

# ОСОБЕННОСТИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ НА ДИСКРЕТНУЮ СИСТЕМУ СВЕТОВОДОВ

А. Г. Литвак<sup>а</sup>, В. А. Миронов<sup>а</sup>, С. А. Скобелев<sup>а\*</sup>, Л. А. Смирнов<sup>а,б\*\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

<sup>б</sup> *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 30 июля 2017 г.

На основе дискретного нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) аналитически и численно исследованы особенности самовоздействия одномерных квазиоптических волновых пучков, инжектируемых в пространственно-неоднородную среду, состоящую из набора эквидистантно расположенных связанных между собой световодов. Разработан вариационный подход, позволяющий адекватно прогнозировать глобальную эволюцию локализованных полей с исходно плоским фазовым фронтом. В безбаррационном приближении получены самосогласованные уравнения для основных параметров таких пучков (положения центра масс, эффективной ширины, линейных и квадратичных коррекций фазового фронта). Детально проанализирован случай, соответствующий введению излучения в периодическую систему нелинейных оптических волноводов под углом к ориентированной вдоль них оси. Показано, что при мощности, превышающей некоторое критическое значение, наблюдается процесс самофокусировки волнового поля, сопровождающийся смещением положения максимума интенсивности и заканчивающийся последующим сосредоточением большей части излучения только в одном из структурных элементов рассматриваемой решетки. При этом распространение пучков происходит вдоль трасс, существенно отличающихся от прямолинейных, и характеризуется изменением направления «движения» по сравнению с первоначальным. Найден асимптотический выражения, которые позволяют оценить длину самофокусировки и достаточно точно определить итоговую позицию точки с наибольшей амплитудой поля после захвата излучения в канал. Проведено сравнение результатов качественного исследования в безбаррационном приближении возможных режимов самоканализирования волновых пучков в системе слабо связанных световодов с данными прямого численного моделирования непосредственно в рамках ДНУШ.

DOI: 10.7868/S0044451018010030

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В сплошной среде одной из основных моделей для исследования самовоздействия волновых полей служит нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), играющее важную роль в оптике, физике плазмы, гидродинамике, а также в области ультрахолодных вырожденных квантовых газов [1–3]. В рамках данной модели (и ее различных модификаций) разработан достаточно широкий спектр аналитических ме-

тодов, которые дают возможность выявить ключевые особенности и закономерности в поведении одного или нескольких взаимодействующих между собой локализованных образований конечной амплитуды. Такие способы качественного анализа задачи, как, например, построение автомоделейных и солитоноподобных решений, метод моментов, асимптотическое разложение по малому параметру, вариационный подход и др. [1–3], позволяют не только интерпретировать, но и предсказать результаты численных расчетов и лабораторных экспериментов.

При изучении нелинейных процессов в периодически структурированных системах активно используется дискретное нелинейное уравнение Шредингера (ДНУШ) [2–9], которое является непосредствен-

\* E-mail: sksa@ufp.appl.sci-nnov.ru

\*\* E-mail: smirnov\_lev@appl.sci-nnov.ru

ным аналогом НУШ для пространственно-стратифицированных сред. Однако в данном случае при анализе эволюции волновых полей опираются, в основном, на численное моделирование [2–9]. Обусловлено это прежде всего тем, что применение стандартных асимптотических процедур становится более сложным и достаточно громоздким. Кроме того, сочетание нелинейности и дискретности приводит к возникновению новых физических эффектов, в том числе, связанных с резкими изменениями структуры локализованных образований и существенными радиационными потерями. В итоге, динамика системы оказывается разнообразнее и богаче [2–10], и даже в одномерной ситуации дискретные модели демонстрируют целый ряд сценариев своего поведения, которые не встречаются в континуальном пределе и требуют отдельного аналитического описания и понимания. Для таких целей часто прибегают к вариационному подходу, базирующемуся на априорных представлениях о структуре изучаемых нелинейных возбуждений [1–4, 9, 10]. В частности, с помощью данного подхода для ДНУШ удается оценить значения параметров (амплитуды и ширины) стационарных распределений солитонного типа [11–19]. Вариационный метод может быть весьма продуктивным и для качественного исследования эволюции локализованных образований [18–22].

В данной работе в рамках ДНУШ аналитически и численно изучены особенности самовоздействия интенсивных волновых полей. Для определенности обсуждаемые процессы рассматриваются на примере оптических пучков гауссовой формы, инжектируемых под углом в пространственно-неоднородную среду, состоящую из эквидистантно расположенных световодов. Интерес к этой задаче вызван прежде всего тем, что в современной волоконной оптике для управления световыми потоками активно задействуют периодические волноведущие системы [3–8, 23, 24]. Предложенное ниже теоретическое описание различных аспектов эволюции лазерного излучения можно использовать для интерпретации и прогнозирования эффектов изменения направления распространения электромагнитного поля и его самоканалирования в одном из структурных элементов данных систем. Подчеркнем, что такого рода эффекты уже ранее наблюдались непосредственно в экспериментах [25–29]. Стоит также отметить, что благодаря универсальности модели ДНУШ представленные здесь результаты применимы и в других областях физики [2–9], в том числе, в приложении к динамике бозе-эйнштейновского конденсата в оптических решетках [20, 30–34].

Кратко анонсируем содержание статьи. В разд. 2 развит вариационный подход, позволяющий описать ключевые особенности эволюции излучения в периодической структурированной среде. Здесь прежде всего (в разд. 2.1) с использованием этого метода получена замкнутая самосогласованная система уравнений для положения центра и эффективной ширины амплитудного профиля, а также линейных и квадратичных коррекций фазового фронта квазиоптического пучка гауссовой формы. В разд. 2.2 с помощью данных укороченных уравнений проведен качественный анализ режимов самовоздействия волнового поля в решетке слабосвязанных между собой световодов. В разд. 3 представлены результаты непосредственного численного моделирования в рамках ДНУШ. Они сопоставлены с данными аналитического исследования пространственной динамики пучка. Особое внимание уделено радиационным потерям в процессе самоканалирования излучения в одном из нелинейных оптических волноводов. В заключение (разд. 4) сформулированы основные результаты работы. В Приложении А обсуждаются модификации, к которым приводит учет в ходе вариационной процедуры не принятых во внимание в разд. 2.1 дополнительных слагаемых. В Приложение В вынесены подробности анализа возможных сценариев поведения волнового пучка в решетке световодов на основе фазовой плоскости системы обыкновенных дифференциальных уравнений для эффективной ширины амплитудного распределения и кривизны фазового фронта.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В РЕШЕТКЕ СВЕТОВОДОВ

### 2.1. Вариационный подход к задаче о самофокусировке излучения в дискретной среде

Рассмотрим особенности самовоздействия одномерных квазиоптических волновых пучков, инжектируемых в пространственно-неоднородную среду из неограниченного числа эквидистантно расположенных одномодовых световодов дельтаобразной формы с керровской (кубичной) нелинейностью. В идеальной ситуации (в отсутствие потерь) приходим к бесконечной упорядоченной последовательности соотношений, которая называется ДНУШ и имеет в нормированных переменных следующий вид [3–8]:

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} + \Psi_{n-1} + \Psi_{n+1} + |\Psi_n|^2 \Psi_n = 0. \quad (1)$$

Здесь функция  $\Psi_n(z)$  определяет комплексную амплитуду моды  $n$ -го направляющего элемента, ориентированной параллельно оси  $z$  решетки слабо связанных между собой оптических волноводов, в каждом из которых можно пренебречь дисперсионными и дифракционными эффектами. ДНУШ (1) является одной из наиболее простых и универсальных дискретных моделей. Оно, как и его непрерывный аналог НУШ, имеет гамильтонову структуру и обладает двумя интегралами движения [2–8]:

$$\mathcal{P} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\Psi_n|^2, \quad (2)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \Psi_{n+1}^* \Psi_n + \text{c.c.} + \frac{1}{2} |\Psi_n|^4 \right). \quad (3)$$

Сохраняющиеся величины  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{H}$  напрямую связаны с мощностью и энергией пучка в обсуждаемой задаче [2–8]. Фактически,  $\mathcal{P}$  представляет управляющий параметр, от значения которого во многом зависит процесс распространения излучения, а выражение (3) является гамильтонианом модели (1).

На основе (1) мы подробно проанализировали возможные сценарии распространения исходно коллимированного волнового пучка, введенного в периодическую систему световодов под углом к ориентированной вдоль них оси  $z$ . Для этого прежде всего задействован вариационный подход, представляющий собой достаточно универсальный и часто используемый метод аналитического исследования динамики и взаимодействия локализованных образований в различных нелинейных средах [1–5, 9, 10].

В начале, используя формулу суммирования Пуассона (например, см. [20–22]), перепишем отвечающую ДНУШ (1) функцию Лагранжа [2–5, 11–19] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} \left( \Psi_n \frac{\partial \Psi_n^*}{\partial z} - \text{c.c.} \right) - \mathcal{H} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{i}{2} \Psi(x, z) \frac{\partial \Psi^*(x, z)}{\partial z} - \Psi^*(x+1, z) \times \right. \\ &\left. \times \Psi(x, z) - \text{c.c.} - \frac{1}{2} |\Psi(x, z)|^4 \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Это позволяет вместо бесконечного упорядоченного набора комплексных амплитуд  $\Psi_n(z)$  поля в каждом из волноводов работать с одной единственной функцией  $\Psi(x, z)$ , зависящей теперь не только от координаты  $z$ , но и от непрерывного аргумента  $x$ .

Затем предположим, что распределение интенсивности излучения имеет гауссову форму с эффективной шириной  $a(z)$  и центром в точке  $x_0(z)$ , а фазовый фронт содержит только линейные и квадратичные коррекции с соответствующими коэффициентами  $\gamma(z)$  и  $\beta(z)$ . Другими словами, в качестве аппроксимации для  $\Psi(x, z)$  выберем выражение

$$\begin{aligned} \Psi(z, x) &= \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\pi} a}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + i\gamma(x-x_0) + i\beta(x-x_0)^2 \right), \quad (5) \end{aligned}$$

отвечающее безаберрационному приближению [2, 3].

Далее, подставив (5) в (4) и проинтегрировав по непрерывной переменной  $x$ , приходим к функциональному ряду, коэффициенты которого убывают по экспоненциальному закону с ростом  $n$  (например, см. [20–22]). Непосредственно из структуры данного ряда следует, что при условии  $a(z) \gg \sqrt{2}/\pi$ , т. е. даже для волновых полей с характерным поперечным размером  $a(z)$ , сравнимым с периодом решетки световодов, для приближенного аналитического описания процессов самовоздействия можно ограничиться в (4) лишь слагаемыми с  $n = 0$ .

В итоге, для усредненной функции Лагранжа  $\bar{\mathcal{L}}$  рассматриваемой системы получим выражение

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} &= \frac{\mathcal{P} a^2}{2} \frac{d\beta}{dz} - \mathcal{P} \gamma \frac{dx_0}{dz} - \\ &- 2\mathcal{P} \cos \gamma \exp \left( -\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2 \right) - \frac{\mathcal{P}^2}{\sqrt{8\pi} a}. \quad (6) \end{aligned}$$

Соответствующие укороченному лагранжиану  $\bar{\mathcal{L}}$  в форме (6) уравнения Эйлера для коллективных координат  $a(z)$ ,  $\beta(z)$ ,  $x_0(z)$  и  $\gamma(z)$  принимают вид

$$\frac{da}{dz} = 4\beta a \cos \gamma \exp \left( -\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2 \right), \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dz} &= \frac{\cos \gamma}{a^2} \left( \frac{1}{a^2} - 4\beta^2 a^2 \right) \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2 \right) - \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{8\pi} a^3}, \quad (7b) \end{aligned}$$

$$\frac{dx_0}{dz} = 2 \sin \gamma \exp \left( -\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2 \right), \quad (7c)$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0. \quad (7d)$$

Данные соотношения наглядно демонстрируют, что эволюция пучка в дискретной модели (1) существенным образом отличается от его пространственной динамики в континуальной ситуации, описываемой

НУШ, и протекает по более сложным сценариям. В частности, согласно (7с) смещение положения  $x_0(z)$  пиковой интенсивности поперек решетки световодов зависит от эффективной ширины  $a(z)$  и кривизны  $\beta(z)$  фазового фронта волнового поля. Предельный переход от уравнений (7а)–(7д) к их аналогам в непрерывном случае оказывается довольно нетривиальным, так как необходимо не только считать  $a \gg 1$ , но и  $\beta a \ll 1$ . Именно при одновременном выполнении этих двух условий в параксиальном приближении ( $\gamma \ll 1$ ) вместо (7с) приходим к хорошо известному для сплошной среды результату  $dx_0/dz = 2\gamma$ .

Подчеркнем, что в рамках развитого в данном разделе вариационного описания, учитывающего лишь слагаемые с  $n = 0$  в лагранжиане (4), коэффициент  $\gamma$ , ответственный за линейную коррекцию фазового фронта волнового поля, согласно (7д) не зависит от координаты  $z$  и остается равным своему начальному значению  $\gamma_0$  на протяжении всей трассы распространения излучения, т. е.  $\gamma = \gamma_0$ . Поэтому в дальнейшем, когда речь будет идти об анализе поведения пучков на основе самосогласованных уравнений (7а)–(7д), вместо  $\gamma$  будем использовать обозначение  $\gamma_0$ . Стоит особо отметить, что если при вычислении усредненной функции Лагранжа  $\mathcal{L}$  принять во внимание члены ряда не только с  $n = 0$ , но и с  $n = \pm 1$ , то производная  $d\gamma/dz$  станет отличной от нуля и величина  $\gamma$  будет изменяться с ростом  $z$  даже в рамках безабберационного приближения (см. Приложение А). Однако эти эффекты не оказывают принципиального влияния на обсуждаемые в статье процессы и ими можно пренебречь с целью упрощения последующих выкладок и проведения оценок для критических значений параметров задачи.

## 2.2. Режим самоканализирования. Изменение направления распространения пучка в результате самофокусировки излучения

Исследуем процесс самофокусировки волнового поля в дискретной модели (1) на основе самосогласованной системы уравнений (7а)–(7д) для основных параметров пучка гауссовой формы (5) в рамках безабберационного приближения. Согласно (7а)–(7д) смещение  $x_0(z)$  максимума интенсивности излучения в направлении, перпендикулярном оси  $z$ , не оказывает воздействия на пространственную динамику эффективной ширины  $a(z)$  амплитудного распределения и кривизны  $\beta(z)$  фазового фронта. В свою очередь, трасса распространения волнового поля как целого существенно зави-

сит от поведения  $a(z)$  и  $\beta(z)$  и определяется соотношением (7с). В этих условиях анализ естественно разбить на два этапа, на первом из которых при  $\gamma = \gamma_0$  рассматривается система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (7а), (7б) и ее возможные решения, а на втором обсуждается их влияние на характер изменения  $x_0(z)$  на базе выражения (7с).

Путем замены переменных  $\zeta = z \cos \gamma_0$  соотношения (7а), (7б) можно привести к виду, в котором присутствует только один единственный параметр

$$Q = \mathcal{P} / \sqrt{8\pi} \cos \gamma_0. \quad (8)$$

Это означает, что сценарий эволюции внутренней структуры пучка зависит прежде всего от значения  $Q$ , связанного напрямую с мощностью  $\mathcal{P}$ . Кроме того, уравнения (7а), (7б) являются гамильтоновскими в канонических переменных  $a^2$  и  $\beta$ , что по своей сути есть следствие наличия у ДНУШ (1) функции Гамильтона (3). Таким образом, у динамической системы (7а), (7б) имеется первый интеграл движения, который для удобства представим в виде

$$C = \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) + \frac{Q}{2a}. \quad (9)$$

Закон сохранения (9) позволяет проанализировать фазовую плоскость  $a, \beta$  при различных  $Q$  (см. Приложение В), что дает возможность продвинуться в аналитическом решении поставленной задачи и найти условия, при которых следует ожидать критических изменений в процессе распространения пучка.

Исследование (подробности см. в Приложении В) особенностей фазового пространства системы уравнений (7а), (7б) с учетом (9) показывает, что существуют две критические мощности  $\mathcal{P}'_{cr}$  и  $\mathcal{P}_{cr}$ , связанные с бифуркационными значениями  $Q'_{cr} \approx 0.638$  и  $Q_{cr} = \sqrt{2/e} \approx 0.858$  следующими соотношениями:

$$\mathcal{P}'_{cr} = \sqrt{8\pi} Q'_{cr} \cos \gamma_0 \approx 1.276 \sqrt{2\pi} \cos \gamma_0, \quad (10)$$

$$\mathcal{P}_{cr} = \sqrt{8\pi} Q_{cr} \cos \gamma_0 = 4 \sqrt{\pi/e} \cos \gamma_0. \quad (11)$$

Если мощность  $\mathcal{P}$  излучения попадает в интервал  $0 < \mathcal{P} \leq \mathcal{P}'_{cr}$ , то качественно ситуация здесь такая же, как и в сплошной среде, описываемой в рамках НУШ. В этом случае поперечный размер  $a(z)$  исходно коллимированного пучка с  $a(z=0) = a_0$  будет либо неограниченно увеличиваться, либо совершать колебания вдоль трассы распространения. При этом поле никогда не захватится в один световод. Когда

$\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_{cr}$ , наоборот, излучение всегда будет собираться в канал с характерным масштабом

$$a_{ch} = Q/2\mathcal{C} = \mathcal{P}/\left(4\sqrt{2\pi}\mathcal{C} \cos \gamma_0\right), \quad (12)$$

который определяется величиной  $\mathcal{P}$  и первым интегралом (9) задачи (7a), (7b). Отметим однако, что для справедливости приведенных рассуждений  $\mathcal{P}$  не должно слишком сильно превосходить  $\mathcal{P}_{cr}$ , так как иначе аппроксимация распределения амплитуды поля профилем гауссовой формы достаточно быстро нарушается с ростом  $z$ . В промежуточном случае, когда  $\mathcal{P}'_{cr} < \mathcal{P} < \mathcal{P}_{cr}$ , эффективная ширина  $a(z)$  волнового пучка с изначально плоским фазовым фронтом в зависимости от своего стартового значения  $a(z=0) = a_0$  может как периодически изменяться, так и схлопываться в ходе процесса самофокусировки, становясь порядка периода решетки. Поэтому реальная критическая мощность  $\mathcal{P}_{cr1}$ , при превышении которой наблюдается процесс самоканализирования излучения, не является универсальной величиной, а определяется  $a_0$ . Представление о виде функции  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0)$  нетрудно получить, опираясь на аналитические результаты, описанные в Приложении В. В частности, из них следует, что  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0)$  монотонно убывает от  $\mathcal{P}_{cr}$  до  $\mathcal{P}'_{cr}$  при увеличении  $a_0$ .

Оценим характерную длину самофокусировки. Для этого рассмотрим ситуацию, когда волновой пучок с изначально плоским фазовым фронтом является исходно достаточно широким, т. е.  $\beta(z=0) = 0$  и  $a(z=0) = a_0 \gg 1$ , а мощность  $\mathcal{P}$  излучения больше  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0)$ . До тех пор пока поле не собралось в канал, можно считать (по крайней мере на начальной стадии распространения) эффективную ширину  $a(z)$  пучка сравнительно большой величиной, т. е.  $a \gg 1$  (однако  $a(z) \lesssim a_0$ ), что позволяет выделить в задаче малый параметр  $\varepsilon \sim 1/a$ . Используя соотношение (9), представим произведение  $\beta^2 a^2$  как функцию  $a$ , которую затем разложим в асимптотический ряд по  $\varepsilon$ . Сохранив в данном разложении лишь основные слагаемые порядка  $\varepsilon$  с учетом того, что  $\mathcal{C} \approx 1 + Q/2a_0$ , получим для зависимости кривизны  $\beta(z)$  фазового фронта от размера  $a(z)$  амплитудного распределения следующую аппроксимацию:

$$\beta = \pm \sqrt{Q(a_0 - a)/2a_0 a^3}. \quad (13)$$

Подставив (13) в соотношение (7a), окончательно приходим к упрощенному уравнению для  $a(z)$ :

$$\frac{da}{dz} = \pm 4 \sqrt{\frac{Q(a_0 - a)}{2a_0 a}} \cos \gamma_0. \quad (14)$$

Его решение задает  $a(z)$  в виде неявной функции

$$\begin{aligned} -\sqrt{a(a_0 - a)} - a_0 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{a}{a_0}} \right) = \\ = \pm 4 \sqrt{\frac{Q}{2a_0}} z \cos \gamma_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что в формулах (13), (14) и (15) знак «+» отвечает отрицательным значениям  $z$ . При этом у волнового поля кривизна  $\beta(z)$  фазового фронта положительна, а эффективная ширина  $a(z)$  увеличивается с приближением  $z$  к нулю и при  $z = 0$  достигает своего максимума, равного  $a_0$ . Выбор знака «-» в соотношениях (13), (14) и (15) соответствует ситуации, когда излучение распространяется в области  $z > 0$ . Здесь поперечный размер  $a(z)$  пучка, наоборот, уменьшается с ростом  $z$ , а  $\beta(z) < 0$ .

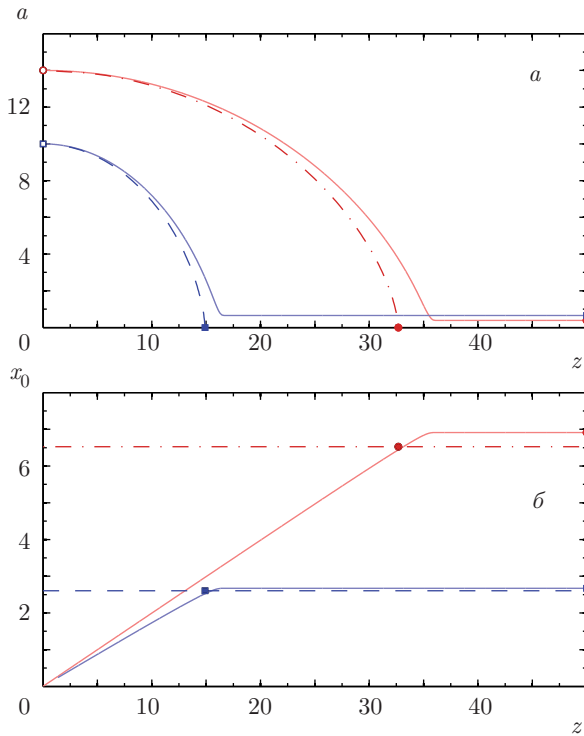
На рис. 1a приведено сравнение представленной в неявном виде аппроксимации (15) для функции  $a(z)$  и результатов прямых расчетов, выполненных в рамках уравнений (7a)–(7d). Видно, что выражение (15) достаточно адекватно воспроизводит поведение эффективной ширины  $a(z)$  пучка в безаберрационном приближении не только там, где  $a \gg 1$ , но и при  $a$ , сравнимых с периодом решетки.

Согласно соотношению (15) величина  $a(z)$  должна обращаться в нуль в точке  $z = z_0$ , где

$$z_0 = \frac{\pi a_0^{3/2}}{4\sqrt{2} Q \cos \gamma_0} = \frac{\pi^{5/4} a_0^{3/2}}{2^{7/4} \sqrt{\mathcal{P}} \cos \gamma_0}, \quad (16)$$

приближаясь к нулю по закону  $\propto (z_0 - z)^{2/3}$ . Подчеркнем, что  $z_0$  уменьшается обратно пропорционально  $\sqrt{\mathcal{P}} \cos \gamma_0$ . В реальности, начиная с  $z$  близких к  $z_0$ , наблюдается «выход»  $a(z)$  на стационарное значение  $a_{ch}$  и постепенное формирование канала. Расстояние  $z_0$  можно использовать в качестве оценки для длины самофокусировки до тех пор, пока  $a_{ch} \lesssim 1$ , т. е. при мощности  $\mathcal{P}$  не сильно превышающей критическую величину  $\mathcal{P}_{cr}$ , что следует из (12). Для более точной оценки можно использовать формулу (15), где вместо  $a$  подставлено значение  $a_{ch}$ , определяемое выражением (12).

На заключительной стадии процесса самоканализирования излучения дискретность исследуемой системы начинает играть ключевую роль, что существенным образом сказывается на эволюции основных параметров волнового пучка. В частности, если в соотношениях (7a), (7b) положить, что с ростом  $z$  эффективная ширина  $a(z)$  амплитудного распределения поля приближается к  $a_{ch}$ , а кривизна  $\beta(z)$



**Рис. 1.** Поперечный размер  $a(z)$  и положение  $x_0(z)$  пиковой интенсивности исходно коллимированного волнового пучка с начальной шириной  $a_0$  и линейной коррекцией  $\gamma_0$  фазового фронта при мощности  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ . Сплошные кривые получены с помощью уравнений (7a)–(7d) при  $a_0 = 10, \gamma_0 = 0.0875, \mathcal{P} = 6.9917$  (линии со светлыми квадратами) и  $a_0 = 14, \gamma_0 = 0.1, \mathcal{P} = 3.9953$  (линии со светлыми кружками). На рис. а аппроксимация (15) для функции  $a(z)$  и длина самофокусировки  $z_0$ , определяемая по формуле (16), соответственно изображены для первого сочетания  $a_0, \gamma_0$  и  $\mathcal{P}$  штриховой линией и квадратом, а для второй комбинации  $a_0, \gamma_0$  и  $\mathcal{P}$  штрихпунктирной линией и кружком. На рис. б оценка (21) для конечного смещения  $\Delta x_0$  максимума амплитуды поля поперек решетки световодов при  $a_0 = 10, \gamma_0 = 0.0875, \mathcal{P} = 6.9917$ , показана штриховой, а для случая  $a_0 = 14, \gamma_0 = 0.1, \mathcal{P} = 3.9953$  — штрихпунктирными прямыми

фазового фронта, наоборот, неограниченно увеличивается, то найдем поведение  $a(z)$  и  $\beta(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ :

$$a(z) \approx a_{ch} + \frac{2a_{ch}^2}{Q} \times \exp\left(-\frac{1}{4a_{ch}^2} - \frac{\mathcal{P}^2}{8\pi a_{ch}^4} (z - z_1)^2\right), \quad (17)$$

$$\beta(z) \approx -\mathcal{P}(z - z_1) / \sqrt{8\pi} a_{ch}^3, \quad (18)$$

где  $z_1$  ( $z_1 \sim z_0$ ) — некоторая постоянная, которая позволяет наиболее точно сопоставить данную

аппроксимацию с численным решением уравнений (7a)–(7d). С помощью (17) нетрудно определить характерную длину  $\Delta z_{ch}$  «выхода» поперечного размера  $a(z)$  на стационарное значение  $a_{ch}$  на конечном этапе рассматриваемого процесса. Для исходно широких пучков с  $a_0 \gg 1$  она прямо пропорциональна мощности  $\mathcal{P}$  и равна

$$\Delta z_{ch} = \mathcal{P} / \left(8\sqrt{2\pi} \cos^2 \gamma_0\right). \quad (19)$$

Сравнение выражений (16) и (19) показывает, что  $z_0$  существенно превышает  $\Delta z_{ch}$ . Таким образом, при  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr1}(a_0)$  эволюция волнового поля (в отсутствие радиационных потерь) включает в себя две стадии: на начальной происходит основная самофокусировка излучения, а на конечной формирование волноводного канала. При этом второй этап значительно короче первого. Отметим, что согласно (18) по мере уменьшения эффективной ширины  $a(z)$  до минимального размера  $a_{ch}$  кривизна  $\beta(z)$  фазового фронта растет линейно с увеличением  $z$  вдоль трассы распространения пучка, что заметно отличает обсуждаемый режим самоканализирования от общепринятого. Описанный сценарий скорее соответствует коллапсу, который приводит к образованию нелинейной волновой структуры конечной ширины.

Процесс одномерного коллапса волнового поля, в результате которого излучение локализуется на масштабах, сравнимых с периодом решетки эквидистантно расположенных световодов, оказывает существенное влияние на все аспекты поведения пучка в рассматриваемой пространственно-неоднородной среде, в том числе и на его смещение поперек этой решетки. В рамках безабберационного приближения несложно обнаружить эффект изменения направления распространения и, как следствие, значительного искажения траектории движения центра масс исходно коллимированного широкого пучка, введенного в систему нелинейных оптических волноводов под углом к ориентированной вдоль них оси и в ходе самофокусировки собирающегося в канал.

Наличие первого интеграла (9) у задачи (7a), (7b) позволяет переписать уравнение (7c) для положения  $x_0(z)$  максимума интенсивности излучения в виде

$$\frac{dx_0}{dz} = 2 \sin \gamma_0 \left(c - \frac{Q}{2a}\right). \quad (20)$$

Непосредственно из (20) следует, что при условии отсутствия самоканализирования волнового поля, т. е. заведомо при  $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}'_{cr}$  ( $Q \leq Q'_{cr}$ ), пучок будет по-

стоянно смещаться поперек решетки эквидистантно расположенных световодов с практически постоянной скоростью, немного замедляясь, когда  $a(z)$  уменьшается, а затем вновь слегка ускоряясь, когда  $a(z)$  увеличивается. Другими словами, распространение пучка происходит под углом к оси рассматриваемой системы, величина которого слабо осциллирует относительно среднего значения  $\gamma_0$ . При этом период данных осцилляций совпадает с периодом изменения эффективной ширины  $a(z)$ . Совершенно другая картина должна наблюдаться в ситуации, когда реализуется режим захвата поля в канал с поперечным размером  $a_{ch}$ . В этом случае правая часть соотношения (20) обращается в нуль, что свидетельствует о существенном повороте трассы пучка и прекращении его «движения» как целого в перпендикулярном к световодам направлении. Данный эффект своеобразной «остановки» возникает в результате локализации излучения в области с характерным масштабом порядка расстояния между двумя соседними нелинейными оптическими волноводами.

Оценим, насколько смещается поперек решетки положение  $x_0(z)$  максимума интенсивности волнового поля до того, как угол между направлением распространения пучка и осью  $z$ , вдоль которой ориентированы световоды, станет равным нулю. Для этого предположим, что производная  $dx_0/dz$  остается практически постоянной и равной  $2 \sin \gamma_0$  вплоть до момента захвата излучения в канал при  $z = z_*$ , после чего координата  $x_0$  перестает изменяться, т. е.  $x_0(z > z_*) = x_0(z_*)$ . Основанием для такого предположения служат, прежде всего, результаты расчетов, выполненных непосредственно с помощью уравнений (7a)–(7d), а также проведенный выше анализ, позволяющий выделить две различные (длинную и короткую) стадии процесса самофокусировки излучения при мощности  $\mathcal{P}$ , превышающей критическое значение  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ . В частности, на рис. 1б для примера приведены типичные для случая  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$  зависимости  $x_0(z)$ , подтверждающие возможность использования данного приближения. Кроме того, используя справедливые при  $z \rightarrow \infty$  асимптотические соотношения (17) и (20), несложно показать, что характерное расстояние, на котором происходит основное изменение направления распространения пучка, совпадает с  $\Delta z_{ch}$  и определяется выражением (19). В качестве значения  $z_*$  с той же степенью точности, что и предыдущие допущения, можно выбрать длину самофокусировки  $z_0$ , вычисленную по формуле (16). В итоге, конечное смещение  $\Delta x_0$  пучка относительно его первоначального положения ориентировочно составит

$$\Delta x_0 = 2z_0 \sin \gamma_0 = \frac{\pi^{5/4} a_0^{3/2} \sin \gamma_0}{2^{3/4} \sqrt{\mathcal{P}} \cos \gamma_0}. \quad (21)$$

Оценку для  $\Delta x_0$ , совпадающую с соотношением (21), можно также получить при не сильно превышающих  $\mathcal{P}_{cr}$  мощностях  $\mathcal{P}$ , используя другой, более формализованный подход. Прежде всего, основываясь на уравнениях (7a) и (7c), несложно убедиться в том, что в рамках безабберационного приближения справедливо следующее равенство:

$$\frac{dx_0}{da} = \frac{\text{tg } \gamma_0}{2\beta a}. \quad (22)$$

Далее, предположим, что выполняются условия, при которых для связи кривизны  $\beta(z)$  фазового фронта и эффективной ширины  $a(z)$  амплитудного распределения справедлива аппроксимация (13). В частности, будем считать, что при  $z = 0$  (на входе в систему) задан широкий коллимированный пучок, т. е.  $a(z = 0) = a_0 \gg 1$  и  $\beta(z = 0) = 0$ , и проведем наш анализ для начальной стадии самоканалирования, когда величина  $a(z)$  по-прежнему остается достаточно большой по сравнению с конечным поперечным размером канала  $a_{ch}$ . Подставив в (22) вместо  $\beta$  выражение (13), придем к уравнению

$$\frac{dx_0}{da} = \pm \frac{\text{tg } \gamma_0}{\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a_0 a}{a_0 - a}}, \quad (23)$$

которое легко можно проинтегрировать аналогично тому, как это сделано выше в случае с (14), и найти зависимость  $x_0(a)$  в явном виде:

$$x_0(a) = \pm \sqrt{\frac{a_0}{2Q}} \text{tg } \gamma_0 \left( -\sqrt{a(a_0 - a)} - a_0 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{a}{a_0}} \right) \right). \quad (24)$$

Для того чтобы оценить результирующее смещение  $\Delta x_0$  положения максимума интенсивности излучения в процессе самофокусировки волнового поля, следует подставить  $a = a_{ch}$ . Однако, когда  $a_{ch} \lesssim 1$ , т. е. при  $\mathcal{P}$  не сильно превышающих  $\mathcal{P}_{cr}$ , можно приравнять  $a$  нулю, как и при выводе выражения (16) для длины  $z_0$ , начиная с которой одномерный коллапс переходит на конечную стадию формирования канала. В итоге, с небольшой потерей точности получим формулу (21).

На рис. 1б наглядно продемонстрировано, что соотношение (21) дает адекватное значение  $\Delta x_0$  и может быть использовано в качестве аналитической аппроксимации. Видно, что  $\Delta x_0$  уменьшается обратно пропорционально  $\sqrt{\mathcal{P}}$ . Поэтому наибольшее смещения  $\Delta x_0$  центра масс пучка относительно

его первоначального положения на входе в систему эквидистантно расположенных световодов следует ожидать при мощности  $\mathcal{P}$ , близкой к критической  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ . Кроме того, положив  $\Delta x_0$  равным периоду рассматриваемой решетки (т. е. единице в используемых безразмерных переменных), можно получить оценку для еще одной критической мощности

$$\mathcal{P}_{cr2}(a_0, \gamma_0) = \pi^{5/2} a_0^3 \sin^2 \gamma_0 / \sqrt{8} \cos \gamma_0, \quad (25)$$

при превышении которой максимум интенсивности волнового поля не будет существенно смещаться в поперечном направлении, и распространение пучка исходно будет происходить параллельно оси, ориентированной вдоль нелинейных оптических волноводов, без видимых отклонений. Заметим, что  $\mathcal{P}_{cr2}(a_0, \gamma_0)$  может быть как больше, так и меньше  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$  в зависимости от двух параметров  $a_0$  и  $\gamma_0$ . Если  $\mathcal{P}_{cr2}(a_0, \gamma_0) \leq \mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ , то пучок с  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ , введенный в систему под углом  $\gamma_0$ , захватится в исходно центральный световод, т. е. номер структурного элемента решетки с пиковой амплитудой поля не изменится. Отсюда также следует, что, приравняв  $\mathcal{P}_{cr2}(a_0, \gamma_0)$  нижней границе  $\mathcal{P}'_{cr}$  интервала возможных значений  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ , для каждого заданного размера  $a_0$  коллимированного пучка найдем минимальный угол

$$\begin{aligned} \gamma_0^{min}(a_0) &= \arctg \left( \frac{\sqrt{8Q'_{cr}}}{\pi a_0^{3/2}} \right) \approx \\ &\approx \arctg \left( \frac{2.2592}{\pi a_0^{3/2}} \right), \quad (26) \end{aligned}$$

начиная с которого для самоканалирования становятся существенны эффекты, связанные с наличием линейных коррекций у фазового фронта поля. При  $|\gamma_0| \leq \gamma_0^{min}(a_0)$  и  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$  поперечное смещение пучка заведомо не будет проявляться.

Таким образом, аналитическое исследование показывает, что при мощности  $\mathcal{P}$ , превышающей критическое значение  $\mathcal{P}_{cr1}$ , происходит самоканалирование излучения в выделенный световод. Этот процесс приводит к изменению характера распространения волнового пучка, введенного в систему эквидистантно расположенных световодов под углом  $\gamma_0$  к ориентированной вдоль них оси  $z$ . «Надкритические» пучки отклоняются от первоначального направления прямолинейного распространения и локализируются в структурном элементе, который смещен относительно световода, являющегося исходно центральным для симметричного амплитудного распределения. Величина данного отклонения

уменьшается с ростом  $\mathcal{P}$ . В результате, мощные наклонные пучки с  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr2}$  и  $\gamma_0 \neq 0$  должны захватываться в канал, не испытывая никаких видимых смещений в поперечном к оси  $z$  направлении.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМОФОКУСИРОВКИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ

В данном разделе обсуждаются результаты проведенных непосредственно в рамках ДНУШ (1) детальных численных расчетов пространственной динамики исходно коллимированных широких волновых пучков, инжектируемых в решетку эквидистантно расположенных идентичных световодов под углом к направлению их ориентации. На входе в систему задавалось распределение поля в виде

$$\Psi_n(z=0) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\pi} a_0}} \exp\left(-\frac{n^2}{2a_0^2} + i\gamma_0 n\right), \quad (27)$$

что соответствует выражению (5) с начальными параметрами  $a(0) = a_0$ ,  $x_0(0) = 0$ ,  $\gamma(0) = \gamma_0$  и  $\beta(0) = 0$ .

Численное моделирование ДНУШ (1) показывает существенно более сложную и богатую картину эволюции излучения по сравнению с тем, что предсказывает развитое в разд. 2.1 аналитическое описание. Помимо возникновения aberrаций обусловлено это, прежде всего, следующими причинами. Во-первых, согласно обратной задаче рассеяния для НУШ, изначально ограниченное распределение постепенно трансформируется в набор взаимодействующих между собой солитонов [1–3], из которых, в том числе, формируются бризеры [1–3]. Поэтому, как и в континуальной задаче, в рамках ДНУШ (1) исходно широкий интенсивный пучок в ходе своего распространения может дробиться (расслаиваться) на несколько солитоноподобных структур, что нарушает предположение об одномасштабности пробной функции, описывающей форму волнового поля. Во-вторых, на поведение нелинейных образований в дискретной системе значительное влияние оказывают радиационные потери, которые естественным образом присутствуют при моделировании ДНУШ (1) и приводят к высвечиванию части излучения из основной области его локализации. Из-за неучтенных в рамках вариационного подхода обстоятельств наряду с безабберационными режимами наблюдается целый ряд эффектов, которые кардинальным образом сказываются на пространственной динамике и самоканалировании пучков. Однако, прежде чем приступить к детальному обсуждению данных, по-



лученных с помощью прямых численных расчетов  $\Psi_n(z)$ , отметим, что представленный в предыдущих параграфах анализ позволяет ощутимо продвинуться в понимании композитных процессов, протекающих в рассматриваемой системе. Кроме того, сделанные нами оценки достаточно хорошо согласуются со значениями, полученными путем численного решения ДНУШ (1).

На рис. 2 и 3 приведены результаты проведенного в рамках ДНУШ (1) моделирования процесса самофокусировки пучков с исходно гауссовым амплитудным распределением и плоским фазовым фронтом (см. (27)) в периодической системе световодов при  $\gamma_0 = 0.1$  и для двух значений  $a_0$ :  $a_0 = 7$  (рис. 2) и  $a_0 = 14$  (рис. 3). Каждый фрагмент на этих рисунках демонстрирует один из возможных характерных сценариев пространственной динамики волнового поля, которые реализуются в зависимости от величины  $\mathcal{P}$ . Совокупность представленных данных дает достаточно полную картину эволюции широких пучков, введенных под углом к оси  $z$ .

Для рис. 2а, 3а при  $z = 0$  мощность излучения  $\mathcal{P} = 2.5$  меньше бифуркационного значения  $\mathcal{P}'_{cr}$ . Видно, что в данном случае распространение волнового поля происходит в среднем вдоль прямой линии, которая в общем случае  $\gamma_0 \neq 0$  не совпадает с осью  $z$ . Это означает, что коэффициент  $\gamma$ , ответственный за линейную коррекцию фазового фронта, остается практически постоянным и приблизительно равным  $\gamma_0$ . Также несложно заметить, что ширина амплитудного распределения изменяется практически периодическим образом. Основная часть пучка то сжимается до масштабов порядка нескольких периодов решетки, то вновь расширяется вплоть до исходных размеров. Особо отметим, что для параметров численных расчетов, соответствующих рис. 2а, 3а, эффективная ширина никогда не становится меньше расстояния между двумя соседними световодами и не наблюдается захват излучения в канал. Такое поведение качественно совпадает с развитыми в разд. 2 теоретическими представлениями, которые основаны на анализе возможных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7а)–(7д). Обратим однако внимание на два важных момента. Несмотря на то что при  $\mathcal{P} < \mathcal{P}'_{cr}$  радиационные потери являются относительно слабыми, чем ближе  $\mathcal{P}$  к  $\mathcal{P}'_{cr}$ , тем существеннее они становятся. На рис. 3а заметно, что в ходе распространения пучка происходит его расщепление на несколько составляющих. Фактически, проявление такого рода эффектов в этой ситуации обусловлено близостью к континуальному пределу.

Когда исходная мощность  $\mathcal{P}$  излучения слабо отличается от первого бифуркационного значения  $\mathcal{P}'_{cr}$ , при котором фазовая плоскость консервативной системы уравнений (7а), (7д) претерпевает топологические модификации, начинают происходить и существенные изменения в пространственной динамике волновых пучков в дискретной решетке световодов. Этот факт наглядно демонстрирует рис. 2б, на котором представлены результаты численного моделирования ДНУШ (1) для волнового поля, заданного при  $z = 0$  в виде (27) с  $\mathcal{P} = 3.25$ ,  $a_0 = 7$  и  $\gamma_0 = 0.1$ . При таких параметрах мощность  $\mathcal{P} = 3.25$  излучения на входе в систему слегка превышает  $\mathcal{P}'_{cr} \approx 3.18336$ . Видно, как исходно широкий пучок на начальном этапе распространяется вдоль прямой и сжимается вплоть до периода рассматриваемой структурированной среды. В ходе сжатия максимум интенсивности излучения в поперечном сечении возрастает и достигает своей пиковой величины, когда практически все поле собирается в одном световоде. Как показывает обработка данных численного расчета, на заключительной стадии описанного процесса изменение основных параметров пучка (прежде всего его эффективной ширины  $a(z)$  и положения центра масс  $x_0(z)$ ) происходит очень резко, что качественно согласуется с теоретическим анализом и оценками, приведенными в разд. 2.2. В итоге, возникают значительные радиационные потери, которые несложно заметить на рис. 2б. Они приводят к кардинальным переменам в режиме эволюции волнового поля. В дальнейшем сохранившийся пучок перестает смещаться вдоль прежнего направления, как было в ситуации, изображенной на рис. 2а. Происходит существенное искажение траектории движения максимума амплитудного распределения, т. е. ощутимо меняется угол, под которым распространяется основная часть излучения по отношению к оси  $z$ . Визуально даже создается впечатление, что пучок испытывает отражение от той ячейки, в которой сфокусировалось волновое поле (см., например, рис. 2б, в и 3б). Что же касается эффективной ширины, то ее колебания становятся менее заметными или вообще практически отсутствуют. Это указывает на формирование в результате радиационных потерь солитоноподобного образования. Отметим однако, что у таких локализованных на небольшом числе световодов волновых структур трассы распространения могут быть как почти прямыми, так и сильно искривленными.

При увеличении мощности  $\mathcal{P}$  излучения на входе в систему после того, как исходно широкий пучок сожмется до размеров одного волновода и по-

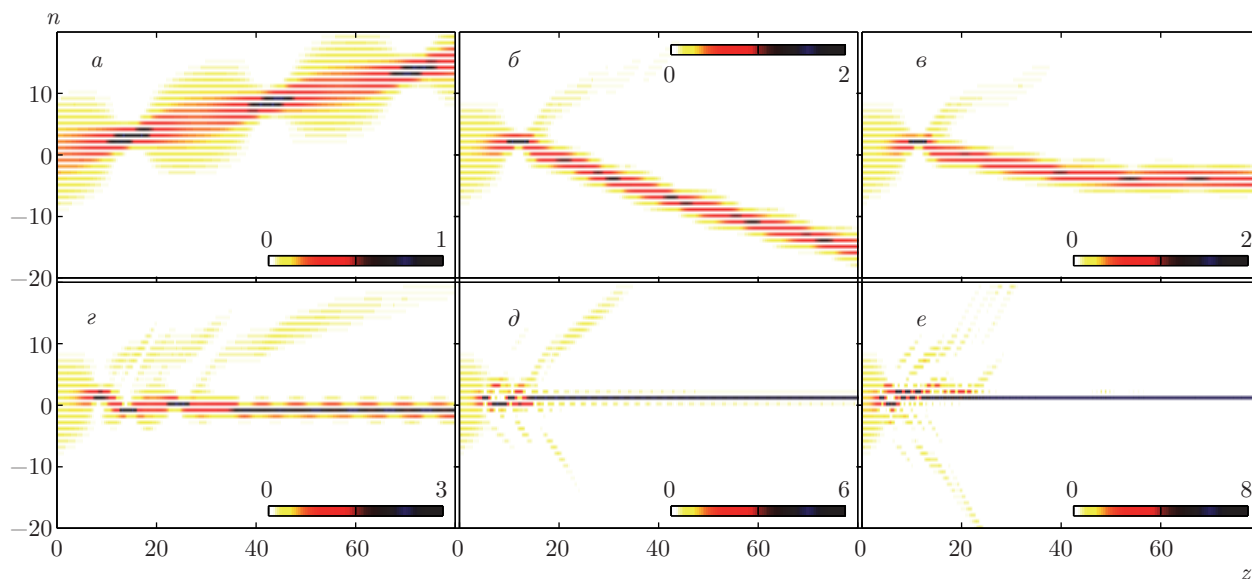


Рис. 2. (В цвете онлайн) Рассчитанная с помощью прямого численного моделирования непосредственно в рамках ДНУШ (1) пространственная динамика интенсивности  $|\Psi_n(z)|^2$  волнового пучка, заданного при  $z = 0$  в форме (27) с  $a_0 = 7$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  и различными значениями  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P} = 2.5$  (а),  $\mathcal{P} = 3.25$  (б),  $\mathcal{P} = 3.5$  (в),  $\mathcal{P} = 4.5$  (г),  $\mathcal{P} = 9$  (д),  $\mathcal{P} = 15$  (е)

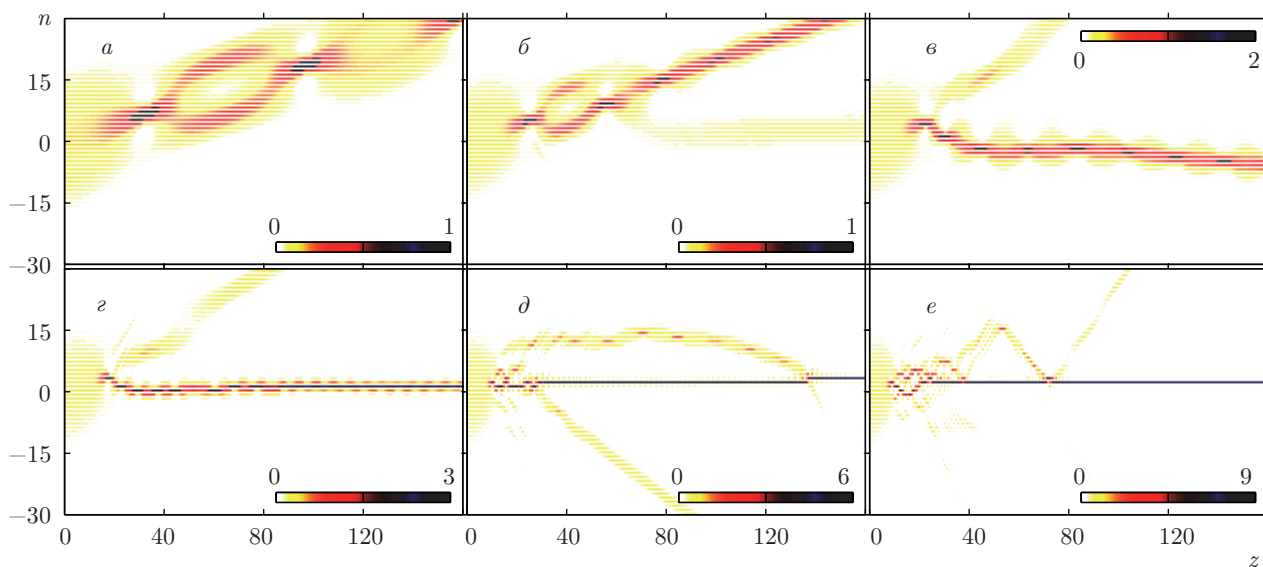


Рис. 3. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 2, но при  $a_0 = 14$  и  $\mathcal{P} = 2.5$  (а),  $\mathcal{P} = 3.5$  (б),  $\mathcal{P} = 4$  (в),  $\mathcal{P} = 5.5$  (г),  $\mathcal{P} = 13$  (д),  $\mathcal{P} = 17$  (е)

теряет некоторую долю своей энергии, начинают наблюдаться тенденции к формированию обсуждаемых в разд. 2 каналов. Например, на рис. 2в видно, что поворот сфокусированного пучка происходит на меньший угол и оставшееся локализованным волновое поле стремится распространяться параллельно направлению, вдоль которого ориентированы структурные элементы рассматриваемой неоднородной среды. Траектория движения макси-

мума интенсивности отклоняется то в одну сторону, то в другую относительно оси  $z$ . Связано это, по-видимому, с тем, что мощность сохранившегося нелинейного образования постепенно возрастает и приближается к пороговому значению  $\mathcal{P}_{cr1}(a_0, \gamma_0)$ , при превышении которого, согласно обобщенному безабберационному приближению, должно происходить самоканалирование излучения (см. разд. 2.2 и Приложение В). Отметим, что данному обстоятель-

ству способствует не только увеличение самой величины  $\mathcal{P}$  у инжектируемого при  $z = 0$  пучка, но и рост длины  $\Delta z_{ch}$  участка, на котором происходят резкие изменения в характере поведения волнового поля. Поскольку именно нарушение адиабатического приближения для эволюции основных параметров пучка является наиболее вероятной причиной возникновения сильных радиационных потерь на этапе первого схлопывания, следует ожидать естественного их уменьшения при увеличении  $\Delta z_{ch}$ .

Согласно проведенным в рамках ДНУШ (1) численным расчетам, формирование канала на масштабах периода решетка из исходно широких пучков и концентрация большей части излучения в одном из световодов происходят лишь при  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr}$ . Пример такой ситуации приведен на рис. 2г, который соответствует мощности  $\mathcal{P} = 4.5$ , слабо превышающей бифуркационное значение  $\mathcal{P}_{cr} \approx 4.2787$ . На данном рисунке показано, как достаточно длинный переходный процесс все-таки заканчивает самоканалирование волнового поля, которое сосредотачивается в области с размером порядка расстояния между соседними структурными элементами обсуждаемой цепочки и далее распространяется точно вдоль оси  $z$ .

Описанные выше тенденции и закономерности наблюдаются и при моделировании пространственной динамики изначально коллимированных пучков, заданных при  $z = 0$  в форме (27) с  $a_0 = 14$  и  $\gamma_0 = 0.1$ . В частности, на рис. 3б видно, как волновое поле при  $\mathcal{P} = 3.5$  сжимается до масштабов порядка периода решетки, что сопровождается сильными радиационными потерями. Однако в данном случае волновое поле после схлопывания расслаивается на два нелинейных образования, обладающих разной мощностью. Одно из них постепенно дифрагирует, а второе испытывает еще несколько колебаний ширины, в результате которых теряет часть своей энергии, а затем преобразуется в сосредоточенную на нескольких волноведущих элементах солитоноподобную структуру, продолжающую по-прежнему смещаться поперек оси  $z$ . Отметим, что здесь резкого и сильного искажения траектории движения локализованной части пучка не наблюдается, т.е. направление распространения изменяется не столь значительно по сравнению, например, с ситуациями, изображенными на рис. 2б,в. Подчеркнем также, что, по-видимому, описанный процесс расщепления на нелинейные образования неразрывно связан с предпосылками перехода от амплитудного распределения исходно гауссовой формы к волновому полю, которое то разбивается на две взаимодействующие

составляющие, то собирается вновь в одну (см. рис. 3а). Этим, в частности, обусловлен сильный сброс, который может достигать до 30% от первоначальной мощности излучения  $\mathcal{P}$ .

При приближении  $\mathcal{P}$  к  $\mathcal{P}_{cr} \approx 4.2787$  для пучка с  $a_0 = 14$  относительные радиационные потери уменьшаются, однако они остаются большими по абсолютной величине. В результате чего сбрасывается нелинейное образование, поперечные размеры которого колеблются в ходе его дальнейшей пространственной динамики. Из-за отдачи угол, под которым оставшаяся часть волнового поля распространяется по отношению к оси  $z$ , заметно меняется. Таким образом, можно сказать, что вновь наблюдается отражение пучка от точки сжатия, как и для случая  $a_0 = 7$ . В качестве примера на рис. 3в представлен случай, соответствующий  $\mathcal{P} = 4$ . Из него также следует, что появляются тенденции к формированию канала. Однако самоканалирование излучения происходит только при  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr} \approx 4.2787$  в результате дополнительного достаточно длительного переходного процесса, что иллюстрирует рис. 3г.

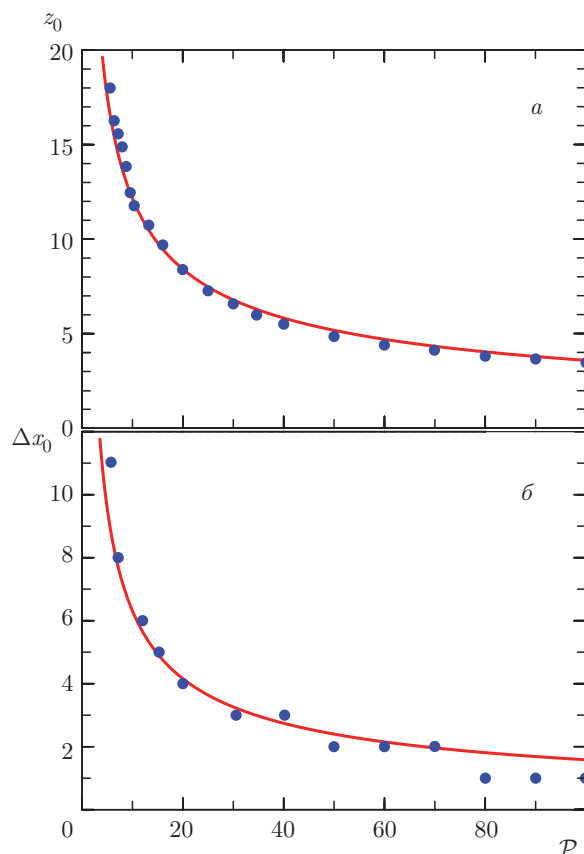
При увеличении  $\mathcal{P}$  участок, на котором пучок первоначально сжимается до размеров меньших периода рассматриваемой решетки, сокращается. Уменьшается также и переходная область, предшествующая окончательной концентрации большей части излучения в одном из нелинейных оптических световодов и характеризующаяся основными радиационными потерями. Согласно проведенным в рамках ДНУШ (1) расчетам, номер световода, в котором захватилось волновое поле, чаще всего совпадает с положением максимума интенсивности при первом сжатии. В частности, данное обстоятельство наглядно подтверждают рис. 2д, 3е. Особо отметим, что при существенном превышении  $\mathcal{P}_{cr}$  в ходе радиационных процессов сбрасываются нелинейные структуры с мощностью, достаточной для перехода в режим сильного сжатия. Это приводит к тому, что часть сброшенного излучения вновь возвращается в сформировавшийся канал и испытывает столкновение с ним. Такую пространственную динамику можно наблюдать на рис. 2е и 3д,е. В ряде ситуаций данные столкновения могут приводить к смещению конечного положения наибольшего значения поля на одну ячейку, как на рис. 3д. В других случаях (см., например, рис. 3е) переход захваченного в канал излучения в соседний световод происходит лишь на небольшой конечной длине трассы распространения, а затем максимум поля возвращается обратно.

В целом, численное моделирование ДНУШ (1) дает картину во многом прогнозируемую данными, полученными на основе безабберационного приближения. Ключевую роль в ней играет самофокусировка излучения, распространяющегося под углом к оси  $z$ , вдоль которой ориентирована периодическая система световодов. При превышении мощности  $\mathcal{P}$  излучения критического значения  $\mathcal{P}_{cr}$  происходит захват волнового поля в один из световодов и резкое отклонение положения максимума амплитудного распределения от первоначального направления распространения. Несмотря на сложную пространственную динамику пучка, в конечном счете можно выделить две экспериментально наблюдаемые характеристики: длину самофокусировки  $z_0$  и смещение  $\Delta x_0$  точки с пиковой интенсивностью поперек решетки. Согласно безабберационному приближению эти величины вычисляются приближенно с помощью соответствующих аналитических выражений (16) и (21). Численно  $z_0$  и  $\Delta x_0$  определялись в момент, как только размер исходно широкого пучка становился меньше периода дискретной решетки. Сравнение сделанных на основе (16) и (21) оценок с результатами расчетов непосредственно в рамках ДНУШ (1) показывает достаточно хорошее согласие с учетом дополнительного корректирующего множителя, который является общим для  $z_0(\mathcal{P})$  и  $\Delta x_0(\mathcal{P})$  при одних и тех же  $a_0$  и  $\gamma_0$ , хотя и меняется при изменении параметров пучка на входе в систему. В качестве примера на рис. 4 приведены  $z_0$  и  $\Delta x_0$  в зависимости от мощности  $\mathcal{P}$  излучения, заданного при  $z = 0$  в форме (27) с  $a_0 = 14$  и  $\gamma_0 = 0.3$ . Отметим прежде всего, что законы уменьшения длины самофокусировки  $z_0$  и смещения  $\Delta x_0$  точки с пиковой интенсивностью с ростом  $\mathcal{P}$  близки к  $1/\sqrt{\mathcal{P}}$ . Это свидетельствует о том, что используемая нами аппроксимация (5) и развитый в разд. 2 вариационный подход достаточно адекватно описывают структуру пучка в дофокальной области.

Сделанные выводы качественно объясняют экспериментальные наблюдения [25–29], относящиеся к исследованию распространения излучения под углом к оси периодической системы световодов, а также могут способствовать более целенаправленному и глубокому изучению особенностей самовоздействия волновых полей в дискретных решетках.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе ДНУШ (1) проведено детальное исследование особенностей самофокусировки



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Длина самофокусировки  $z_0$  и конечное смещение  $\Delta x_0$  точки с пиковой интенсивностью поперек дискретной решетки в зависимости от мощности  $\mathcal{P}$  излучения на входе в систему. На каждом из рисунков кружками представлены результаты, полученные после обработки данных прямого численного моделирования непосредственно в рамках ДНУШ (1). Сплошными кривыми показаны приближенные аналитические функции, соответственно определяющие законы поведения  $z_0$  и  $\Delta x_0$  от  $\mathcal{P}$  (с учетом дополнительного корректирующего множителя, равного в данном случае 0.62). Приведенные зависимости получены при  $a_0 = 14$  и  $\gamma_0 = 0.3$

волновых пучков, инжектируемых под углом к оси системы, состоящей из набора эквидистантно расположенных идентичных световодов. Предложен метод аналитического описания эволюции исходно широких (на масштабах периода обсуждаемой структурированной среды) локализованных распределений поля в дискретных решетках. С использованием мощности  $\mathcal{P}$  в качестве управляющего параметра проведена классификация режимов самовоздействия излучения. Показано наличие трех характерных значений  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P}'_{cr}$ ,  $\mathcal{P}_{cr}$  и  $\mathcal{P}_{cr2}$ . При  $\mathcal{P} < \mathcal{P}'_{cr}$  дискретность среды проявляется слабо и пространственная эволюция волнового

пучка происходит практически так же, как и в сплошной среде (пик интенсивности движется по прямой, ширина волнового пучка меняется периодически и т. д.). При  $\mathcal{P} > \mathcal{P}'_{cr}$  основным эффектом становится самоканалирование излучения в одном из световодов при значительном искажении трассы распространения пучка. Численное моделирование задачи на основе ДНУШ показывает, что при захвате излучения в световод возникают значительные радиационные потери. Они существенным образом сказываются на эволюции волнового поля за фокальной областью. В частности, для пучков с исходной мощностью  $\mathcal{P}$ , лежащей в интервале  $\mathcal{P}'_{cr} < \mathcal{P} < \mathcal{P}_{cr}$ , наблюдается поперечное отражение от той ячейки, в которой сфокусировалось поле. При  $\mathcal{P}$ , ощутимо превышающим  $\mathcal{P}_{cr}$ , радиационные потери приводят к формированию переходной области перед захватом большей части излучения и последующим ее самоканалированием в одном из нелинейных оптических волноводов. Значение  $\mathcal{P}_{cr2}$  характерно тем, что при  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr2}$  волновой пучок, падающий наклонно на решетку световодов, преломляется на границе и распространяется далее вдоль оси системы. Рассмотренный в работе эффект отклонения пика интенсивности волнового пучка от направления распространения является новым нелинейным эффектом, отражающим специфические особенности дискретной системы.

Авторы признательны А. А. Балакину за полезные обсуждения. Аналитическое описание пространственной эволюции волнового пучка в решетке световодов (разд. 2, Приложения А и В) проведено при поддержке РФФ (грант № 16-12-10472). Численное моделирование в рамках ДНУШ и интерпретация результатов расчетов (разд. 3) выполнены при поддержке РФФ (грант № 14-12-00811).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уточним вариационный подход, используемый в разд. 2.1 для описания распространения волновых пучков в решетке эквидистантно расположенных световодов. Как и ранее, подставим аппроксимацию (5) для  $\Psi(z, x)$  в выражение (4) для функции Лагранжа  $\mathcal{L}$  исходной модели (1). Однако теперь при вычислении усредненного лагранжиана  $\bar{\mathcal{L}}$  примем во внимание слагаемые и с  $n = 0$ , и с  $n = \pm 1$ . Для пучков с поперечным размером  $a \gg \sqrt{2}/\pi$  величину  $\exp(-\pi^2 a^2/2)$  можно воспринимать как малый параметр  $\mu$  задачи. В итоге, сохранив лишь чле-

ны нулевого и первого порядка малости по  $\mu$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & \frac{\mathcal{P}a^2}{2} \frac{d\beta}{dz} - \mathcal{P}\gamma \frac{dx_0}{dz} - 2\mathcal{P} \cos \gamma \times \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) - \frac{\mathcal{P}^2}{\sqrt{8\pi}a} - \frac{\mathcal{P}^2}{\sqrt{2\pi}a} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2}{2}\right) \cos(2\pi x_0). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Соответствующие  $\bar{\mathcal{L}}$  в форме (A.1) уравнения Эйлера для коллективных координат  $a(z)$ ,  $\beta(z)$ ,  $x_0(z)$  и  $\gamma(z)$  имеют следующий вид:

$$\frac{da}{dz} = 4\beta a \cos \gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right), \quad (\text{A.2a})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dz} = & \cos \gamma \left(\frac{1}{a^4} - 4\beta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) - \\ & - \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{8\pi}a^3} - \frac{\mathcal{P}(1 + \pi^2 a^2)}{\sqrt{2\pi}a^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2}{2}\right) \times \\ & \times \cos(2\pi x_0), \end{aligned} \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{dx_0}{dz} = 2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right), \quad (\text{A.2c})$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{\sqrt{2\pi}\mathcal{P}}{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2}{2}\right) \sin(2\pi x_0). \quad (\text{A.2d})$$

Основные изменения здесь коснулись второго и четвертого соотношения. В частности, согласно (A.2c) коэффициент  $\gamma$  не является больше постоянной величиной даже в рамках безабберационного приближения. Однако стоит отметить, что появившиеся в (A.2b) и (A.2c) дополнительные слагаемые пропорциональны  $\exp(-\pi^2 a^2/2)$ , т. е. малому параметру  $\mu$  задачи. Таким образом, их вклад в динамику системы (A.2a)–(A.2d) часто оказывается незначительным даже для локализованных волновых полей с эффективной шириной  $a$ , сравнимой с масштабом решетки. Тем не менее эти поправки могут повлиять на долговременную эволюцию относительно узких пучков. Например, из (A.2a)–(A.2d) следует, что стационарные распределения поля с постоянной конечной шириной возможны только при нулевых линейных и квадратичных коррекциях фазового фронта. Кроме того, требуется также выполнение условия  $\sin(2\pi x_0) = 0$ , которое реализуется, когда  $x_0 = m$  или  $x_0 = m + 1/2$ , где  $m$  — целое число. Здесь прослеживается соответствие с двумя хорошо известными солитонными решениями ДНУШ (1), одно из которых устойчиво ( $x_0 = m$ ), а второе нет ( $x_0 = m + 1/2$ ) (см., например, [3–9]).

Для физической интерпретации результатов, к которым приводит учет дополнительных членов с

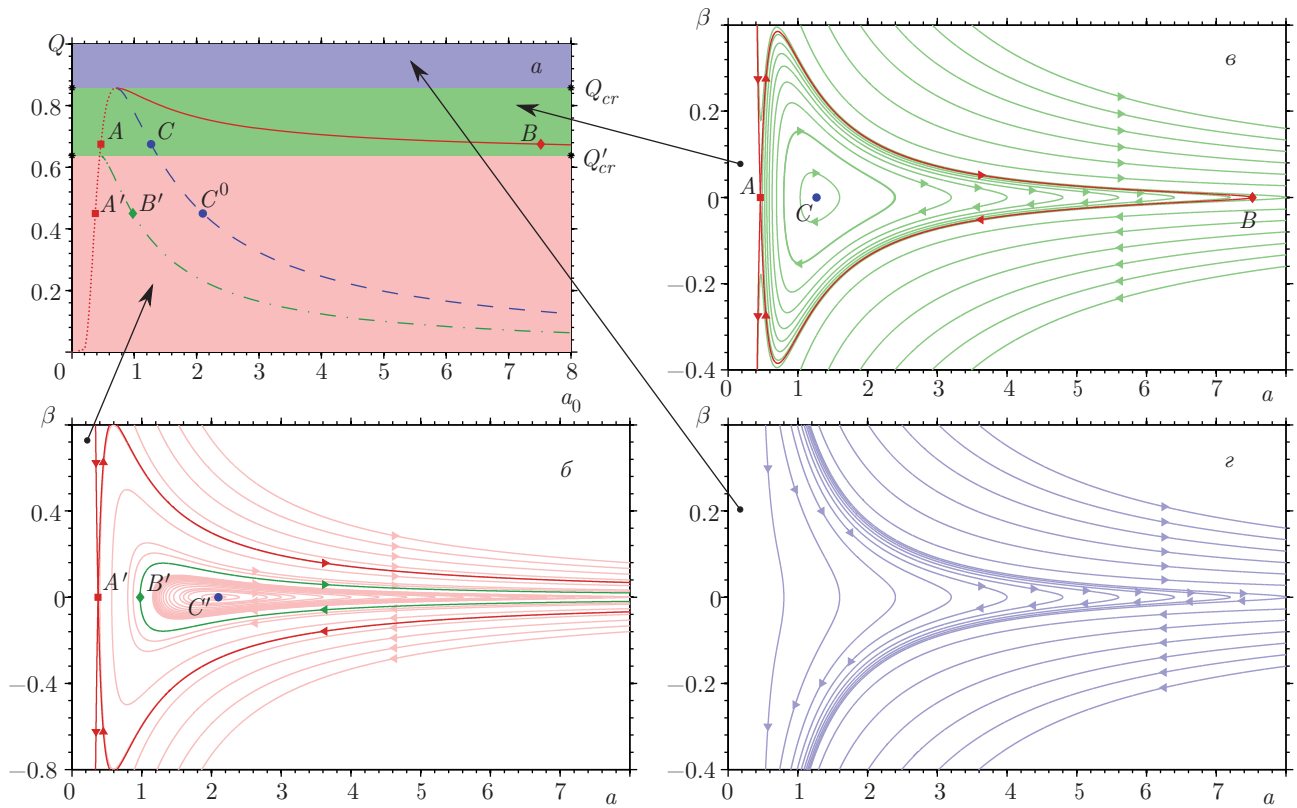
$n = \pm 1$  в (4) при вычислении усредненного лагранжиана  $\bar{\mathcal{L}}$ , сравним выражения (6) и (A.1). Нетрудно заметить, что различие состоит лишь в одном слагаемом, которое содержит периодическую функцию положения  $x_0$  максимума интенсивности излучения и представляет собой так называемый потенциал Пайерлса–Набарро (ПН) [3–9]. Исторически этот потенциал впервые обсуждался в контексте теории дислокаций кристалла (подробнее см. [9]). Однако затем было показано, что его существование оказывает принципиальное влияние на движение кинков и солитонов в разнообразных дискретных моделях и приводит к тому, что поведение уединенных волновых структур в решетках связанных элементов отличается от их эволюции в сплошной среде [3–9].

В работах [10, 35] для вычисления формы потенциала ПН для ДНУШ (1) был предложен способ, использующий близость (1) к точно интегрируемой решеточной модели Абловица–Ладика (АЛ) [2, 4, 9]. Развитая в [10, 35] на основе обратного преобразования рассеяния теория возмущений, в рамках которой отличия ДНУШ (1) от системы уравнений АЛ рассматриваются как малые поправки, позволяет описать динамику широкого солитона на базе самосогласованных обыкновенных дифференциальных уравнений для координаты центра масс и коэффициент линейной коррекции в фазе. При этом в рассматриваемом в [10, 35] приближении поперечный размер солитона оказывается неизменным. Сравнивая соотношение (A.2c), (A.2d) с полученными в работах [10, 35] для аналогичных величин выражениями, несложно заметить, что структурно они очень похожи друг на друга. В частности, если считать эффективную ширину  $a$  амплитудного распределения конечной и практически постоянной, а кривизну  $\beta$  фазового фронта близкой к нулю, то согласно (A.2c), (A.2d) эволюция параметров  $x_0$  и  $\gamma$  такого солитоноподобного волнового пучка будет происходить под действием периодического потенциала. Как и в работах [10, 35], амплитуда данного потенциала убывает экспоненциально с ростом  $a$ . Отметим, что нелинейное локализованное образование в ДНУШ (1) может быть захвачено вблизи одного из минимумов потенциального рельефа ПН [10, 35]. Однако обсуждаемый в основном тексте нашей статьи эффект остановки смещения пучка поперек решетки световодов имеет другую физическую природу и обусловлен прежде всего процессом коллапса волнового поля, хотя потенциал ПН безусловно способствует самоканализированию излучения и приводит к возникновению дополнительных радиационных потерь в ходе пространственной динамики пучка.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Согласно проведенному нами анализу поведение динамической системы, описываемой уравнениями (7a), (7b), существенным образом зависит от того, в каком из трех диапазонов  $Q \leq Q'_{cr}$ ,  $Q'_{cr} < Q < Q_{cr}$  или  $Q \geq Q_{cr}$  лежит положительный параметр  $Q$ . Прежде чем конкретизировать бифуркационные значения  $Q'_{cr}$  и  $Q_{cr}$ , проиллюстрируем качественные трансформации, происходящие в общей картине возможных режимов «движений» такой системы при переходе  $Q$  через точки  $Q'_{cr}$  и  $Q_{cr}$ .

На рис. 5a изображена плоскость  $a_0, Q$  (под  $a_0$  понимается эффективная ширина коллимированного волнового пучка), на которой области с  $Q \leq Q'_{cr}$ ,  $Q'_{cr} < Q < Q_{cr}$  и  $Q \geq Q_{cr}$  выделены тремя разными цветами, отличающимися друг от друга не только оттенками, но и контрастностью. Соответствующие этим областям характерные фазовые портреты автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7a), (7b) представлены на рис. 5б, в, г. Для рис. 5a  $Q = 0.45 < Q'_{cr}$ . В данном случае имеются два состояния равновесия: седло  $A'$  (квадрат красного цвета) и центр  $C'$  (кружок синего цвета). Особо отметим, что при  $Q < Q'_{cr}$  сепаратрисы (на рис. 5б) кривые красного цвета, начинающиеся или заканчивающиеся в седловой точке  $A'$  являются незамкнутыми линиями. Поэтому, когда  $Q < Q'_{cr}$ , в двумерном фазовом пространстве  $a, \beta$  есть специфическая замкнутая траектория, разделяющая области инфинитных и финитных движений. Она пересекает ось  $\beta = 0$  один раз при конечной величине эффективной ширины  $a$ , а другой — при  $a \rightarrow +\infty$ . На рис. 5б такой кривой отвечает линия зеленого цвета, проходящая через точку  $B'$  (зеленый ромб). При  $Q = Q'_{cr}$  симметрично расположенные относительно прямой  $\beta = 0$  части описанной выше фазовой траектории сливаются с соответствующими сепаратрисами, которые, в свою очередь, замыкаются при  $a \rightarrow +\infty$ , образуя тем самым предпосылки зарождения петли. Когда значение параметра  $Q$  находится в интервале  $Q'_{cr} < Q < Q_{cr}$ , у уравнений (7a), (7b) возникает двоякоасимптотическое решение, разграничивающее теперь пролетные и захваченные режимы движения рассматриваемой системы, что наглядно продемонстрировано для  $Q = 0.675$  на рис. 5в. На этом рисунке петля сепаратрисы (кривая красного цвета), стартующая (при  $z \rightarrow -\infty$ ) из седла  $A$  (квадрат красного цвета) и возвращающаяся (при  $z \rightarrow +\infty$ ) в него же, делает виток вокруг состояния равновесия типа центр  $C$  (кружок синего цвета), совершая



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) *a*) Плоскость  $(a_0, Q)$ , на которой выделены области с качественно различным поведением динамической системы (7а), (7б). Отмечены зависимости  $Q(a_0)$  для состояний равновесия системы: седла (пунктирная линия) и центра (штриховая линия). Штрихпунктиром показана функция  $Q(a_0)$ , определяющая в фазовом пространстве  $(a\beta)$  положение точки  $a = a_0, \beta = 0$ , лежащей на траектории, разделяющей области инфинитных и финитных движений при  $Q \leq Q'_{cr}$ . Сплошная кривая задает эффективную ширину  $a_0$  пучка в точке поворота петли сепаратрисы при различных значениях  $Q$  из интервала  $Q'_{cr} < Q \leq Q_{cr}$ . Рисунки *б, в, з* демонстрируют топологически различающиеся между собой фазовые плоскости  $(a\beta)$ , построенные соответственно при  $Q = 0.45 < Q'_{cr}, Q'_{cr} < Q = 0.675 < Q_{cr}$  и  $Q = 0.9 > Q_{cr}$ . На рис. *б, в* квадратами отмечены седла  $A'$  и  $A$ , а кружками — центры  $C'$  и  $C$ . На рис. *б* проходящая через точку  $B'$  (ромб) линия отвечает траектории, разграничивающей области пролетного и захваченного поведения. Для рис. *в* характерно наличие петли сепаратрисы, которая выходит из седла  $A$  и возвращается в него же, совершая поворот в точке  $B$  (ромб)

поворот в точке  $B$  (красный ромб) с координатами  $a \approx 7.517, \beta = 0$ . Лежащие внутри данной петли фазовые траектории описывают колебания эффективной ширины  $a(\zeta)$  и кривизны фазового фронта  $\beta(\zeta)$  волнового пучка с гауссовым профилем амплитуды. Если же начальные характеристики излучения таковы, что исходное положение изображающей точки на фазовой плоскости  $a, \beta$  оказывается во внешней для сепаратрисы области, то в рамках обсуждаемого приближения поле в итоге будет локализоваться в одном из световодов эквидистантной решетки. При  $Q = Q_{cr}$  происходит слияние седла и центра, в результате чего, когда  $Q > Q_{cr}$ , состояния равновесия у автономной системы уравнений (7а), (7б) исчезают, и фазовое пространство  $a, \beta$  становится топологически наиболее простым, что видно, например, из рис. 5з, построенного для  $Q = 0.9$ . В этом слу-

чае анализ, проведенный с помощью вариационного описания, прогнозирует, что любой пучок должен захватываться в канал.

Состояния равновесия у системы (7а), (7б) существуют только при  $\beta = 0$ , т. е. при плоском фазовом фронте, а эффективная ширина  $a_0$  таких стационарных пучков связана с  $Q$  следующим соотношением:

$$\exp\left(-\frac{1}{4a_0^2}\right) = Qa_0. \quad (B.1)$$

Трансцендентное уравнение (B.1) имеет два решения  $a_{0(1)}(Q)$  и  $a_{0(2)}(Q)$ , отвечающих на плоскости  $a, \beta$  седлу и центру, только для  $Q < \sqrt{2/e}$ , что, в частности, наглядно иллюстрирует рис. 5а, где пунктирной линией красного цвета, проходящей через точки  $A'$  и  $A$  (квадраты красного цвета), и штриховой линией синего цвета, проходящей через точки

$C'$  и  $C$  (кружки синего цвета), изображены зависимости  $Q(a_{0(1)})$  и  $Q(a_{0(2)})$ , соответствующие этим состояниям равновесия. Таким образом, бифуркационное значение  $Q_{cr}$  определяется из условия наличия у (В.1) единственного решения и равно  $Q_{cr} = \sqrt{2/e} \approx 0.8578$ .

Принимая во внимание интеграл (9), нетрудно заметить, что если при  $Q < Q'_{cr}$  поперечный размер  $a_{0(3)}$  коллимированного волнового пучка удовлетворяет выражению

$$\exp\left(-\frac{1}{4a_0^2}\right) + \frac{Q}{2a_0} = 1, \quad (\text{В.2})$$

то в фазовом пространстве  $a, \beta$  точка с координатами  $a = a_{0(3)}, \beta = 0$  лежит на выделенной нами ранее траектории, замыкающейся на бесконечности и разделяющей области инфинитных и финитных движений. Полученный с использованием (В.2) график функции  $Q(a_{0(3)})$  показан на рис. 5а с помощью штрихпунктирной кривой зеленого цвета, которая, в том числе, содержит и точку  $B'$  (зеленый ромб), соответствующую точке  $B'$  на рис. 5б. На рис. 5а видно, что бифуркационное значение  $Q'_{cr}$  определяется пересечением пунктирной и штрихпунктирной линий, т. е. совместным решением уравнений (В.1) и (В.2). В итоге, окончательно имеем  $Q'_{cr} \approx 0.6382$ .

Помимо трех уже описанных кривых на рис. 5а имеется еще сплошная линия красного цвета, которая полностью расположена в области с  $Q'_{cr} < Q \leq Q_{cr}$ . Она определяет эффективную ширину  $a_{0(4)}(Q)$  в точке поворота петли сепаратрисы в зависимости от параметра  $Q$  из интервала  $Q'_{cr} < Q \leq Q_{cr}$ . При этом, если волновой пучок с нулевой кривизной фазового фронта имеет поперечный размер  $a_0$ , при котором точка  $a_0, Q$  оказывается ниже данной сплошной кривой  $Q(a_{0(4)})$ , то согласно приведенным выше рассуждениям должны наблюдаться периодические изменения  $a(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$ . В противоположном случае излучение будет самоканализироваться, что приведет к локализации поля на масштабе одного нелинейного оптического волновода. Для того чтобы найти зависимость  $Q(a_{0(4)})$ , требуется, сначала, зафиксировав  $Q$ , у уравнения (В.1) определить наименьший корень  $a_{0(1)}(Q)$ , соответствующий седловому состоянию равновесия, затем, подставив  $a = a_{0(1)}(Q)$  и  $\beta = 0$  в формулу (9), вычислить значение первого интеграла  $C$  на сепаратрисе, после чего, используя заданные  $Q$  и  $C$ , разрешить уравнение

$$\exp\left(-\frac{1}{4a_0^2}\right) + \frac{Q}{2a_0} = C \quad (\text{В.3})$$

относительно  $a_0$  и установить отличное от  $a_{0(1)}(Q)$  решение  $a_{0(4)}(Q)$ . Повторив данную процедуру при различных  $Q$ , удовлетворяющих  $Q'_{cr} < Q \leq Q_{cr}$ , несложно восстановить функцию  $Q(a_{0(4)})$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Инфельд, Дж. Роуландс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, Физматлит, Москва (2005).
2. Э. Скотт, *Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур*, Физматлит, Москва (2007).
3. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).
4. P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives*, Springer, Berlin, Heidelberg (2009).
5. *Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах*, сб. статей под ред. Ю. С. Кившаря, Н. Н. Розанова, Физматлит, Москва (2014).
6. P. G. Kevrekidis, K. O. Rasmussen, and A. R. Bishop, *Int. J. Mod. Phys. B* **15**, 2833, (2001).
7. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Ya. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
8. Ya. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 247 (2011); Erratum *Rev. Mod. Phys.* **83**, 405 (2011)
9. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения*, Физматлит, Москва (2008).
10. A. B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel, R. Muschall, F. Lederer, S. Trillo, and S. Wabnitz, *Phys. Rev. E* **53**, 1172 (1996).
11. D. J. Kaup, *Mathematics and Computers in Simulation* **69**, 322 (2005).
12. D. J. Kaup, T. K. Vogel, *Phys. Lett. A* **362**, 289 (2007).
13. J. Cuevas, G. James, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and B. Sánchez-Rey, *J. Nonlinear Math. Phys.* **15**, 124 (2008).
14. J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and B. A. Malomed, *Physica D* **238**, 67 (2009).



15. C. Chong, R. Carretero-Gonzalez, B. A. Malomed, and P. G. Kevrekidis, *Physica D* **238**, 126 (2009).
16. C. Chong, R. Carretero-González, B. A. Malomed, and P. G. Kevrekidis, *Physica D* **240**, 1205 (2011).
17. H. Susanto and P. C. Matthews, *Phys. Rev. E* **83**, 035201(R) (2011).
18. C. Chong, D. E. Pelinovsky, and G. Schneider, *Physica D* **241**, 115 (2012).
19. M. Syafwan, H. Susanto, S. M. Cox, and B. A. Malomed, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 075207 (2012).
20. A. Trombettoni and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 (2001).
21. A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, S. A. Skobelev, *Phys. Rev. A* **94**, 063806 (2016).
22. U. Al Khawaja, S. M. Al-Marzougb, H. Bahloulib, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **46**, 74 (2017).
23. I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **518**, 1 (2012).
24. D. N. Christodoulides, F. Lederer, and Y. Silberberg, *Nature* **424**, 817 (2003).
25. H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383 (1998).
26. R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2726 (1999).
27. H. S. Eisenberg, R. Morandotti, Y. Silberberg, J. M. Arnold, G. Pennelli, and J. S. Aitchison, *J. Opt. Soc. Amer. B* **19**, 2938 (2002).
28. U. Peschel, R. Morandotti, J. M. Arnold, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, Th. Pertsch, and F. Lederer, *J. Opt. Soc. Amer. B* **19**, 2637 (2002).
29. D. Cheskis, S. Bar-Ad, R. Morandotti, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, and D. Ross, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 223901 (2003).
30. O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
31. Th. Anker, M. Albiez, R. Gati, S. Hunsmann, B. Eiermann, A. Trombettoni, and M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020403 (2005).
32. R. Franzosi, R. Livi, G. Oppo and A. Politi, *Nonlinearity* **24**, R89 (2011).
33. H. Hennig and R. Fleischmann, *Phys. Rev. A* **87**, 033605 (2013).
34. H. Hennig, T. Neff, and R. Fleischmann, *Phys. Rev. E* **93**, 032219 (2016).
35. А. А. Вахненко, Ю. Б. Гайдидей, *ТМФ* **68**, 350 (1986).