

ОБЩАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДОРОХОВА – МЕЛЛО – ПЕРЕЙРА – КУМАРА

*И. М. Суслов**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 февраля 2017 г.,
после переработки 15 февраля 2018 г.

Уравнение Дорохова – Мелло – Перейра – Кумара (ДМПК), описывающее эволюцию диагональных элементов многоканальной трансфер-матрицы, используемой для исследования неупорядоченных систем, выводится при минимальных предположениях о свойствах каналов. В общем случае получается уравнение диффузионного типа с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Предложено три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщение, полученное Мутталибом с соавторами. Два других варианта приводят к уравнениям одинаковой структуры, но с различными определениями входящих в них параметров. Они содержат дополнительные вклады, отсутствующие в первом варианте. Конечность коэффициентов при дополнительных вкладах за пределами металлической фазы устанавливается путем вычисления ляпуновских экспонент и их сопоставления с численными экспериментами. Обсуждается значение полученных уравнений для проблемы распределения кондактансов и для статуса результатов, полученных с помощью нелинейных сигма-моделей.

DOI: 10.1134/S0044451018070131

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Дорохова – Мелло – Перейра – Кумара (ДМПК) [1–4] является эффективным инструментом для исследования квазиодномерных неупорядоченных систем и имеет многочисленные физические приложения (см. обзор [5]). Оно описывает эволюцию диагональных элементов многоканальной трансфер-матрицы при увеличении длины системы. Уравнение ДМПК получается из принципа максимума энтропии (т. е. в предположении максимальной случайности, совместимой с симметричными ограничениями) и идеологически близко к теории случайных матриц Вигнера – Дайсона [6]. Оно зависит от одного параметра (длины системы, безразмерной на корреляционный радиус) и отражает универсальность, характерную для металлической фазы. Уравнение ДМПК эквивалентно суперсимметричной сигма-модели [7], выведенной из микроскопических гамильтонианов [8, 9], но в отличие от нее позволяет работать с распределениями фи-

зических величин. Решение уравнения ДМПК [3, 4] воспроизводит универсальные флуктуации кондактанса и квантовые поправки к нему, полученные из диаграммных вычислений [10, 11].

Метод трансфер-матрицы, лежащий в основе подхода ДМПК, в принципе, не ограничен квазиодномерной геометрией. Рассматривая систему N связанных одномерных цепочек и укладывая цепочки в соответствии с симметрией d -мерной решетки, можно переходить к системам более высокой размерности. Однако предположения, лежащие в основе уравнения ДМПК, приводят к статистической эквивалентности всех цепочек, что устраняет всякую информацию о топологии пространства в поперечном направлении. Это не позволяет использовать уравнение ДМПК для исследования перехода Андерсона и ограничивает его применимость условиями реализации металлической фазы в соответствующем d -мерном пространстве. При переходе в локализованную фазу d -мерной системы уравнение ДМПК оказывается неадекватным даже для квазиодномерной геометрии: предсказываемая им минимальная ляпуновская экспонента всегда оказывается порядка $1/N$, тогда как разумные микроскопические модели приводят к результату $O(1)$ [12, 13].

* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Последнее легко понять в режиме сильной локализации, когда проводимость квазиодномерной системы определяется одной резонансной траекторией¹⁾ и система фактически становится строго одномерной.

Из сказанного ясно, что в общем случае предположения, лежащие в основе уравнения ДМПК, должны быть ослаблены, что в частности необходимо для исследования универсальности, возникающей вблизи перехода Андерсона. Проблема вывода наиболее общей формы уравнения ДМПК осознается научным сообществом и признается достаточно фундаментальной [3, 4, 13, 15]. В частности, одно из возможных обобщений предложено Мутталибом с соавторами [15–17].

Как показано ниже, уравнение типа ДМПК может быть выведено при минимальных предположениях о свойствах каналов. В общем случае получается уравнение диффузионного типа с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Мы рассмотрим три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщенную форму, предложенную в работах [15–17]. Два других варианта приводят к уравнениям одинаковой структуры, но с различными определениями входящих в них параметров. Они содержат дополнительный член, отсутствующий в первом варианте и оказавшийся весьма актуальным в недавнем исследовании распределения кондактансов [14].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Представляя систему как набор N связанных одномерных цепочек, будем рассматривать ее как «черный ящик», к которому присоединены контакты, состоящие из идеальных одномерных проводников²⁾. Тогда систему можно рассматривать как эффективный рассеиватель и характеризовать трансфер-матрицей T , связывающей амплитуды волн слева ($A_n e^{ikx} + B_n e^{-ikx}$ в n -м канале) и справа ($C_n e^{ikx} + D_n e^{-ikx}$) от него (рис. 1):

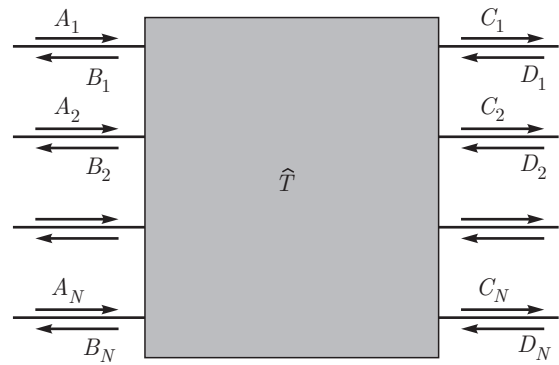


Рис. 1. Многоканальная трансфер-матрица \hat{T} связывает амплитуды плоских волн слева (A_n, B_n) и справа (C_n, D_n) от рассеивателя

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где A, B, C, D — векторы с компонентами A_n, B_n, C_n, D_n . При записи в векторной форме вид уравнения (1) не зависит от числа каналов, а трансфер-матрица естественным образом представляется в блочном виде; она допускает параметризацию [3, 19]

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где u, v, u_1, v_1 — унитарные матрицы, а λ — диагональная матрица с положительными элементами λ_i , которые являются собственными значениями эрмитовой матрицы $T_{12} T_{12}^+$. При наличии инвариантности относительно обращения времени возникают соотношения [2, 3]

$$v = u^*, \quad v_1 = u_1^*, \quad (3)$$

которые, как правило, не будут для нас существенны.

Основной интерес представляют параметры λ_i , которые в частности определяют проводимость

$$g = \sum_i \frac{1}{1 + \lambda_i} \quad (4)$$

(в определении Эконому – Соукоулиса [20, 21]). Уравнение ДМПК описывает эволюцию их совместной функции распределения $P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \equiv P\{\lambda\}$ при изменении длины системы L :

¹⁾ Простой пример построения резонансных траекторий приведен в примечании 4 работы [14]. В режиме сильной локализации вклад резонансных траекторий в проводимость имеет экспоненциальный разброс и она определяется самым прозрачным каналом.

²⁾ Тем самым представление о «каналах» используется в координатном представлении, что в частности устраняет все проблемы, связанные с затухающими модами [18].

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\lambda_i (1 + \lambda_i) J\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J\{\lambda\}} \right], \quad (5)$$

$$J\{\lambda\} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где $\beta = 1$ для ортогонального ансамбля (обычные системы со случайным потенциалом), $\beta = 2$ для унитарного ансамбля (системы в сильном магнитном поле), $\beta = 4$ для симплектического ансамбля (системы с сильным спин-орбитальным взаимодействием); параметр α имеет смысл обратной корреляционной длины квазиодномерной системы. Величина $J\{\lambda\}$ хорошо известна в теории случайных матриц [6] и возникает из якобиана преобразования

$$\prod_{ij} dH_{ij} = J\{\lambda\} \tilde{J}\{Q\} \prod_i d\lambda_i \prod_{ij} dQ_{ij} \quad (6)$$

при переходе от интегрирования по элементам матрицы \hat{H} к интегрированию по ее собственным значениям λ_i и элементам диагонализующей матрицы \hat{Q} ($\hat{H} = \hat{Q}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{Q}$). Фактически $J\{\lambda\}$ является функцией распределения уровней, если они находятся в ограниченном интервале с периодическими граничными условиями (дайсоновский круговой ансамбль). В реальных приложениях функция распределения содержит дополнительный множитель, обеспечивающий локализацию спектра в конечном интервале и мало влияющий на распределение близких уровней. Аналогично, распределение $P\{\lambda\} = J\{\lambda\}$ является формальным решением уравнения (5), но не обеспечивает условие нормировки; неизбежно существование дополнительного множителя, эволюция которого и описывается уравнением ДМПК. Как показывает точное решение (5) при $\beta = 2$ [22], дополнительный множитель не сводится к плавной огибающей, определяющей форму плотности состояний, и распределение $P\{\lambda\}$ отличается от $J\{\lambda\}$ уже на локальном уровне; корреляции λ_i определяются якобианом $J\{\lambda\}$ лишь в области малых L , когда λ_i малы. В контексте обобщений уравнения ДМПК это обстоятельство приобретает глубокий смысл (см. примечание 9) в разд. 5.

В строго одномерной системе имеем $J\{\lambda\} = 1$ и уравнение (5) сводится к виду

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda(1 + \lambda) \frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (7)$$

а λ совпадает с ландауэровским сопротивлением ρ [23]; такое уравнение получено во многих работах [24–28]. В недавней работе автора [14] показано, что общая форма уравнения эволюции в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[-\gamma(1 + 2\lambda)P(\lambda) + \lambda(1 + \lambda) \frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (8)$$

а дополнительный член, определяемый параметром γ , является физически значимым: его введение в схему Шапиро [29] позволило объяснить все существенные моменты в распределении кондактансов, чего не удавалось сделать на основе уравнения (7). Вполне естественно, что этот член не воспроизводится уравнением (5) — он исчезает в приближении случайных фаз, использованном при выводе последнего. Однако он не воспроизводится и обобщенным уравнением ДМПК, полученным в работах Мутталиба с соавторами [15–17],

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i K_{ii} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\lambda_i (1 + \lambda_i) J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right], \quad (9)$$

$$J_i\{\lambda\} = \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 2K_{jk}/K_{ii},$$

и содержащим в качестве параметров элементы K_{ij} некоторой матрицы \hat{K}^3 . Это показывает, что попытки обобщения уравнения ДМПК не являются достаточно продвинутыми и не воспроизводят всех физически существенных вкладов. Это обстоятельство и явилось главной мотивацией настоящей работы.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Вывод уравнения эволюции основан на соотношении

$$\hat{T}_{L+\Delta L} = \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L}, \quad (10)$$

где $\hat{T}_{\Delta L}$ — матрица, близкая к единичной. Форма уравнения ДМПК зависит от статистических свойств параметров ϵ_k , определяющих отклонение $\hat{T}_{\Delta L}$ от единичной матрицы. Эти параметры можно разделить на две группы: для первой

$$\langle \epsilon_k \rangle \neq 0, \quad (11)$$

тогда как для второй

$$\langle \epsilon_k \rangle = 0, \quad \langle \epsilon_k^2 \rangle \neq 0. \quad (12)$$

³⁾ Зависимость $J_i\{\lambda\}$ от i была не замечена в [16] (см. Приложение В), но в практическом смысле она не очень актуальна [30].

Наличие параметров типа (12) является необходимым для возникновения уравнения диффузионного типа: поскольку в первом порядке по ϵ_k эффект отсутствует, все вычисления нужно проводить с учетом членов второго порядка, что и приводит к появлению вторых производных, характерных для уравнения диффузии. Общая стратегия состоит в том, чтобы проводить усреднение только по параметрам (12), ничего не предполагая о параметрах первой группы.

Для вывода наиболее общей формы уравнения ДМПК нужно выделить категорию величин, для которых свойство (12) не является модельным предположением, а внутренне присуще самой их природе. Такие величины хорошо известны и связаны с диагональным беспорядком. В качестве примера рассмотрим уравнение Шредингера со случайным потенциалом, который для наглядности будем задавать на узлах решетки набором независимых случайных переменных V_n (как в модели Андерсона). Функции распределения переменных V_n должны быть одинаковы для сохранения пространственной однородности в среднем. Если среднее значение $\langle V_n \rangle$ отлично от нуля, то оно одинаково для всех n и может быть исключено путем сдвига начала отсчета энергии E , так как случайный потенциал входит в комбинации $V_n - E$. Таким образом, можно принять без ограничения общности

$$\langle V_n \rangle = 0, \quad \langle V_n^2 \rangle = W^2, \quad (13)$$

как это и делается в большинстве теоретических работ.

Это обстоятельство можно использовать следующим образом. Типичная квазиодномерная система представляет собой брусок, вырезанный из d -мерной решетки и содержащий случайно расположенные примеси (рис. 2а). Разобьем ее на последовательность эффективных рассеивателей, содержащих много узлов решетки (рис. 2б). Каждый рассеиватель обеспечивает существование двух эффектов: (а) частичное отражение падающих на него волн и (б) перемешивание каналов. Эти два процесса удобно представлять несколько разнесенными в пространстве (рис. 2в), так что имеется область, где происходит отражение волн без перемешивания каналов, и есть области, которые обеспечивают перемешивание каналов для прошедших и отраженных волн, но не приводят к их отражению. Такое предположение не является существенным, так как о степени пространственной разделенности мы ничего не предполагаем, и она может быть чисто символической. Фактически конструкция, представлен-

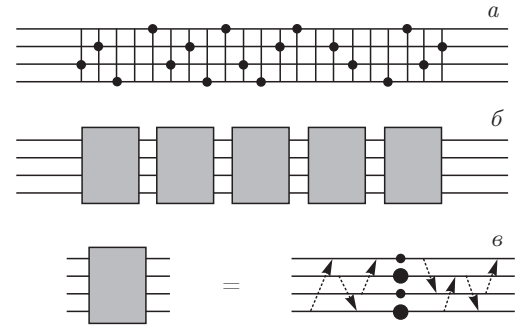


Рис. 2. а) Типичная квазиодномерная система представляет собой брусок, вырезанный из d -мерной решетки, в который внесены случайно расположенные примеси. б) Систему можно разделить на эффективные рассеиватели, матрицы которых перемножаются. в) Каждый рассеиватель обеспечивает частичное отражение падающих на него волн и перемешивание каналов; два этих процесса удобно представлять несколько разнесенными в пространстве

ная на рис. 2в, соответствует каноническому представлению матрицы в виде произведения (2): нетрудно видеть, что средняя матрица обеспечивает отражение волн без перемешивания каналов, а правая и левая — перемешивание каналов без отражения волн.

Среднюю часть эффективного рассеивателя (рис. 2в) можно описывать матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & 1 + i\epsilon \end{pmatrix}, \quad (14)$$

соответствующей диагональному беспорядку, создаваемому точечными рассеивателями на независимых одномерных цепочках, так что ϵ — диагональная матрица с действительными элементами ϵ_k , обладающими свойствами (12). Выделяя из (14) множители, не связанные с рассеиванием, примем следующее представление для матрицы $\hat{T}_{\Delta L}$:

$$\hat{T}_{\Delta L} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \epsilon^2} & -i\epsilon \\ i\epsilon & \sqrt{1 + \epsilon^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_3 & 0 \\ 0 & w_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 — унитарные матрицы, близкие к единичной, а элементы ϵ_k малы. Принимая для \hat{T}_L каноническое представление (2) и составляя произведение (10), легко видеть, что матрицы w_1, w_2 приводят к малой перенормировке матриц u и v , кото-

рой можно пренебречь⁴⁾. Нетрудно видеть, что для приведения матрицы $\hat{T}_{L+\Delta L}$ к канонической форме (2) достаточно привести к этой форме произведение

$$\hat{T}' = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sqrt{1+\epsilon^2} & -i\epsilon \\ i\epsilon & \sqrt{1+\epsilon^2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

При этом диагональные элементы λ'_i матрицы \hat{T}' будут совпадать с диагональными элементами матрицы $\hat{T}_{L+\Delta L}$.

Предположение о диагональном беспорядке для средней части эффективного рассеивателя (рис. 2б) не является существенным. Действительно, представление о слабых рассеивателях является неизбежным при выводе дифференциального уравнения — в противном случае можно получить лишь уравнение в конечных разностях. Если ориентироваться на описание перехода Андерсона, то следует работать вблизи края зоны идеального кристалла, так как только там слабый беспорядок совместим с локализацией в высших размерностях. Тогда длина волны и длина свободного пробега велики по сравнению с межатомным расстоянием, и огибающая волновой функции меняется медленно. Это позволяет огрубить описание, разбивая систему на блоки, малые по сравнению с длиной волны, но содержащие много атомов, и объявляя эти блоки новыми узлами решетки. В результате практически любой короткодействующий случайный потенциал сведется к диагональному гауссовскому беспорядку. Универсальность же, присущая переходу Андерсона, как и обычным критическим явлениям [31, 32], делает эквивалентными его описание в центре зоны и вблизи ее края⁵⁾.

⁴⁾ Форма уравнения (15) отличается от канонического представления (2) наличием мнимой единицы в средней матрице. Она может быть приведена к (2), но тогда матрицы w_i не будут стремиться к единичной при $\epsilon \rightarrow 0$ и приведут к конечной перенормировке матриц u и v . Использование матрицы (14) в качестве средней матрицы (15) приводит к более громоздким выкладкам.

⁵⁾ В случае сильных рассеивателей дифференциальная форма уравнения должна восстанавливаться при больших L (возможно, с другими определениями параметров), когда распределение $P\{\lambda\}$ становится широким и возможно разложение по приращениям аргументов даже для больших приращений.

4. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ

Изложим общую схему вывода уравнения эволюции, отсылая за деталями вычислений в Приложение А. Параметры λ'_i матрицы \hat{T}' являются собственными значениями эрмитового «гамильтониана» $H = T_{12}T_{12}^+$, где

$$T_{12} = \sqrt{1+\lambda}u(-i\epsilon) + \sqrt{\lambda}v\sqrt{1+\epsilon^2}, \quad (17)$$

что позволяет вычислить их как функции λ_i ($\lambda'_i = f_i\{\lambda\}$) в виде разложения по ϵ . Составляя функцию распределения λ'_i , имеем

$$P_{L+\Delta L}\{\lambda'\} = \int \prod_i d\lambda_i P_L\{\lambda\} \prod_i \delta(\lambda'_i - f_i\{\lambda\}) \times \\ \times P(\epsilon) P(u, v) d\epsilon du dv. \quad (18)$$

Мы не указываем в явном виде, что функции $f_i\{\lambda\}$ зависят от u, v, ϵ как от параметров. Сделаем замену переменных $y_i = f_i\{\lambda\}$ и перейдем от интегрирования по λ_i к интегрированию по y_i :

$$\prod_i d\lambda_i = I\{y\} \prod_i dy_i, \quad (19)$$

тогда как необходимое для этого обращение $\lambda_i = g_i\{y\}$ находится итерациями по ϵ . Интегрирование по y_i снимает δ -функции, приводя к результату

$$P_{L+\Delta L}\{\lambda\} = \\ = \int I\{\lambda\} P_L\{g_i\{\lambda\}\} P(\epsilon) P(u, v) d\epsilon du dv, \quad (20)$$

где мы переобозначили λ' на λ . При вычислении якобиана $I\{y\}$ существенно, что его диагональные элементы оказываются порядка единицы, а недиагональные — порядка ϵ^2 , так что фактически он сводится к произведению диагональных элементов. Подставляя $I\{\lambda\}$ и $g_i\{\lambda\}$ в виде разложений по ϵ и раскладывая (20) до второго порядка, проведем усреднение с учетом $\langle \epsilon_k \rangle = 0$, $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle \delta_{kk'}$. Полагая $\langle \epsilon^2 \rangle \equiv \alpha \Delta L$, получим⁶⁾

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[G_i\{\lambda\} P\{\lambda\} + \right. \\ \left. + \sum_j F_{ij}\{\lambda\} \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_j} \right], \quad (21)$$

⁶⁾ При огрублении описания, обсуждавшемся в конце разд. 3, дисперсии независимых рассеивателей складываются, так что их сумма $\langle \epsilon^2 \rangle$ пропорциональна объему системы, что в квазиодномерном случае дает линейную зависимость от ΔL . При таком определении параметр α оказывается порядка обратной длины пробега.

где введены следующие функции от λ_i (штрихи у знаков суммирования отмечают отсутствие членов с $j = i$) –

$$\begin{aligned}
 F_{ij}\{\lambda\} &= \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}A_{ij}, \\
 G_i\{\lambda\} &= (1+2\lambda_i)\left(\frac{1}{2}A_{ii}-1\right)+ \\
 &+ \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)}\sum_j'\frac{1+2\lambda_j}{4\sqrt{\lambda_j(1+\lambda_j)}}A_{ij}-\tilde{G}_i\{\lambda\}, \\
 \tilde{G}_i\{\lambda\} &= \sum_j'\frac{\lambda_i(1+\lambda_j)B_{ij}+\lambda_j(1+\lambda_i)C_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}+ \\
 &+ \sum_j'\frac{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}}{\lambda_i-\lambda_j}D_{ij}
 \end{aligned} \tag{22}$$

и использованы обозначения для матриц:

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \sum_k\langle|v_{ik}|^2|u_{jk}|^2\rangle, \\
 C_{ij} &= \sum_k\langle|u_{ik}|^2|v_{jk}|^2\rangle, \\
 D_{ij} &= -\sum_k\langle v_{ik}v_{jk}u_{ik}^*u_{jk}^*+v_{ik}^*v_{jk}^*u_{ik}u_{jk}\rangle, \\
 A_{ij} &= \sum_k\langle u_{ik}u_{jk}^*v_{ik}^*v_{jk}+u_{ik}^*u_{jk}v_{ik}v_{jk}^* - \\
 &- u_{ik}u_{jk}v_{ik}^*v_{jk}^*-u_{ik}^*u_{jk}^*v_{ik}v_{jk}\rangle.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение (21) представляет собой наиболее общую форму уравнения ДМПК: в ней не сделано никаких предположений о статистических свойствах матриц u и v – они даже не обязаны быть случайными. Правая часть уравнения (21) представляет собой сумму полных производных, что обеспечивает сохранение полной вероятности.

5. ДИАГОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Уравнение (21) – диффузионного типа, причем коэффициент диффузии является тензором с ненулевыми недиагональными компонентами. В общем виде оно слишком громоздко для конструктивного анализа, поэтому рассмотрим возможности его упрощения.

Уравнение (21) радикально упрощается, если предположить диагональный вид для матриц A_{ij} и D_{ij} :

$$A_{ij} = A_i\delta_{ij}, \quad D_{ij} = D_i\delta_{ij}. \tag{24}$$

Положим еще $B_{ij} = C_{ij} \equiv K_{ij}$, так как статистические свойства матриц u и v обычно одинаковы.

Тогда уравнение (21) приводится к виду (см. Приложение В)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} &= \alpha \sum_i \frac{1}{2}A_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[-\gamma_i(1+2\lambda_i)P\{\lambda\} + \right. \\
 &+ \left. \lambda_i(1+\lambda_i)J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right], \\
 \gamma_i &= (2K_{ii} - A_i)/A_i, \\
 J_i\{\lambda\} &= \prod_{j<k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 4K_{jk}/A_i,
 \end{aligned} \tag{25}$$

что отличается от (9) наличием дополнительных членов с параметрами γ_i и сводится к (8) в одноканальном случае. Наличие этих членов изменяет величину ляпуновских экспонент (разд. 6) и имеет принципиальное значение для проблемы распределения кондактансов (разд. 7).

Условия реализации диагонального приближения рассмотрим для случая унитарного ансамбля, когда матрицы u и v усредняются независимо. Если для унитарной матрицы u ограничиться действительными матричными элементами, то она превращается в ортогональную матрицу \tilde{u} ; чтобы вернуться к унитарной матрице, нужно дописать к элементам матрицы \tilde{u} надлежащие фазовые множители. Производя аналогичную процедуру для матрицы v , положим

$$u_{lk} = \tilde{u}_{lk}e^{i\varphi_{lk}}, \quad v_{lk} = \tilde{v}_{lk}e^{i\phi_{lk}} \tag{26}$$

и подставляя в (23), имеем

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \sum_k \langle |\tilde{v}_{ik}|^2 |\tilde{u}_{jk}|^2 \rangle, \\
 C_{ij} &= \sum_k \langle |\tilde{u}_{ik}|^2 |\tilde{v}_{jk}|^2 \rangle, \\
 D_{ij} &= -2 \sum_k \langle \tilde{v}_{ik}\tilde{v}_{jk}\tilde{u}_{ik}\tilde{u}_{jk} \times \\
 &\times \cos(\phi_{ik} + \phi_{jk} - \varphi_{ik} - \varphi_{jk}) \rangle, \\
 A_{ij} &= 4 \sum_k \langle \tilde{v}_{ik}\tilde{v}_{jk}\tilde{u}_{ik}\tilde{u}_{jk} \sin(\varphi_{ik} - \phi_{ik}) \times \\
 &\times \sin(\varphi_{jk} - \phi_{jk}) \rangle.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Если матрицы \tilde{v} и \tilde{u} полностью случайны, а фазы φ_{ik} и ϕ_{ik} имеют неоднородные распределения, то средние от произведений $\tilde{v}_{ik}\tilde{v}_{jk}$, $\tilde{u}_{ik}\tilde{u}_{jk}$ обращаются в нуль при $i \neq j$, обеспечивая диагональное приближение (24), в котором A_i и K_{ij} не связаны определенным соотношением; при этом для K_{ij} получается тривиальный результат (см. ниже выражение (28)). Если же, наоборот, матрицы \tilde{v} и \tilde{u} недостаточно случайны, но фазы φ_{ik} и ϕ_{ik} полностью стохастизированы, то возникает диагональное приближение

с нетривиальными K_{ij} и соотношением $A_i = 2K_{ii}$; в результате член с γ_i исчезает и (25) сводится к варианту (9), предложенному Мутталибом и др. [15–17]. Наконец, если полностью случайными являются как \tilde{v} , \tilde{u} , так и φ_{ik} , ϕ_{ik} , то усреднение происходит по унитарной группе, приводя к результатам

$$K_{ij} = \sum_k \langle |v_{ik}|^2 \rangle \langle |u_{jk}|^2 \rangle = \frac{1}{N}, \quad \beta_{jk}^i = 2, \quad (28)$$

$$K_{ij} = \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 \rangle = \frac{1 + \delta_{ij}}{N + 1}, \quad \beta_{jk}^i = 1 \quad (29)$$

соответственно для унитарного и ортогонального ансамблей, так что уравнение (9) превращается в обычное уравнение ДМПК (5)⁷⁾.

Перейдем к третьему варианту диагонального приближения, который представляется наиболее актуальным для приложений. Как обсуждалось в работах [14, 33], для правильного определения проводимости конечных систем полезно введение полупрозрачных границ, отделяющих рассматриваемую систему от присоединенных к ней идеальных контактов. При переходе к пределу слабопрозрачаемых границ возникают универсальные уравнения, не зависящие от способа исключения контактного сопротивления резервуара [34] (все формулы ландауэровского типа [35–39] в этом пределе сводятся к варианту Эконому – Соукоулиса [20, 21]), которые затем можно экстраполировать к прозрачности порядка единицы. Такое определение заведомо относится к изучаемой системе (а не составной системе «образец + идеальные провода») и обеспечивает бесконечное значение проводимости для идеальной системы [33].

Будем считать, что слабопрозрачные границы обусловлены введением точечных рассеивателей на одномерные проводники, присоединенные к системе (рис. 2а); тогда ее трансфер-матрица \hat{T} переходит в $\hat{T}_0 \hat{T} \hat{T}_0$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix}, \quad (30)$$

⁷⁾ Для ортогонального ансамбля диагональное приближение, приводящее к (25), не реализуется.

где κ — диагональная матрица. Приводя (30) к каноническому виду (2), получим в главном приближении при больших κ

$$\begin{aligned} u_1 \sqrt{1 + \lambda} u &= -\kappa \tilde{T} \kappa, & u_1 \sqrt{\lambda} v &= -\kappa \tilde{T} \kappa, \\ v_1 \sqrt{\lambda} u &= \kappa \tilde{T} \kappa, & v_1 \sqrt{1 + \lambda} v &= \kappa \tilde{T} \kappa, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\tilde{T} = T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}$. Поскольку унитарные матрицы u , v , u_1 , v_1 имеют ограниченные матричные элементы, то $\lambda \sim \kappa^4$, что позволяет заменить $1 + \lambda$ на λ , после чего имеем

$$u = v, \quad u_1 = -v_1 \quad \text{при} \quad \kappa \rightarrow \infty. \quad (32)$$

При больших λ_i уравнения (21)–(23) упрощаются к виду, аналогичному (25), но с другим определением K_{ij} (см. Приложение В),

$$K_{ij} = (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2.$$

Подстановка (32) в (23) дает $K_{ij} \rightarrow 0$, $A_{ij} \rightarrow 0$ в пределе $\kappa \rightarrow \infty$. При больших, но конечных κ нужно учитывать малые отклонения v от u , полагая

$$v_{jk} = u_{jk} \exp \{i h_{jk}\}, \quad (33)$$

где матричные элементы h_{jk} малы по модулю; они действительны для ортогонального ансамбля и комплексны для унитарного. Подставляя в (23), получим во втором порядке по h_{jk}

$$\begin{aligned} 2K_{ij} &= \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 (|h_{ik}|^2 + |h_{jk}|^2 + \\ &\quad + h_{ik} h_{jk} + h_{ik}^* h_{jk}^*) \rangle, \\ A_{ij} &= \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 (h_{ik} h_{jk} + h_{ik}^* h_{jk}^* + \\ &\quad + h_{ik}^* h_{jk} + h_{ik} h_{jk}^*) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что $A_{ii} = 2K_{ii}$ независимо от статистики h_{ik} (фактически это следует из общих выражений (23)). В пределе $\kappa \rightarrow \infty$ модули h_{ik} стремятся к нулю, но никаких других ограничений на их статистику не возникает. Естественно считать, что h_{ik} случайно флуктуируют и их флуктуации независимы от u_{ik} ⁸⁾. Тогда попарные произведения $h_{ik} h_{jk}$, $h_{ik}^* h_{jk}^*$, ... с $i \neq j$ при усреднении обращаются в нуль, и матрица A_{ij} оказывается диагональной. В результате уравнение (21) принимает вид

⁸⁾ Если матрица u содержит зависимость от h_{jk} , то эта зависимость проявляется в членах третьего порядка, которыми мы пренебрегаем.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} &= \alpha \sum_i K_{ii} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[-\gamma_i(1+2\lambda_i) P\{\lambda\} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i(1+\lambda_i) J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right], \\ J_i\{\lambda\} &= \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 2K_{jk}/K_{ii}, \quad (35) \\ \gamma_i &= \left(1 - \sum_j K_{ij} \right) / K_{ii}, \\ K_{ij} &= (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2 \end{aligned}$$

и имеет ту же структуру, что (25), но с другим определением параметров. Поскольку K_{ij} малы при больших κ , то параметры γ_i заведомо конечны и велики по модулю.

Заметим, что первые два варианта диагонального приближения выглядят несколько искусственно. Если матрицы u и v полностью случайны, то мы возвращаемся к исходному уравнению (5). Если же u и v недостаточно случайны, то возникает тенденция к недиагональной ситуации: мы не видим серьезных оснований считать \tilde{u}_{ij} более случайными, чем φ_{ij} или наоборот. Напротив, в третьем варианте диагональное приближение выглядит вполне естественным — введение слабопроницаемых границ ограничивает взаимные флуктуации u и v , но за пределами этих ограничений они считаются совершенно случайными. Одновременно вся ситуация с определением проводимости становится логически замкнутой.

Как ясно из вывода, структура уравнения (35) одинакова для унитарного и ортогонального ансамбля, что позволяет исследовать системы в произвольном магнитном поле. При этом β становится свободным параметром, не связанным с вигнер-дайсоновскими значениями, а в общем случае превращается в матрицу⁹⁾.

6. ЛЯПУНОВСКИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Простейшим физическим приложением уравнения (35) является вычисление ляпуновских экспонент. Согласно рис. 2, трансфер-матрица квазиод-

⁹⁾ На первый взгляд, при нецелых β нарушается закон оттаивания уровней при аномальном сближении двух из них [40]. Однако уже в рамках обычного уравнения ДМПК корреляция λ_i определяется якобианом $J\{\lambda\}$ лишь в области малых L и усложняется на больших масштабах (см. обсуждение после формулы (6)); физически это связано с переходом от квазиметаллического к локализованному режиму. В общем случае взаимосвязь между $P\{\lambda\}$ и $J_i\{\lambda\}$ становится еще более сложной.

номерной системы представляется в виде произведения трансфер-матриц, соответствующих эффективным рассеивателям. Как следствие общей теоремы Оселедца [41], параметры λ_i имеют при больших L экспоненциальное поведение $\lambda_i \propto \exp\{\kappa_i L\}$, где ляпуновские показатели κ_i стремятся при $L \rightarrow \infty$ к детерминированным (не случайным) значениям. Обратные значения $l_i = 1/\kappa_i$ определяют N характерных длин рассматриваемой N -канальной задачи, максимальная из которых является корреляционным радиусом соответствующей квазиодномерной системы. Значение ляпуновских экспонент для анализа перехода Андерсона в настоящее время хорошо известно: на этом факте основан численный алгоритм [12], в контексте которого имеется множество публикаций¹⁰⁾.

Как известно [2, 5], уравнение (5) легко решается в пределе больших L , когда параметры λ_i велики и подчиняются иерархии $\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \dots \gg \lambda_N$; тогда $J\{\lambda\}$ сводится к произведению от степеней λ_i , и уравнение (5) распадается на N независимых уравнений. Применяя ту же процедуру к уравнению (35), получим независимые гауссовские распределения для величин $x_i = \ln \lambda_i$, определяемые двумя первыми моментами:

$$\langle x_i \rangle = \alpha L \left[(2\gamma_i + 1)K_{ii} + 2 \sum_{j=i+1}^N K_{ij} \right], \quad (36)$$

$$\sigma_i^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = 2\alpha L K_{ii},$$

что при $\gamma_i = 0$ совпадает с результатами [13, 16]. В приближении эквивалентных каналов можно положить $\alpha K_{ii} = \tilde{\alpha}$, $\beta_{ij} = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, так что уравнение (35) содержит три параметра $\tilde{\alpha}L$, β , γ ; в частности,

$$\frac{2\langle x_i \rangle}{\sigma_i^2} = 2\gamma + 1 + \beta(N - i) \quad (37)$$

и параметры β , γ легко получить из численных данных по ляпуновским экспонентам (см., например, [44, 45]). Из формулы (32) работы [45] следует, что соотношение $\sigma_i^2 = 2\langle x_i \rangle$ для минимальной экспоненты ($i = N$ в наших обозначениях) справедливо в металлическом режиме, но нарушается вне его, а стало быть параметр γ отличен от нуля за преде-

¹⁰⁾ Популярное изложение алгоритма и его критический анализ можно найти в работе [42], а его обоснование в рамках самосогласованной теории локализации — в работе [43]. Там же имеются многочисленные ссылки.

лами металлической фазы¹¹⁾. Представляется вероятным, что конечные значения γ_i возникают как раз на переходе Андерсона и сигнализируют о появлении локализованной фазы. Как показывают численные эксперименты [30], правильную зависимость ляпуновских экспонент от N удается объяснить уже в контексте уравнения (9); наличие параметров γ_i открывает дополнительные возможности в этом отношении.

7. СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНДАКТАНСОВ

Согласно (4), параметры λ_i определяют безразмерный кондактанс g , т. е. полную проводимость системы в единицах e^2/h . Поэтому уравнение ДМПК дает принципиальную возможность для исследования распределения кондактансов. На данный момент это единственный систематический подход к этой проблеме¹²⁾. До настоящего времени он был ограничен слабонеупорядоченными квазиодномерными системами; проведенные обобщения распространяют его на окрестность перехода Андерсона и режим сильной локализации.

Скейлинговый подход к проблеме основан на крупномасштабных построениях Шапиро [29], аналогичных преобразованиям Мигдала–Каданова в обычной теории фазовых переходов [31, 32]. Из b кубических блоков размера L составляется квазиодномерная система длины L_z , после чего параллельное соединение b^{d-1} таких систем образует d -мерный куб большего размера. Согласно гипотезе однопараметрического скейлинга [47], свойства кубической системы размера L полностью определяются параметром L/ξ . Свойства квазиодномерной системы, составленной из кубических блоков, зависят от свойств одного блока (L/ξ) и числа кубиков (L_z/L); при наличии магнитного поля добавляется еще параметр L/l_H , где $l_H = (c\hbar/2eH)^{1/2}$ — магнитная длина. Таким образом, имеем для кондактанса

$$g = F\left(\frac{L}{\xi}, \frac{L_z}{L}, \frac{L}{l_H}\right). \quad (38)$$

Универсальные соотношения типа (38) формируются на больших масштабах. Если функцию F считать неизменной, то размер L можно уменьшать до значений $L \sim a$, где a — атомный масштаб. Тогда квазиодномерная система является достаточно тонкой, ее каналы хорошо перемешиваются рассеиванием, и естественно ожидать применимости приближения эквивалентных каналов, когда $\alpha K_{ii} = \tilde{\alpha}$, $\beta_{ij} = \beta$, $\gamma_i = \gamma$ и обобщенное уравнение ДМПК (35) содержит три параметра $\tilde{\alpha}$, β , γ , которые находятся во взаимно-однозначном соотношении с параметрами L/ξ , L_z/L , L/l_H уравнения (38). Таким образом, все трехпараметрическое семейство распределений кондактанса, возникающее в квазиодномерных системах, может быть получено в результате решения обобщенного уравнения ДМПК в приближении эквивалентных каналов¹³⁾. Легко видеть, что переменность параметра β и наличие дополнительных членов, определяемых параметрами γ_i , имеют принципиальное значение для самосогласованности этой картины.

8. СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Главным отличием уравнения (35) от обычного уравнения ДМПК является замена вигнер-дайсоновского якобиана $J\{\lambda\}$ на более сложные комбинации $J_i\{\lambda\}$. При этом β перестает быть целочисленным и в общем случае зависит от трех индексов. Отсюда ясно, что за пределами металлической фазы «чистые» вигнер-дайсоновские ансамбли теряют свою актуальность и, в частности, не адекватны для описания перехода Андерсона. Последнее обстоятельство не учитывается в существующих вариантах сигма-моделей [8, 9], которые эквивалентны простейшему уравнению (5) и требуют модификации для учета обсуждаемых обобщений.

Во избежание недоразумений прокомментируем ситуацию более подробно. Суперсимметричные сигма-модели строятся по аналогии с теорией сверхпроводимости [46]; при этом роль сверхпроводящего параметра порядка играет суперматричное поле Q , пространственные изменения которого предполагаются на масштабе ξ_0 , существенно превышающем

¹¹⁾ В формуле (4.5) работы [17] приведено более общее выражение для $\langle x_i \rangle$, учитывающее нарушение сильной иерархии λ_i в квазитрехмерной геометрии; оно переходит в результаты [13, 16] в пределе $L \rightarrow \infty$ при фиксированном N , в котором и определяются ляпуновские экспоненты. По-видимому, в условиях работы [17] матрица D_{ij} оказывалась диагональной с ненулевыми элементами D_{ii} ; поэтому конечность γ_i компенсировалась переопределением K_{ii} и не влияла на качество обработки по формуле (4.5).

¹²⁾ В подходе, основанном на использовании сигма-моделей, распределение кондактансов удается установить лишь в очень простых случаях, когда возможно вычисление всех моментов [46].

¹³⁾ Используя схему Шапиро в дифференциальной форме, можно пытаться получить уравнение, описывающее распределение кондактансов d -мерной системы [14].

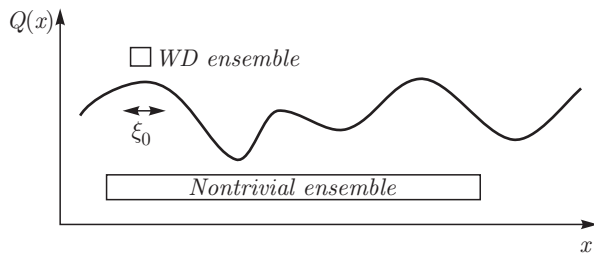


Рис. 3. Предполагается, что суперсимметричное поле Q изменяется на масштабе ξ_0 , существенно превышающем атомный. На масштабах, меньших ξ_0 , применим вигнер-дайсоновский ансамбль, а на больших масштабах возникает некоторый нетривиальный ансамбль

атомный. Как показано Ефетовым [48], флуктуации поля Q при условии его пространственной однородности приводят к вигнер-дайсоновской статистике; поэтому именно такая статистика предполагается на масштабах, меньших ξ_0 (рис. 3). При переходе к большим масштабам следует учитывать пространственные флуктуации поля Q , что приводит к формированию некоторого нетривиального ансамбля¹⁴⁾ (рис. 3). Этот ансамбль предполагается адекватным для всех физических ситуаций; в частности, ожидается (но не доказывается), что в точке перехода Андерсона он будет совпадать с соответствующим критическим ансамблем. Эти надежды оказываются иллюзорными. В настоящее время хорошо известно [40], что критический ансамбль является стационарным и не зависит от масштаба расстояний: если он реализуется при больших L , то он сохраняется и на произвольных масштабах, вплоть до самого малого. Поэтому не существует масштаба, на котором справедлива вигнер-дайсоновская статистика; от противного можно заключить, что поле Q меняется быстро и не может считаться постоянным ни на каком масштабе.

Эти проблемы удастся обойти лишь для размерности $d = 2 + \epsilon$, когда критическая статистика близка к вигнер-дайсоновской и различие между ними несущественно в главном ϵ -приближении. Однако сигма-модели претендуют на описание перехода Андерсона во всех порядках по ϵ , хотя их соответствие с исходными неупорядоченными системами устанавливается лишь в главном порядке. Такая точка зре-

¹⁴⁾ Это находится в полном согласии с ДМПК-подходом. Распределение λ_i определяется якобианом $J\{\lambda\}$ при малых L , но становится более сложным при переходе к большим масштабам [22].

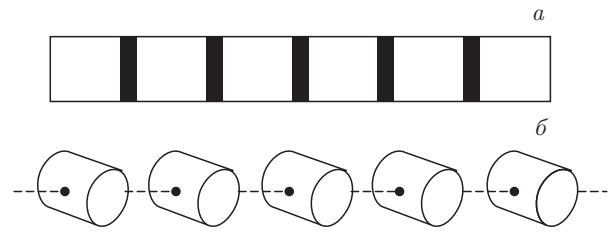


Рис. 4. *a)* Одномерная версия модели гранулированного металла, используемой при выводе решеточной сигма-модели. Фактически последняя соответствует более сложной топологии (*б*), когда каждая гранула рассматривается как конечная система с периодическими граничными условиями

ния имеет некоторые основания¹⁵⁾, но полностью исключается сказанным выше. Действительно, нулевым приближением теории $2 + \epsilon$ является двумерная система в металлическом режиме, когда применимость вигнер-дайсоновской статистики не вызывает сомнений. При переходе к $d = 2 + \epsilon$ учитывается изменение лишь размерности пространства, тогда как статистический ансамбль считается неизменным; в действительности он должен изменяться вместе с размерностью, чтобы соответствовать критической точке.

Попытка преодоления этих трудностей делается в решеточных версиях сигма-моделей [52], которые выводятся для системы слабосвязанных металлических гранул (рис. 4*a*); поле Q считается постоянным внутри каждой гранулы, что позволяет описывать их вигнер-дайсоновской статистикой. При этом неявно используется аналогия с гранулированными сверхпроводниками. В последнем случае сверхпроводящий параметр порядка является постоянным внутри каждой гранулы и резко падает до нуля на ее границах. Модуль параметра порядка определяется равновесным значением при данной температуре и одинаков во всех гранулах. Флуктуациям подвержена лишь фаза параметра порядка, которая неизменна внутри одной гранулы, но имеет свое значение в

¹⁵⁾ Обычно аргументируется, что соответствие сигма-моделей с исходными неупорядоченными системами достаточно установить лишь приближенно, чтобы попасть в нужный класс универсальности, тогда как оставшееся различие устраняется в результате ренормгрупповой эволюции. Но это предполагает устойчивость сигма-моделей, в отношении которой имеются большие сомнения [49]. С другой стороны, исходную неупорядоченную систему можно свести к трем различным сигма-моделям: бозонной [50], фермионной [51] и суперсимметричной [46]. В главном ϵ -приближении все три сигма-модели эквивалентны, но трудно ожидать их эквивалентности во всех порядках по ϵ . А следовательно, приведенный аргумент заведомо отказывает в двух из трех случаев и нет оснований к нему относиться серьезно.

каждой грануле. Если джозефсоновские связи между гранулами достаточно сильны, то значения фаз в разных гранулах оказываются сильно скоррелированными, что приводит к установлению дальнего порядка. При уменьшении общего масштаба джозефсоновских связей фазовые флуктуации возрастают, что приводит к разрушению сверхпроводимости в некоторой критической точке [53]. Переход Андерсона в решеточных сигма-моделях описывается аналогично сверхпроводящему переходу в гранулированных системах.

Однако нет никаких оснований ожидать, что суперсимметричное поле Q ведет себя так же, как сверхпроводящий параметр порядка. Фактически можно утверждать обратное. Как ясно из разд. 5, введение слабопроницаемых границ ограничивает взаимные флуктуации матриц u и v , что приводит к существенному отличию ансамбля от вигнер-дайсоновского (в последнем случае матрицы u и v флуктуируют свободно). От противного можно заключить, что введение слабопроницаемых границ приводит к существенным изменениям поля Q внутри одной гранулы. Фактически решеточные сигма-модели соответствуют более сложной топологии (рис. 4б), когда каждая гранула считается конечной системой с периодическими граничными условиями, при которых постоянство поля Q внутри нее не вызывает сомнений. Именно к такой топологии относятся результаты для перехода Андерсона, полученные путем решения сигма-моделей [54]; однако их актуальность для реальной ситуации (рис. 4а) оказывается проблематичной.

Последний вывод не является неожиданным. Актуальность решеточных сигма-моделей уже давно вызывала сомнение в связи с вопросом о верхней критической размерности [55]. Решеточные сигма-модели не обнаруживают особых размерностей в интервале $2 < d < \infty$, тогда как выделенность размерности $d = 4$ проявляется во всех диаграммных вычислениях для неупорядоченных систем. Фактически это следствие теоремы Боголюбова о перенормируемости теории φ^4 [56], к которой задача о переходе Андерсона сводится математически точно [32, 57]. До настоящего времени эти сомнения носили абстрактный характер, но теперь они приобретают конструктивную форму.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе уравнение ДМПК выводится при минимальных предположениях о свойствах

каналов; оно имеет диффузионный вид с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Предложено три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщение, полученное в работах [15–17]. Два других варианта приводят к уравнению, содержащему дополнительные вклады, характеризующиеся параметрами γ_i . Существенность последних продемонстрирована на примере вычисления ляпуновских экспонент. Обсуждаются следствия полученных уравнений для проблемы распределения контактансов и статуса нелинейных сигма-моделей.

Наиболее общая форма (21) уравнения ДМПК, по-видимому, не является актуальной; ее нужно использовать для формулировки новых статистических гипотез, которые были бы адекватны для анализа перехода Андерсона. Методы численного моделирования позволяют вычислять матрицы u и v [18] и на основании их статистических свойств устанавливать форму матриц A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} . Численный анализ, проводившийся в контексте уравнения (9) [17, 30]¹⁶⁾, по-видимому, указывает на реализацию диагонального приближения и отличие параметров β_{jk}^i от вигнер-дайсоновских значений; конечность параметров γ_i следует из формулы (32) работы [45]. Такой анализ желательно продолжить на основе более общих выражений (23). С другой стороны, математические методы, разработанные для анализа обычного уравнения ДМПК [3–5], по-видимому, могут быть использованы для получения более общих результатов; наличие больших параметров γ_i может этому способствовать.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вывод уравнения эволюции

Параметры λ'_i матрицы \hat{T}' являются собственными значениями эрмитового «гамильтониана» $H = T_{12}T_{12}^+$ (см. (17)), который имеет матричные элементы¹⁷⁾

¹⁶⁾ Заметим, что настоящая работа проясняет условия реализации уравнения (9); в частности, самоусредняемость K_{ij} , подробно обсуждавшаяся в работе [30], в действительности не имеет никакого значения.

¹⁷⁾ Все вычисления проводятся во втором порядке по ϵ . Мнимая единица i входит лишь в несколько выражений в качестве множителя и легко отличима от индексов.

$$\begin{aligned}
 H_{ij} &= \lambda_i \delta_{ij} + V_{ij}, \\
 V_{ij} &= i \sum_k \epsilon_k \left[\sqrt{\lambda_l(1+\lambda_j)} v_{lk} u_{jk}^* - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{(1+\lambda_l)\lambda_j} u_{lk} v_{jk}^* \right] + \\
 &+ \sum_k \epsilon_k^2 \left[\sqrt{(1+\lambda_l)(1+\lambda_j)} u_{lk} u_{jk}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\lambda_l \lambda_j} v_{lk} v_{jk}^* \right].
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Собственные значения λ'_i матрицы H вычисляются по обычной теории возмущений

$$\lambda'_i = \lambda_i + V_{ii} + \sum_j' \frac{V_{ij} V_{ij}^*}{\lambda_i - \lambda_j}, \tag{A.2}$$

что позволяет получить их в виде разложения по ϵ_k

$$\begin{aligned}
 \lambda'_i = f_i\{\lambda\} &= \lambda_i + \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\
 &+ \sum_{kk'} C_{kk'}^i \{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\begin{aligned}
 A_k^i &= i(v_{lk} u_{lk}^* - u_{lk} v_{lk}^*), \\
 B_k^i\{\lambda\} &= (1+\lambda_i)|u_{ik}|^2 + \lambda_i|v_{ik}|^2, \\
 C_{kk'}^i\{\lambda\} &= B_k^i\{\lambda\} \delta_{kk'} + \\
 &+ \sum_j' \frac{\lambda_i(1+\lambda_j)B_{ijkk'} + (1+\lambda_i)\lambda_j C_{ijkk'}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\
 &+ \sum_j' \frac{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}}{\lambda_i - \lambda_j} D_{ijkk'}, \tag{A.4} \\
 B_{ijkk'} &= v_{ik} v_{ik'}^* u_{jk}^* u_{jk'}, \\
 C_{ijkk'} &= u_{ik} u_{ik'}^* v_{jk}^* v_{jk'}, \\
 D_{ijkk'} &= -v_{ik} u_{ik'}^* u_{jk}^* v_{jk'} - u_{ik} v_{ik'}^* v_{jk}^* u_{jk'}.
 \end{aligned}$$

Составляя функцию распределения (18) и делая замену $y_i = f_i\{\lambda\}$, приходим к формуле (20), где обращение $\lambda_i = g_i\{y\}$ находится итерациями по ϵ_k :

$$\begin{aligned}
 \lambda_i = g_i\{y\} &= y_i - \sqrt{y_i(1+y_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\
 &+ \frac{1}{2}(1+2y_i) \sum_{kk'} A_k^i A_{k'}^i \epsilon_k \epsilon_{k'} - \sum_{kk'} C_{kk'}^i \{y\} \epsilon_k \epsilon_{k'}. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Интегрирование по y_i снимает δ -функции, приводя к результату (20). Матрица якобиана $I\{y\}$ имеет диагональные элементы порядка единицы и недиагональные порядка ϵ^2 ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_i} &= 1 - \frac{(1+2y_i)}{2\sqrt{y_i(1+y_i)}} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\
 &+ \sum_{kk'} A_k^i A_{k'}^i \epsilon_k \epsilon_{k'} - \sum_{kk'} \frac{\partial C_{kk'}^i \{y\}}{\partial y_i} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \tag{A.6} \\
 \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} &= - \sum_{kk'} \frac{\partial C_{kk'}^i \{y\}}{\partial y_j} \epsilon_k \epsilon_{k'} \quad (j \neq i),
 \end{aligned}$$

так что ее детерминант сводится к произведению диагональных элементов и вычисляется по схеме

$$\begin{aligned}
 \prod_i (1 + a_i \epsilon + b_i \epsilon^2) &\approx 1 + \sum_i a_i \epsilon + \sum_i b_i \epsilon^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{ij}' a_i a_j \epsilon^2, \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

приводящей к результату

$$I\{\lambda\} = 1 + \sum_k R_k\{\lambda\} \epsilon_k + \sum_{kk'} S_{kk'}\{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \tag{A.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_k\{\lambda\} &= - \sum_i \frac{(1+2\lambda_i)}{2\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)}} A_k^i, \\
 S_{kk'}\{\lambda\} &= \sum_i \left(A_k^i A_{k'}^i - \frac{\partial C_{kk'}^i \{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \right) + \\
 &+ \frac{1}{8} \sum_{ij}' \frac{(1+2\lambda_i)(1+2\lambda_j)}{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}} A_k^i A_{k'}^j. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}
 P_L\{g_i\{\lambda\}\} &= P_L\{\lambda_i + \Delta\lambda_i\} = P_L\{\lambda\} + \\
 &+ \sum_i \frac{\partial P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \Delta\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Delta\lambda_i \Delta\lambda_j, \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta\lambda_i &= -\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\
 &+ \sum_{kk'} L_{kk'}^i \{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

$$L_{kk'}^i \{\lambda\} = \frac{1}{2}(1+2\lambda_i) A_k^i A_{k'}^i - C_{kk'}^i \{\lambda\}.$$

Подставляя (A.8)–(A.11) в (20) и усредняя с учетом $\langle \epsilon_k \rangle = 0$, $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \alpha \Delta L \delta_{kk'}$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P\{\lambda\}}{\alpha \partial L} &= P\{\lambda\} \sum_k \langle S_{kk}\{\lambda\} \rangle + \sum_i \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \times \\
 &\times \sum_k \left\langle L_{kk}^i \{\lambda\} - \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} A_k^i R_k\{\lambda\} \right\rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)} \times \\
 &\times \sum_k \left\langle A_k^i A_k^j \right\rangle, \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

что после преобразований сводится к (21)–(23).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Упрощение уравнения (21)

В диагональном приближении (24) уравнение (21) принимает вид

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[G_i\{\lambda\} P\{\lambda\} + \frac{1}{2} A_i \lambda_i (1 + \lambda_i) \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \right], \quad (\text{B.1})$$

$$G_i\{\lambda\} = (1 + 2\lambda_i) \frac{A_i - 2}{2} - \sum_j' \frac{2\lambda_i \lambda_j + \lambda_i + \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} K_{ij}.$$

Сумма по j преобразуется с помощью тождества [2]

$$\sum_j' \frac{K_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\partial \ln J\{\lambda\}}{\partial \lambda_i}, \quad (\text{B.2})$$

$$J\{\lambda\} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{K_{ij}},$$

справедливого для симметричной матрицы K_{ij} , что позволяет преобразовать комбинацию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_i \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} - 2 \frac{\partial \ln J\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} P\{\lambda\} &= \\ &= \frac{1}{2} A_i J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}}, \quad J_i\{\lambda\} \equiv J\{\lambda\}^{4/A_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

и привести (B.1) к виду (25). Если соотношение (B.2) используется без учета симметрии K_{ij} , то легко придти к ложному выводу, что $J_i\{\lambda\}$ не зависит от i и определяется параметрами $\beta_{ij} = 4K_{ij}/A_i$.

В случае слабопроницаемых границ параметры λ_i велики и можно провести разложение по $1/\lambda_i$ с сохранением двух первых членов; тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_i(1 + \lambda_i)\lambda_j(1 + \lambda_j)} &\approx (2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i + \lambda_j)/2, \\ \sqrt{\lambda_i(1 + \lambda_i)} &\approx (1 + 2\lambda_i)/2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

и в (22) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i\{\lambda\} &= -(1 + 2\lambda_i) \sum_j' K_{ij} + \sum_j' \frac{B_{ij} - C_{ij}}{2} + \\ &+ 2\lambda_i(1 + \lambda_i) \sum_j' \frac{K_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

где $K_{ij} = (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2$. Поскольку обычно $B_{ij} = C_{ij}$, то мы опустим второй член в правой части, но сохраним симметричное определение для K_{ij} . Используя (B.2), приведем (21), (22) к виду (35).

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Дорохов, Письма в ЖЭТФ **36**, 259 (1982).
2. P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, Ann. Phys. (N. Y.) **181**, 290 (1988).
3. P. A. Mello and A. D. Stone, Phys. Rev. B **44**, 3559 (1991).
4. A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, Phys. Rev. B **46**, 14985 (1992).
5. C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
6. M. L. Mehta, Random Matrices, Academic Press, New York (1991).
7. P. W. Brower and K. Frahm, Phys. Rev. B **53**, 1490 (1996).
8. K. B. Efetov, Adv. Phys. **32**, 53 (1983).
9. S. Iida, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, Ann. Phys. (N. Y.) **200**, 219 (1990).
10. Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).
11. P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
12. J. L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C: Sol. St. Phys. **14**, L127 (1981); A. MacKinnon and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
13. J. T. Chalker and M. Bernhardt, Phys. Rev. Lett. **70**, 982 (1993).
14. И. М. Суслов, ЖЭТФ **151**, 897 (2017).
15. K. A. Muttalib and J. R. Klauder, Phys. Rev. Lett. **82**, 4272 (1999).
16. K. A. Muttalib and V. A. Gopar, Phys. Rev. B **66**, 11538 (2002).
17. A. Douglas, P. Markoš, and K. A. Muttalib, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 125103 (2014).
18. P. Markoš, Acta Phys. Slovaca **56**, 561 (2006).
19. P. A. Mello and J. L. Pichard, J. Phys. I **1**, 493 (1991).
20. E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
21. D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
22. C. W. J. Beenakker and B. Rejaei, Phys. Rev. Lett. **71**, 3689 (1993).

23. R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
24. В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
25. A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
26. N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
27. B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
28. P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
29. B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
30. K. A. Muttalib, P. Markoš, and P. Wölfle, Phys. Rev. B **72**, 125317 (2005).
31. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, Мир, Москва (1975).
32. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
33. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
34. A. D. Stone and A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
35. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
36. D. C. Langreth and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).
37. М. Яа. Azbel, J. Phys. C **14**, L225 (1981).
38. M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).
39. M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
40. B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears et al., Phys. Rev. B **47**, 11487 (1993).
41. В. И. Оселедец, Труды Моск. мат. общества **19**, 197 (1968).
42. И. М. Суслов, ЖЭТФ **128**, 768 (2005).
43. И. М. Суслов, ЖЭТФ **141**, 122 (2012).
44. J. L. Pichard and G. Andre, Europhys. Lett. **2**, 477 (1986).
45. P. Markoš, J. Phys.: Cond. Matter **7**, 8361 (1995).
46. K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge, University Press (1995).
47. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
48. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **83**, 833 (1982).
49. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
50. F. Wegner, Z. Phys. B **35**, 207 (1979); L. Schäfer and F. Wegner, Z. Phys. B **38**, 113 (1980). S. Hikami, Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981).
51. К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980).
52. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **88**, 1032 (1985).
53. B. Mühlischlegel, D. J. Scalapino, and R. Denton, Phys. Rev. B **6**, 1767 (1972); G. Deutscher, Y. Imry, and L. Gunter, Phys. Rev. B **10**, 4598 (1974).
54. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **92**, 638 (1987); **93**, 1125 (1987); M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **34**, 6394 (1986); Nucl. Phys. B **265**, 375 (1986).
55. И. М. Суслов, ЖЭТФ **146**, 1272 (2014).
56. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976); E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
57. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977); М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).