

ЭФФЕКТЫ СВЕРХСТАРЕНИЯ И СУБСТАРЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНОМ КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СТРУКТУРНО-НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ XY-МОДЕЛИ

*В. В. Прудников**, *П. В. Прудников*, *И. С. Попов*

*Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
644077, Омск, Россия*

Поступила в редакцию 2 августа 2017 г.

Осуществлено численное исследование методом Монте-Карло особенностей неравновесного критического поведения в двумерной структурно-неупорядоченной XY-модели при ее эволюции из низкотемпературного начального состояния. На основе анализа двухвременной зависимости автокорреляционных функций и динамической восприимчивости для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0, 0.9, 0.6$ были выявлены эффекты старения, характеризующиеся замедлением релаксации системы с ростом времени ожидания, и нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы. Для рассматриваемых систем получены значения универсального предельного флуктуационно-диссипативного отношения. В результате анализа двухвременной скейлинговой зависимости для спин-спиновой и связанной спиновой автокорреляционных функций выявлено, что присутствие дефектов структуры приводит к эффектам субстарения в поведении спин-спиновой автокорреляционной функции и сверхстарения в поведении связанной спиновой автокорреляционной функции.

DOI: 10.7868/S0044451018030100

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенности критического поведения систем вблизи температуры фазового перехода второго рода связаны с возникновением в критическом состоянии аномально больших, долгоживущих и сильновзаимодействующих флуктуаций основных термодинамических величин [1, 2]. Понижение размерности рассматриваемых систем приводит к усилению флуктуационных эффектов.

Особое место среди низкоразмерных систем занимают двумерные системы с непрерывной симметрией. Известно, что в данных системах дальний порядок разрушается при всех конечных температурах. Однако случай двумерной XY-модели характеризуется осуществлением в системе топологического фазового перехода Березинского – Костерлица – Таулесса при температуре T_{BKT} [3–5]. Фазовый переход связан с диссоциацией связанных пар вихрь–антивихрь в точке перехода. Особенностью

данной системы является аномально сильные пространственная и временная корреляции состояний системы во всей низкотемпературной фазе ($T < T_{BKT}$), характеризующиеся степенными законами убывания, в то время как для термодинамических фазовых переходов второго рода эффекты сильной корреляции осуществляются лишь вблизи критической точки. Это позволяет наблюдать медленную динамику двумерной XY-модели не только вблизи критической точки, а во всем низкотемпературном диапазоне $T \leq T_{BKT}$ [6, 7].

Двумерная XY-модель используется для описания поведения и свойств целого ряда физических систем, в частности ультратонких магнитных пленок, планарных магнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость», сверхтекучих тонких пленок, двумерных кристаллов и двумерной турбулентности [8].

Хотя равновесные свойства двумерной XY-модели к настоящему времени достаточно подробно изучены, исследование неравновесной динамики модели и влияния структурного беспорядка на ее неравновесные критические свойства вызывают значительный научный интерес. Связано это с явлениями аномально медленной релаксации из началь-

* E-mail: prudnikv@univer.omsk.su

ного неравновесного состояния и возникающими в двумерной XY-модели эффектами старения, памяти и нарушением флуктуационно-диссипативной теоремы, а также влиянием на них сильной вихревой неравновесности, кластеризации областей квазидальнего порядка и пиннинга вихрей на дефектах структуры [6, 7, 9].

Исследование неравновесного поведения систем с медленной динамикой, к которым относятся и системы в критической точке, вызывает в последние годы значительный научный интерес [10–12]. Связано это с наблюдаемыми в них эффектами старения и нарушения флуктуационно-диссипативной теоремы. Старение — это эффект замедления релаксационных процессов при увеличении времени, прошедшего с момента приготовления образца до начала измерения его свойств и называемого «возрастом» образца или временем ожидания t_w . Проявляется старение через динамические зависимости двухвременных характеристик систем, таких как автокорреляционные функции $C(t, t_w)$ и функции отклика $R(t, t_w)$. В режиме старения данные функции зависят не от разности времен $t - t_w$, а от t и t_w в отдельности, т. е. происходит нарушение однородности процесса релаксации во времени. Старение сопровождается нарушением флуктуационно-диссипативной теоремы, связывающей динамические зависимости автокорреляционной функции и функции отклика системы [13–17].

Неравновесные релаксационные процессы вызывают особый интерес в критическом поведении двумерной XY-модели, в которой за счет степенного характера пространственной и временной корреляций состояний системы особенности медленной динамики могут наблюдаться не только вблизи критической точки, но и во всем низкотемпературном диапазоне $T \leq T_{BKT}$. Присутствие дефектов структуры приводит к возникновению в поведении двумерной XY-модели эффекта пиннинга вихревых возбуждений на дефектах [18], что существенно замедляет динамические процессы в системе. Квазидальний порядок в системе сохраняется с введением структурного беспорядка [19]. Неравновесное критическое поведение в структурно-неупорядоченной двумерной XY-модели обусловлено неравновесными процессами в вихревой подсистеме, спин-волновыми процессами и взаимодействием данных подсистем с дефектами структуры. С учетом того, что двумерная XY-модель используется для описания поведения и свойств широкого ряда физических систем (см. обзор [8]), интерес к исследованию особенностей низкотемпературного неравновесного поведения

данной модели и влияния на него структурного беспорядка очень высок.

Данная работа посвящена исследованиям влияния дефектов структуры на эффекты старения при неравновесном критическом поведении двумерной XY-модели с эволюцией из начального низкотемпературного состояния, когда основной вклад в неравновесную динамику системы вносят спин-волновые возбуждения. Эффекты старения при эволюции структурно-неупорядоченной системы из начального высокотемпературного состояния были исследованы ранее в работе [7], в которой показано, что по сравнению с поведением «чистой» системы [6, 20] наличие дефектов структуры существенно замедляет неравновесную динамику системы. В настоящей работе в результате численного исследования методами Монте-Карло впервые показывается, что при эволюции системы из начального низкотемпературного состояния присутствие дефектов структуры приводит к неравновесным эффектам субстарения в поведении спин-спиновой автокорреляционной функции и эффектам сверхстарения в поведении связанной спиновой автокорреляционной функции, характеризующимся более слабой (для субстарения) или более сильной (для сверхстарения) зависимостями двухвременной автокорреляционной функции от времени ожидания t_w по сравнению с эффектами канонического старения [21]. Определяются значения универсального предельного флуктуационно-диссипативного отношения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Эффекты старения, проявляющиеся на неравновесном этапе релаксации системы с медленной динамикой, характеризуются существованием двухвременных зависимостей для таких функций, как корреляционная функция и функция отклика от времени ожидания t_w и времени наблюдения $t - t_w$. Для спиновой системы временная корреляционная функция определяется выражением ($t > t_w$)

$$C(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d x [\langle S(x, t) S(x, t_w) \rangle - \langle S(x, t) \rangle \langle S(x, t_w) \rangle], \quad (1)$$

а функция отклика на малое внешнее магнитное поле h , приложенное к системе в момент времени t_w , соотношением

$$R(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d x \left. \frac{\delta \langle S(x, t) \rangle}{\delta h(x, t_w)} \right|_{h=0}, \quad (2)$$

где $S(x, t)$ — величина спиновой плотности системы.

Время ожидания определяется временем, прошедшим с момента приготовления образца до начала измерения его характеристик. В течение $t - t_w$, $t_w \ll t_{rel}$, где t_{rel} — время релаксации системы, во временном поведении системы проявляется влияние начальных состояний системы и эффектов старения, характеризующихся как нарушением трансляционной симметрии системы во времени, так и замедлением релаксационных и корреляционных процессов с увеличением «возраста» образца t_w .

Неравновесное поведение системы реализуется путем ее перевода в начальный момент времени $t = 0$ из равновесного состояния при температуре T_0 в состояние при температуре T_s , не равной температуре T_0 . Возникающий в системе процесс установления равновесия характеризуется временем релаксации $t_{rel}(T_s)$, и на временах $t, t_w \gg t_{rel}(T_s)$ достигается состояние равновесия, соответствующее температуре T_s , и динамика системы оказывается стационарной и инвариантной относительно обращения времени. Однако на временах $t, t_w \ll t_{rel}(T_s)$ эволюция системы зависит от начального состояния системы. В связи с этим выделяют неравновесное поведение систем с эволюцией из высокотемпературного ($T_0 > T_s$) и низкотемпературного ($T_0 < T_s$) начальных состояний. Случай неравновесного критического поведения двумерной XY-модели с эволюцией из высокотемпературного начального состояния ($T_0 \gg T_s$) с $T_s \leq T_{BKT}$ и влияния на него дефектов структуры детально рассмотрен в работе [7]. В данной работе рассматривается случай эволюции из низкотемпературного начального состояния с полностью упорядоченной спиновой конфигурацией, созданной при $T_0 = 0$, в состояние при $T_s \leq T_{BKT}$ с исследованием влияния на него дефектов структуры.

Важным проявлением медленной динамики является нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) [6, 11, 13–15], которая связывает функцию отклика системы и корреляционную функцию соотношением

$$R(t, t_w) = \frac{X(t, t_w)}{T_s} \frac{\partial C(t, t_w)}{\partial t_w}, \quad (3)$$

где $X(t, t_w)$ — флуктуационно-диссипативное отношение (ФДО), характеризующее нарушение ФДТ для времен $t, t_w \ll t_{rel}$. ФДТ утверждает, что в равновесном состоянии $X(t > t_w \gg t_{rel}) = 1$. Предельное значение

$$X^\infty = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_w) \quad (4)$$

используется в качестве универсальной характеристики неравновесного поведения систем с медленной динамикой. Универсальность предельного ФДО была доказана для ряда точно решаемых статистических моделей [22, 23] и подтверждена для двумерной и трехмерной моделей Изинга при реализации численных Монте-Карло-исследований [16, 17, 23–25], а также для релаксационной модели ϕ^4 ренормгрупповыми методами описания с применением ε -разложения [26–28].

Двухвременная зависимость корреляционной функции и функции отклика в неравновесном критическом поведении двумерной XY-модели на основании размерного анализа характеризуется следующими скейлинговыми соотношениями [29, 30]:

$$\begin{aligned} C(t, t_w) &= \frac{1}{(t - t_w)^{\eta(T)/z}} f_C \left(\frac{\xi(t)}{\xi(t_w)} \right), \\ R(t, t_w) &= \frac{1}{(t - t_w)^{1+\eta(T)/z}} f_R \left(\frac{\xi(t)}{\xi(t_w)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где скейлинговые функции f_C и f_R являются конечными при $t_w \rightarrow 0$, $\eta(T)$ — критический индекс Фишера, определяющий степенной характер пространственной зависимости корреляционной функции, z — динамический критический индекс со значением $z = 2$ для релаксационной динамики двумерной XY-модели [31, 32], а корреляционная длина $\xi(t)$ имеет различный характер временной зависимости для различных начальных состояний: $\xi(t) \propto (t/\ln t)^{1/z}$ для $T_0 \gg T_{BKT}$ и $\xi(t) \propto t^{1/z}$ для $T_0 = 0$. Возникающие в $\xi(t)$ при эволюции из высокотемпературного начального состояния логарифмические поправочные множители отражают влияние эффектов взаимодействия вихрей [30].

Справедливость скейлинговых форм (5) для низкотемпературного начального состояния была подтверждена полученными в спин-волновом приближении в работе [6] аналитическими выражениями

$$\begin{aligned} C(t, t_w) &\propto \frac{1}{(t - t_w)^{\eta(T)/2}} \left(\frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} \right)^{\eta(T)/4}, \\ R(t, t_w) &\propto \frac{\eta(T)}{2T(t - t_w)^{1+\eta(T)/2}} \left(\frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} \right)^{\eta(T)/4}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\lambda = t/t_w$, а также результатами численных Монте-Карло-исследований [6, 20, 32].

Из соотношений (6) видно, что в долговременном режиме при $t - t_w \gg t_w$ временное убывание как автокорреляционной функции, так и функции отклика замедляется,

$$C(t, t_w) \propto t^{-\eta(T)/4}, \quad R(t, t_w) \propto t^{-(1+\eta(T)/4)}$$

по сравнению с начальным этапом с $t - t_w \ll t_w$ — квазиравновесным режимом, когда

$$C(t, t_w) \propto (t - t_w)^{-\eta(T)/2},$$

$$R(t, t_w) \propto (t - t_w)^{-(1+\eta(T)/2)}.$$

При переходном режиме — режиме старения, реализуемом на временах $t - t_w \sim t_w$, в эффектах временного замедления данных характеристических функций наглядно начинает проявляться зависимость от времени наблюдения t_w . В работе [6] предсказывается нарушение ФДТ на временах $t - t_w \geq t_w$ с предельным ФДО $X^\infty > 1$.

В настоящей работе проведено исследование влияния дефектов структуры на эффекты старения и значения предельного ФДО в неравновесном критическом поведении двумерной XY-модели. Гамильтониан модели задается выражением

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} p_i p_j \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (7)$$

где $J > 0$ — обменный интеграл, \mathbf{S}_i — плоский классический спин, связанный с i -м узлом двумерной квадратной решетки, p_i — числа заполнения, характеризующие наличие структурного некоррелированного беспорядка в системе: $p_i = 1$, если в i -м узле решетки находится спин, и $p_i = 0$, если в узле находится дефект (немагнитный атом примеси). Дефекты структуры распределялись в системе каноническим образом в соответствии с функцией распределения

$$P(p_i) = (1 - p)\delta(p_i) + p\delta(1 - p_i),$$

где $p = \langle p_i \rangle$ характеризует величину спиновой концентрации.

В работе исследовалось временное поведение спин-спиновой автокорреляционной функции

$$C_{ss}(t, t_w) = \left\langle \left\langle \frac{1}{pL^2} \sum_i p_i \mathbf{S}_i(t) \cdot \mathbf{S}_i(t_w) \right\rangle \right\rangle \quad (8)$$

и связанной спиновой автокорреляционной функции

$$C_{con}(t, t_w) = \left[\left\langle \frac{1}{pL^2} \sum_i p_i \mathbf{S}_i(t) \cdot \mathbf{S}_i(t_w) \right\rangle \right] - \left[\left\langle \frac{1}{pL^2} \sum_i p_i \mathbf{S}_i(t) \right\rangle \left\langle \frac{1}{pL^2} \sum_i p_i \mathbf{S}_i(t_w) \right\rangle \right], \quad (9)$$

где $N_s = pL^2$ задает число спинов в квадратной плоской решетке с линейным размером L , угловые скобки характеризуют статистическое усреднение по реализациям начального состояния, квадратные — усреднение по различным конфигурациям распределения дефектов в решетке.

Для случая неравновесной эволюции систем из высокотемпературного начального состояния в поведении спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$ и связанной спиновой автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ различий фактически не возникает, так как начальное значение намагниченности M_0 и последующие ее значения

$$\mathbf{M}(t) = \left[\left\langle \frac{1}{pL^2} \sum_i p_i \mathbf{S}_i(t) \right\rangle \right] \quad (10)$$

оказываются малыми в процессе эволюции. В случае эволюции систем из низкотемпературного начального магнитоупорядоченного состояния с $T_0 = 0$ временные зависимости автокорреляционных функций $C_{ss}(t, t_w)$ и $C_{con}(t, t_w)$ заметно различаются. В частности, в работе [33] было показано, что присутствие дефектов структуры приводит в неравновесном критическом поведении трехмерной модели Изинга из низкотемпературного начального состояния к аномально сильному эффекту замедления связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ в форме явления «сверхстарения», характеризуемого за счет пиннинга доменных стенок на дефектах структуры более сильной степенной зависимостью данной автокорреляционной функции от времени старения t_w^μ с показателем $\mu > 1$, в то время как для канонического старения $\mu = 1$ [21].

Линейная функция отклика $R(t, t_w)$, соответствующая определению (2), не может быть непосредственно измерена экспериментально по причине нарушения ФДТ или получена методами компьютерного моделирования. Более удобной величиной является интегральная характеристика — динамическая восприимчивость

$$\chi(t, t_w) = \int_{t_w}^t dt' R(t, t'), \quad (11)$$

при вычислении которой поле возмущения $h(x, t)$ применяется с момента времени ожидания t_w до t . Методами Монте-Карло восприимчивость $\chi(t, t_w)$ для двумерной XY-модели может быть рассчитана на основе следующего соотношения:

$$\chi(t, t_w) = \left[\frac{1}{pL^2 h^2} \sum_i \langle p_i \mathbf{h}_i(t_w) \cdot \mathbf{S}_i(t) \rangle \right], \quad (12)$$

являющегося обобщением выражения для динамической восприимчивости чистой двумерной XY-модели из работы [6] на случай структурно-неупорядоченной модели. В соотношении (12) \mathbf{h}_i — малое случайное бимодальное магнитное поле, черта сверху

обозначает процедуру усреднения по различным реализациям магнитного поля на узлах решетки. Для вычисления динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ в момент времени t_w к гамильтониану (7) добавляется возмущение

$$\delta H = - \sum_i p_i \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{S}_i,$$

в котором случайное магнитное поле на узлах кристаллической решетки задается бимодальным распределением $\pm h$ [6].

Можно определить ФДО $X(t, t_w)$ с использованием соотношения (3) и выражения (11) для динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$, в соответствии с которыми получаем

$$\begin{aligned} T_s \chi(t, t_w) &= \int_{t_w}^t X(t, t') \frac{\partial C(t, t')}{\partial t'} dt' = \\ &= \int_{C(t, t_w)}^1 X(C) dC. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате, если задать величину $T_s \chi(t, t_w)$ как параметрическую функцию $C(t, t_w)$, можно определить ФДО в следующей дифференциальной форме:

$$X^\infty(t_w) = - \lim_{C \rightarrow 0} \frac{d(T_s \chi(C))}{dC}. \quad (14)$$

Получая на основе результатов компьютерного моделирования и применения соотношения (14) набор $X^\infty(t_w)$ для различных времен ожидания t_w , предельное ФДО X^∞ определяем при осуществлении экстраполяции $X^\infty(t_w \rightarrow \infty)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

Были рассмотрены системы с концентрациями спинов, равными $p = 1.0, 0.9, 0.8$ на квадратной решетке с линейным размером $L = 512$. Температуры T_{BKT} для систем с данными спиновыми концентрациями характеризуются значениями

$$T_{BKT}(p = 1.0) = 0.893(2) \frac{J}{k_B} \quad [34, 35],$$

$$T_{BKT}(p = 0.9) = 0.679(7) \frac{J}{k_B} \quad [35],$$

$$T_{BKT}(p = 0.8) = 0.485(4) \frac{J}{k_B} \quad [35].$$

В работе [30], в которой были проведены Монте-Карло-исследования динамического поведения корреляционной длины $\xi(t)$ для двумерной ХУ-модели и выявлены эффекты зависимости $\xi(t)$ от неравновесных начальных состояний, анализ результатов основывался на моделировании неравновесного поведения систем с линейными размерами решеток $L < 256$. Последующие исследования неравновесного поведения двумерной ХУ-модели на решетках с $L = 512$ [20] не выявили размерного изменения динамических величин по сравнению с результатами работы [30]. Это позволяет нам считать, что при изучении релаксационных процессов на решетке с $L = 512$ размерного изменения динамических характеристик можно не опасаться.

В работе [18] было проведено динамическое исследование влияния одиночного примесного узла на процесс пиннинга вихревого возбуждения в двумерной ХУ-модели. Полученные наглядные представления об изменении спиновых конфигураций системы во времени позволяют сделать вывод о том, что при линейных размерах решетки $L > 200$ можно говорить лишь об исключительно слабой зависимости характеристик вихревой подсистемы от размера решетки L . В работе [19] моделирование структурно-неупорядоченной двумерной ХУ-модели было ограничено линейным размером решетки $L = 128$, при этом в исследованиях асимптотического поведения парной корреляционной функции и расчетах критического индекса η для различных спиновых концентраций наблюдалось хорошее соответствие Монте-Карло-результатов результатам аналитических расчетов. Цитируемые исследования, как и проведенное нами ранее изучение неравновесного поведения двумерной ХУ-модели [7, 9, 35, 36], указывают на то, что результаты, основанные на моделировании решеток с $L = 512$, можно считать достоверными и практически не зависящими от размеров эффектов.

Моделирование осуществлялось нами с использованием алгоритма Метрополиса, реализующего диссипативную динамику двумерной ХУ-модели во всей низкотемпературной фазе вплоть до точки фазового перехода с $T \leq T_{BKT}$ [31, 36]. Время в процессе моделирования измеряется в шагах Монте-Карло на спин (ШМК/спин) с реализацией за этот шаг процедуры из $N_s = pL^2$ случайных выборок спинов в узлах системы с пробным их переворотом и изменением спиновой конфигурации.

Для двумерной ХУ-модели со спиновыми концентрациями $p = 1.0, 0.9, 0.8$ нами был проведен

расчет двухвременной зависимости для связанной спиновой автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ (9), спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$ (8) и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ (12) при различных температурах замораживания в низкотемпературной фазе с $T_s \equiv T \leq T_{BKT}(p)$. При исследовании двухвременной зависимости динамической восприимчивости системы $\chi(t, t_w)$, задаваемой соотношением (12), амплитуда h бимодального случайного поля $h_i = \pm h$ выбиралась равной 0.04. При моделировании «чистой» системы с $p = 1$ статистическое усреднение вычисляемых корреляционных и термодинамических характеристик осуществлялось по 12000 прогонок (различным реализациям динамики системы). При моделировании структурно-неупорядоченной XY-модели усреднение вычисляемых величин проводилось по 10000 конфигурациям дефектов структуры и 15 статистическим прогонам для каждой примесной конфигурации.

В качестве примера на рис. 1 приведены графики связанной автокорреляционной функции для $p = 1.0$ и $p = 0.8$ при температурах $T = T_{BKT}(p)$ и $T = 0.1$. Эффекты старения наглядно проявляются через зависимость автокорреляционной функции от возраста системы t_w на временах наблюдения $t - t_w \sim t_w$ и характеризуются замедлением корреляции в системе с увеличением ее возраста. Из представленных графиков также видно, что с ростом концентрации дефектов (уменьшением спиновой концентрации p) происходит усиление эффектов старения, проявляющееся в усилении влияния времен ожидания t_w на замедление временного убывания автокорреляционной функции. Так, на рис. 1 на временах $t - t_w \sim t_w$ наблюдается следующее соответствие рассчитанных значений связанной автокорреляционной функции для систем с $p = 0.8$ и $p = 1.0$:

$$C_{con}(t - t_w \sim t_w, t_w, p = 0.8) > C_{con}(t - t_w \sim t_w, t_w, p = 1.0).$$

Отметим, что в случае эволюции двумерной XY-модели из высокотемпературного начального состояния [7] замедление корреляции на одну и ту же величину происходит на временах наблюдения, на порядок больших, чем при эволюции модели из низкотемпературного начального состояния.

На рис. 2 представлены графики двухвременных зависимостей спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$ для спиновых концентраций $p = 1.0$, $p = 0.9$ и $p = 0.8$ при соответствующих

температурах $T = T_{BKT}(p)$. Видно, что для данного типа автокорреляционной функции наблюдается обратная зависимость от времени ожидания t_w , а именно, временное убывание спин-спиновой автокорреляционной функции усиливается с ростом t_w , и об эффектах старения можно говорить лишь в обобщенном смысле как о проявлениях двухвременной зависимости $C_{ss}(t, t_w)$ от времени наблюдения $t - t_w$ и времени ожидания t_w . Поэтому подлинные эффекты старения при эволюции двумерной XY-модели из низкотемпературного начального состояния наблюдаются лишь в поведении связанной автокорреляционной функции.

Из сопоставления графиков на рис. 1 и рис. 2 видно существенно более медленное временное убывание спин-спиновой автокорреляционной функции по сравнению со связанной автокорреляционной функцией, различающееся в значениях этих функций на временах наблюдения $t - t_w = 10^3$ ШМК/спин на один-два порядка в зависимости от величины t_w .

На рис. 3 с графиками для динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ видна ее более слабая зависимость от времени ожидания t_w , чем для автокорреляционных функций $C_{con}(t, t_w)$ (см. рис. 1) и $C_{ss}(t, t_w)$ (см. рис. 2). Это потребовало введения дополнительных вставок на рис. 3 для демонстрации «тонкой» t_w -структуры динамической восприимчивости, характеризующих проявление эффектов старения в ее временном поведении, а именно, уменьшение отклика системы на внешнее поле с ростом ее возраста t_w . Поэтому задаче исследования влияния дефектов структуры на эффекты старения в поведении двухвременных функций больше соответствуют автокорреляционные функции.

Влияние дефектов структуры на неравновесное поведение двумерной XY-модели наиболее наглядно проявляется в сильном замедлении связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ (см. рис. 1) и соответствующем росте времен корреляции в структурно-неупорядоченных системах по сравнению с чистой системой. Мы связываем эти сильные изменения в поведении $C_{con}(t, t_w)$ с процессом кластерной фрагментации, происходящим при эволюции двумерной XY-модели из низкотемпературного начального состояния, когда один большой кластер при $T_0 = 0$ с $M_0 = 1$ фрагментируется на совокупность более малых кластеров. Введение в систему дефектов приводит к аномальному замедлению процесса кластерной фрагментации [9]. В работе [9] показано, что времена выхода динамических зависимостей геометрических характе-

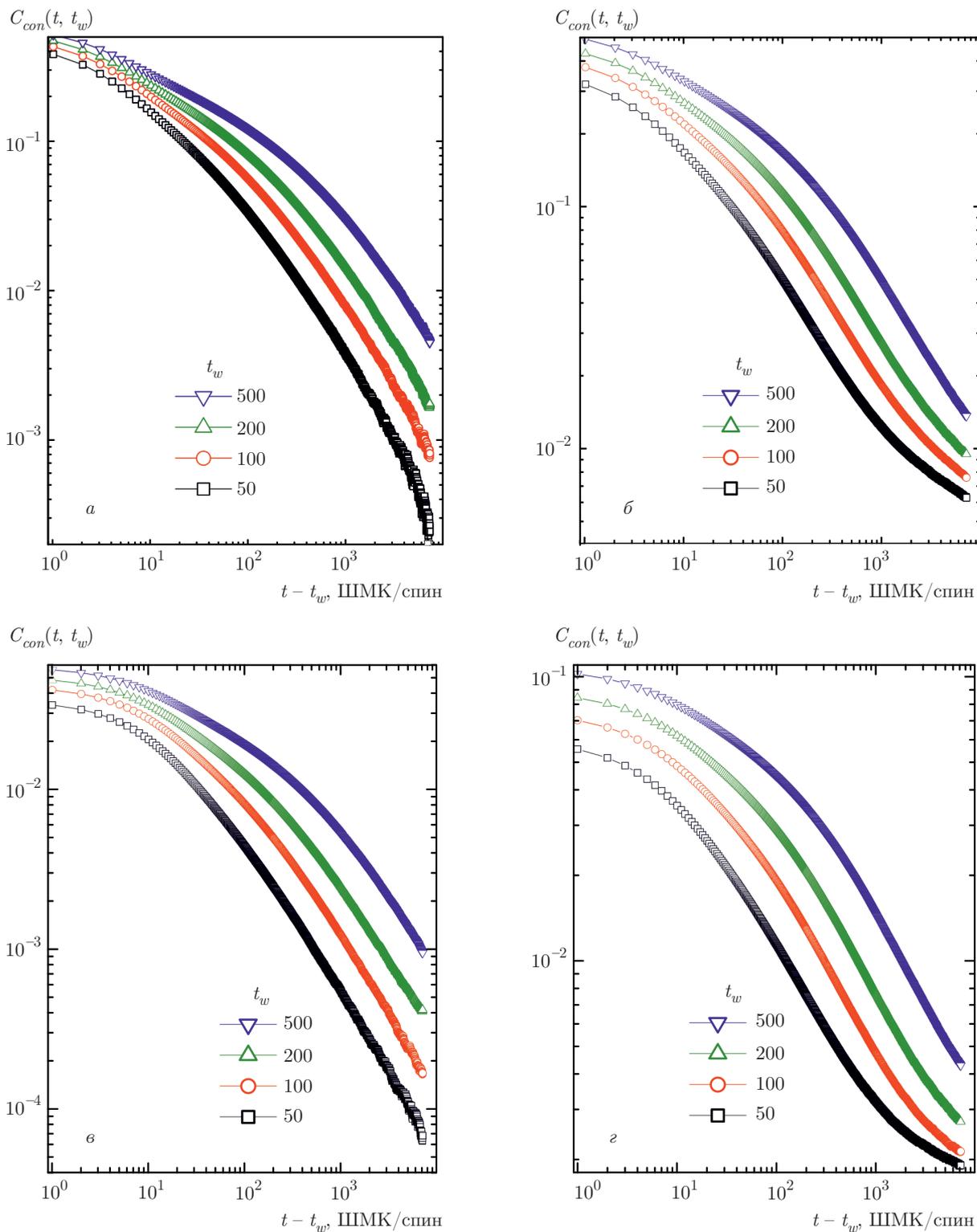


Рис. 1. (В цвете онлайн) Неравновесные зависимости связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ от времени наблюдения $t - t_w$ для систем с $p = 1.0$ и $T = T_{BKT} = 0.89$ (а), $p = 0.8$ и $T = T_{BKT} = 0.49$ (б), $p = 1.0$ и $T = 0.1$ (в), $p = 0.8$ и $T = 0.1$ (г) для различных времен ожидания t_w . Величина статистической погрешности меньше размера символа и по порядку величины составляет 10^{-5} – 10^{-4} , а систематическая погрешность еще меньше

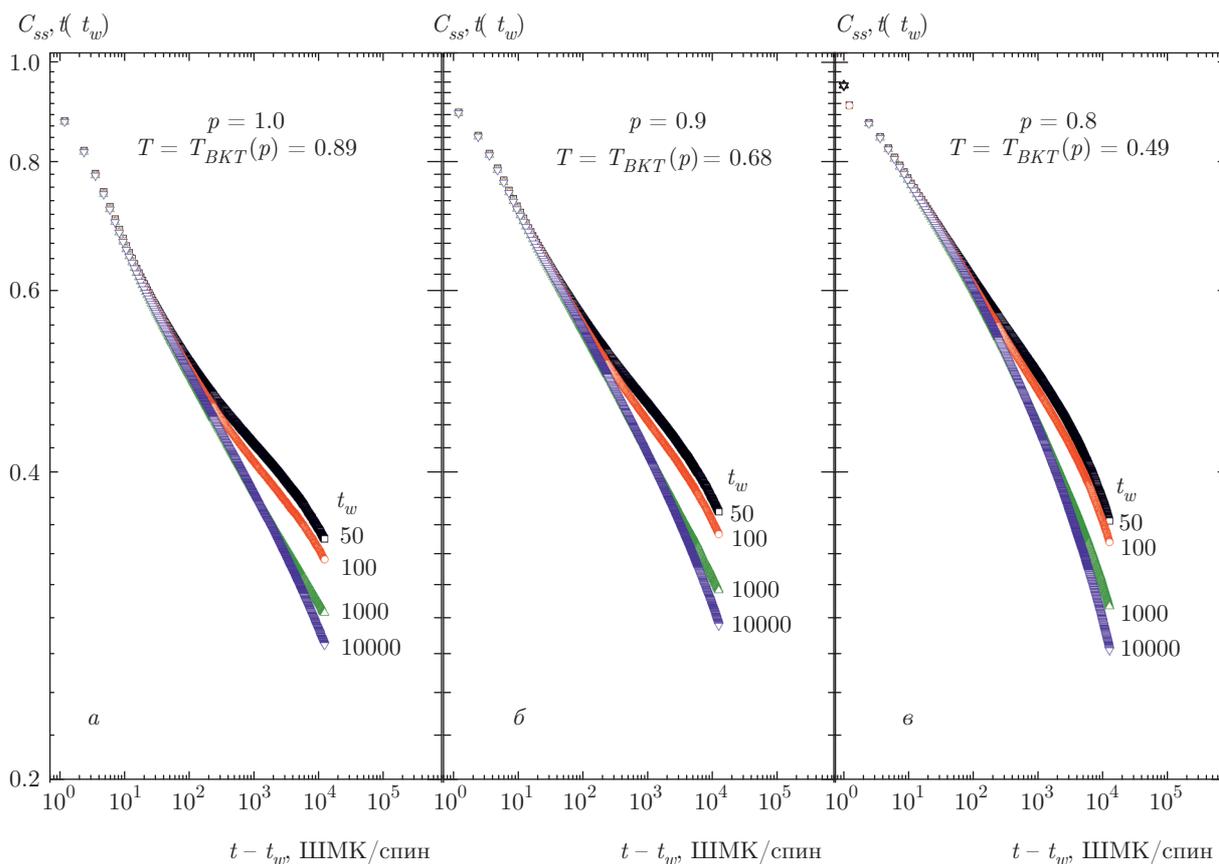


Рис. 2. (В цвете онлайн) Неравновесные зависимости спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$ от времени наблюдения $t - t_w$ для систем с $p = 1.0$ и $T = T_{BKT} = 0.89$ (а), $p = 0.9$ и $T = T_{BKT} = 0.68$ (б), $p = 0.8$ и $T = T_{BKT} = 0.49$ (в) для различных времен ожидания t_w

ристик кластеров на единую равновесную кривую для системы с дефектами структуры характеризуются увеличением на шесть порядков по сравнению с чистой двумерной XY-моделью. На это указывают графики для двух составляющих связанной автокорреляционной функции (9), представленные на рис. 4 для чистой системы и системы со спиновой концентрацией $p = 0.9$. Первая из составляющих связанной автокорреляционной функции соответствует спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$, а вторая составляющая, которую мы обозначили $C_{mm}(t, t_w)$, отражает динамическую роль областей квазидальнего порядка на эффекты корреляции. Из графиков видно, что для чистой и структурно-неупорядоченной систем на времена наблюдения $t - t_w \geq t_w$ значения составляющих $C_{ss}(t, t_w)$ и $C_{mm}(t, t_w)$ начинают совпадать, приводя к взаимной компенсации в полной связанной автокорреляционной функции, хотя для структурно-неупорядоченной системы эта компен-

сация составляющих происходит на больших временах наблюдения, чем для чистой системы. В данных эффектах проявляются существенные различия в неравновесном поведении двумерной XY-модели и трехмерной модели Изинга [17, 33], обусловленные отсутствием спонтанной намагниченности в двумерной XY-модели по сравнению с трехмерной моделью Изинга. Так, для структурно-неупорядоченной трехмерной модели Изинга в работе [33] было показано, что хотя графики для этих двух составляющих связанной автокорреляционной функции и сближаются на временах $t - t_w \geq t_w$, но полной компенсации их не происходит; более того, их разница растет с увеличением времени ожидания t_w и ростом концентрации дефектов.

Для подтверждения обобщенной скейлинговой зависимости связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$, задаваемой выражением (5) со значением динамического критического индекса $z = 2$, была построена зависимость $t_w^{\eta/2} C_{con}(t, t_w)$ от

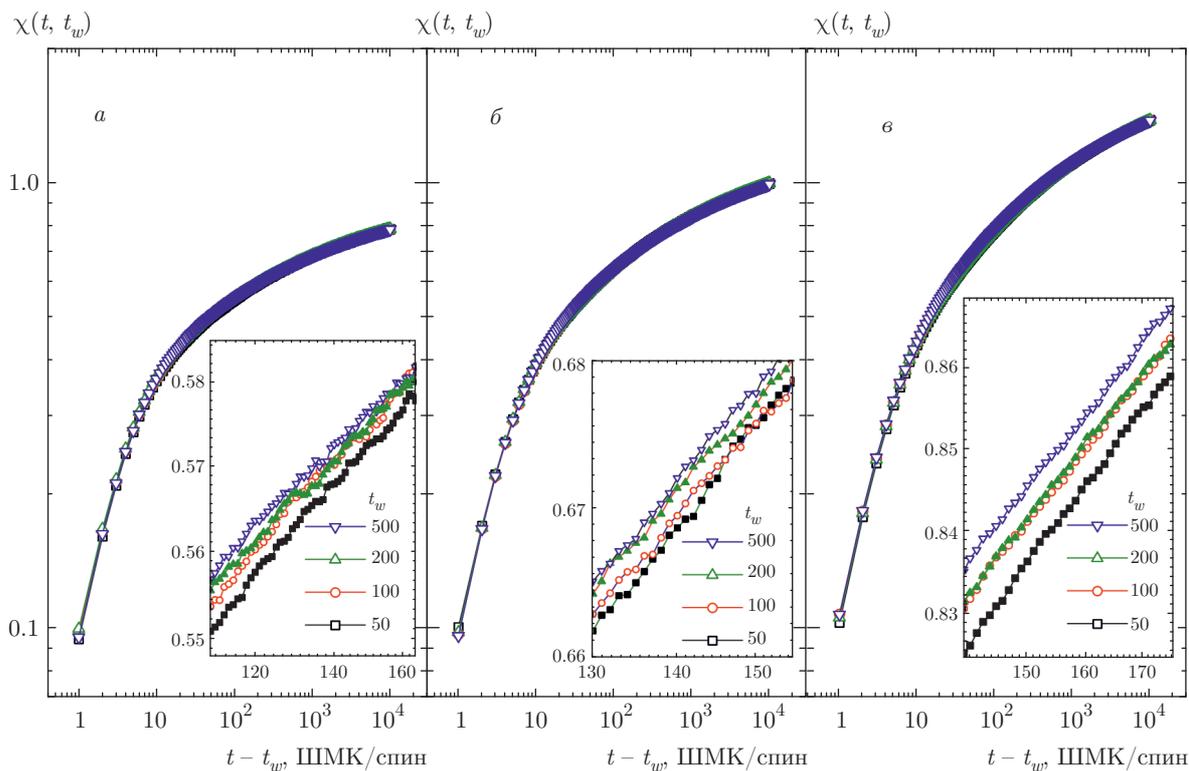


Рис. 3. (В цвете онлайн) Временные зависимости динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ от времени наблюдения $t - t_w$ для систем с $p = 1.0$ и $T = T_{BKT} = 0.89$ (а), $p = 0.9$ и $T = T_{BKT} = 0.68$ (б), $p = 0.8$ и $T = T_{BKT} = 0.49$ (в) для различных времен ожидания t_w

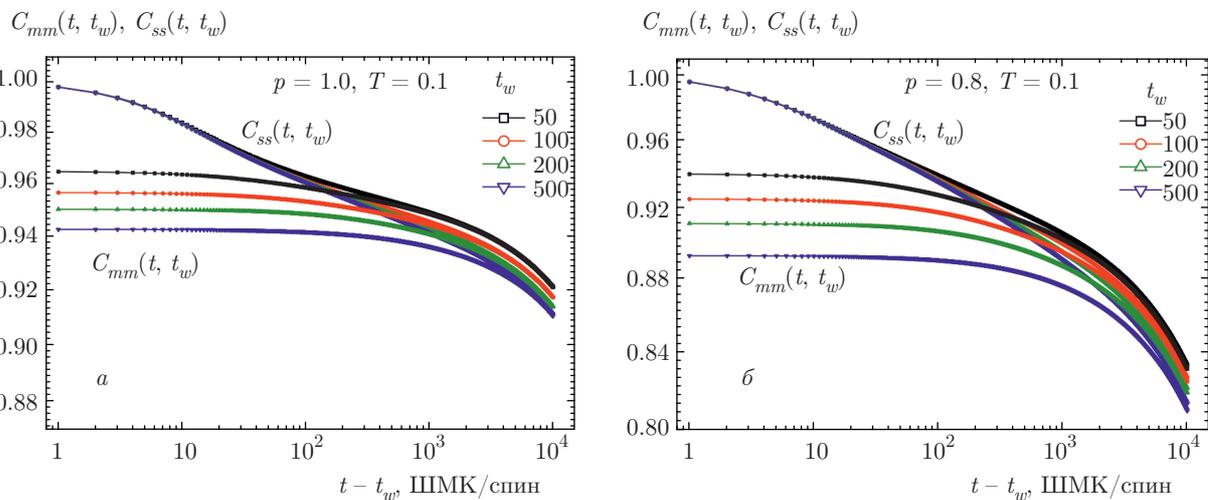


Рис. 4. (В цвете онлайн) Сравнение временных зависимостей вкладов в связанные автокорреляционные функции $C_{ss}(t, t_w) \sim [\langle S(t)S(t_w) \rangle]$ и $C_{mm}(t, t_w) \sim [\langle S(t) \rangle \langle S(t_w) \rangle]$ для концентрации спинов $p = 1.0$ (а) и $p = 0.8$ (б)

$(t - t_w)/t_w$. При ее построении были использованы значения критического индекса $\eta(T, p)$, рассчитанные нами в работе [7]. Результаты реализации данной процедуры представлены на рис. 5, кото-

рый для чистой системы ($p = 1.0$) демонстрирует «коллапс» полученных данных для различных t_w на соответствующих указанным на рисунке температурам универсальных кривых, отвечающих скей-

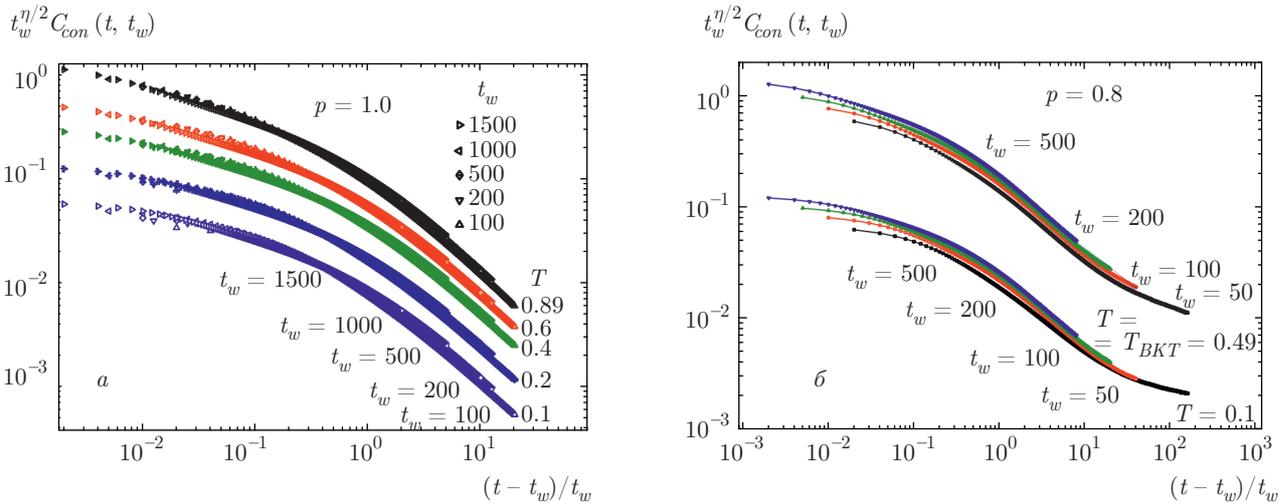


Рис. 5. (В цвете онлайн) Скейлинговые зависимости для связанной автокорреляционной функции $t_w^{\eta/2} C_{con}(t, t_w)$ от $(t - t_w)/t_w$ для систем с $p = 1.0$ (а) и $p = 0.8$ (б), демонстрирующие коллапс полученных для различных t_w данных для чистой системы и отсутствие коллапса для структурно-неупорядоченной

линговой функции $f_C(\xi(t - t_w)/\xi(t_w))$ в (5), в то время как для структурно-неупорядоченной системы с $p = 0.8$ коллапс данных для различных t_w отсутствует. В предположении о реализации для структурно-неупорядоченной двумерной XY-модели более сложной формы скейлинговой зависимости, чем в (5), для связанной автокорреляционной функции была предложена скейлинговая функция

$$f_C(\xi(t - t_w)/\xi^\mu(t_w)) = \tilde{f}_C[(t - t_w)/t_w^\mu]$$

с показателем μ , определяемым из требования коллапса данных для зависимости $t_w^{\eta/2} C_{con}(t, t_w)$ от $(t - t_w)/t_w^\mu$ при различных t_w . На рис. 6 представлена реализация данной процедуры для систем с $p = 0.8$ и $p = 0.9$ для различных температур. Получено, что при значениях показателя $\mu \simeq 1 + \eta(T, p)$ осуществляется коллапс данных для $t_w^{\eta/2} C_{con}(t, t_w)$ с различными t_w , рассчитанными для структурно-неупорядоченных систем. Данный случай скейлинговой зависимости от времени ожидания с показателем $\mu > 1$ классифицируется как явление «сверхстарения» [21].

Нами была проведена аналогичная процедура проверки обобщенной скейлинговой зависимости для спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$. Была построена зависимость $t_w^{\eta/2} C_{ss}(t, t_w)$ от $(t - t_w)/t_w$ (рис. 7) для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0$ и $p = 0.8$ при температурах $T = T_{BKT}(p)$. Видно, что на долговременном этапе с временами $t - t_w \gg t_w$ динамическая скейлинговая зависимость (5) нарушается и данные с разными t_w

не ложатся на универсальные кривые, соответствующие фиксированным спиновым концентрациям p и температурам $T \leq T_{BKT}$. Нами была исследована возможность реализации более сложной формы скейлинговой зависимости и для спин-спиновой автокорреляционной функции в виде

$$f_C(\xi(t - t_w)/\xi^{\mu_{sub}}(t_w)) = \tilde{f}_C[(t - t_w)/t_w^{\mu_{sub}}]$$

с показателем $\mu_{sub} \neq 1$ и в итоге удалось добиться коллапса данных для $t_w^{\eta/2} C_{ss}(t, t_w)$ с показателем $\mu_{sub} \simeq \eta(T, p) < 1$ (рис. 8). Это указывает на осуществление эффекта субстарения в неравновесном поведении спин-спиновой автокорреляционной функции в долговременном режиме на временах $t - t_w \gg t_w$ как для чистой, так и для структурно-неупорядоченной двумерной XY-модели при эволюции из низкотемпературного начального состояния.

Рассмотрим теперь вопрос об определении флуктуационно-диссипативного отношения. Значения ФДО могут быть получены на основе вычисленных нами временных зависимостей для связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ в соответствии с соотношением (14). Для этого мы задали величину $T\chi(t, t_w)$ как параметрическую функцию значений $C_{con}(t, t_w)$. На рис. 9 представлены полученные графики параметрической зависимости $T\chi(t, t_w)$ от $C_{con}(t, t_w)$ для различных температур $T \leq T_{BKT}(p)$ и спиновых концентраций $p = 1.0, 0.9, 0.8$ в сравнении с зависимостью, соответствующей выполнению

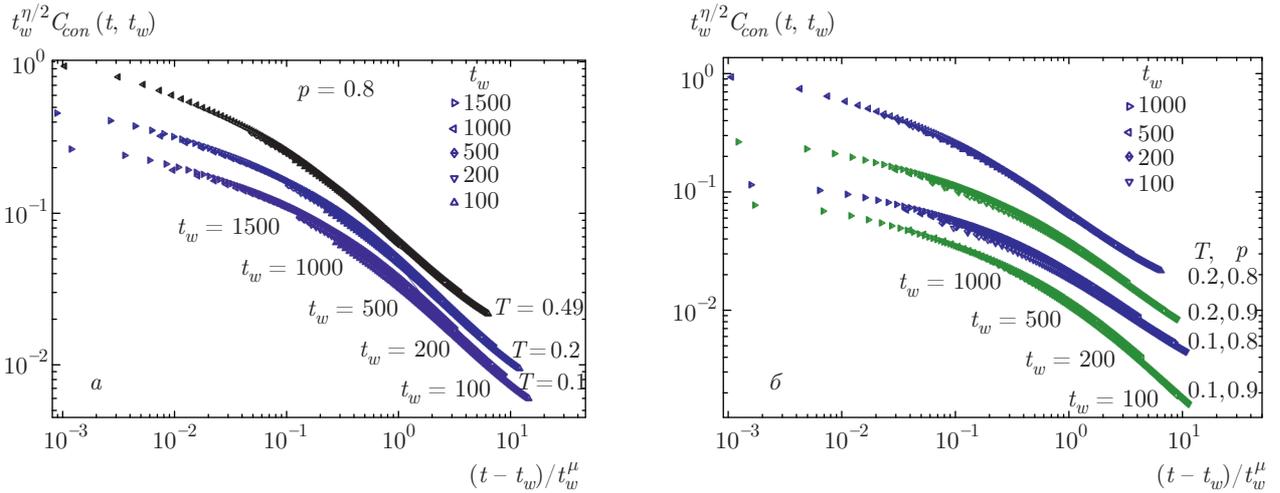


Рис. 6. (В цвете онлайн) Эффект сверхстарения в скейлинговом поведении связанной автокорреляционной функции $t_w^{\eta/2} C_{con}(t, t_w)$ в зависимости от $(t - t_w)/t_w^\mu$ на примере систем с $p = 0.8$ (а) и $p = 0.9, p = 0.8$ (б) для различных температур

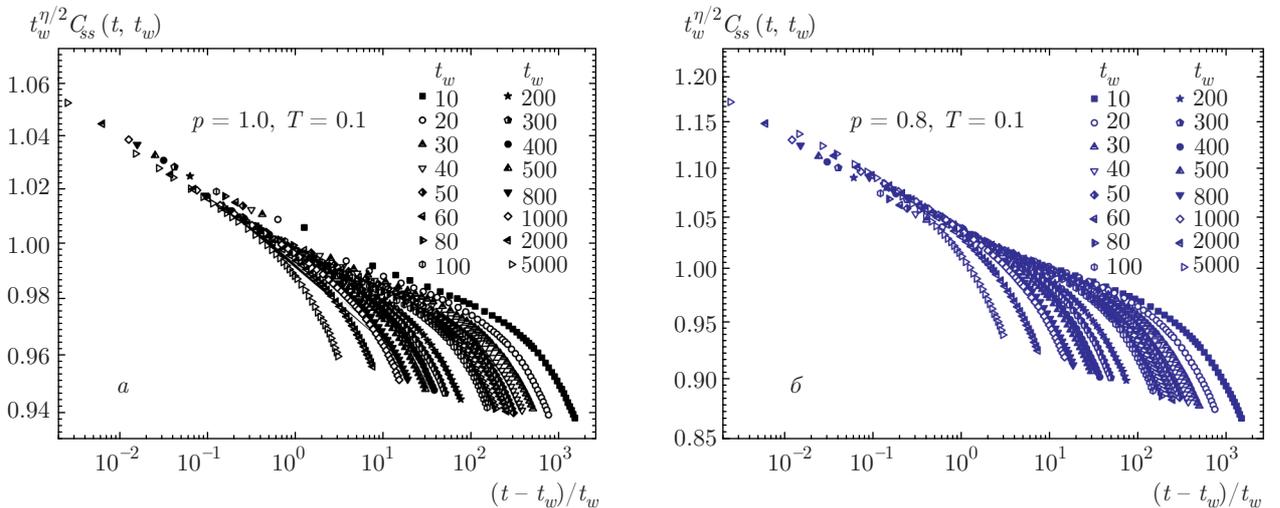


Рис. 7. Скейлинговые зависимости спин-спиновой автокорреляционной функции $t_w^{\eta/2} C_{ss}(t, t_w)$ от $(t - t_w)/t_w$ для систем с $p = 1.0$ (а) и $p = 0.8$ (б) при температуре $T = 0.1$

ФДТ с $X^\infty = 1$. Наглядно видно, что касательные к кривым данной параметрической зависимости $T\chi(C_{con})$ в области малых значений автокорреляционной функции (в пределе $C_{con} \rightarrow 0$) приводят к значениям $X^\infty(t_w, p) > 1$, которые указывают на нарушение ФДТ в неравновесном поведении двумерной XY-модели.

Известно [37], что скейлинговое поведение динамических функций $C(t, t_w)$ и $R(t, t_w)$, определяемых соотношением (5), приводит в долговременном режиме с временами $t - t_w \gg t_w$ к функциональной за-

висимости ФДО $X(t, t_w)$ только от переменной t/t_w . Однако данное заключение оказывается справедливым только для случая систем, в которых функции $C(t, t_w)$ и $R(t, t_w)$ удовлетворяют свойствам канонического старения ($\mu = 1$). Поскольку для структурно-неупорядоченной двумерной XY-модели нами были выявлены эффекты сверхстарения ($\mu > 1$) в поведении связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$, ФДО $X(t, t_w)$ должно характеризоваться функциональной зависимостью от переменной t/t_w^μ

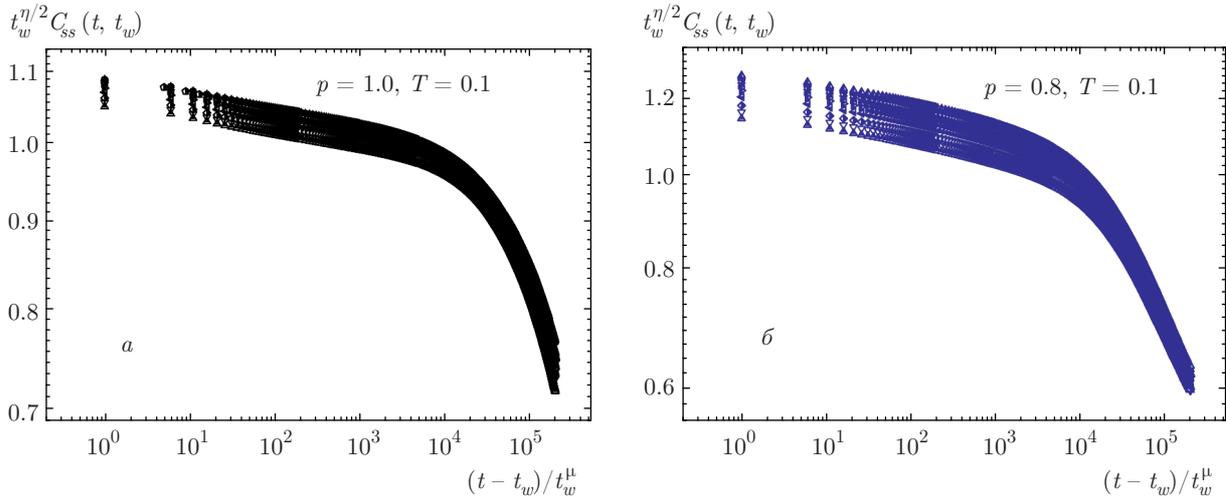


Рис. 8. Эффект субстарения в скейлинговом поведении спин-спиновой автокорреляционной функции $t_w^{\eta/2} C_{ss}(t, t_w)$ в зависимости от $(t - t_w)/t_w^\mu$ на примере систем с $p = 1.0$ (а) и $p = 0.8$ (б) при температуре $T = 0.1$

с показателем $\mu \simeq 1 + \eta(T, p)$. Графики на рис. 10 с представленной зависимостью ФДО $X(t, t_w)$ от переменной t/t_w^μ для системы со спиновой концентрацией $p = 0.8$ и температурами $T \leq T_{BKT} = 0.49$ подтверждают данное скейлинговое свойство ФДО с совпадением его значений $X(t, t_w) = F_X(t/t_w^\mu)$ для различных времен ожидания t_w при $t \gg t_w^\mu$.

Реализация процедуры экстраполяции значений ФДО $X(t, t_w) = F_X(t/t_w^\mu)$ с $t_w^\mu/t \rightarrow 0$ при $t_w = \text{const}$ и $\mu = 1$ для $p = 1.0$, $\mu = 1 + \eta(p)$ для $p = 0.9, 0.8$ и последующей экстраполяции с $1/t_w \rightarrow 0$ позволила в соответствии с соотношением (4) рассчитать температурную и концентрационную зависимости предельного ФДО $X^\infty(T, p)$, представленные на рис. 11. Видно, что для чистой системы значения предельного ФДО $X^\infty(T)$ с ростом температуры уменьшаются, оставаясь большими единицы, в то время как для структурно-неупорядоченной системы значения $X^\infty(T, p)$ увеличиваются с ростом температуры. При этом для всех температур значения $X^\infty(T, p)$ для структурно-неупорядоченной модели больше, чем для чистой, и увеличиваются с ростом концентрации дефектов для рассмотренных значений спиновой концентрации p .

Мы также вычислили ФДО на основе определенных двухвременных зависимостей для спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ в соответствии с соотношением (14). Интерес связан с выявленными в поведении $C_{ss}(t, t_w)$ эффектами субстарения на долговременном этапе эволюции системы с $t - t_w \gg t_w$, которые должны проявиться в принципиально других значениях предельного ФДО и

иных зависимостях $X^\infty(T, p)$ от температуры и спиновой концентрации, чем представленные на рис. 11 и вычисленные на основе связанной автокорреляционной функции. Для этого мы задали величину $T\chi(t, t_w)$ как параметрическую функцию от значений $C_{ss}(t, t_w)$. На рис. 12 представлены полученные графики параметрической зависимости $T\chi(t, t_w)$ от $C_{ss}(t, t_w)$ для различных температур $T \leq T_{BKT}(p)$. К рассчитанным на основе соотношения (14) значениям ФДО $X^\infty(t_w, T, p)$ нами была применена процедура экстраполяции $1/t_w \rightarrow 0$, которая и позволила определить приведенные на рис. 13 искомые зависимости предельного ФДО $X^\infty(T, p)$ от температуры и спиновой концентрации.

Из представленных на рис. 13 результатов видно, что температурная зависимость $X^\infty(T, p)$ является линейно возрастающей и значения $X^\infty(T, p)$ при фиксированной температуре T растут с увеличением концентрации дефектов структуры (с уменьшением спиновой концентрации p); при этом все значения $X^\infty(T, p) < 1$. Определено, что при температуре фазового перехода Березинского – Костерлица – Таулесса $T_{BKT}(p)$ значения $X^\infty(T_{BKT}(p))$ совпадают в пределах погрешности вычислений и равны $X^\infty(T_{BKT}(p)) = 0.73(5)$ для всех рассмотренных спиновых концентраций p . Выявлена также универсальная зависимость $X^\infty(T, p)$ как функции приведенной температуры $T/T_{BKT}(p)$, которая носит линейный характер для всех рассмотренных спиновых концентраций p . Данная температурная зависимость $X^\infty(T/T_{BKT}(p))$ представлена на вставке к рис. 13.

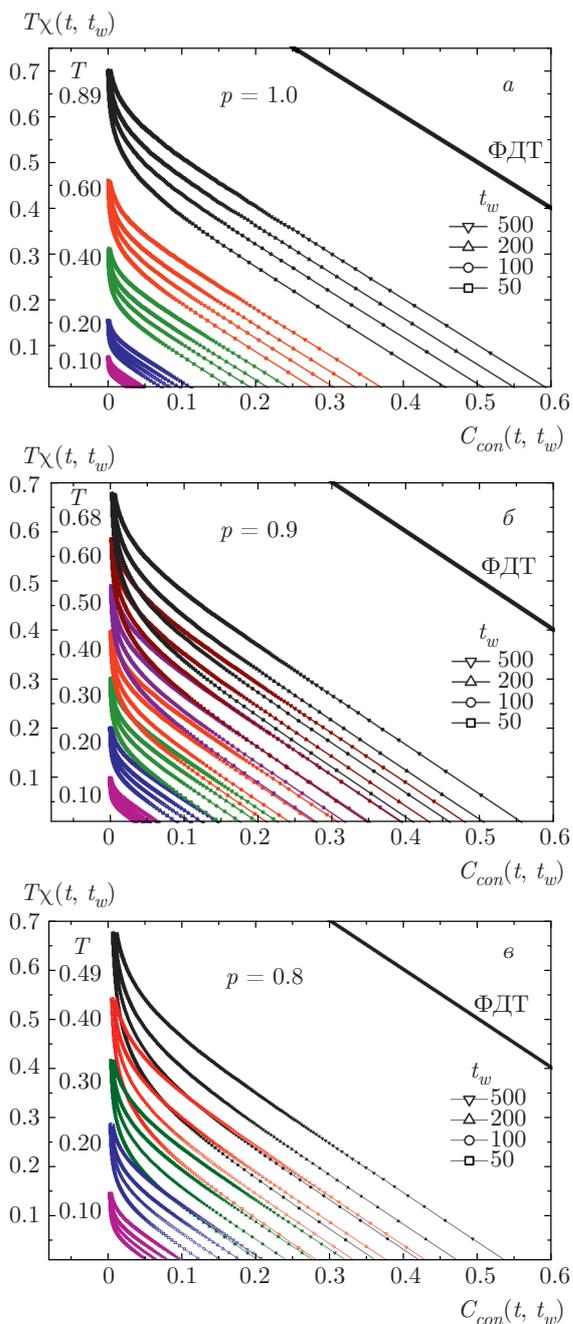


Рис. 9. (В цвете онлайн) Параметрические зависимости $T_\chi(t, t_w)$ от значений связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$ для систем с $p = 1.0$ (а), $p = 0.9$ (б) и $p = 0.8$ (в) при различных температурах $T \leq T_{BKT}(p)$ и ряде значений времен ожидания t_w

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье в результате численного Монте-Карло-исследования неравновесного поведения двумерной XY-модели выявлены особенности влияния низкотемпературного начального состояния и

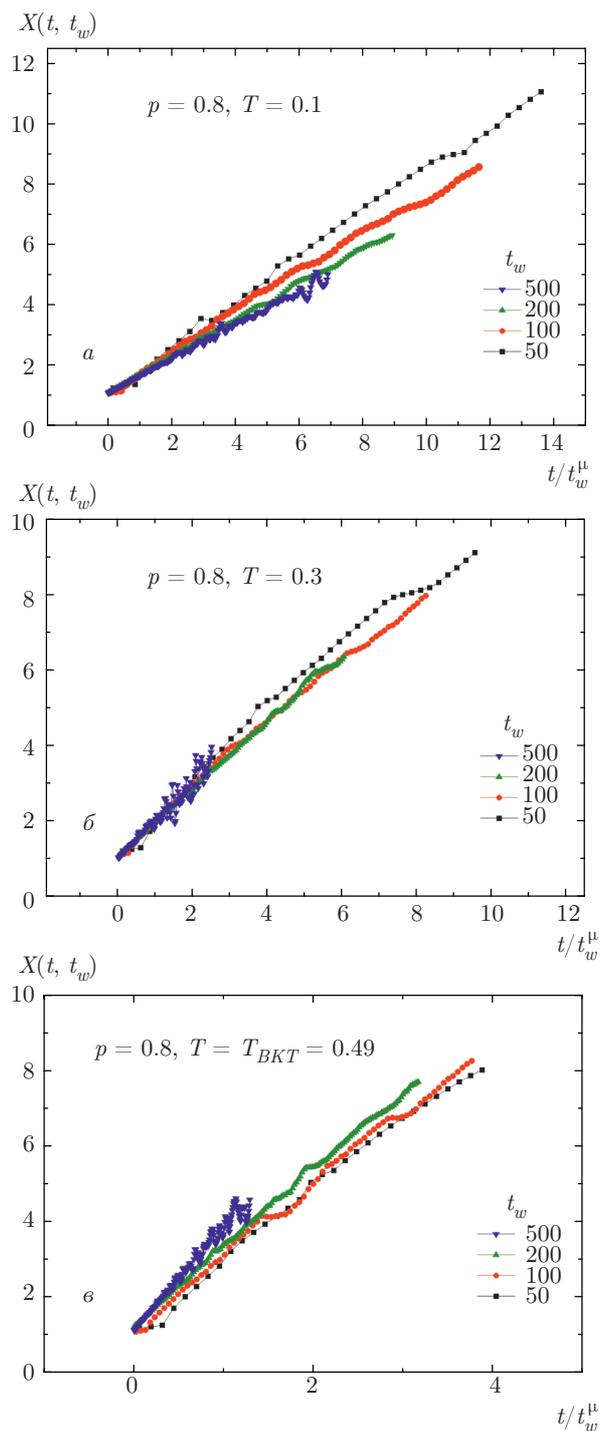


Рис. 10. (В цвете онлайн) Скейлинговые зависимости $X(t, t_w) = F_X(t/t_w^\mu)$ для системы со спиновой концентрацией $p = 0.8$ и температурами $T = 0.1$ (а), $T = 0.3$ (б) и $T = T_{BKT} = 0.49$ (в)

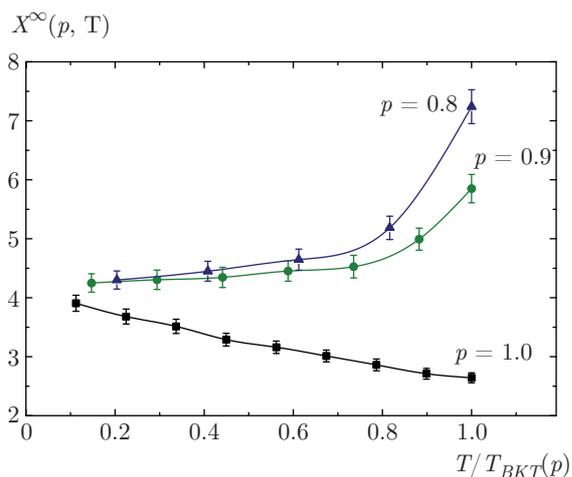


Рис. 11. Температурная и концентрационная зависимости предельного ФДО $X^\infty(T, p)$, вычисленные с применением двухвременных зависимостей для связанной автокорреляционной функции $C_{con}(t, t_w)$

дефектов структуры на характеристики двухвременного поведения автокорреляционной функции и функции отклика, проведен расчет зависимости флуктуационно-диссипативного отношения от температуры и концентрации дефектов. Одним из факторов влияния начальных состояний являются различные временные зависимости корреляционной длины $\xi(t)$. При эволюции из низкотемпературного начального состояния $\xi(t) \propto t^{1/2}$, в то время как в случае высокотемпературного начального состояния эта зависимость модифицируется эффектами взаимодействия вихрей и принимает вид $\xi(t)^2 \propto t / \ln t$ [30]. При старте системы из высокотемпературного начального состояния определяющей является роль высокоэнергетичных вихревых возбуждений и их взаимодействия. При эволюции двумерной XY-модели из низкотемпературного начального состояния на динамику модели основное влияние оказывают низкоэнергетичные спин-волновые возбуждения.

В результате исследований было выявлено существенное влияние дефектов структуры на особенности неравновесного поведения связанной автокорреляционной функции, характеризующей временную корреляцию флуктуаций спиновой плотности в системе. Показано, что присутствие дефектов структуры проявляется в сильном замедлении эффектов корреляции в структурно-неупорядоченных системах по сравнению с чистой XY-моделью. Эти сильные изменения связаны с процессом кластерной фрагментации, когда один большой кластер в на-

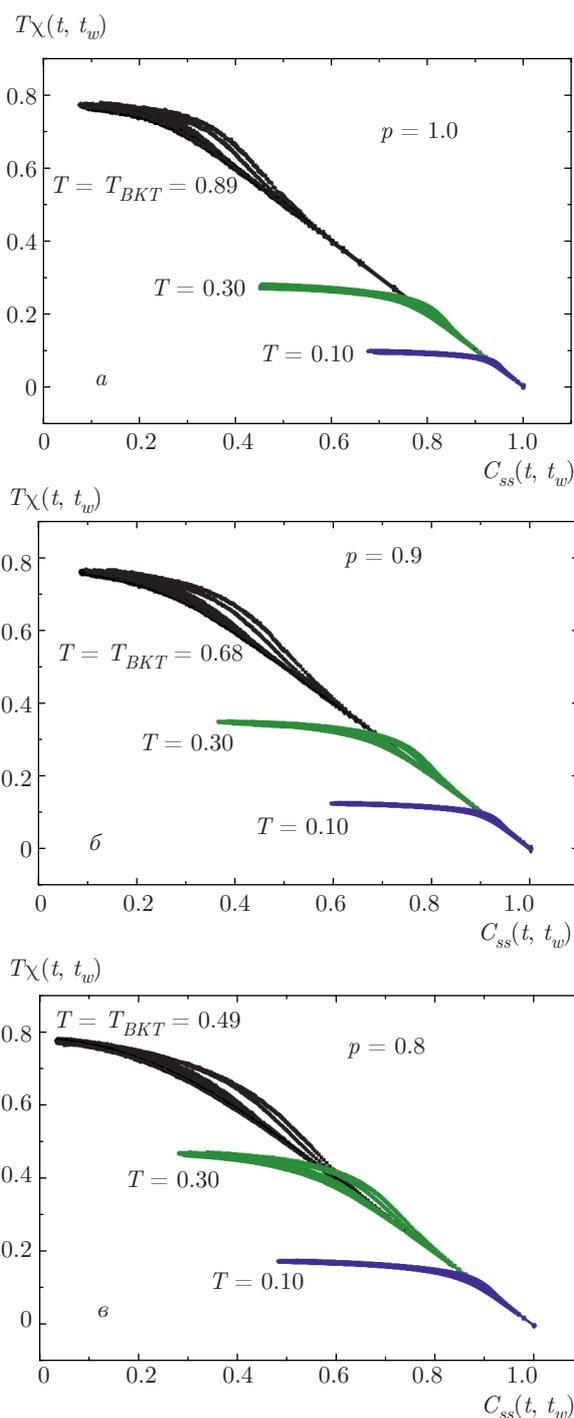


Рис. 12. (В цвете онлайн) Параметрическая зависимость $T\chi(C_{ss})$ для систем с $p = 1.0$ (а), $p = 0.9$ (б) и $p = 0.8$ (е) при различных температурах $T \leq T_{BKT}(p)$ и ряде значений времен ожидания t_w

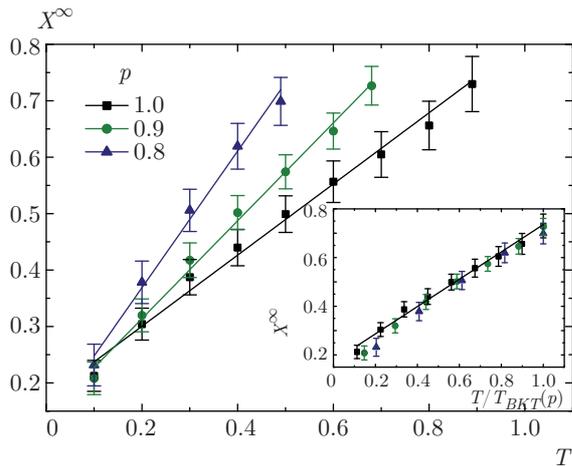


Рис. 13. (В цвете онлайн) Температурная и концентрационная зависимости предельного ФДО $X^\infty(T, p)$, вычисленные с применением двухвременных зависимостей для спин-спиновой автокорреляционной функции $C_{ss}(t, t_w)$

чальном состоянии с $T_0 = 0$ при эволюции системы фрагментируется на более малые. Введение в систему дефектов приводит к аномальному замедлению процесса кластерной фрагментации, подтвержденному результатами детальных исследований поведения связанной автокорреляционной функции и ее составляющих. Показано, что в этом случае двухвременная скейлинговая зависимость связанной автокорреляционной функции подчиняется соотношениям теории сверхстарения и степенное усиление влияния возраста системы t_w характеризуется показателем $\mu = 1 + \eta(T, p) > 1$, где $\eta(T, p)$ — критический индекс, связанный с поперечной жесткостью системы и зависящий от температуры и спиновой концентрации.

В работе рассчитаны температурная и концентрационная зависимости предельного ФДО со значениями $X^\infty(T, p) > 1$. Это указывает на нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы при температурах замораживания, соответствующих всей низкотемпературной фазе двумерной XY-модели. Показано, что для чистой системы с $p = 1.0$ значения предельного ФДО $X^\infty(T)$ с ростом температуры уменьшаются, в то время как для структурно-неупорядоченной системы с $p = 0.9, 0.8$ значения $X^\infty(T, p)$ увеличиваются с ростом температуры. При этом для всех температур значения $X^\infty(T, p)$ для структурно-неупорядоченной модели больше, чем для чистой, и увеличиваются с ростом концентрации дефектов для рассмотренных значений спиновой концентрации p .

При численном исследовании двухвременной зависимости спин-спиновой автокорреляционной

функции, характеризующей временную корреляцию спиновой плотности системы, были выявлены свойства псевдостарения, когда, в отличие от свойств связанной автокорреляционной функции, наблюдается обратная зависимость от времени ожидания t_w , а именно, временное убывание спин-спиновой автокорреляционной функции усиливается с увеличением ее возраста t_w . Показано, что двухвременная скейлинговая зависимость спин-спиновой автокорреляционной функции подчиняется соотношениям теории субстарения и степенное ослабление влияния возраста системы t_w характеризуется показателем $\mu_{sub} = \eta(T, p) < 1$. Проведенный расчет температурной и концентрационной зависимостей предельного ФДО $X^\infty(T, p)$ при использовании спин-спиновой автокорреляционной функции показал, что в этом случае $X^\infty(T, p) < 1$ для всех температур $T \leq T_{BKT}(p)$ и рассмотренных спиновых концентраций p . Показано, что температурная зависимость $X^\infty(T, p)$ является линейно возрастающей и значения $X^\infty(T, p)$ при фиксированной температуре T растут с увеличением концентрации дефектов структуры. Выявлена универсальная зависимость $X^\infty(T, p)$ от приведенной температуры $T/T_{BKT}(p)$, имеющая линейный характер для всех рассмотренных спиновых концентраций p .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-12-00279) и гранта MD-3815.2010.2 Президента РФ. Для проведения расчетов были использованы ресурсы суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М. В. Ломоносова и межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
2. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *Теоретические методы описания неравновесного критического поведения структурно неупорядоченных систем*, Физматлит, Москва (2013).
3. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1970).
4. В. Л. Березинский, *Низкотемпературные свойства двумерных систем*, Физматлит, Москва (2007).
5. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).

6. L. Berthier, P. C. W. Holdsworth, and M. Sellitto, *J. Phys. A* **34**, 1805 (2001).
7. П. В. Прудников, В. В. Прудников, И. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **101**, 596 (2015).
8. С. Е. Коршунов, УФН **3**, 233 (2006).
9. I. S. Popov, P. V. Prudnikov, and V. V. Prudnikov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **681**, 012015 (2016).
10. L. Berthier and J. Kurchan, *Nature Phys.* **9**, 310 (2013).
11. P. Calabrese and A. Gambassi, *J. Phys. A* **38**, R133 (2005).
12. В. В. Прудников, П. В. Прудников, М. В. Мамонова, УФН **187**, 817 (2017).
13. L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 173 (1993).
14. L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *J. Phys. A* **27**, 5749 (1994).
15. L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and G. Parisi, *J. de Phys. I* **14**, 1641 (1994).
16. P. V. Prudnikov, V. V. Prudnikov, E. A. Pospelov et al., *Progr. Theor. Exp. Phys.* **2015**, 053A01 (2015).
17. V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, and E. A. Pospelov, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **2016**, 043303 (2016).
18. A. R. Pereira, L. A. S. Mol, S. A. Leonel, P. Z. Coura, and B. V. Costa, *Phys. Rev. B* **68**, 132409 (2003).
19. B. Berche, A. I. Farinas-Sanchez, Yu. Holovatch, and R. V. Paredes, *Eur. Phys. J. B* **36**, 91 (2003).
20. S. Abriet and D. Karevski, *Eur. Phys. J. B* **37**, 47 (2004).
21. M. Henkel and M. Pleimling, in *Non-equilibrium Phase Transitions*, Vol. 2, Springer, Heidelberg (2010), p. 544.
22. C. Godreche and J. M. Luck, *J. Phys. A* **33**, 9141 (2000).
23. C. Godreche and J. M. Luck, *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 1589 (2002).
24. В. В. Прудников, П. В. Прудников, Е. А. Поспелов, ЖЭТФ **145**, 462 (2014).
25. V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, E. A. Pospelov, and A. N. Vakilov, *Phys. Lett. A* **379**, 774 (2015).
26. P. Calabrese and A. Gambassi, *Phys. Rev. E* **66**, 066101 (2002).
27. P. Calabrese and A. Gambassi, *Phys. Rev. B* **66**, 212407 (2002).
28. P. Calabrese, A. Gambassi, and F. Krzakala, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **2006**, P06016 (2006).
29. A. J. Bray, *Adv. Phys.* **43**, 357 (1994).
30. A. J. Bray, A. J. Briant, and D. K. Jervis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1503 (2000).
31. A. Asad and B. Zheng, *J. Phys. A* **40**, 9957 (2007).
32. X. W. Lei and B. Zheng, *Phys. Rev. E* **75**, 040104(R) (2007).
33. В. В. Прудников, П. В. Прудников, Е. А. Поспелов, П. Н. Маляренко, Письма в ЖЭТФ **102**, 192 (2015).
34. H. Weber and P. Minnhagen, *Phys. Rev. B* **37**, 5986 (1988).
35. P. V. Prudnikov and I. S. Popov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **510**, 012014 (2014).
36. В. В. Прудников, П. В. Прудников, С. В. Алексеев, И. С. Попов, ФММ **115**, 1254 (2014).
37. C. Chatelain, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **2004**, P06006 (2004).