

МЕТОД ОПИСАНИЯ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯННОГО МОНОСЛОЕМ УПОРЯДОЧЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ, ПРИ ОСВЕЩЕНИИ ПО НОРМАЛИ

Н. А. Лойко^{}, А. А. Мискевич^{**}, В. А. Лойко^{***}*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 8 июня 2017 г.

Разработан метод описания углового распределения интенсивности излучения, рассеянного монослоем однородных пространственно-упорядоченных монодисперсных сферических частиц, освещаемым по нормали плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волной. Метод основан на квазикристаллическом приближении (ККП) теории многократного рассеяния волн (ТМРВ) и использовании мультипольного разложения полей и тензорной функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. Метод применен к исследованию характеристик излучения, рассеянного частично упорядоченным монослоем и монослоем с неидеальной решеткой. Проведено сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными о положении дифракционного пика первого порядка на угловой и спектральной зависимостях интенсивности излучения, рассеянного плотноупакованным монослоем с неидеальной треугольной решеткой из частиц SiO₂. Получено хорошее соответствие результатов.

DOI: 10.7868/S0044451018020025

1. ВВЕДЕНИЕ

Монослои частиц с размерами, сопоставимыми с длиной волны оптического излучения, активно исследуются с середины XX века [1–3]. В последние десятилетия возрос интерес к изучению таких слоев в связи с большим потенциалом их применения в оптике, фотонике, микроэлектронике и многих других областях. В частности, такие структуры используются при исследовании, разработке и создании фотонных кристаллов, синтетических опалов, антиотражающих покрытий, фильтров пропускания и отражения, диффузных рассеивателей, детекторов, резонаторов, лазеров, солнечных элементов, светодиодов [4–18].

В настоящее время для описания взаимодействия излучения с монослоем частиц применяются два основных подхода, учитывающих дифракцию, интерференцию и многократное рассеяние волн.

Первый базируется на теории дифракции низкоэнергетических электронов и методе Корринги – Кона – Ростокера [19–23], развитых на случай электромагнитных полей. Он удобен для описания рассеяния света в структурах с идеальными решетками. Второй метод базируется на теории многократного рассеяния волн [24–46]. Он обычно используется для моделирования рассеяния и распространения волн в случайных и частично упорядоченных (имеющих ближний пространственный порядок в расположении частиц) дисперсных средах. Его преимущество заключается в статистическом описании структуры ансамбля частиц. Это позволяет сравнительно просто моделировать разупорядочение в пространственном положении частиц и создавать эффективные алгоритмы определения оптических характеристик систем с таким типом неидеальности. Следует отметить, что неидеальность пространственного положения частиц характерна практически для любой реальной дисперсной структуры.

В 1980 г. Хонг [34] на основе предложенного Лаксом квазикристаллического приближения [26] теории многократного рассеяния волн разработал метод и получил уравнения для определения когерентной (прошедшей прямо и зеркально отраженной)

^{*} E-mail: n.loiko@ifanbel.bas-net.by

^{**} E-mail: miskevic@ifanbel.bas-net.by

^{***} E-mail: loiko@ifanbel.bas-net.by

компоненты излучения, рассеянного монослоем однородных полидисперсных сферических частиц, который освещается по нормали плоской электромагнитной волной. Они основаны на мультипольном разложении электромагнитных полей и тензорной функции Грина. В рамках формализма, разработанного в работе [34], структура монослоев описывается с помощью радиальных функций распределения (РФР) [47, 48] $g(R)$, характеризующих вероятность нахождения одной частицы на расстоянии R от другой. Подход [34] использован многими авторами для исследования когерентного пропускания и отражения излучения монослоями частиц с ближним порядком (частично упорядоченными монослоями) [4, 37–43]. Радиальная функция распределения частиц в таких структурах определяется на основе приближения Перкуса–Йевики [49] для абсолютно твердых дисков (или шаров). Оно позволяет анализировать монослои с поверхностным фактором (коэффициентом) заполнения η до $\eta \approx 0.6 \div 0.75$. Недавно предложен метод моделирования РФР для монослоя с «неидеальным дальним» порядком [50, 51]. Такой слой имеет структуру двумерного кристалла, неидеальность которого состоит в отклонениях центров частиц от положений в узлах идеальной решетки. Метод позволяет анализировать оптические характеристики монослоев монодисперсных сферических частиц практически с любым фактором заполнения, включая значения, близкие к максимальному η_{max} (для монослоя монодисперсных сферических частиц $\eta_{max} \approx 0.907$). Метод [50, 51] использован также при описании когерентного пропускания и отражения трехмерных дисперсных структур [14, 15, 52], для восстановления показателя преломления частиц трехмерного фотонного кристалла [53, 54], для разработки модели солнечного элемента с активным слоем из частиц кремния [16–18].

В ряде случаев необходимо знать не только когерентную (направленное пропускание и зеркальное отражение), но и некогерентную (диффузную) компоненту рассеянного света. Известны решения задачи описания углового распределения излучения, рассеянного монослоем частиц, полученные в приближении однократного рассеяния (ПОР) и в интерференционном приближении [55]. Эти приближения рассматривают монослой как систему независимых рассеивателей: каждая частица находится только в поле падающей волны. Они не учитывают многократное рассеяние волн в монослое и имеют ограниченную область применимости (малые относительные показатели преломления, малые концентрации и/или большие размеры частиц).

В данной работе предложен метод определения характеристик излучения, некогерентно рассеянного монослоем однородных монодисперсных сферических частиц, освещаемым по нормали плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волной. Метод учитывает многократное рассеяние волн. Он основан на использовании квазикристаллического приближения (предложенного Лаксом [26] для описания рассеяния в системе, состоящей из точечных рассеивателей) теории многократного рассеяния волн (ТМРВ) и является развитием основанного на этом приближении подхода [34], разработанного для описания коэффициентов когерентного пропускания и отражения монослоя сферических частиц. Метод применен для исследования характеристик рассеяния излучения монослоями с ближним и «неидеальным дальним» пространственными порядками. Результаты расчетов имеют хорошее согласие с известными экспериментальными данными.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим монослой, состоящий из N одинаковых сферических частиц, центры которых расположены в плоскости монослоя (x, y) в точках, определяемых радиус-векторами $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$ относительно начала координат, находящегося в центре произвольно выбранной частицы. Монослой освещается по нормали (вдоль оси z) плоской электромагнитной волной с электрическим вектором \mathbf{E}_0 и вектором поляризации $\hat{\epsilon}_0$:

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\epsilon}_0 e^{ikz}, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны падающего излучения.

Представим полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в некоторой точке \mathbf{r} вне частиц как сумму поля падающей волны и полей волн, рассеянных частицами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j). \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) = \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \int_{V_p} d\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \quad (3)$$

— поле, создаваемое в точке \mathbf{r} частицей, центр которой находится в точке \mathbf{R}_j , $m = n + ik$ — комплекс-

ный показатель преломления частицы относительно окружающей среды (относительный комплексный показатель преломления частицы), V_p — объем частицы, $0 \leq |\mathbf{r}'| \leq D/2$, D — диаметр частицы, $\mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}')$ — поле в точке $\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'$ внутри частицы (внутреннее поле), $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$ — диадная (тензорная) функция Грина:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \otimes \nabla \right] \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (4)$$

$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ — единичная диада.

Поле $\mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}')$ внутри частицы найдем из решения уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') &= \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}', \mathbf{R}_j + \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'') + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \\ &\times \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}', \mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}''). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (2) и (5) — это система самосогласованных уравнений, описывающая поле, рассеянное ансамблем частиц с центрами в точках $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$. При решении этой системы требуется усреднение полей по возможным конфигурациям ансамбля. В данной работе мы рассматриваем структуры из одинаковых сферических частиц, поэтому различные конфигурации означают только различные варианты взаимного расположения частиц. Обычно такое усреднение проводят с использованием многочастичных функций распределения вероятности, характеризующих вероятности нахождения частиц в пространстве [24–26].

Усредним поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (уравнение (2)) по всем возможным конфигурациям ансамбля:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) \rangle = \\ &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \sum_{j=1}^N \int d\mathbf{R}_j p(\mathbf{R}_j) \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по конфигурациям; $p(\mathbf{R}_j)$ — одночастичная функция распределения вероятностей, $p(\mathbf{R}_j) d\mathbf{R}_j$ описывает вероятность нахождения центра j -й частицы

на элементарной площади $d\mathbf{R}_j$ плоскости монослоя; $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ — поле в точке $\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'$ внутри j -й частицы, усредненное по всем возможным конфигурациям других частиц при условии, что j -я частица фиксирована; будем называть его усредненным внутренним полем.

Поле $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ найдем, усредняя уравнение (5):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j &= \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}', \mathbf{R}_j + \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'') \rangle_j + \\ &+ \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \int d\mathbf{R}_l p(\mathbf{R}_l | \mathbf{R}_j) \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}', \mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \rangle_{lj}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $p(\mathbf{R}_l | \mathbf{R}_j)$ — двухчастичная функция условного распределения вероятностей, $p(\mathbf{R}_l | \mathbf{R}_j) d\mathbf{R}_l$ описывает вероятность найти частицу с центром в точке \mathbf{R}_l при условии, что центр другой частицы фиксирован в точке \mathbf{R}_j , $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \rangle_{lj}$ — поле в точке $\mathbf{R}_l + \mathbf{r}''$ внутри l -й частицы, усредненное по возможным конфигурациям остальных частиц при условии, что j -я и l -я частицы фиксированы.

Выражая описанным способом усредненное внутреннее поле для системы с n фиксированными частицами через усредненное внутреннее поле для системы с $n + 1$ фиксированной частицей, можно записать иерархию N уравнений для ансамбля N частиц. Однако решение такой системы уравнений практически нереализуемо для больших N из-за сложности нахождения s -частичных ($s > 2$) функций условного распределения вероятностей: трехчастичной $p(\mathbf{R}_m | \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_l)$, четырехчастичной $p(\mathbf{R}_n | \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_l, \mathbf{R}_m)$ и т. д. Для замыкания иерархии этих уравнений Лакс [26] предложил использовать квазикристаллическое приближение (ККП), которое требует знания лишь двухчастичной функции распределения ($s = 2$). В этом приближении предполагается, что усредненное внутреннее поле при двух фиксированных частицах равно усредненному внутреннему полю при одной фиксированной частице:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \rangle_{lj} \approx \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}'') \rangle_l. \quad (8)$$

Если в слое реализуется однородное распределение частиц, т. е. $p(\mathbf{R}_j) = p = \text{const}$, то при освеще-

нии монослоя по нормали поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ одинаковы для всех частиц (любого j). Это позволяет заменить поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ в формулах (6) и (7) на поле $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$ в частице, центр которой находится в начале координат ($\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 \equiv \langle \mathbf{E}(0 + \mathbf{r}') \rangle_1$), а сумму — множителем N . Вводя в формулы (6) и (7) среднюю плотность числа частиц (концентрацию) ρ_0 и двухчастичную корреляционную функцию $w(\mathbf{R})$,

$$\rho_0 = Np, \quad (9)$$

$$w(\mathbf{R}) = Np(\mathbf{R}|0)/\rho_0, \quad (10)$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \rangle = \\ &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \rho_0 \times \\ &\times \int d\mathbf{R} \int_{V_p} d\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}') + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}'') \rangle_1 + \frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi} \rho_0 \times \\ &\times \int d\mathbf{R} w(\mathbf{R}) \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{R} + \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}'') \rangle_1. \quad (12) \end{aligned}$$

В условиях, когда корреляция в расположении частиц зависит только от модуля расстояния между ними, функция $w(\mathbf{R}) = g(R)$, где $g(R)$ — радиальная функция распределения [47, 48], $R = |\mathbf{R}|$. В данной работе мы рассматриваем корреляции только такого типа.

3. ПОЛЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ МОНОСЛОЯ

Рассмотрим поле в дальней зоне монослоя ($|\mathbf{r} - (\mathbf{R} + \mathbf{r}')| \gg \lambda$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения). Предположим, что излучение, рассеянное в направлении $\hat{\mathbf{r}}$, регистрируется с помощью узкоапертурного приемника с площади монослоя, линейные размеры которой малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, но достаточно велики, чтобы статистические характеристики ансамбля частиц на рассматриваемой площади были такими же, как и у всего монослоя. Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \frac{R}{r} = \text{const} \ll 1, \quad (13)$$

где $r = |\mathbf{r}|$. Отметим, что падающее излучение фиксируется приемником только при $\hat{\mathbf{r}} = +\hat{\mathbf{z}}$.

При этих предположениях функция Грина в выражении (11) упрощается. Если $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}') &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \times \\ &\times \exp[ik(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')]. \quad (14) \end{aligned}$$

Если $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} = 0$, то

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}') &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \times \\ &\times \exp\left[ik \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \right) \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

В обоих случаях интегрирование в выражении (11) по объему частицы и по ее положению в монослое разделяется. В результате

$$\sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) \rangle = \frac{\rho_0}{kr} e^{ikr} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) h(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$ — амплитудная функция рассеяния в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ для отдельной частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{(m^2 - 1)k^3}{4\pi} \int_{V_p} d\mathbf{r}' \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \times \\ &\times \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1. \quad (17) \end{aligned}$$

Она учитывает вклад всех частиц монослоя в формирование внутреннего поля рассматриваемой частицы (т.е. многократное рассеяние волн в монослое).

Функция $h(\mathbf{r})$ учитывает различие в фазах полей, создаваемых в точке наблюдения \mathbf{r} частицами монослоя. Если $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} \neq 0$, то

$$h(\hat{\mathbf{r}}) = \int \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \delta(k\hat{\mathbf{r}}_{(x,y)}), \quad (18)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{(x,y)}$ — проекция вектора $\hat{\mathbf{r}}$ на плоскость монослоя (x, y) . Из выражения (18) следует, что усредненное рассеянное поле для всех направлений, кроме $\hat{\mathbf{r}} = \pm\hat{\mathbf{z}}$, равно нулю.

При $\hat{\mathbf{r}} = \pm\hat{\mathbf{z}}$

$$h(z) = \int \exp\left(ik \frac{1}{2} \frac{R^2}{z} \right) d\mathbf{R} = \frac{2\pi iz}{k} \quad (19)$$

и формула (16) преобразуется в формулу для рассеянного поля, полученную в работе [34]:

$$\sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{z}) \rangle = \rho_0 \frac{2\pi i}{k^2} \mathbf{f}(\pm \hat{\mathbf{z}}) \exp(ik|\mathbf{z}|). \quad (20)$$

Усредненные рассеянные поля, определяемые выражениями (17) при $\hat{\mathbf{r}} = \pm \hat{\mathbf{z}}$ и (20), представляют собой плоские волны, распространяющиеся ортогонально монослою и когерентно взаимодействующие с падающей волной. Для структуры с идеальной решеткой эта когерентная часть равна полному полю: $\langle \mathbf{E}(\mathbf{z}) \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{z})$. Для такой решетки возможно формирование когерентных полей и в других направлениях рассеяния. В дисперсных структурах с «неидеальным дальним» пространственным порядком (упорядоченных структурах с неидеальными решетками) и в средах с ближним порядком имеют место флуктуации положений \mathbf{R}_j . Как показано выше (18), при наличии таких флуктуаций, в предположении, что $p(\mathbf{R}_j) = \text{const}$, амплитуда среднего поля, рассеянного под углом к волновому вектору падающей волны, равна нулю. Однако флуктуации положений \mathbf{R}_j частиц порождают некогерентное поле, которое проявляется в интенсивности. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

В заключение данного раздела подчеркнем, что функция Грина в приближении дальнего поля (14) и (15) используется только для описания поля, регистрируемого узкоапертурным приемником на достаточно большом расстоянии от «видимой» им площади монослоя (см. выражение (13)). При нахождении усредненного поля в частице, описываемого выражением (12), используется разложение функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. Таким образом, в разрабатываемом подходе нет ограничений на расстояние между частицами.

4. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Интенсивность I полного поля в дальней зоне монослоя, усредненная по различным конфигурациям ансамбля частиц, определяется следующим образом:

$$I(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \left[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) \right] \left[\mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}) + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_l^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}_l) \right] \right\rangle, \quad (21)$$

где верхний индекс «*» означает комплексное сопряжение.

Интенсивность I_{inc} некогерентной составляющей найдем как разность между усредненной интенсивностью полного поля и интенсивностью его когерентной составляющей:

$$I_{inc}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j,l=1}^N [\langle \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_l^* \rangle - \langle \mathbf{F}_j \rangle \cdot \langle \mathbf{F}_l^* \rangle]. \quad (22)$$

Первую сумму в выражении (22),

$$S_1 = \sum_{j,l=1}^N \langle \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_l^* \rangle,$$

удобно разделить на две суммы, описывающие поля, рассеянные одной и той же ($S_{l=j}$) и разными ($S_{l \neq j}$) частицами: $S_1 = S_{l=j} + S_{l \neq j}$. Тогда при выполнении условия (13) имеем

$$S_{l=j} = \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_j^* \rangle = N \left[\frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi r} \right]^2 \int d\mathbf{R}_j p(\mathbf{R}_j) \times \int_{V_p(\mathbf{r}')} \int_{V_p(\mathbf{r}'')} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \langle \mathbf{e}_j(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}'') \rangle_{jj}, \quad (23)$$

$$S_{l \neq j} = N^2 \left[\frac{(m^2 - 1)k^2}{4\pi r} \right]^2 \iint d\mathbf{R}_l d\mathbf{R}_j p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) \times \exp\{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)\} \times \int_{V_p(\mathbf{r}')} \int_{V_p(\mathbf{r}'')} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \langle \mathbf{e}_l(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}'') \rangle_{lj}, \quad (24)$$

где $p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j)$ — двухчастичная функция распределения вероятностей, характеризующая вероятность одновременного нахождения центров частиц в точках \mathbf{R}_l и \mathbf{R}_j ,

$$\mathbf{e}_j(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') = \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \times \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \quad (25)$$

— поле распространяющейся в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ поперечной волны, возбужденной в точке \mathbf{r}' j -й частицы.

При взятии интегралов по объему частиц в выражениях (23), (24) используем приближение среднего поля: $\mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \approx \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$, т. е. пренебрегаем флуктуациями полей в частицах для конкретных конфигураций монослоя по сравнению со значениями этих полей, усредненными по возможным

конфигурациям ансамбля при фиксации выбранной частицы. Тогда справедливо равенство

$$\langle \mathbf{e}_l(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}'') \rangle_{lj} = \langle \mathbf{e}_l(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \rangle_l \cdot \langle \mathbf{e}_j^*(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}'') \rangle_j. \quad (26)$$

Формулы (23) и (24) с учетом (26) и используемого ранее предположения о равенстве полей в частицах ($\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$) преобразуются к виду

$$S_{l=j} = \frac{N}{r^2 k^2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}), \quad (27)$$

$$S_{l \neq j} = \frac{N^2}{r^2 k^2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}) \iint d\mathbf{R}_l d\mathbf{R}_j p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) \times \exp\{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)\}. \quad (28)$$

Заметим, что при интегрировании (28) по плоскости монослоя точки $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_j$ можно не исключать, так как в них $p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) = 0$.

Учитывая (9) и (16), запишем вторую сумму в формуле интенсивности некогерентного поля (22),

$$S_2 = \sum_{j,l=1}^N \langle \mathbf{F}_j \rangle \cdot \langle \mathbf{F}_l^* \rangle,$$

аналогично выражению для $S_{l \neq j}$ (28). В результате для разности $S_{l \neq j} - S_2$ получим

$$S_{l \neq j} - S_2 = \frac{N^2}{r^2 k^2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \iint d\mathbf{R}_l d\mathbf{R}_j [p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) - p(\mathbf{R}_l)p(\mathbf{R}_j)] \times \exp\{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)\}. \quad (29)$$

Выражение (27) описывает вклад отдельных частиц в интенсивность $I_{inc}^{l=j}$ некогерентного поля. Вклад, возникающий вследствие интерференции полей, рассеянных разными частицами, определяется формулой (29). Если положения частиц некоррелированы, то $p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) - p(\mathbf{R}_l)p(\mathbf{R}_j) = 0$ и этот вклад $I_{inc}^{l \neq j} = S_{l \neq j} - S_2 = 0$. Если корреляция зависит только от расстояния $R = |\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j|$ между частицами, то

$$N^2 [p(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_j) - p(\mathbf{R}_l)p(\mathbf{R}_j)] = \rho_0^2 [g(R) - 1].$$

Интегрируя (29) по азимуту вектора $\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j$ и используя формулу (27), запишем выражение для интенсивности некогерентного поля в следующем виде:

$$I_{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\eta}{\pi x^2} \frac{S}{r^2} S_2(2x \sin \theta). \quad (30)$$

Здесь η — фактор заполнения монослоя (отношение площади проекций всех частиц на плоскость монослоя к площади, на которой они распределены), $x = \pi D/\lambda$ — параметр дифракции частицы, D — диаметр частицы, λ — длина волны падающего излучения, θ — полярный угол рассеяния, S — «видимая» приемником площадь монослоя, величина которой зависит от свойств приемника и точки наблюдения, $S_2(2x \sin \theta)$ — двумерный структурный фактор [47, 48, 55]:

$$S_2(2x \sin \theta) = 1 + 8\eta \int_0^\infty [g(u) - 1] J_0(2xu \sin \theta) u du. \quad (31)$$

В формуле (31) $u = R/D$ — безразмерная переменная интегрирования, определяющая расстояние в плоскости монослоя, выраженное в диаметрах частиц, $g(u)$ — радиальная функция распределения частиц монослоя, $J_0(z)$ — цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка. Структурный фактор (31) характеризует пространственное распределение частиц и определяет его влияние на угловую структуру рассеянного излучения [47, 48, 55].

Для определения интенсивности $I(\mathbf{r})$ полного поля к найденному выражению для $I_{inc}(\mathbf{r})$ следует добавить интенсивность $I_c(\mathbf{r})$ когерентной составляющей поля, которая, как показано выше, отлична от нуля только при $\hat{\mathbf{r}} = \pm \hat{\mathbf{z}}$:

$$I_c(\pm|\mathbf{z}|\hat{\mathbf{z}}) = \left| \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mathbf{E}_0 + \rho_0 \frac{2\pi i}{k^2} \mathbf{f}(\pm\hat{\mathbf{z}}) e^{ik|\mathbf{z}|} \right|^2. \quad (32)$$

Входящая в выражения для интенсивностей (30) и (32) амплитудная функция $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$, описывающая рассеяние отдельной частицей (находящейся в эффективном поле, созданном всеми частицами ансамбля), определяется из решения уравнения (17) путем разложения выражения $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')$ по векторным сферическим волновым функциям (см. [56, 57]) и представления усредненного поля в частице в виде суммы таких функций.

Коэффициенты этой суммы, учитывающие многократное рассеяние волн, определяются из уравнения (12) с помощью аналогичного разложения всех входящих в него функций и зависят от поляризации $\hat{\mathbf{e}}_0$ падающей волны. В данной работе мы рассматриваем циркулярную поляризацию $\hat{\mathbf{e}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$, где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей x и y декартовой системы координат (см. уравнение (1)). Амплитудная функция рассеяния в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ для отдельной частицы монослоя при этом определяется следующим образом:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j(j+1)} \times \\ \times \left[\hat{\theta} \left(\pi_j^{(1)}(\mu) z_j + \tau_j^{(1)}(\mu) y_j \right) + \right. \\ \left. + i \hat{\varphi} \left(\tau_j^{(1)}(\mu) z_j + \pi_j^{(1)}(\mu) y_j \right) \right]. \quad (33)$$

Здесь коэффициенты z_j и y_j соответствуют коэффициентам b_{jM} и b_{jE} из работы [34], угловые функции имеют вид

$$\pi_j^{(1)}(\mu) = P_j^{(1)}(\cos \theta) / \sin \theta, \quad \tau_j^{(1)}(\mu) = dP_j^{(1)}(\cos \theta) / d\theta,$$

где $\mu = \cos \theta$, $P_j^{(1)}(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра, $\hat{\theta}$ и $\hat{\varphi}$ — единичные векторы в направлениях, определяемых полярным θ и азимутальным φ углами рассеяния. Алгоритм расчета z_j и y_j приведен в работах [42, 50, 51] и Приложении А.

Если каждая из частиц монослоя находится только в поле падающей волны, то нет необходимости в усреднении внутреннего поля в какой-либо частице по возможным конфигурациям остальных частиц и уравнение (12) для его определения упрощается. В правой части (12) остаются только два первых члена: падающее поле и интеграл по объему рассматриваемой частицы. В результате, как следует из системы уравнений (А.1), коэффициенты z_j и y_j , входящие в выражение (33), становятся равными коэффициентам Ми.

Найдем доли излучения, когерентно прошедшего и отраженного монослоем, а также рассеянного некогерентно, как отношения интенсивностей данных полей к интенсивности падающей волны. Первые две характеристики — это коэффициенты когерентного пропускания T_c и отражения R_c монослоя. Они определяются на основе выражения (32) по формулам [50, 51]

$$T_c = |t_c|^2 = \left| 1 - \frac{\eta}{x^2} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1)(z_j + y_j) \right|^2, \quad (34)$$

$$R_c = |r_c|^2 = \left| -\frac{\eta}{x^2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (2j+1)(b_{jM} - b_{jE}) \right|^2, \quad (35)$$

где t_c и r_c — амплитудные коэффициенты соответственно когерентного пропускания и отражения монослоя.

При определении доли I_{inc}^{rd} некогерентно рассеянного монослоем излучения в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ учтем, что найденная выше интенсивность этого излучения

$I_{inc}(\mathbf{r})$ — это интенсивность, регистрируемая с некоторой «видимой» приемником площади S . Поэтому I_{inc}^{rd} есть отношение величины $I_{inc}(\mathbf{r})$ к интенсивности $|\mathbf{E}_0|^2 S$ излучения, падающего на эту площадь:

$$I_{inc}^{rd} = \frac{\eta}{2\pi x^2 r^2} S_2(2x \sin \theta) \times \\ \times \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j(j+1)} \left(\pi_j^{(1)}(\mu) z_j + \tau_j^{(1)}(\mu) y_j \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j(j+1)} \left(\tau_j^{(1)}(\mu) z_j + \pi_j^{(1)}(\mu) y_j \right) \right|^2 \right\}. \quad (36)$$

Будем называть I_{inc}^{rd} приведенной интенсивностью (reduced intensity) излучения, некогерентно рассеянного в направлении $\hat{\mathbf{r}}$. Определим коэффициент некогерентного рассеяния F_{inc} , интегрируя (36) по телесному углу 4π :

$$F_{inc} = \int_{4\pi} I_{inc}^{rd}(\mathbf{r}) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (37)$$

Из формулы (36) следует, что $r^2 I_{inc}^{rd}(\mathbf{r})$ зависит только от сферической координаты θ ($r^2 I_{inc}^{rd}(\mathbf{r}) = I_{inc}^{rd}(\theta)$), и формула (37) принимает вид

$$F_{inc} = 2\pi \int_0^\pi I_{inc}^{rd}(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (38)$$

Формулы (34)–(38) позволяют определять коэффициенты когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , приведенную интенсивность $I_{inc}^{rd}(\theta)$ и коэффициент F_{inc} некогерентного рассеяния. При расчете число членов бесконечных рядов в формулах (34)–(36) ограничивалось величиной N_s , определяемой сходимостью рядов. Численный анализ показал, что для нахождения коэффициентов T_c и R_c , как правило, достаточно использовать $N_s = N_s^*$ членов, где значение N_s^* вычисляется по формуле [57]

$$N_s^* = x + 4.05x^{1/3} + 2. \quad (39)$$

При нахождении функции $I_{inc}^{rd}(\theta)$ величина $N_s = (1.5 \div 2)N_s^*$.

5. АПРОБАЦИЯ МЕТОДА

Коэффициенты когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , приведенная интенсивность $I_{inc}^{rd}(\theta)$ и коэффициент F_{inc} некогерентного

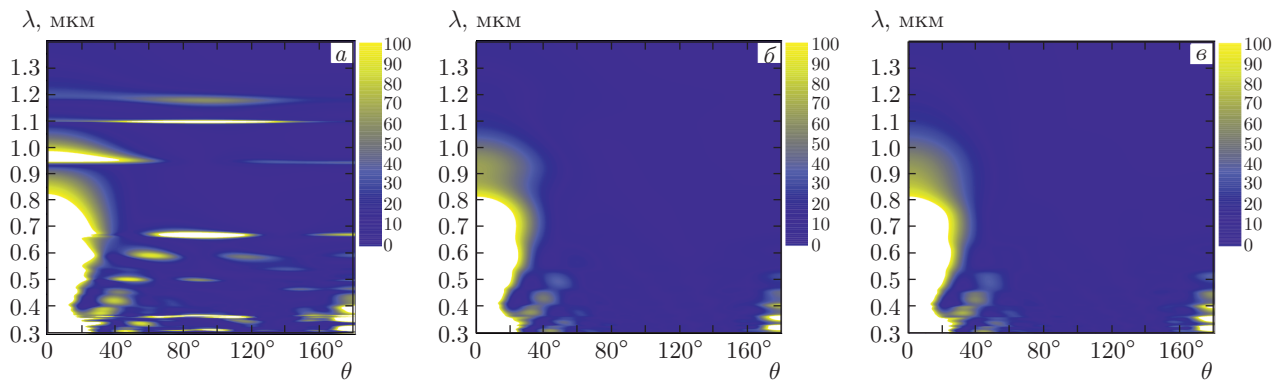


Рис. 1. (В цвете онлайн) Рассчитанные в рамках разработанного подхода зависимости величины $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$, характеризующей интенсивность излучения, рассеянного частицей монослоя с неидеальной треугольной решеткой (а) и частично упорядоченного монослоя (б), от длины волны λ падающего излучения и угла рассеяния θ . Зависимость $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*(\lambda, \theta)$, рассчитанная в приближении однократного рассеяния (в). Параметры радиальной функции, описывающей монослой с неидеальной треугольной решеткой (см. Приложение А): $\sigma(u) = 0.01(0.5u + 0.5)$, $l_c = 220$. Фактор заполнения монослоя $\eta = 0.5$, диаметр частиц $D = 0.8$ мкм, показатель преломления частиц $m = 1.6 + 0i$

рассеяния (34)–(38) монослоев определяются величиной $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$, характеризующей интенсивность излучения, рассеянного отдельной частицей монослоя (см. (17), (33)) с учетом многократного рассеяния волн. На рис. 1 представлены рассчитанные зависимости величины $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$ от длины волны λ падающего излучения и полярного угла рассеяния θ для монослоев с разными типами пространственной организации частиц. Радиальная функция распределения (РФР) частиц в частично упорядоченном монослое рассчитывалась итерационным методом численного решения интегрального уравнения Орнштейна – Цернике в приближении Перкуса – Йевики [49, 55, 58]. РФР монослоя с неидеальной решеткой рассчитывалась по методу, описанному в работах [50, 51] (см. также Приложение А). Рассмотрены монослои непоглощающих диэлектрических частиц с показателем преломления $m = 1.6 + 0i$ и размерами, сопоставимыми с длиной волны λ падающего излучения.

Из рис. 1а,б видно, что тип пространственной организации частиц сильно влияет на характер рассеяния излучения отдельной частицей. На обоих рисунках наблюдаются резонансы. Они являются результатом формирования собственных мод, рассеянных сферической частицей, которая находится в эффективном поле, являющемся суперпозицией поля падающей плоской волны и полей волн, рассеянных остальными частицами слоя. Форма этих мод определяется интерференцией внутренних мод частицы с падающими на нее волнами. Их профили асимметричны, что характерно для интерферен-

ции Фано [59–62]. Для монослоя с неидеальной треугольной решеткой (рис. 1а) резонансы выражены сильнее, чем для частично упорядоченного монослоя (рис. 1б), в котором из-за большей разупорядоченности частиц проявление интерференционных эффектов вторичных рассеянных волн меньше.

Зависимость $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*(\lambda, \theta)$, рассчитанная без учета многократного рассеяния волн (в приближении однократного рассеяния), приведена на рис. 1в. Сравнение с рис. 1а,б показывает, что многократное рассеяние может сильно влиять на характер величины $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$. Это влияние увеличивается с ростом степени упорядоченности системы.

Для количественного сравнения влияния типа пространственной организации частиц и многократного рассеяния волн на характеристики рассеяния на рис. 2 приведены зависимости величины $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$ от длины волны λ падающего излучения при разных углах рассеяния θ и от угла рассеяния при разных длинах волн для монослоя с неидеальной треугольной решеткой и частично упорядоченного монослоя. Видно, что в областях пиков значения $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$, рассчитанные в рамках разработанного подхода, для монослоя с неидеальной решеткой могут более чем на порядок отличаться от значений $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^*$ для частично упорядоченного монослоя и значений, полученных в приближении однократного рассеяния.

Совокупный вклад всех частиц слоя в интенсивность I_{inc}^{rd} некогерентного поля в дальней зоне определяется интерференцией волн, рассеянных отдельными частицами монослоя. Его величина зависит от пространственной организации частиц и

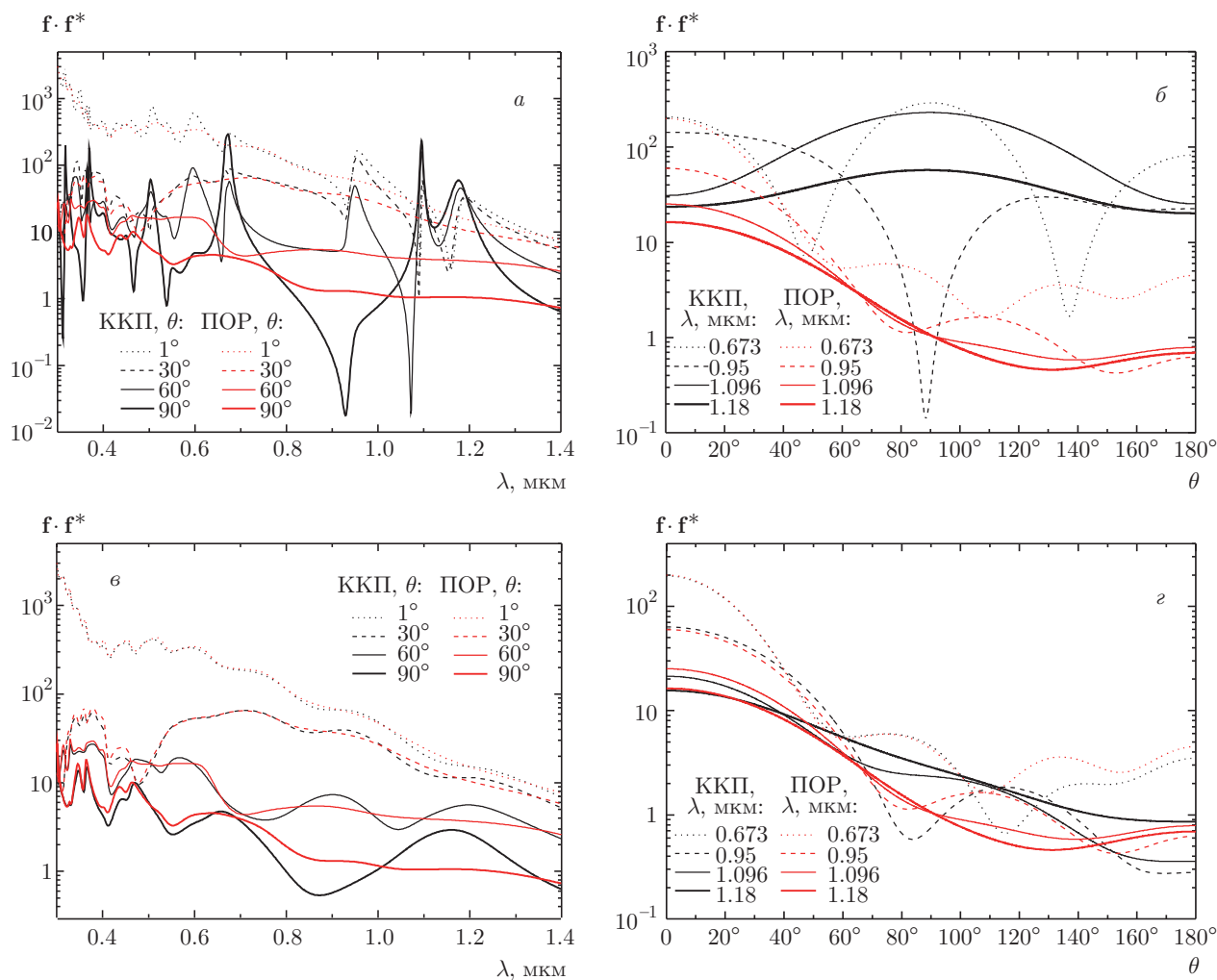


Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости величины $f \cdot f^*$ от длины волны λ падающего излучения при разных углах рассеяния θ (а,в) и от угла рассеяния при разных длинах волн (б,з) для монослоя с неидеальной треугольной решеткой ($\sigma(u) = 0.01(0.5u + 0.5)$, $l_c = 220$) (а,б) и частично упорядоченного монослоя (в,з). Расчет в рамках разработанного подхода (ККП) и в приближении однократного рассеяния (ПОР). Фактор заполнения монослоя $\eta = 0.5$, диаметр частиц $D = 0.8$ мкм, показатель преломления частиц $m = 1.6 + 0i$

определяется структурным фактором (31). Результат «наложения» структурного фактора на характеристики рассеяния отдельных частиц, представленные на рис. 1, приведен на рис. 3. Видно, что зависимость I_{inc}^{rd} от длины волны λ падающего излучения и угла рассеяния θ (рис. 3) резко отличается от зависимости $f \cdot f^*$ для отдельной частицы монослоя (рис. 1). Имеет место перераспределение рассеянного излучения. Для излучения с длинами волн $\lambda \gtrsim 0.95$ мкм (рис. 3а) и $\lambda \gtrsim 1$ мкм (рис. 3б) наблюдается практически полное гашение (для монослоя с неидеальной решеткой, рис. 3а) или сильное ослабление (для частично упорядоченного монослоя, рис. 3б) некогерентного рассеяния. Харак-

тер перераспределения рассеянного излучения определяется типом пространственной упорядоченности частиц. На зависимости $I_{inc}^{rd}(\lambda, \theta)$ монослоя с неидеальной решеткой (рис. 3а) имеют место выраженные дифракционные максимумы. Верхняя кривая на рис. 3а соответствует первому порядку дифракции. Остальные кривые соответствуют дифракционным максимумам более высоких порядков. Обратим внимание, что речь идет о дифракционных кольцах [2, 55], поскольку пространственный порядок в данной работе описывается с помощью радиальной функции распределения (т.е. предполагается равномерное распределение частиц по азимуту относительно начала координат, находящегося в цен-

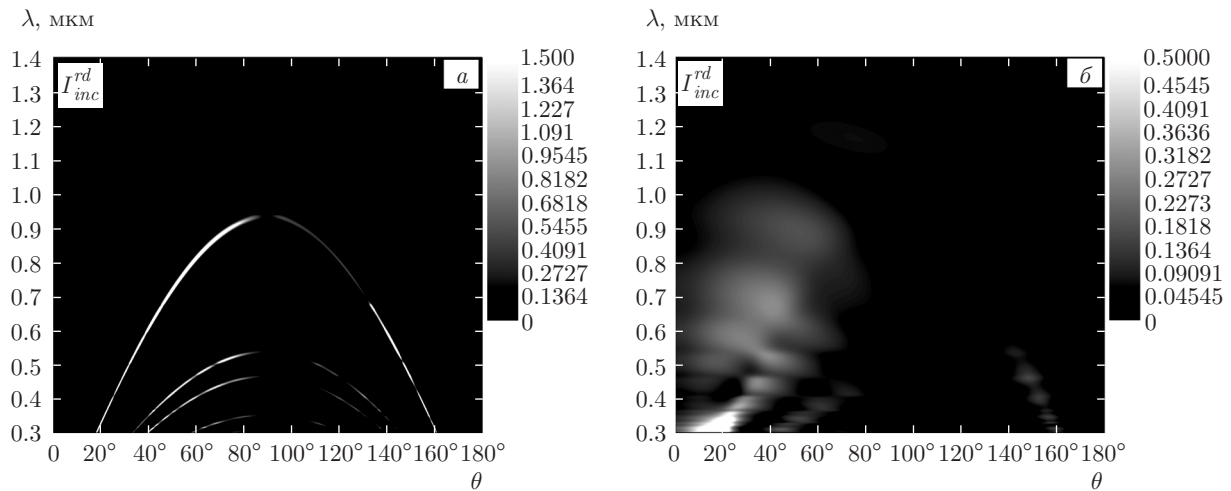


Рис. 3. Зависимости приведенной интенсивности I_{inc}^{rd} излучения, некогерентно рассеянного монослоем с неидеальной треугольной решеткой (а) и частично упорядоченным монослоем (б), от длины волны λ падающего излучения и полярного угла рассеяния θ . Фактор заполнения монослоя $\eta = 0.5$, диаметр частиц $D = 0.8$ мкм, показатель преломления частиц $m = 1.6 + 0i$. Параметры радиальной функции монослоя с неидеальной треугольной решеткой: $\sigma(u) = 0.01(0.5u + 0.5)$, $l_c = 220$

тре произвольно выбранной частицы). Такие кольца характерны для поликристаллической структуры. В монокристаллической структуре реализуются отдельные дифракционные пики и пространственное распределение частиц описывается не радиальной (одномерной), а двухчастичной корреляционной функцией $w(\mathbf{R})$. Дифракционные кольца на зависимости $I_{inc}^{rd}(\lambda, \theta)$ частично упорядоченного монослоя сильно размыты (рис. 3б). В слое с неидеальной решеткой некогерентное рассеяние в малых углах, в отличие от частично упорядоченной структуры, практически отсутствует.

На рис. 4 представлены зависимости $I_{inc}^{rd}(\theta)$, $F_{inc}(\lambda)$, $T_c(\lambda)$, $R_c(\lambda)$ для монослоя с неидеальной треугольной решеткой (а, в, д) и частично упорядоченного монослоя (б, з, е). Расчеты проведены в рамках разработанного в данной работе подхода, основанного на ККП (а-з), и в интерференционном приближении (ИП), не учитывающем многократное рассеяние волн в слое, но учитывающем интерференцию волн, рассеянных отдельными частицами в дальней зоне (а, б, д, е). Расчет в ИП проводился по формулам, аналогичным выражениям (34)–(36), где вместо коэффициентов z_j и y_j использовались коэффициенты Ми для рассеянного поля (А.2), (А.3), (В.1), (В.2).

Из сравнения результатов, полученных в ККП и в ИП (рис. 4) видно, что многократное рассеяние в монослое может существенно сказываться на характеристиках излучения в дальней зоне. При большой

концентрации частиц, размеры которых сопоставимы с длиной волны падающего излучения, ИП, не учитывающее многократное рассеяние волн, может приводить к физически некорректным результатам (см. рис. 4д, е). В частности, для монослоя непоглощающих частиц сумма коэффициентов некогерентного рассеяния $F_{inc}(\lambda)$, когерентного пропускания $T_c(\lambda)$ и отражения $R_c(\lambda)$ может существенно отличаться от единицы. Разработанный в данной работе подход дает физически корректные результаты во всей рассмотренной области параметров (рис. 4в, з). Погрешность расчета $\varepsilon_{calc} = |1 - (F_{inc} + T_c + R_c)|$ не превышает 10^{-6} .

Отметим, что с ростом θ доля излучения, рассеянного частично упорядоченным монослоем в переднюю полусферу, вначале возрастает, а затем уменьшается (рис. 4б). Пик имеет место также в задней полусфере при приближении к углу $\theta = 180^\circ$. Видно, что с уменьшением длины волны падающего излучения пики более выражены. Особенно четко они проявляются при $\lambda = 0.3$ мкм (в окрестностях $\theta \approx 20^\circ$ и $\theta \approx 160^\circ$). Такое поведение обусловлено параметрами частиц (параметром дифракции и оптическими постоянными) и типом их пространственной организации, т. е. видом РФР [63].

Сравним результаты расчета, полученные в рамках разработанного в настоящей работе подхода, с экспериментальными данными [5], где исследованы угловые и спектральные характеристики излучения, рассеянного плотноупакованным монослоем

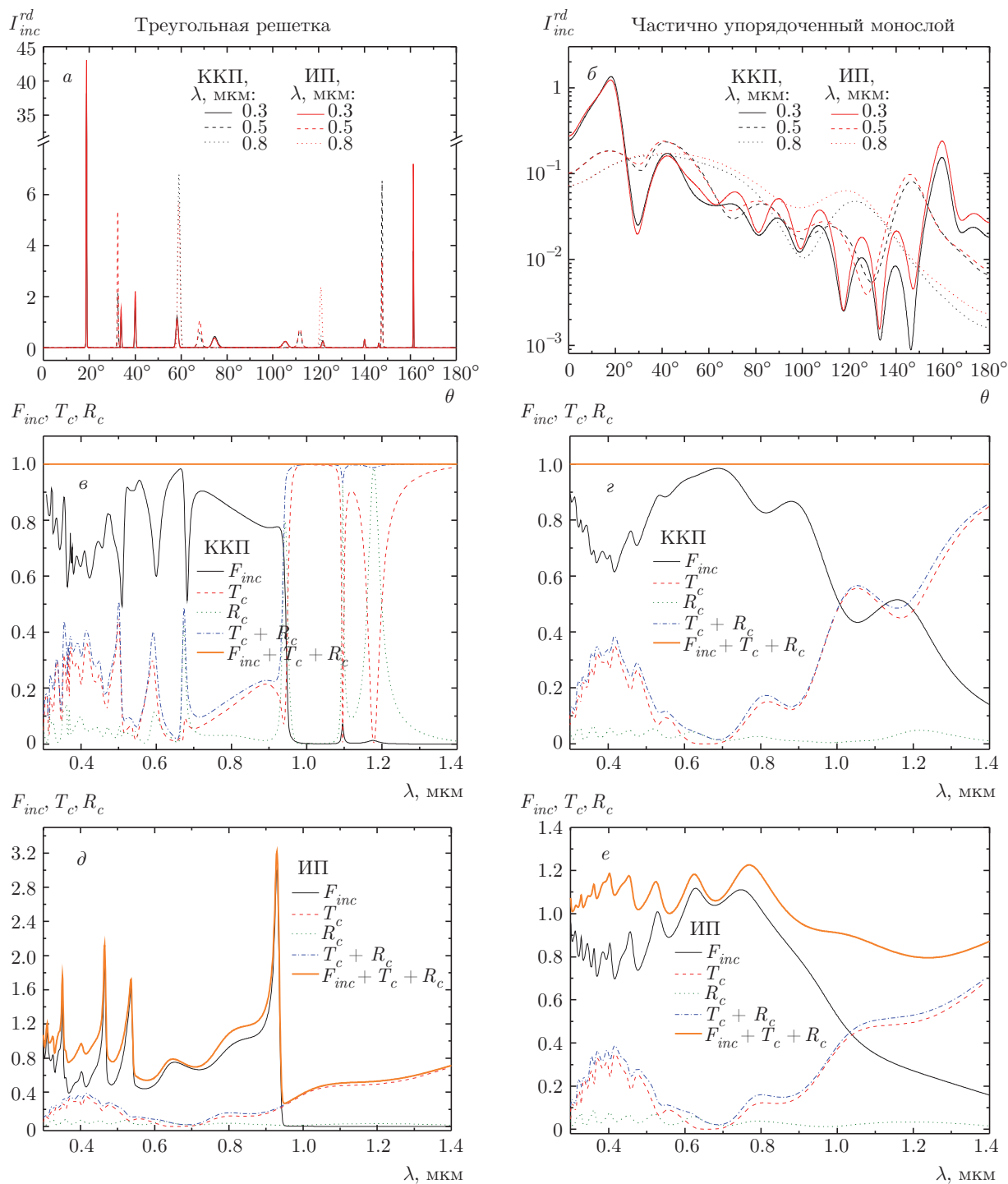


Рис. 4. (В цвете онлайн) Угловые зависимости приведенной интенсивности I_{inc}^{rd} излучения, некогерентно рассеянного монослоем с неидеальной треугольной решеткой (а) и частично упорядоченным монослоем частиц (б), расчет в рамках разработанного подхода (ККП) и в интерференционном приближении (ИП). Спектральные зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , отражения R_c , суммы $T_c + R_c$, коэффициента некогерентного рассеяния F_{inc} и суммы $T_c + R_c + F_{inc}$ монослоя (в-е), расчет в ККП (в,з) и ИП (д,е). $\eta = 0.5$, $D = 0.8$ мкм, $m = 1.6 + 0.0i$, параметры радиальной функции монослоя с неидеальной треугольной решеткой: $\sigma(u) = 0.01(0.5u + 0.5)$, $l_c = 220$

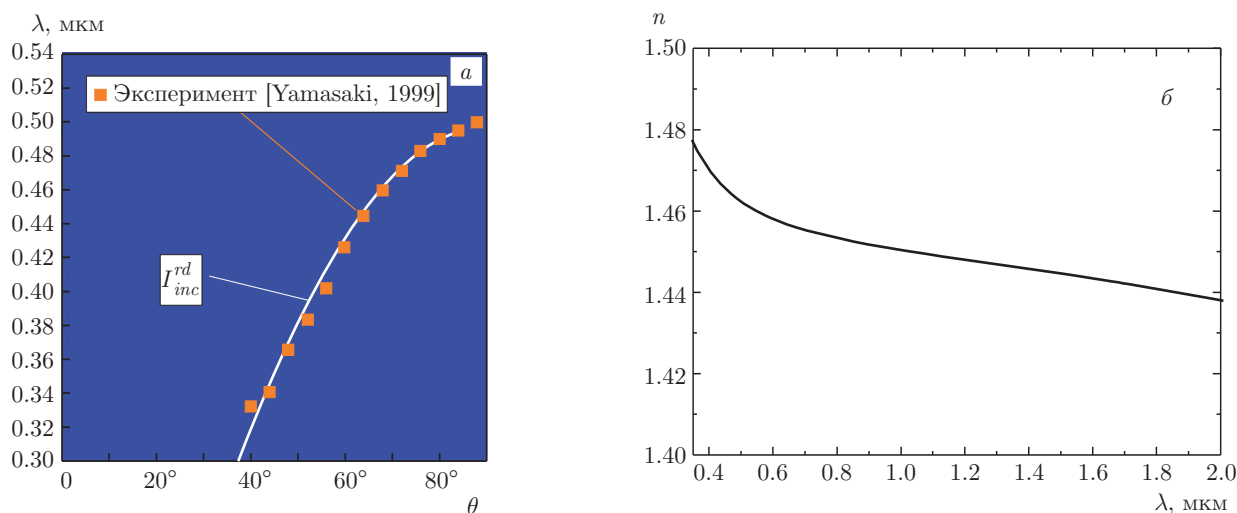


Рис. 5. *а)* Экспериментальная [5] и рассчитанная в ККП (в рамках разработанного в настоящей работе подхода) зависимости интенсивности излучения, некогерентно рассеянного монослоем с неидеальной треугольной решеткой, от длины волны λ падающего излучения и угла рассеяния θ . Зависимости соответствуют первому порядку дифракции. Частицы SiO_2 , $\eta = 0.83$, $D = 0.55$ мкм. *б)* Спектр показателя преломления SiO_2 [64], используемый в расчете

с треугольной решеткой из частиц оксида кремния (SiO_2), находящихся на стеклянной подложке. На рис. 5а показаны экспериментальная [5] и рассчитанная нами зависимости интенсивности излучения, рассеянного монослоем с неидеальной треугольной решеткой из частиц SiO_2 , от длины волны λ падающего излучения и угла рассеяния θ . Зависимости соответствуют первому порядку дифракции. Как показали результаты моделирования, наилучшее соответствие рассчитанных нами и экспериментальных [5] данных имеет место при $\eta = 0.83$. Их небольшое расхождение может быть обусловлено влиянием подложки [65], не учитываемым в расчете.

Отметим, что в данной работе мы приводим результаты только для монослоев непоглощающих частиц, чтобы проиллюстрировать правомерность метода. Метод применим и к описанию углового распределения излучения, рассеянного монослоем поглощающих частиц, а также к расчету коэффициента поглощения монослоя.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод определения углового распределения интенсивности излучения, рассеянного монослоем однородных монодисперсных сферических частиц при освещении по нормали. Он основан на использовании квазикристаллического приближения теории многократного рассеяния волн и мульт-

типольного разложения полей и тензорной функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. Для удобства рассмотрен случай освещения монослоя плоской циркулярно поляризованной волной. Метод может быть сравнительно легко обобщен на случай произвольных углов падения плоской волны любой поляризации. Такие исследования являются предметом отдельного рассмотрения.

Рассчитаны и проанализированы угловые и спектральные характеристики излучения, рассеянного частично упорядоченным монослоем и монослоем с неидеальной решеткой, с учетом (в рамках разработанного метода, основанного на квазикристаллическом приближении) и без учета (в рамках ИП) многократного рассеяния волн. Показано, что применительно к монослоям с большой концентрацией непоглощающих частиц, размеры которых сопоставимы с длиной волны падающего излучения, ИП может быть использовано лишь для получения качественных оценок, в то время как разработанный в данной работе метод, учитывающий многократное рассеяние волн в монослое, позволяет получать количественные оценки интенсивности некогерентно рассеянного излучения.

Получено хорошее соответствие результатов расчета с известными экспериментальными данными о положении дифракционного пика первого порядка на угловой и спектральной зависимостях интенсивности излучения, некогерентно рассеянного плотноупакованным монослоем с неидеальной треугольной

решеткой из частиц SiO₂.

Результаты исследования могут быть использованы при моделировании, разработке и создании фотонных кристаллов, метаматериалов, антиотражающих покрытий, фильтров пропускания и отражения, рассеивателей, солнечных элементов, светодиодов и других оптических и электрооптических устройств на основе дисперсных структур.

Работа частично поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф15МС-005).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формулы для расчета коэффициентов z_j и y_j

Для определения характеристик рассеянного излучения — приведенной интенсивности $I_{inc}^d(\theta)$ некогерентного поля и коэффициентов когерентного (направленного) пропускания T_c и когерентного (зеркального) отражения R_c монослоя — необходимо рассчитать коэффициенты разложения z_j и y_j , входящие в функцию $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$. Они находятся из решения системы уравнений [34, 50, 51]

$$z_l = b_l + \rho_0 b_l \sum_{j=1}^{N_s} (A_{lj} z_j + B_{lj} y_j),$$

$$y_l = a_l + \rho_0 a_l \sum_{j=1}^{N_s} (B_{lj} z_j + A_{lj} y_j),$$
(A.1)

где ρ_0 — средняя числовая концентрация частиц в слое, N_s — число учитываемых коэффициентов z_j и y_j для данного параметра дифракции частицы x , a_l и b_l — коэффициенты Ми для рассеянного поля (см., например, [57]):

$$a_l = \frac{m\psi_l(mx)\psi'_l(x) - \psi_l(x)\psi'_l(mx)}{m\psi_l(mx)\chi'_l(x) - \chi_l(x)\psi'_l(mx)},$$
(A.2)

$$b_l = \frac{\psi_l(mx)\psi'_l(x) - m\psi_l(x)\psi'_l(mx)}{\psi_l(mx)\chi'_l(x) - m\chi_l(x)\psi'_l(mx)},$$
(A.3)

$m = n + ik$ — относительный комплексный показатель преломления частиц, $\psi_l(x) = xj_l(x)$ и $\chi_l(x) = xh_l^{(1)}(x)$ — функции Риккати-Бесселя, $j_l(x)$ — сферическая функция Бесселя, $h_l^{(1)}(x)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода. Нижний индекс обозначает порядок функций. Используемые в данной работе алгоритмы расчета коэффициентов Ми и функций Бесселя приведены в Приложении В.

Коэффициенты A_{lj} и B_{lj} в (A.1) находятся из решения уравнений

$$A_{lj} = \frac{2j+1}{2} [l(l+1)j(j+1)]^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{p=0,2,\dots}^{N_s} i^{-p}(2p+1) [l(l+1)+j(j+1)-p(p+1)] P_p(0) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l & j & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & j & p \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} H_p, \quad (A.4)$$

$$B_{lj} = \frac{2j+1}{2} [l(l+1)j(j+1)]^{-1/2} \sum_{p=0,2,\dots}^{N_s} i^{-p}(2p+1) \times$$

$$\times [(p+l-j)(p-l+j)(l+j+1+p)(l+j+1-p)]^{1/2} P_p(0) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l & j & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & j & p \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} H_p, \quad (A.5)$$

где

$$H_p = 2\pi \int_D^\infty g(R) h_p^{(1)}(kR) R dR, \quad (A.6)$$

$g(R)$ — радиальная функция распределения частиц в слое, R — расстояние в плоскости слоя относительно начала координат, находящегося в центре частицы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число,

$$\begin{pmatrix} l & j & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l & j & p \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l & j & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— $3j$ -символы Вигнера [66], которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{pmatrix} l & j & p \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(p+l-j)(p-l+j)(l+j+1+p)(l+j+1-p)}{l(l+1)j(j+1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l & j & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

при нечетном $l + j + p$ и

$$\begin{pmatrix} l & j & p \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{l(l+1)+j(j+1)-p(p+1)}{[l(l+1)j(j+1)]^{1/2}} \begin{pmatrix} l & j & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

при четном $l + j + p$.

Для расчета $3j$ -символов воспользуемся выражением [66]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{j_3+m_3+2j_1} \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} C_{j_1-m_1 \ j_2-m_2}^{j_3 m_3}, \quad (A.9)$$

где $C_{j_1-m_1 \ j_2-m_2}^{j_3 m_3}$ — коэффициент Вигнера. Для $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ справедливо соотношение

$$C_{a_0 \ b_0}^{c_0} = \begin{cases} 0, & a+b+c=2q+1, \\ \frac{(-1)^{q-c} \sqrt{2c+1} q!}{(q-a)!(q-b)!(q-c)!} \left[\frac{(2q-2a)!(2q-2b)!(2q-2c)!}{(2q+1)!} \right]^{1/2}, & a+b+c=2q, \end{cases} \quad (A.10)$$

где q — целое число.

Суммирование в формулах (A.4) и (A.5) ведется по четным p , поскольку полиномы $P_p(0)$ равны нулю при нечетных p , а при четных $P_p(0) = i^p(p-1)!!/p!!$ [67], где $p!! = p(p-2)(p-4)\dots$

Запишем (A.6) в более удобном для расчета виде:

$$H_p = 2\pi(H_{1p} + H_{2p}),$$

где

$$H_{1p} = \int_D^\infty h_p^{(1)}(kR) R dR, \quad (A.11)$$

$$H_{2p} = \int_D^\infty (g(R) - 1) h_p^{(1)}(kR) R dR. \quad (A.12)$$

Используя рекуррентные соотношения для сферических функций Бесселя [67], интеграл (A.11) можно записать в виде

$$H_{1p} = k^{-2} \left\{ -kD h_{p+1}^{(1)}(kD) + \sum_{q=0,2,\dots}^p [2(p-q)+1] \times \frac{p!!(p-q-1)!!}{(p-1)!!(p-q)!!} h_{p-q}^{(1)}(kD) \right\}. \quad (A.13)$$

Приведем интеграл (A.12) к более удобному для расчетов виду. Введем безразмерную переменную интегрирования $u = R/D$, обозначающую расстояние в плоскости монослоя, выраженное в диаметрах частиц. Тогда

$$H_{2p} = D^2 \int_1^\infty (g(u) - 1) h_p^{(1)}(2xu) u du. \quad (A.14)$$

Интеграл (A.14) можно рассчитать численно, если подынтегральное выражение сходится к нулю при конечных u . Это обеспечивается сходимостью $g(u)$ к единице. Расстояние, на котором РФР становится равной единице, определяет длину корреляции l_c ,

характеризующую пространственный масштаб упорядоченности системы. При $u > l_c$ функция $g(u) = 1$. Для плотноупакованного частично упорядоченного монослоя частиц (монослоя с ближним порядком) значение l_c , как правило, не превышает 6–10 диаметров частиц. Для планарного кристалла значение l_c значительно больше. В зависимости от степени его упорядоченности оно может быть порядка десятков, сотен или тысяч D [50, 51].

Радиальная функция $g(u)$ частично упорядоченного монослоя рассчитывается итерационным методом численного решения интегрального уравнения Орнштейна – Цернике в приближении Перкуса – Йевики [55]. РФР монослоя с неидеальной решеткой рассчитывается по формулам, полученным в работах [50, 51]:

$$g(u) = \rho_0^{-1} \sum_i \frac{N_i}{2\pi u_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(u)} \times \exp\left(-\frac{(u-u_i)^2}{2\sigma^2(u)}\right), \quad (A.15)$$

где N_i — число центров частиц, находящихся на координатной окружности с радиусом u_i идеального кристалла,

$$\sigma(u) = \sigma_0(au + b) \quad (A.16)$$

— функция размытия, описывающая уширение координатных окружностей, параметры σ_0 , a и b задают степень упорядоченности и «дальность» пространственного порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Алгоритмы расчета коэффициентов Ми и функций Бесселя

Численный расчет коэффициентов Ми (A.2) и (A.3) проводится по формулам [68]

$$a_l = \frac{[D_l(mx)/m + l/x]\psi_l(x) - \psi_{l-1}(x)}{[D_l(mx)/m + l/x]\xi_l(x) - \xi_{l-1}(x)}, \quad (\text{B.1})$$

$$b_l = \frac{[mD_l(mx) + l/x]\psi_l(x) - \psi_{l-1}(x)}{[mD_l(mx) + l/x]\xi_l(x) - \xi_{l-1}(x)}, \quad (\text{B.2})$$

где $\psi_l(x) = xj_l(x)$, $\xi_l(x) = xh^{(1)}(x) = x(j_l(x) + iy_l(x))$, $D_l(z)$ — логарифмическая производная, рассчитываемая по схеме обратной рекурсии [68]:

$$D_{l-1} = \frac{l}{z} - \frac{1}{D_l + l/z}, \quad (\text{B.3})$$

начиная со значения $D_{l_{max}} = 0 + i0$, где $l_{max} = N_s + 15$. Формулы (B.1) и (B.2) являются эквивалентной записью формул (A.2) и (A.3).

Расчет сферической функции Бесселя первого рода $j(z)$, входящей в выражения для ψ и ξ , осуществляется по алгоритму, приведенному в работе [69], с модификацией, позволяющей улучшить точность расчета при значениях аргумента, кратных $\pi/2$. Алгоритм [69] расчета $j(x)$ состоит в следующем.

Сначала рассчитывается массив величин

$$r_l(z) = \frac{j_l(z)}{j_{l-1}(z)} \quad (\text{B.4})$$

по схеме обратной рекурсии:

$$r_l(z) = \left[\frac{2l+1}{z} - r_{l+1}(z) \right]^{-1}, \quad (\text{B.5})$$

начиная со значения

$$r_{l=l_{max}}(z) = \frac{z}{2l+1}, \quad (\text{B.6})$$

которое имеет место при $l \gg |z|$. В данной работе мы использовали значение $l_{max} = N_s + 15$.

Затем с использованием полученного массива $r_l(z)$ рассчитывается массив функции Бесселя $j(z)$ по схеме прямой рекурсии:

$$j_l(z) = r_l(z)j_{l-1}(z), \quad (\text{B.7})$$

начиная со значения

$$j_0(z) = r_0(z) \frac{\cos z}{z}. \quad (\text{B.8})$$

Анализ результатов расчета $j(z)$ по этому алгоритму показал, что при значениях аргумента z , кратных $\pi/2$, может иметь место заметная ошибка вычислений, поскольку в этом случае $\cos z \rightarrow 0$, а $r_0(z) \rightarrow \infty$ (см. формулу (B.8)). Для разрешения этой проблемы мы модифицировали описанный алгоритм. Модификация состоит в проверке величины

$\cos z$ на «близость» к нулю и выборе, в зависимости от ее результата, значения $j_0(z)$:

$$j_0(z) = \begin{cases} r_0(z) \frac{\cos z}{z}, & |\cos z| > \varepsilon_j, \\ \frac{\sin z}{z}, & |\cos z| \leq \varepsilon_j, \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

где $(\sin z)/z$ — значение функции $j_0(z)$ «по определению» (см., например, [68]), ε_j — малая величина, выбираемая в зависимости от типа используемых переменных. В проведенных нами расчетах использовалось значение $\varepsilon_j = 10^{-14}$.

Вычисление сферической функции Бесселя второго рода $y(z)$ проводится по стандартному алгоритму прямой рекурсии [68, 69]:

$$y_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} y_l(z) - y_{l-1}(z), \quad (\text{B.10})$$

начиная со значений

$$y_{-1}(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad y_0(z) = -\frac{\cos z}{z}. \quad (\text{B.11})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Alfrey, E. B. Bradford, J. W. Vanderhof et al., J. Opt. Soc. Amer. **44**, 603 (1954).
2. I. M. Krieger and F. M. O'Neill, J. Amer. Chem. Soc. **90**, 3114 (1968).
3. P. A. Hiltner and I. M. Krieger, J. Phys. Chem. **73**, 2386 (1969).
4. V. N. Bogomolov, S. V. Gaponenko, I. N. Germanenko et al., Phys. Rev. E **55**, 7619 (1997).
5. T. Yamasaki and T. Tsutsui, Jpn. J. Appl. Phys. **38**, 5916 (1999).
6. W. Sun, G. Videen, and B. Lin, Appl. Opt. **46**, 1150 (2007).
7. B. Wang, Yi Jin, and S. He, J. Appl. Phys. **106**, 014508 (2009).
8. B. K. Nayak, K. Sun, Ch. Rothenbach et al., Appl. Opt. **50**, 2349 (2011).
9. G. Fujii, T. Matsumoto, and T. Takahashi, Opt. Express **20**, 7300 (2012).
10. X. H. Wu, A. Yamilov, H. Noh et al., J. Opt. Soc. B **21**, 159 (2004).
11. Y. Rho, M. Wanit, J. Yeo et al., J. Phys. D: Appl. Phys. **46**, 024006 (2013).
12. D. S. Wiersma, Nat. Photon. **7**, 188 (2013).
13. I. Kim, D. S. Jeong, W. S. Lee et al., Opt. Express **22**, A1431 (2014).

14. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, *Опт. и спектр.* **115**, 316 (2013).
15. А. А. Miskevich and V. A. Loiko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **136**, 58 (2014).
16. А. А. Miskevich and V. A. Loiko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **146**, 355 (2014).
17. А. А. Miskevich and V. A. Loiko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **167**, 23 (2015).
18. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, *Опт. и спектр.* **122**, 825 (2017).
19. К. Ohtaka, *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* **13**, 667 (1980).
20. К. Ohtaka, Y. Suda, and S. Nagano, *Phys. Rev. B* **61**, 5267 (2000).
21. А. Modinos, *Physica A* **141**, 575 (1987).
22. N. Stefanou and A. Modinos, *J. Phys: Condens. Matter* **3**, 8135 (1991).
23. N. Stefanou and A. Modinos, *J. Phys: Condens. Matter* **5**, 8859 (1993).
24. L. L. Foldy, *Phys. Rev.* **67**, 107 (1945).
25. M. Lax, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 287 (1951).
26. M. Lax, *Phys. Rev.* **85**, 621 (1952).
27. V. Twersky, *J. Appl. Phys.* **23**, 407 (1952).
28. V. Twersky, *J. Math. Phys.* **16**, 633 (1975).
29. J. G. Fikioris and P. C. Waterman, *J. Math. Phys.* **5**, 1413 (1964); *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **123**, 8 (2013).
30. N. C. Mathur and K. C. Yeh, *J. Math. Phys.* **5**, 1619 (1964).
31. Y. Ma, V. V. Varadan, and V. K. Varadan, *Appl. Opt.* **27**, 2469 (1988).
32. L. Tsang and J. A. Kong, *Radio Sci.* **18**, 1260 (1983).
33. L. Tsang, C.-T. Chen, A. T. C. Chang et al., *Radio Sci.* **35**, 731 (2000).
34. K. M. Hong, *J. Opt. Soc. Amer.* **70**, 821 (1980).
35. D. Mackowski, *Proc. Roy. Soc. London A* **433**, 599 (1991); *J. Opt. Soc. Amer. A* **11**, 2851 (1994).
36. Y. Xu, *Appl. Opt.* **34**, 4573 (1995); *Phys. Lett. A* **249**, 30 (1998).
37. В. Г. Верещагин, А. Н. Полявина, Н. И. Сильванович, *ДАН БССР* **34**, 123 (1990).
38. A. N. Ponyavina, S. M. Kachan, and N. I. Sil'vanovich, *J. Opt. Soc. Amer. B* **21**, 1866 (2004).
39. V. P. Tishkovets, E. V. Petrova, and M. I. Mishchenko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **112**, 2095 (2011).
40. V. Loiko and V. Molochko, *Part. Part. Syst. Charact.* **13**, 227 (1996).
41. V. A. Loiko, V. P. Dick, and A. P. Ivanov, *J. Opt. Soc. Amer. A* **17**, 2040 (2000).
42. V. A. Loiko and A. A. Miskevich, *Appl. Opt.* **44**, 3759 (2005).
43. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, *Опт. и спектр.* **98**, 65 (2005).
44. A. G. Borovoi, in: *Light Scattering Reviews. Single and Multiple Light Scattering*, ed. by A. A. Kokhanovsky, Chichester (2006), pp. 181–252.
45. Y. Okada and A. A. Kokhanovsky, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **110**, 902 (2009).
46. A. García-Valenzuela, E. Gutiérrez-Reyes, and R. Barrera, *J. Opt. Soc. Amer. A* **29**, 1161 (2012).
47. J. Ziman, *Models of Disorder*, Univ. Press, Cambridge (1979), p. 525.
48. В. И. Иверонова, Г. П. Ревкевич, *Теория рассеяния рентгеновских лучей*, Изд-во Московского университета, Москва (1978), с. 278.
49. J. K. Percus and G. J. Yevick, *Phys. Rev.* **110**, 1 (1958).
50. А. А. Мискевич and V. A. Loiko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **112**, 1082 (2011).
51. А. А. Мискевич, В. А. Лойко, *ЖЭТФ* **140**, 5 (2011).
52. А. А. Мискевич and V. A. Loiko, *Nanosyst.: Phys. Chem. Math.* **4**, 778 (2013).
53. А. А. Мискевич, В. А. Лойко, *ЖЭТФ* **146**, 246 (2014).
54. А. А. Мискевич and V. A. Loiko, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **151**, 260 (2015).
55. А. П. Иванов, В. А. Лойко, В. П. Дик, *Распространение света в плотноупакованных дисперсных средах*, Наука и техника, Минск (1988), с. 191.
56. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book, New York (1953).
57. V. A. Babenko, L. G. Astafyeva, and V. N. Kuzmin, *Electromagnetic Scattering in Disperse Media: Inhomogeneous and Anisotropic Particles*, Springer, Berlin (2003), p. 434.

58. L. S. Ornstein and F. Zernike, Proc. Acad. Sci. **17**, 793 (1914).
59. U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
60. A. B. Evlyukhin, C. Reinhardt, A. Seidel et al., Phys. Rev. B **82**, 045404 (2010).
61. A. E. Miroshnichenko, S. Flach, and Y. S. Kivshar, Rev. Mod. Phys. **82**, 2257 (2010).
62. М. В. Рыбин, И. С. Синев, К. Б. Самусев и др., ФТТ **56**, 560 (2014).
63. V. Berdnik and V. Loiko, Quant. Electr. **36**, 1016 (2006).
64. *Handbook of Optical Constants of Solids*, ed. by E. D. Palik, Academic, San Diego (1985), Vol. 1.
65. Y. Kurokawa, H. Miyazaki, and Y. Jimba, Phys. Rev. B **69**, 155117 (2004).
66. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
67. G. V. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, Acad. Press, Oxford (2012).
68. C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, J. Wiley & Sons, New York (1983).
69. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*, Univ. Press, Cambridge (2002).