

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ МАГНИТОПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛАХ, ИМЕЮЩИХ СЛОЖНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черногловка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 2017 г.

Рассмотрена проблема точного экспериментального определения границ зон устойчивости для магнитопроводимости в нормальных металлах в пространстве направлений магнитного поля \mathbf{B} . Как может быть показано, эта проблема оказывается нетривиальной, поскольку точные границы зон устойчивости в действительности ненаблюдаемы в прямых измерениях проводимости. Тем не менее эта проблема может быть эффективно решена с помощью исследования осцилляционных явлений (циклотронного резонанса, квантовых осцилляций) в нормальных металлах, которые обнаруживают сингулярное поведение на математической границе зоны устойчивости.

DOI: 10.7868/S0044451017110207

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассматриваем гальваномагнитные явления в нормальных металлах, имеющих сложные поверхности Ферми, в пределе сильных магнитных полей \mathbf{B} ($\omega_{BT} \gg 1$). Согласно стандартному подходу, мы предполагаем, что электронные состояния описываются одночастичной функцией распределения $f(\mathbf{p})$, определенной на пространстве квазиимпульсов $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3$ для данного типа кристаллической решетки в металле. В состоянии равновесия мы полагаем, что все электронные состояния с энергией $\epsilon(\mathbf{p})$, меньшей энергии Ферми, заняты ($f(\mathbf{p}) = 1$) и все состояния с энергией, большей энергии Ферми, свободны ($f(\mathbf{p}) = 0$). Отметим также, что мы опускаем здесь спиновые переменные, которые не будут играть существенной роли в нашем рассмотрении.

Пространство квазиимпульсов \mathbf{p} для данной зоны проводимости представляет собой трехмерный тор \mathbb{T}^3 , задаваемый факторизацией пространства \mathbb{R}^3 по векторам обратной решетки:

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / \{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}.$$

Векторы $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ представляют базис обратной решетки и связаны с базисными векторами $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ прямой решетки стандартными соотношениями:

$$\mathbf{a}_1 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \quad \mathbf{a}_2 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}.$$

В этом подходе поверхность Ферми $S_F: \epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ представляет гладкую компактную поверхность, вложенную в трехмерный тор \mathbb{T}^3 .

Эквивалентным образом мы можем рассматривать все пространство квазиимпульсов (\mathbb{R}^3) и полагать, что любые два значения \mathbf{p} , различающиеся на вектор обратной решетки, представляют одно и то же физическое состояние для данной зоны проводимости. В таком подходе дисперсионное соотношение $\epsilon(\mathbf{p})$ должно рассматриваться как 3-периодическая функция в \mathbb{R}^3 с периодами \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 . Поверхность Ферми представляет собой в этом случае 3-периодическую поверхность в \mathbb{R}^3 , которая может в общем случае иметь довольно сложную форму (см., например, рис. 1).

В квазиклассическом приближении эволюция электронных состояний в металле в присутствии

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

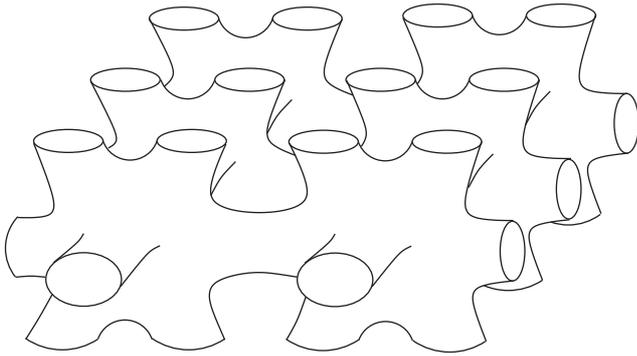


Рис. 1. Сложная поверхность Ферми как 3-периодическая поверхность в \mathbf{p} -пространстве

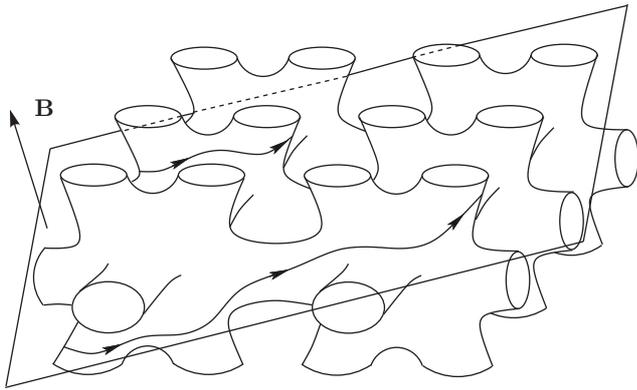


Рис. 2. Пересечение сложной поверхности Ферми плоскостью общего направления в \mathbf{p} -пространстве

электрического и магнитного полей может быть описана с помощью адиабатической системы:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] + e\mathbf{E}.$$

В пределе сильных магнитных полей поведение проводимости в действительности определяется геометрией динамической системы:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

которая будет играть основную роль в нашем рассмотрении.

Система (1.1) является интегрируемой с аналитической точки зрения и ее траектории даются пересечениями уровней постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ с плоскостями, ортогональными \mathbf{B} . В то же самое время глобальная геометрия траекторий (1.1) может тем не менее быть довольно нетривиальной в \mathbf{p} -пространстве, что будет видно, если мы рассмотрим пересечение сложной поверхности Ферми произвольной плоскостью (рис. 2).

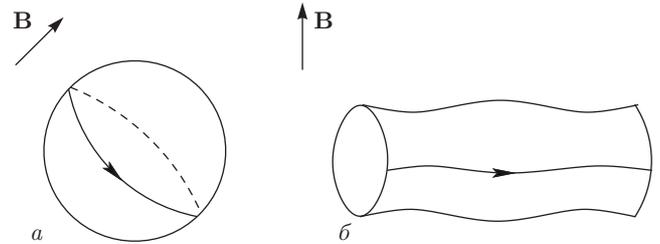


Рис. 3. Замкнутые (а) и открытые периодические (б) электронные траектории на поверхностях Ферми различной формы

Важная роль геометрии открытых траекторий системы (1.1) в поведении проводимости в сильных магнитных полях была впервые раскрыта школой И. М. Лифшица (И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, В. Г. Песчанский) в 1950-е годы (см. [1–8]). Так, в работе [1] было впервые указано существенное различие между вкладом замкнутых и открытых периодических траекторий (рис. 3) системы (1.1) в тензор проводимости в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$.

В работах [2, 3] были рассмотрены более общие типы открытых траекторий, которые не являются периодическими в \mathbf{p} -пространстве и локально устойчивы по отношению к малым вращениям \mathbf{B} . Как открытые периодические траектории системы (1.1), так и более общие траектории, рассмотренные в работах [2, 3], имеют среднее направление в \mathbf{p} -пространстве, что приводит к сильной анизотропии их вклада в проводимость в плоскости, ортогональной \mathbf{B} . Так, если мы выберем ось z вдоль направления \mathbf{B} и ось x вдоль среднего направления открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве, можем записать для предельных значений тензора проводимости $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$:

$$\sigma_{\infty}^{kl} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) величина n обозначает среднюю концентрацию электронов проводимости в металле и m^* имеет значение эффективной массы электрона в кристалле. Величина τ обозначает среднее время свободного пробега электрона и $*$ обозначают некоторые безразмерные константы порядка единицы. Отметим, что проекция квазиклассической электронной траектории в \mathbf{x} -пространстве на плоскость, ортогональную \mathbf{B} , совпадает с соответствующей траекторией в \mathbf{p} -пространстве, повернутой на 90° , что объясняет форму тензора (1.2). Нетрудно видеть, что измерение проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , дает возможность найти среднее

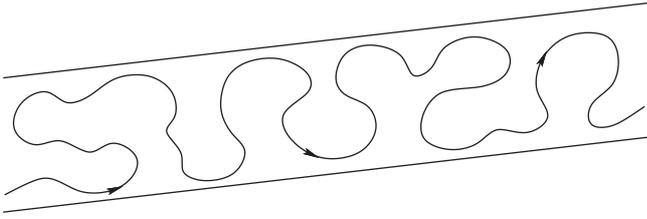


Рис. 4. Форма устойчивой открытой траектории системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{V}

направление открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве, которое совпадает с направлением наименьшей проводимости в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$.

Для сравнения, вклад замкнутых траекторий системы (1.1) в тензор проводимости почти изотропен в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ и мы можем записать для его предельных значений

$$\sigma_{\infty}^{kl} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где $\hat{z} = \mathbf{V}/V$.

Общая задача классификации различных траекторий системы (1.1) с произвольным периодическим дисперсионным соотношением $\epsilon(\mathbf{p})$ была поставлена С. П. Новиковым [9] и интенсивно изучалась в его топологической школе (С. П. Новиков, А. В. Зорич, С. П. Царев, И. А. Дынников). Отметим здесь, что эта проблема оказалась в высшей степени нетривиальной в общей постановке и потребовала ряда довольно глубоких топологических результатов для полного исследования (см. [10–14]). Наиболее важные достижения в исследовании этой проблемы сделаны в работах [10, 13], где были доказаны глубокие топологические теоремы о поведении траекторий системы (1.1). В частности, результаты, полученные в [10] и [13], дают базис для описания устойчивых (регулярных) незамкнутых траекторий системы (1.1) с произвольным дисперсионным соотношением $\epsilon(\mathbf{p})$, которое мы также будем рассматривать в данной работе. Сформулируем здесь свойства устойчивых (по отношению к малым вращениям \mathbf{V} или малым вариациям энергии Ферми ϵ_F) открытых траекторий системы (1.1), которые играют, с нашей точки зрения, наиболее важную роль в магнито-транспортных явлениях в нормальных металлах:

1) каждая устойчивая открытая траектория системы (1.1) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и проходит ее насквозь от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 4);

2) все устойчивые открытые траектории при заданном направлении \mathbf{V} имеют одно и то же среднее направление в \mathbf{p} -пространстве, которое задается пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и некоторой устойчивой целочисленной плоскости в \mathbf{p} -пространстве.

Свойства, сформулированные выше, были использованы в работе [15] для введения важных топологических характеристик электронных спектров в металлах, наблюдаемых в транспортных явлениях в сильных магнитных полях. Эти характеристики были названы в [15] топологическими квантовыми числами, наблюдаемыми в проводимости нормальных металлов, и могут быть описаны следующим образом.

Прежде всего, согласно свойству 1), мы должны наблюдать сильную анизотропию проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ в случае наличия устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми. Предельные значения тензора проводимости $\sigma^{kl}(B)$ задаются формулой (1.2), и мы можем определить среднее направление открытых траекторий (1.1) как направление наименьшей проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , для $\omega_B\tau \gg 1$. Благодаря свойствам устойчивости открытых траекторий, мы можем определить такие направления также для близких направлений \mathbf{V} и определить целочисленную плоскость Γ , которая замечается направлениями наименьшей проводимости в заданной «зоне устойчивости» в пространстве направлений \mathbf{V} .

Отметим здесь, что целочисленный характер плоскости Γ в \mathbf{p} -пространстве означает, что она порождена некоторыми двумя векторами обратной решетки $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$\Gamma = \{\lambda\mathbf{q}_1 + \mu\mathbf{q}_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbf{q}_1 = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{q}_2 = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2,$$

$$n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

В \mathbf{x} -пространстве плоскость Γ может быть задана несократимой тройкой целых чисел (M_1, M_2, M_3) с помощью уравнения

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{l}_1) + M_2(\mathbf{x}, \mathbf{l}_2) + M_3(\mathbf{x}, \mathbf{l}_3) = 0,$$

где $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис прямой решетки. Числа (M_1, M_2, M_3) были названы в работе [15] топологическими квантовыми числами, наблюдаемыми в проводимости нормальных металлов, и представляют гомологические классы двумерных «носителей открытых траекторий» в торе \mathbb{T}^3 . Отметим, что тройки (M_1, M_2, M_3) могут быть довольно нетривиальными для сложных поверхностей Ферми

и представляют (вместе с геометрией «зон устойчивости») важные топологические характеристики электронного спектра в металле.

Другим важным свойством устойчивых открытых траекторий системы (1.1) является то, что они никогда не появляются вместе с более сложными (неустойчивыми) хаотическими открытыми траекториями (хаотическими траекториями типа Царева или Дынникова) при одном и том же направлении \mathbf{V} [16]. Как следствие этого, вклад траекторий, показанных на рис. 4, в проводимость представляет единственную нетривиальную часть тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ в «зоне устойчивости» и является легко наблюдаемым в экспериментах. Отметим здесь также, что рассмотрение «хаотических» траекторий системы (1.1) в данной работе не проводится.

Наиболее подробный математический обзор геометрии траекторий системы (1.1) представлен в работе [16]. Подробное описание физических явлений, основанных на топологических исследованиях системы (1.1), может быть найдено в работах [17–19]. Мы хотели бы здесь также привести ссылку на работу [20], где удобный математический метод численного исследования структуры зон устойчивости, предложенный И. А. Дынниковым, был применен Р. Де Лео для исследования зон устойчивости для ряда аналитических дисперсионных соотношений, использованных в качестве приближений для дисперсионных соотношений в реальных кристаллах. Можно привести здесь также ссылку на работы [14, 21–30], посвященные исследованию различных аспектов хаотических траекторий системы (1.1), которые могут возникать на достаточно сложных поверхностях Ферми.

Настоящая работа посвящена методам экспериментального определения границ точных математических «зон устойчивости», что представляет в действительности нетривиальную проблему с экспериментальной точки зрения. Отметим сразу, что мы определяем точную математическую зону устойчивости Ω_α как область на угловой диаграмме (единичной сфере \mathbb{S}^2), соответствующую наличию устойчивых открытых траекторий с одними и теми же топологическими квантовыми числами $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$ на поверхности Ферми. Согласно этому определению, открытые траектории системы (1.1) существуют для всех $\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$, устойчивы по отношению к малым вращениям \mathbf{V} и определяют одну и ту же целочисленную плоскость Γ_α в \mathbf{p} -пространстве. Зона устойчивости Ω_α , определенная таким образом, представляет конечную область на единичной сфере \mathbb{S}^2 с кусочно-гладкой границей (рис. 5).

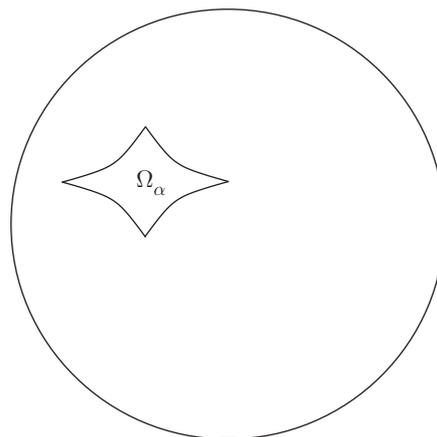


Рис. 5. Точная математическая зона устойчивости Ω_α на единичной сфере \mathbb{S}^2 , соответствующая фиксированной тройке $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$

Отметим теперь, однако, что полное множество направлений \mathbf{V} , соответствующих наличию открытых траекторий на поверхности Ферми, имеет, вообще говоря, более сложную структуру. Так, в работе [31] было впервые отмечено, что области на угловой диаграмме, соответствующие наличию открытых траекторий, должны в действительности иметь сингулярную границу, что обусловлено различием между периодическими и непериодическими траекториями, возникающими на поверхности Ферми. Используя общее топологическое описание устойчивых открытых траекторий системы (1.1), можно показать, что зона устойчивости Ω_α на \mathbb{S}^2 в общем случае обязательно имеет всюду плотную «сеть» направлений $\mathbf{V} \in \Omega_\alpha$, на которой устойчивые траектории системы (1.1) являются в действительности периодическими [32]. Более того, эта сеть должна быть в действительности продолжена за пределы зоны Ω_α , поскольку периодические открытые траектории существуют также на ее сегментах вблизи границы Ω_α . Заметим здесь, что, согласно нашему определению, мы не включаем соответствующие сегменты в зону Ω_α , поскольку соответствующие траектории более не являются устойчивыми по отношению к малым вращениям \mathbf{V} . Кроме того, замкнутые электронные траектории вблизи границы Ω_α имеют в действительности весьма специальную форму, что делает их трудно отличимыми от открытых траекторий с экспериментальной точки зрения. Как следствие этого, «экспериментально наблюдаемые зоны устойчивости» $\hat{\Omega}_\alpha$ в действительности отличаются от точных математических зон устойчивости (рис. 6).

Отметим также, что из-за различия между периодическими и непериодическими траекториями ана-

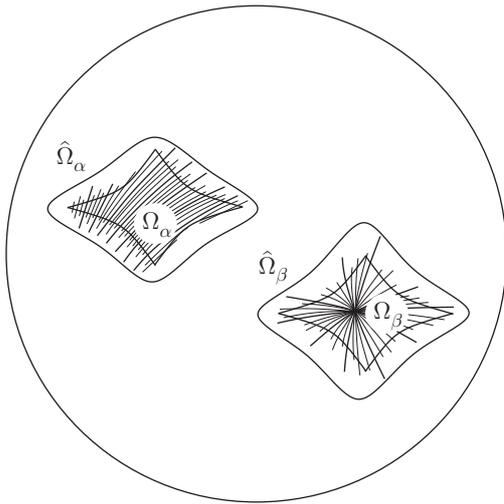


Рис. 6. «Экспериментально наблюдаемые зоны устойчивости» с сетями специальных направлений \mathbf{V} на угловой диаграмме

литическая зависимость величин $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ как от величины, так и от направления \mathbf{V} является в действительности довольно сложной как в зоне Ω_α , так и в зоне $\hat{\Omega}_\alpha$ (см. [32]). Как следствие этого, точная граница математической зоны устойчивости Ω_α в действительности ненаблюдаема в прямых измерениях величин $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ даже при довольно больших значениях V .

С другой стороны, точная форма математических зон устойчивости Ω_α представляет важную характеристику дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ и может играть довольно важную роль в восстановлении формы поверхности Ферми из экспериментальных данных. В настоящей работе мы покажем, что осцилляционные явления в нормальных металлах дают в действительности удобный способ определения границы зон Ω_α , который основан на топологической структуре «носителей открытых траекторий» на поверхности Ферми. В следующем разделе мы дадим описание топологической структуры (сложной) поверхности Ферми при наличии устойчивых открытых траекторий системы (1.1) и обсудим специфические особенности осцилляционных явлений на поверхностях такого типа.

2. СПЕЦИАЛЬНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ, СОДЕРЖАЩЕЙ УСТОЙЧИВЫЕ ОТКРЫТЫЕ ТРАЕКТОРИИ, И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ

Для описания специального топологического представления сложной поверхности Ферми при

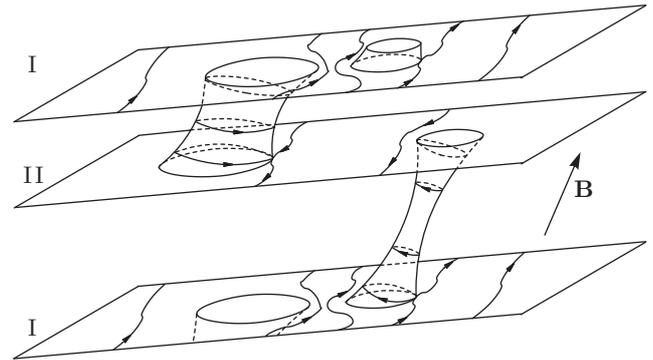


Рис. 7. Модельная поверхность Ферми рода 3 в \mathbf{p} -пространстве с устойчивыми открытыми траекториями системы (1.1)

наличии устойчивых открытых траекторий системы (1.1) введем сначала модельную поверхность Ферми, имеющую следующую форму.

Рассмотрим периодический набор параллельных целочисленных плоскостей в \mathbf{p} -пространстве, соединенных цилиндрами конечной высоты (рис. 7).

Разделим все плоскости на два различных класса (I и II) — нечетно-нумерованные плоскости и четно-нумерованные плоскости. Положим теперь, что все плоскости данного класса могут быть получены друг из друга сдвигом на вектор обратной решетки и представляют собой один и тот же объект после факторизации по векторам обратной решетки.

Полагаем, что все цилиндры также разделены на два класса и представляют лишь два неэквивалентных объекта после факторизации.

Мы можем тогда сказать, что описанная выше периодическая поверхность дает пример поверхности Ферми, представленной парой параллельных двумерных торов $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^3$, вложенных в \mathbb{T}^3 , и двумя цилиндрами конечной высоты, соединяющих торы \mathbb{T}^2 .

Предположим теперь, что оси цилиндров почти параллельны в \mathbf{p} -пространстве и рассмотрим магнитное поле, имеющее направление, близкое к направлению осей цилиндров. Нетрудно видеть, что если направление \mathbf{V} почти параллельно цилиндрам, то цилиндры состоят главным образом из замкнутых траекторий системы (1.1), которые разрезают нашу поверхность Ферми на отдельные параллельные (деформированные) плоскости. Отметим, что замкнутые траектории, возникающие на цилиндрах различных типов, также принадлежат к различным (электронным или дырочным) типам. Открытые траектории системы (1.1) задаются пересечениями плоскостей, ортогональных \mathbf{V} , с периодически

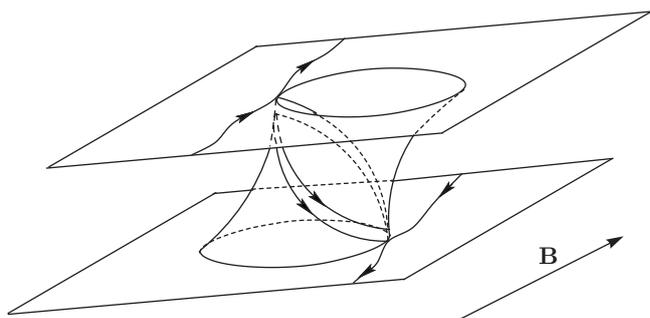


Рис. 8. Очень короткий цилиндр замкнутых траекторий одного типа для направления \mathbf{V} , близкого к границе зоны устойчивости

деформированными плоскостями в \mathbf{p} -пространстве и имеют регулярную форму, показанную на рис. 4. Части поверхности Ферми, состоящие из замкнутых траекторий, представляют собой цилиндры, ограниченные сингулярными траекториями, с высотами, зависящими от направления \mathbf{V} . Таким образом, мы имеем зону устойчивости вокруг начального направления \mathbf{V} с топологическими квантовыми числами, определяемыми гомотопическим классом целочисленных плоскостей, введенных выше.

Граница зоны устойчивости определяется тем условием, что высота цилиндров одного типа обращается в нуль, так что соответствующие замкнутые траектории исчезают на поверхности Ферми (рис. 8). Как следствие этого, оставшиеся замкнутые траектории не могут больше разрезать поверхность Ферми на отдельные плоскости и мы не имеем больше устойчивых открытых траекторий после пересечения границы зоны устойчивости. Таким образом, зона устойчивости представляет собой в общем случае область с кусочно-гладкой границей в пространстве направлений \mathbf{V} .

Заметим, что мы не утверждаем здесь, что открытые траектории системы (1.1) полностью исчезают вне зоны устойчивости Ω . Действительно, мы можем видеть, что оставшиеся цилиндры замкнутых траекторий теперь разрезают поверхность Ферми на связанные пары целочисленных плоскостей и траектории системы (1.1) все еще допускают эффективное описание вблизи границы зоны Ω . Нетрудно видеть, что траектории могут теперь «прыгать» с одной плоскости на другую, что дает перестройку открытых траекторий после пересечения границы зоны Ω . Можно видеть также, что все открытые траектории трансформируются при этом в длинные замкнутые траектории, если пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , с целочисленными плоскостями

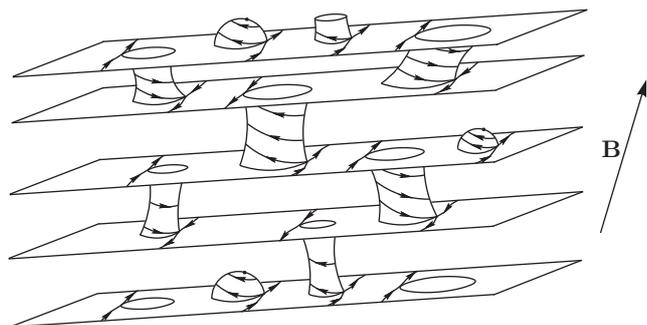


Рис. 9. Топологическое представление поверхности Ферми очень высокого рода, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1)

имеет иррациональное направление в \mathbf{p} -пространстве. В то же самое время, если пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и целочисленных плоскостей имеет рациональное направление, то у нас будут присутствовать как длинные замкнутые траектории, так и открытые периодические траектории, вблизи границы зоны Ω . Открытые периодические траектории, однако, не являются устойчивыми за пределами зоны Ω , так что мы не включаем соответствующее множество направлений \mathbf{V} в математическую зону устойчивости. В то же самое время, это множество принадлежит «экспериментально наблюдаемой зоне устойчивости», которая включает математическую зону устойчивости как подмножество. Аналитические свойства проводимости в экспериментально наблюдаемой зоне устойчивости являются в действительности довольно сложными (см. [32]), что делает экспериментальное определение границы математической зоны устойчивости нетривиальной проблемой.

Картина, представленная выше, описывает поверхность Ферми рода 3, вложенную в трехмерный тор T^3 , и дает пример достаточно сложной с топологической точки зрения поверхности Ферми. В общем случае топологическое представление сколь угодно сложной поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1), может отличаться от описанного выше следующими деталями.

1. Число неэквивалентных цилиндров замкнутых траекторий может быть больше (или меньше) двух.
2. Могут присутствовать дополнительные цилиндры замкнутых траекторий на целочисленных плоскостях, имеющие точку в качестве основания.
3. Число неэквивалентных параллельных целочисленных плоскостей может быть больше двух, будучи любым четным числом (рис. 9).

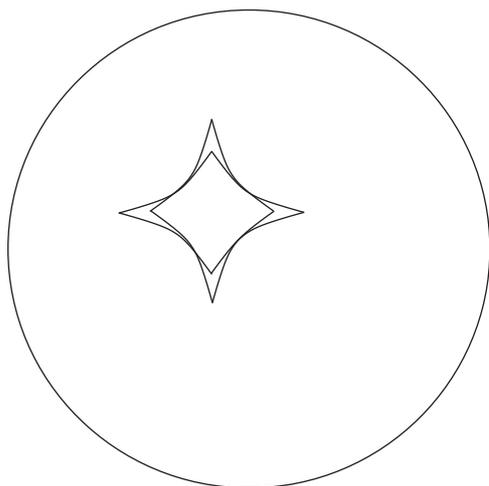


Рис. 10. Сложная зона устойчивости, представляющая наложение двух зон с одними и теми же топологическими числами

Общее утверждение, сформулированное выше, является следствием довольно глубоких топологических теорем, доказанных в работах [10, 13, 16]. Отметим здесь, что ситуация 3 может наблюдаться в действительности лишь для поверхностей Ферми очень высокого рода, так что для большинства нормальных металлов она в действительности не возникает. Отметим также, что ситуация 3 может рассматриваться также как «наложение» двух (или более) зон устойчивости с одними и теми же топологическими квантовыми числами. Как было указано в работе [32], аналитические свойства проводимости в этом случае являются наиболее сложными, в частности, мы должны наблюдать здесь более одной границы зоны устойчивости (рис. 10).

В любой ситуации граница точной математической зоны устойчивости определяется исчезновением одного из цилиндров замкнутых траекторий, так что, как мы увидим ниже, исследование осцилляционных явлений дает в действительности удобный инструмент для определения границ зон устойчивости в эксперименте.

Отметим здесь также, что картина, представленная выше, дает чисто топологическое описание поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории (или, лучше сказать, топологическое представление системы (1.1) на поверхности Ферми), и может быть визуальным гораздо более сложной из-за возможной сложной геометрии введенных выше объектов.

Ниже мы рассмотрим осцилляционные явления в ситуации, представленной выше, и опишем их специ-

фические особенности вблизи границы зоны устойчивости. Мы, конечно, не будем проводить здесь детального теоретического рассмотрения этих явлений и приведем лишь ссылки на их стандартное описание (см., например, [7, 33–35]).

Начнем с рассмотрения явления (классического) циклотронного резонанса, которое может быть описано с помощью чисто кинетического подхода для электронного газа в нормальных металлах. Как хорошо известно, явление циклотронного резонанса связано с осциллирующей зависимостью поверхностной проводимости от частоты переменного поля в присутствии сильного магнитного поля \mathbf{V} . В наиболее частой постановке предполагается, что направление \mathbf{V} параллельно плоскости поверхности металла и переменное электрическое поле может иметь любое направление в той же плоскости. Осциллирующее поведение поверхностной проводимости (в ситуации аномального скин-эффекта) вызывается совпадением частоты Ω падающей волны с величинами $n\omega_B$, $n \in \mathbb{N}$, где $\omega_B = \omega_B(p_z)$ представляет циклотронную частоту, определенную для любой замкнутой траектории системы (1.1). В общем случае $\omega_B(p_z)$ представляет собой сложную функцию p_z и осциллирующее поведение проводимости определяется в действительности экстремальными значениями $\omega_B(p_z)$, удовлетворяющими условию $d\omega_B/dp_z = 0$.

В представленной выше геометрической картине замкнутые траектории объединены в цилиндры, соединяющие целочисленные плоскости, и на основаниях этих цилиндров выполняется соотношение $\omega_B(p_z) = 0$. Как следствие этого, положительная функция $\omega_B(p_z)$ должна иметь по меньшей мере один максимум на каждом цилиндре, т. е. каждый цилиндр замкнутых траекторий содержит хотя бы одну экстремальную траекторию в указанном выше смысле. Отметим, что теоретически мы можем иметь несколько минимумов и максимумов функции $\omega_B(p_z)$ на цилиндре замкнутых траекторий, однако случай нескольких критических точек $\omega_B(p_z)$ на одном цилиндре требует в действительности довольно сложной геометрии дисперсионного соотношения. Для простоты, будем полагать здесь, что все цилиндры замкнутых траекторий содержат лишь одно (максимальное) значение $\omega_B(p_z)$. Как мы увидим, более сложные случаи не содержат фундаментальных отличий от простого случая, рассматриваемого нами.

Сделаем также еще одно замечание. Для поверхностей Ферми не очень высокого рода граница зоны устойчивости определяется исчезновением все-

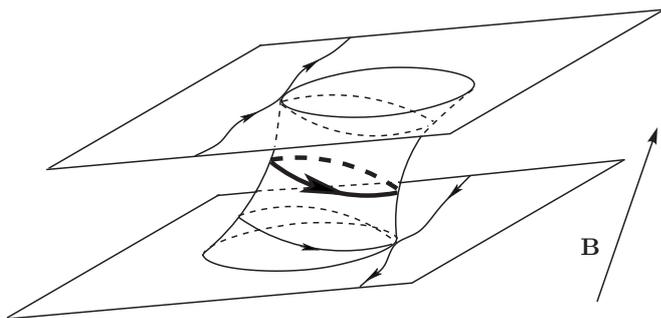


Рис. 11. Экстремальная траектория на цилиндре замкнутых траекторий системы (1.1)

го одного цилиндра замкнутых траекторий системы (1.1), который является инвариантным по отношению к преобразованию $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$. В этом случае экстремальное значение ω_B соответствует центральному сечению цилиндра плоскостью, ортогональной \mathbf{V} (рис. 11). Для более сложных поверхностей Ферми (высокого рода) мы можем также иметь ситуацию, когда два неэквивалентных цилиндра, которые переходят друг в друга при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, исчезают одновременно на границе зоны устойчивости. Отметим, однако, что эта ситуация требует довольно сложной поверхности Ферми, так что в большинстве экспериментов мы можем в действительности предполагать первый случай. Отметим здесь также, что первая ситуация влечет также дополнительное соотношение

$$\langle v_{gr}^z \rangle_{tr} = 0$$

на экстремальных траекториях, которое позволяет в действительности не накладывать строгого условия, что поле \mathbf{V} параллельно поверхности металла.

Возвращаясь к явлению циклотронного резонанса, мы можем теперь видеть, что для поверхности Ферми описанной выше структуры осцилляционное поведение проводимости в высокочастотных электрических полях должно определяться конечным числом главных членов, представляющих вклады экстремальных траекторий на цилиндрах замкнутых траекторий, а также концевых точек специальных (вырожденных) цилиндров на рис. 9. Отметим здесь также, что последний вклад в действительности не возникает, если направление \mathbf{E} в падающей волне ортогонально нашему фиксированному направлению \mathbf{V} . Каждый главный член характеризуется периодической зависимостью от частоты Ω (или от $1/B$) со своим собственным периодом T_i . Для направлений \mathbf{V} , лежащих внутри зоны устойчивости Ω_α , периоды $T_i(\mathbf{V}/B)$ представляют глад-

кие функции направления \mathbf{V} и один из периодов T_{i_0} обращается в бесконечность на границе зоны устойчивости (рис. 12). После пересечения границы математической зоны устойчивости Ω_α соответствующий вклад полностью исчезает, в то время как все остальные главные вклады значительно не изменяются (рис. 13).

Отметим здесь специально, что как исчезновение одного из главных осциллирующих членов в проводимости, так и увеличение его периода T_{i_0} имеют очень резкий характер вблизи границы зоны устойчивости. Действительно, главные осциллирующие члены в проводимости даются вкладами очень узких «полосок» замкнутых траекторий, примыкающих к экстремальным траекториям, которые не изменяются заметным образом вплоть до границы зоны Ω_α . Точно так же заметное увеличение периода T_{i_0} обусловлено близким подходом сингулярных траекторий к экстремальной траектории на цилиндре замкнутых траекторий (рис. 8). Можно также показать, что этот эффект начинает проявлять себя в довольно узкой области вблизи границы Ω_α . Как результат, промежуточная картина, представленная на рис. 12 и 13, может быть в действительности практически ненаблюдаемой в экспериментальных исследованиях явления циклотронного резонанса, так что мы будем с большой вероятностью наблюдать в действительности более резкий переход (рис. 14) после пересечения границы зоны устойчивости.

Таким образом, несмотря на то, что длинные замкнутые траектории, возникающие вне зоны устойчивости, трудно отличимы от открытых траекторий с экспериментальной точки зрения, явление циклотронного резонанса дает нам хороший инструмент для точного экспериментального определения границы математической зоны устойчивости. Отметим также, что длинные замкнутые траектории, возникающие вблизи границы математической зоны устойчивости, соответствуют очень большим периодам обращения электрона по траектории, которые могут превышать время свободного пробега электронов, так что они не дают в этом случае видимого вклада в картину циклотронного резонанса в эксперименте.

Обсудим теперь кратко квантовые осцилляционные явления в нормальных металлах, среди которых наиболее часто упоминаются осцилляции магнитной восприимчивости (эффект де Гааза – ван Альфена) и проводимости (эффект Шубникова – де Гааза) при изменении величины $1/B$.

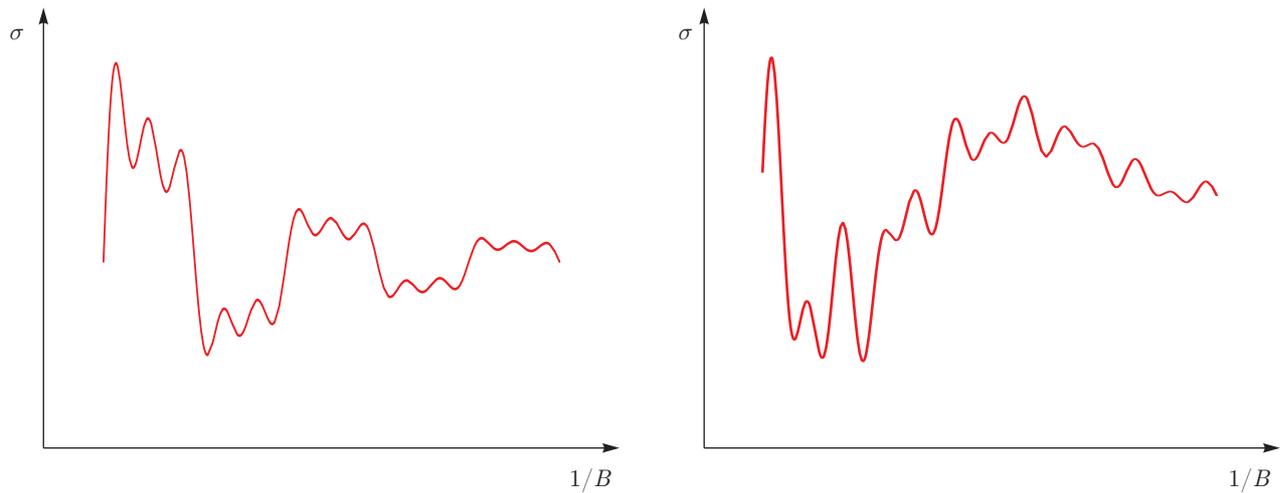


Рис. 12. Увеличение периода одного из главных осциллирующих членов в поверхностной проводимости (вещественной или мнимой части) вблизи границы внутри какой-либо из зон устойчивости

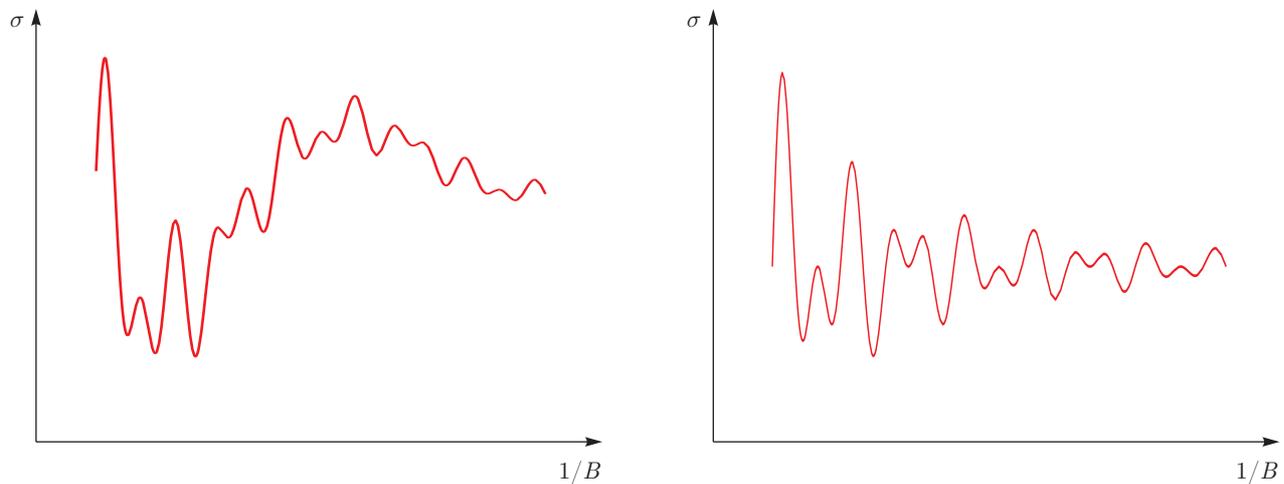


Рис. 13. Исчезновение одного из главных осциллирующих членов в поверхностной проводимости после пересечения границы зоны устойчивости

Общей причиной для квантовых осцилляционных явлений в нормальных металлах является квантование электронного движения вдоль замкнутых траекторий системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{B} . В квазиклассическом приближении мы должны положить теперь, что замкнутые траектории системы (1.1) должны отбираться в соответствии с правилом квантования

$$S(\epsilon, p_z) = \frac{2\pi e\hbar B}{c} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \gg 1,$$

где $S(\epsilon, p_z)$ — площадь, ограничиваемая замкнутой траекторией системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , в \mathbf{p} -пространстве.

Квантовые осцилляции физических величин, измеряемые в металлах, связаны с пересечением уровня Ферми соответствующими квантованными энергетическими уровнями, что определяет период соответствующих осцилляций, вносимых выделенной замкнутой траекторией на поверхности Ферми:

$$\Delta \frac{1}{B} = \frac{2\pi e\hbar}{cS(\epsilon_F, p_z)}.$$

Как и в случае циклотронного резонанса, главные члены в осцилляционном поведении относятся к экстремальным замкнутым траекториям, которые определяются теперь условием $dS/dp_z = 0$. Как и в предыдущей ситуации, мы можем ожидать здесь на-

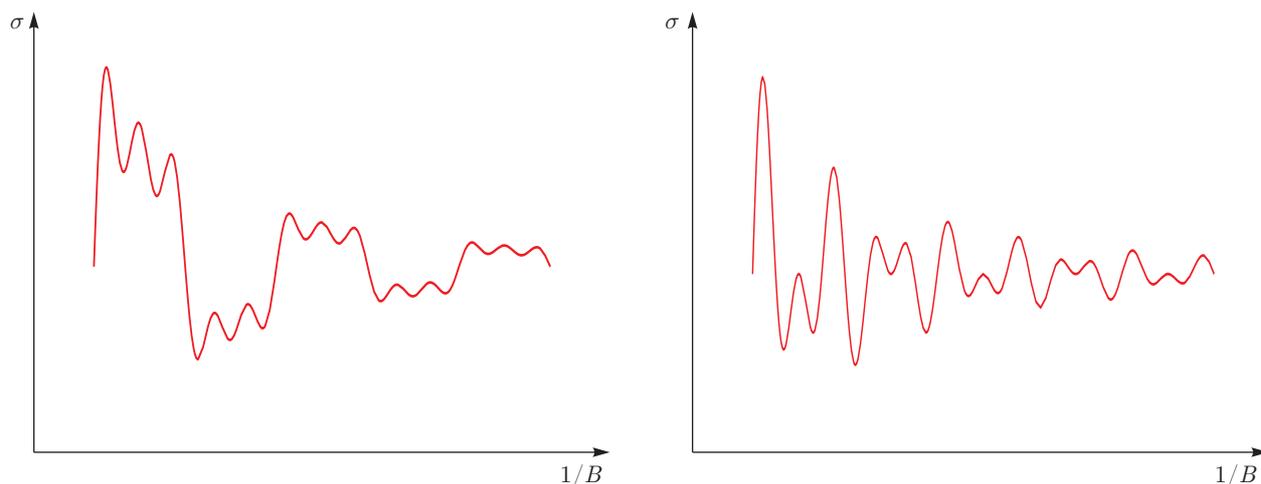


Рис. 14. Схематическое резкое изменение экспериментальной картины осцилляций поверхностной проводимости после пересечения границы зоны устойчивости. Можно видеть, что изменение осцилляционного поведения представлено исчезновением одного из главных осцилляционных членов из конечной суммы таких членов

личия конечного числа таких траекторий на каждом цилиндре, соединяющем целочисленные плоскости, если $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$. Таким образом, осцилляционное поведение физических величин в основном должно представляться несколькими главными осциллирующими членами, имеющими различные периоды

$$\left(\Delta \frac{1}{B}\right)_i = \frac{2\pi e\hbar}{cS_{extr}^i}$$

по переменной $1/B$.

Для не слишком сложных поверхностей Ферми можно снова ожидать, что каждый цилиндр замкнутых траекторий системы (1.1) содержит лишь одну траекторию, соответствующую экстремальной площади в \mathbf{p} -пространстве. Кроме того, для поверхностей Ферми не слишком высокого рода можно ожидать, что каждый цилиндр замкнутых траекторий является инвариантным относительно преобразования $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, так что каждая экстремальная траектория на этом цилиндре представляет в действительности его центральное сечение плоскостью, ортогональной \mathbf{V} . Отметим, однако, что для очень сложных поверхностей Ферми приведенные выше предположения не обязательно выполняются. В частности, в ситуации, когда мы имеем пары цилиндров, переходящих друг в друга при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, экстремальные траектории на них могут быть расположены вблизи оснований цилиндров. В общем случае указанные выше детали не меняют заметным образом схему использования квантовых осцилляционных явлений для определе-

ния точных границ зон устойчивости для магнитопроводимости в нормальных металлах.

Как и в случае с циклотронным резонансом, мы должны наблюдать здесь скачкообразное изменение картины осцилляций физических величин после пересечения границы зоны устойчивости, вызываемое исчезновением одного (или более) из цилиндров замкнутых траекторий системы (1.1). Также в этом случае изменения являются резко выраженными на границе Ω_α по той причине, что соответствующий главный член в осцилляционной картине привносится экстремальной траекторией, которая остается почти неизменной вплоть до границы Ω_α и исчезает внезапно после пересечения границы. Изменения в картине осцилляций имеют вид, аналогичный наблюдаемому при циклотронном резонансе и соответствующий исчезновению одного из главных осциллирующих членов (рис. 14). Заметим лишь, что в этом случае мы совсем не должны наблюдать увеличение соответствующего периода осцилляций вблизи границы Ω_α , поскольку он определяется теперь площадью, ограниченной экстремальной траекторией (а не циклотронной частотой), которая не меняется заметно вблизи границы зоны устойчивости.

Наконец, сделаем еще одно дополнительное замечание. Как мы видели выше, описание квантовых осцилляционных явлений в нормальных металлах связано с площадью, ограничиваемой экстремальной траекторией в плоскости, ортогональной \mathbf{V} . Экстремальные траектории в теории циклотронного резонанса определяются экстремальными значе-

ниями циклотронной частоты, которая в действительности связана с величиной $\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon$ согласно формулам

$$\omega_B = \frac{eB}{m^*c}, \quad m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S(\epsilon, p_z)}{\partial \epsilon}.$$

В то же время величина $\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon$ может быть измерена также в экспериментальных наблюдениях квантовых осцилляций при исследовании их температурной зависимости [7, 33–35]. Мы хотели бы здесь указать, что величины $\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon$, измеренные этими различными способами, должны в действительности совпадать при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ для большинства нормальных металлов, имеющих не слишком сложные поверхности Ферми. Причина такого совпадения дается здесь тем обстоятельством, что как явление циклотронного резонанса, так и явления квантовых осцилляций связаны с одними и теми же экстремальными траекториями, задаваемыми центральными сечениями цилиндров замкнутых траекторий в топологическом представлении поверхности Ферми согласно рис. 9. В то же самое время для металлов с очень сложными поверхностями Ферми это обстоятельство может в общем случае не иметь места, так что величины $\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon$, измеренные двумя этими способами, могут различаться, поскольку они связаны теперь с различными экстремальными траекториями системы (1.1). Нетрудно видеть, что наше последнее замечание не имеет прямого отношения к определению границ зон устойчивости в металлах, тем не менее оно может играть некоторую роль в более детальных исследованиях осцилляционных явлений при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема точного определения границ зон устойчивости для магнитопроводимости в нормальных металлах в пространстве направлений \mathbf{V} . Как можно показать, эта проблема является нетривиальной с экспериментальной точки зрения из-за существенного различия между точными математическими зонами устойчивости и «экспериментально наблюдаемыми зонами устойчивости» в прямых измерениях проводимости. Можно показать тем не менее, что экспериментальное определение точной границы зоны устойчивости может быть эффективно проведено с помощью хорошо известных осцилляционных явлений, таких как циклотронный резонанс или квантовые осцилляции в нормальных металлах. Так, экспериментальное исследование осцилляционных явлений в достаточно сильных маг-

нитных полях обнаруживает резкое изменение картины осцилляционного поведения физических величин при пересечении границы математической зоны устойчивости как функций величины B при заданном направлении магнитного поля. Это резкое изменение осцилляционного поведения может быть описано в общем случае как исчезновение одного из главных осцилляционных членов из общего вклада, представленного конечной суммой таких членов (рис. 14). Таким образом, детальное исследование осцилляционного поведения физических величин при различных направлениях \mathbf{V} позволяет в действительности определить четкие границы математических зон устойчивости для магнитопроводимости металлов. Результаты работы основаны на топологическом описании структуры поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых квазиклассических электронных траекторий.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
2. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
4. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
5. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
6. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
7. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
8. M. I. Kaganov, V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
9. С. П. Новиков, УМН **37**(5), 3 (1982).
10. А. В. Зорич, УМН **39**(5), 235 (1984).
11. И. А. Дынников, УМН **47**(3), 161 (1992).
12. С. П. Царев, *Частное сообщение* (1992–93).
13. И. А. Дынников, Матем. заметки **53**(5), 57 (1993).
14. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), pp. 45–73.

15. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
16. И. А. Дынников, УМН **54**(1), 21 (1999).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
18. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Bull. Braz. Math. Soc., New Ser. **34**(1), 171 (2003).
19. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**(1–2), 31 (2004).
20. R. De Leo, Physica B: Condens. Matter **362**(1–4), 62 (2005).
21. A. V. Zorich, in *Proc. "Geometric Study of Foliations"* (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Sci., Singapore (1994), p. 479.
22. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
23. Р. Де Лео, УМН **55**(1), 181 (2000).
24. Р. Де Лео, УМН **58**(5), 197 (2003).
25. R. De Leo, Exp. Mathem. **15**(1), 109 (2006).
26. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**(5), 151 (2007).
27. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**(1), 51 (2009).
28. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32**, 643 (2012).
29. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
30. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014*, Advances in the Mathematical Sciences, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 234, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 173 (2014); arXiv:1309.4884.
31. Р. Н. Гуржи, А. И. Копелиович, Низкотемпературная электропроводность чистых металлов, в сб. *Электроны проводимости*, под ред. М. И. Каганова, В. С. Эдельмана, Наука, Москва (1985).
32. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017).
33. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
34. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
35. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974).