(\varepsilon', \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \left\{ \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T}}{\varepsilon' + \omega - \varepsilon - i\delta} - \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T} - \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T}}{\varepsilon' - \omega - \varepsilon - i\delta} \right\}. \quad (43)$$

Единственное отличие от аналогичных уравнений, приведенных в работе [2], состоит в появлении конечных пределов интегрирования, определяемых шириной зоны, а также в отсутствие вклада прямого кулоновского отталкивания, который здесь обсуждаться не будет. Фактически уравнения (41) и (42) являются прямым аналогом уравнений (6) и (21) для нормального металла и заменяют их при переходе в сверхпроводящую фазу.

Для определения температуры сверхпроводящего перехода достаточно, как обычно, рассмотреть

линеаризованные уравнения Элиашберга, которые имеют вид

$$[1 - Z(\varepsilon)]\varepsilon = \int_0^D d\varepsilon' \times \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) f(-\varepsilon') \times \left(\frac{1}{\varepsilon' + \varepsilon + \omega + i\delta} - \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon + \omega - i\delta} \right), \quad (44)$$

$$Z(\varepsilon)\Delta(\varepsilon) = \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T_c} \operatorname{Re} \Delta(\varepsilon') \times \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \left(\frac{1}{\varepsilon' + \varepsilon + \omega + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon + \omega - i\delta} \right). \quad (45)$$

Для наших целей достаточно рассмотреть в этих уравнениях предел $\varepsilon \rightarrow 0$ и искать решения $Z(0) = Z$ и $\Delta(0) = \Delta$. Тогда из (44) получаем

$$[1 - Z]\varepsilon = -2\varepsilon \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{(\varepsilon' + \omega)^2} = -2\varepsilon \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{D}{\omega(\omega + D)} \quad (46)$$

или

$$Z = 1 + \tilde{\lambda}, \quad (47)$$

где константа $\tilde{\lambda}$ была определена выше в (24). Таким образом, именно эта эффективная константа связи определяет перенормировку массы как в нормальной, так и в сверхпроводящей фазе. Как уже указывалось выше, в пределе сильной антиадиабатичности эта перенормировка оказывается весьма малой и определяется предельным выражением λ_D (31).

Иная ситуация реализуется в уравнении (45). В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, используя (47), немедленно получаем из (45) следующее уравнение для T_c :

$$1 + \tilde{\lambda} = 2 \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'(\varepsilon' + \omega)} \operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T_c}. \quad (48)$$

В антиадиабатическом пределе, когда характерные частоты фононов существенно превышают ширину

зоны проводимости, в знаменателе подынтегрального выражения в (48) можно пренебречь ε' по сравнению с ω , так что уравнение для T_c переписывается как

$$1 + \tilde{\lambda} \approx 2 \int_0^{\infty} d\omega \frac{\alpha^2(\omega)F(\omega)}{\omega} \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} \operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T_c} = \\ = \lambda \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} \operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T_c}, \quad (49)$$

где λ — константа связи теории Элиашберга – Макмиллана, определенная выше в (10). Отсюда немедленно следует результат типа БКШ:

$$T_c \sim D \exp\left(-\frac{1 + \tilde{\lambda}}{\lambda}\right), \quad (50)$$

где опущена стандартная константа в предэкспоненте. Выше мы видели, что в антиадиабатическом пределе всегда $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda_D \ll \lambda$, так что в показателе экспоненты в (50) ей можно пренебречь и выражение для T_c сводится просто к формуле слабой связи теории БКШ, в которой предэкспоненциальный множитель определяется полушириной зоны (энергией Ферми), а спаривательная константа связи в экспоненте определяется общим выражением теории Элиашберга – Макмиллана (с учетом обсуждения, проведенного выше).

В модели с одним оптическим фононом с частотой Ω_0 уравнение (49) имеет вид

$$1 + \tilde{\lambda} = 2\alpha^2(\Omega_0) \int_0^D \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'(\varepsilon' + \Omega_0)} \operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T_c}. \quad (51)$$

Уравнение (51) легко решается (интеграл в нем можно вычислить, как обычно, интегрированием по частям), и мы получаем

$$T_c \sim D \exp\left(-\frac{1 + \tilde{\lambda} + \lambda \ln(D/\Omega_0 + 1)}{\lambda}\right) = \\ = \frac{D}{1 + D/\Omega_0} \exp\left(-\frac{1 + \tilde{\lambda}}{\lambda}\right), \quad (52)$$

где для λ естественно возникает выражение (30). Видим, что в антиадиабатическом режиме при $D/\Omega_0 \ll 1$ это выражение сводится к (50), а в адиабатическом пределе $D/\Omega_0 \gg 1$ отсюда получаем обычное выражение для T_c в теории Элиашберга для случая промежуточной связи:

$$T_c \sim \Omega_0 \exp\left(-\frac{1 + \lambda}{\lambda}\right). \quad (53)$$

Таким образом, выражение (51) дает единое выражение для T_c , справедливое как в адиабатическом, так и в антиадиабатическом режиме, плавно интерполирует между этими предельными случаями.

В итоге мы приходим к достаточно неожиданным выводам — в пределе сильной неадиабатичности T_c определяется выражением типа слабой связи теории БКШ, в котором предэкспонента определяется не характерной частотой фононов, а энергией Ферми (последний вывод подчеркивался и в недавней работе Горькова [10]), а константа спаривательного взаимодействия сохраняет стандартную форму теории Элиашберга – Макмиллана. Введенная выше эффективная константа связи $\tilde{\lambda}$, стремящаяся в антиадиабатическом пределе к λ_D , определяет перенормировку массы, но отнюдь не температуру сверхпроводящего перехода.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрели электрон-фононную связь в теории Элиашберга – Макмиллана при выходе за рамки стандартного адиабатического приближения. Были получены простые соотношения для параметров взаимодействия электронов и фононов в ситуации, когда характерная частота фононов Ω_0 становится достаточно большой (сравнимой или превышающей энергию Ферми E_F). В частности, было проанализировано общее определение спаривательной константы связи λ , с учетом конечности частоты фононов. Было показано, что конечность этой частоты в популярной модели с доминирующим рассеянием «вперед» приводит к экспоненциальному подавлению константы связи при частотах $\Omega_0 \gg v_F q_0$, где q_0 определяет характерные размеры области передаваемых импульсов, в которой имеется заметное взаимодействие электронов с фононами. Аналогичная ситуация возникает и в обычном случае, когда q_0 порядка импульса обратной решетки, а частота оптических фононов превышает энергию Ферми E_F .

Получено простое выражение для обобщенной электрон-фононной константы связи $\tilde{\lambda}$, определяющей перенормировку массы в теории Элиашберга – Макмиллана с учетом конечной ширины зоны проводимости, описывающее плавный переход от адиабатического режима в область сильной неадиабатичности. Показано, что в условиях сильной неадиабатичности, когда $\Omega_0 \gg E_F$, в теории возникает новый параметр малости $\lambda E_F/\Omega_0 \sim \lambda D/\Omega_0 \ll 1$ (D — полуширина электронной зоны), а поправки к элек-

тронному спектру становятся, фактически, несущественными, как и все вершинные поправки.

Фактически, это позволяет применить общие уравнения Элиашберга и за пределами адиабатического приближения, в частности, в сильном антиадиабатическом пределе. Результаты нашего рассмотрения показывают, что при выходе за пределы адиабатического приближения, в пределе сильной неадиабатичности, для сверхпроводимости реализуется режим слабой связи. При этом величина перенормировки массы мала и определяется эффективной константой λ_D , тогда как величина спаривательного взаимодействия определяется стандартной константой связи $\lambda \gg \lambda_D$ теории Элиашберга – Макмиллана, соответствующим образом обобщенной с учетом конечности частоты фононов (сопоставимой или превышающей энергию Ферми). Поскольку обрезание спаривательного взаимодействия в куперовском канале в антиадиабатическом пределе, как мы видели выше (см. также работу Горькова [10]), происходит на энергиях порядка E_F , в приближении типа слабой связи (которое подтверждается проведенными выше оценками) возможные вершинные поправки можно считать несущественными и использовать для T_c обычное выражение теории типа теории БКШ (50), что также подчеркивалось в [10]. Малая величина E_F в системе FeSe/STO приводит к тому, что одного только взаимодействия с антиадиабатическими фононами в STO недостаточно для объяснения экспериментально наблюдаемых значений T_c , покуда мы остаемся в рамках приближения слабой связи и величина λ не превышает 0.25. Тогда необходим учет двух механизмов спаривательного взаимодействия — ответственного за формирование исходного T_{c0} в объемном FeSe (фононы или спиновые флуктуации в FeSe) и усиливающего спаривание за счет взаимодействия с оптическими фононами STO. Проведенные таким образом оценки T_c [8, 10] находятся в достаточно разумном соответствии с экспериментами на FeSe/STO, без привлечения идей о механизмах спаривания с рассеянием «вперед». В то же время, проведенное здесь рассмотрение показывает, что выражение для T_c типа (50), формально имеющее вид приближения слабой связи теории БКШ, в реальности «работает» (в пределе сильной неадиабатичности) и при достаточно больших значениях λ , по крайней мере, вплоть до $\lambda \sim 1$, когда становятся существенными поляронные эффекты. Соответственно, для объяснения экспериментально наблюдаемой T_c в системе FeSe/STO может оказаться достаточным учет взаимодействия только с оптическими фононами STO, коль скоро

могут быть реализованы значения $\lambda \sim 0.5$. Впрочем, достижение столь больших значений константы связи в этой системе, в свете проведенной выше дискуссии, представляется достаточно маловероятным (см. также результаты *ab initio*-расчетов λ в [23]).

Отдельный вопрос, оставшийся за рамками проведенного рассмотрения, это учет прямого кулоновского отталкивания. В стандартной теории Элиашберга – Макмиллана, в адиабатическом приближении, когда частота фононов на порядки меньше энергии Ферми, это отталкивание входит через кулоновский псевдопотенциал μ^* , который существенно подавлен толмачевским логарифмом [2]. В антиадиабатической ситуации этот механизм подавления отталкивания не работает, что создает дополнительные проблемы для реализации сверхпроводимости. В целом, вопрос о роли прямого кулоновского отталкивания в антиадиабатическом режиме электрон-фононного взаимодействия заслуживает серьезного дальнейшего изучения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-02-00015) и в рамках программы фундаментальных исследований № 12 Президиума РАН «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости».

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Scalapino, in *Superconductivity*, ed. by R. D. Parks, Marcel Dekker, New York (1969), p. 449.
2. С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов, Э. З. Курмаев, *Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений*, Наука, Москва (1977).
3. P. B. Allen and B. Mitrović, *Sol. St. Phys.*, Vol. 37, ed. by F. Seitz, D. Turnbull, and H. Ehrenreich, Acad. Press, New York (1982), p. 1.
4. L. P. Gor'kov and V. Z. Kresin, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 011001 (2018).
5. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
6. А. С. Александров, А. Б. Кребс, *УФН* **162**, 1 (1992).
7. I. Esterlis, B. Nosarzewski, E. W. Huang, D. Moritz, T. P. Devereux, D. J. Scalapino, and S. A. Kivelson, *Phys. Rev. B* **97**, 140501(R) (2018).
8. М. В. Садовский, *УФН* **178**, 1243 (2008).
9. L. P. Gor'kov, *Phys. Rev. B* **93**, 054517 (2016).
10. L. P. Gor'kov, *Phys. Rev. B* **93**, 060507 (2016).

11. Д. Р. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, Москва (1968).
12. М. В. Садовский, *Диалогматика*, ИКИ, Москва–Ижевск (2010).
13. P. B. Allen, Phys. Rev. B **6**, 2577 (1972).
14. M. L. Kulić, AIP Conf. Proc. **715**, 75 (2004).
15. J. J. Lee, F. T. Schmitt, R. G. Moore, S. Johnston, Y. T. Cui, W. Li, Z. K. Liu, M. Hashimoto, Y. Zhang, D. H. Lu, T. P. Devereaux, D. H. Lee, and Z. X. Shen, Nature **515**, 245 (2014).
16. O. V. Danylenko, O. V. Dolgov, M. L. Kulić, and V. Oudovenko, Eur. J. Phys. B **9**, 201 (1999).
17. M. Kulić, arXiv:1712.06222.
18. L. Rademaker, Y. Wang, T. Berlijn, and S. Johnston, New J. Phys. **18**, 022001 (2016).
19. Y. Wang, K. Nakatsukasa, L. Rademaker, T. Berlijn, and S. Johnston. Supercond. Sci. Technol. **29**, 054009 (2016).
20. И. А. Некрасов, Н. С. Павлов, М. В. Садовский, Письма в ЖЭТФ **105**, 354 (2017).
21. И. А. Некрасов, Н. С. Павлов, М. В. Садовский, ЖЭТФ **153**, 590 (2018).
22. Fengmiao Li and G. A. Sawatzky, Phys. Rev. Lett. **120**, 237001 (2018).
23. Y. Wang, A. Linscheid, T. Berlijn, and S. Johnson, Phys. Rev. B **93**, 134513 (2016).
24. M. A. Ikeda, A. Ogasawara, and M. Sugihara, Phys. Lett. A **170**, 319 (1992).