

# ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКА ОТ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ В ШУНТИРОВАННОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ

Ю. М. Шукринов <sup>a,b\*</sup>, И. Р. Рахмонов <sup>a,c</sup>, Г. Филатрелла <sup>d\*\*</sup>

<sup>a</sup> Объединенный институт ядерных исследований, ЛТФ  
141980, Дубна, Московская обл., Россия

<sup>b</sup> Государственный университет Дубна  
141980, Дубна, Московская обл., Россия

<sup>c</sup> Физико-технический институт им. С. У. Умарова Академии наук Республики Таджикистан  
734063, Душанбе, Таджикистан

<sup>d</sup> Department of Sciences and Technologies and Salerno Unit of CNISM, University of Sannio  
I-82100 Benevento, Italy

Поступила в редакцию 27 марта 2017 г.

Исследуются фазовая динамика и вольт-амперные характеристики джозефсоновского перехода, шунтированного LC-контуром. Когда джозефсоновская частота  $\omega_J$  сравнивается с собственной частотой  $\omega_{rc}$  образованного резонансного контура, на вольт-амперной характеристике появляются дополнительные  $rc$ -ветви. Изучены особенности  $rc$ -ветви и сверхпроводящего тока при различных значениях резонансной частоты. Показано, что максимальная величина сверхпроводящего тока через джозефсоновский переход на  $rc$ -ветви зависит от резонансной частоты и определяется близостью точки окончания  $rc$ -ветви к значению критического тока. Найдена зависимость максимального сверхпроводящего тока от резонансной частоты при различных значениях параметра диссипации. С точностью до 1% предельное значение максимального сверхпроводящего тока не зависит от параметров системы.

DOI: 10.7868/S0044451017110086

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее простых и эффективных способов влияния на свойства джозефсоновского перехода (ДП) является его шунтирование такими линейными элементами, как емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$  [1]. ДП вместе с шунтирующим его элементами образует колебательный контур, который является перспективным объектом сверхпроводящей электроники [1]. Когда джозефсоновская частота  $\omega_J$  сравнивается с собственной частотой  $\omega_{rc}$  образованного резонансного контура, джозефсоновские осцилляции подстраиваются к частоте внешнего контура. Эта синхронизация также отражается на вольт-амперной характеристике (ВАХ) в виде различных особенностей типа ступеньки, гор-

ба, провала [2] или ветви отрицательного дифференциального сопротивления [3, 4]. Недавно в работе [5] было предложено использование шунтированного ДП для создания стандарта тока, что позволит замкнуть метрологический треугольник «вольт–ом–ампер». Шунтирование  $LCR$ -элементами используется также для синхронизации джозефсоновских осцилляций в стеках ДП на основе ВТСП типа BSCCO с целью увеличения мощности когерентного электромагнитного излучения в терагерцевом диапазоне [2, 6].

Интерес к шунтированию ДП  $LCR$ -элементами в значительной степени обусловлен также тем, что это приводит к наличию одновременно двух частот при одном и том же наборе параметров системы, т. е. биритмичности, которая наблюдается в различных биохимических системах [7–10], нелинейных электронных цепях [11–14] и в распределенных системах [15]. Экспериментальное наблюдение биритмичности обсуждалось в работах [16, 17]. В этой связи

\* E-mail: shukrinov@theor.jinr.ru

\*\* G. Filatrella

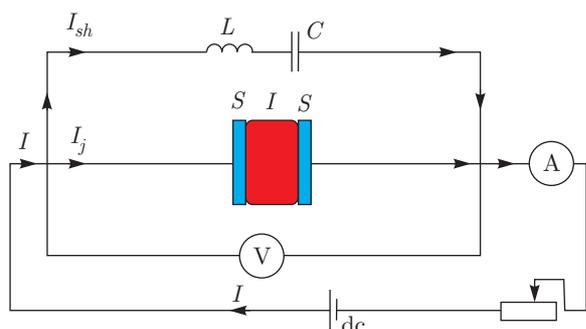


Рис. 1. Джозефсоновский переход, шунтированный индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ ;  $S$  и  $I$  — соответственно сверхпроводящий и диэлектрический слой

сверхпроводящая цепь, включающая джозефсоновские переходы, связанные с резонатором [18–20], как показано ниже на рис. 1, представляет наглядный пример биритмической системы, которая также интересна для различных приложений. В случае, когда связь между переходами обусловлена резонатором [21–23], т. е. в динамику вовлечены все переходы системы, для их синхронизации существенно иметь в резонаторе большой ток. При этом состояние с большим током сосуществует с состоянием при малой мощности. Эти два состояния характеризуются двумя различными частотами, что является существенной особенностью биритмичности: сосуществование двух аттракторов характеризуется двумя различными амплитудами и частотами. В зависимости от начальных условий в системе могут возникать осцилляции с двумя разными периодами. Поскольку аттракторы локально стабильны, система будет оставаться при одной частоте, зависящей от выбора начального состояния. Таким образом, система демонстрирует гистерезисное поведение: проявляющаяся частота зависит от начальных условий. При наличии шума система может переключаться от одного аттрактора к другому под влиянием случайного члена [24].

Проявление резонансных особенностей на ВАХ различных систем ДП с резонансным контуром рассматривалось в ряде экспериментальных и теоретических работ (см. [1, 25] и ссылки там). Пик в интенсивности когерентного электромагнитного излучения из двумерной системы джозефсоновских переходов, основанных на  $\text{Nb}/\text{Al}/\text{AlO}_x/\text{Nb}$ , был зафиксирован в работе [26] при синхронизации осцилляций в различных ДП, что вызывалось резонансом джозефсоновских осцилляций с осцилляциями в резонансном контуре. Следует отметить, что рассматриваемая система имеет также широкие пер-

спективы для приложений в квантовой метрологии [5, 27]. Влияние внешнего электромагнитного излучения на шунтированную систему приводит к новым эффектам, когда обусловленная им ступенька Шапиро находится на резонансной ветви. В частности, амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро определяется эффективной частотой, величина которой может существенно изменяться [27].

Большое внимание к джозефсоновским переходам сегодня обусловлено новыми физическими явлениями и различными современными приложениями [28–32]. Устройства, основанные на ДП, используются для регистрации майорановских фермионов, чьи связанные состояния являются топологически защищенными и могут быть использованы для квантовых вычислений. Шунтирование ДП в таких устройствах при наличии внешнего электромагнитного излучения приводит к дополнительным возможностям для управления ими и контролирования их параметров и характеристик. Шунтирование внутренних ДП в ВТСП, которые интенсивно исследуются в настоящее время, приводит к синхронизации осцилляций сверхпроводящих токов в этой системе и увеличению мощности перестраиваемого когерентного электромагнитного излучения в терагерцевой области частот [33]. Роль  $LCR$ -шунтирования также важна в связанных джозефсоновских системах [34], при исследовании ступенек Шапиро [35] и связанных стеков [36].

Настоящая работа посвящена исследованию поведения сверхпроводящего тока в ДП, шунтированном  $LC$ -элементами. Нами обнаружено, что сверхпроводящий ток в состоянии, соответствующем резонансной ветви, зависит от резонансной частоты. Значения максимального тока определяются близостью точки окончания  $rc$ -ветви к критическому току. С уменьшением параметра диссипации  $\beta$  максимум тока смещается к большим резонансным частотам, а его ширина возрастает.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы описываем модель и приводим систему уравнений, которая используется в наших численных расчетах. В разд. 3 мы представляем результаты расчета, анализ ВАХ при различных значениях параметров шунта и демонстрируем общие свойства  $rc$ -ветви и поведение сверхпроводящего тока. Изменение резонансной частоты и зависимость максимального сверхпроводящего тока от параметра диссипации обсуждаются в разд. 4. Мы представляем зависимость  $rc$ -ветви при различных значениях резонансной частоты и показываем зависимость максимального сверхпроводящего тока от ее величины. В

разд. 5 мы анализируем точку окончания  $rc$ -ветви при фиксированной частоте резонансного контура. Анализ зависимости сверхпроводящего тока от резонансной частоты обсуждается в разд. 6. В заключении приводятся выводы работы.

## 2. МОДЕЛЬ И МЕТОД

Основные особенности шунтированных систем могут быть описаны на основании электрической схемы, представленной на рис. 1. Чтобы подчеркнуть главные эффекты шунтирующего резонатора, мы здесь не учитываем шунтирующего сопротивления.

Полный ток через исследуемую систему есть сумма токов через ДП,  $I_j$ , и шунтирующие элементы,  $I_{sh}$ . Для описания рассматриваемой системы используем обычную RCSJ-модель, которая отражает ее главные особенности и хорошо согласуется с экспериментальными результатами [1]. В рамках RCSJ-модели [1] ток  $I_j$  определяется выражением

$$I_j = C_j \frac{dV}{dt} + I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где  $C_j$ ,  $R_j$  и  $I_c$  — соответственно емкость, сопротивление и критический ток ДП, а  $V$  и  $\varphi$  — напряжение и калибровочно-инвариантная разность фаз.

Ток  $I_{sh}$ , протекающий через шунтирующие элементы, определяется выражением

$$I_{sh} = C \frac{\partial u_c}{\partial t},$$

где  $C$  и  $u_c$  — емкость и напряжение, возникающее на шунтирующем конденсаторе. При параллельном соединении напряжение на ДП равно сумме напряжений на шунтирующих элементах, т. е.

$$V = LC \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + u_c.$$

В нормированных единицах соответствующая система уравнений записывается в виде [37]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - C \frac{\partial u_c}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} (V - u_c). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь базовый ток  $I$  нормирован на критический ток  $I_c$ , время — на обратную плазменную частоту  $\omega_p = \sqrt{2eI_c/C_j\hbar}$ , напряжения  $V$  и  $u_c$  — на

$V_0 = \hbar\omega_p/2e$ , шунтирующая емкость  $C$  — на емкость  $C_j$  ДП, а индуктивность  $L$  — на  $(C_j\omega_p^2)^{-1}$ . В системе уравнений (1) введен параметр диссипации

$$\beta = \frac{1}{R_j} \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c C_j}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_c}},$$

где  $\beta_c$  — параметр Маккамбера.

В данной работе мы представляем результаты для ДП с малой диссипацией  $\beta = 0.05$ – $0.20$ . Отметим, что ДП вместе с шунтирующими его емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  образует параллельный резонансный контур с собственной частотой [1]

$$\omega_{rc} = \sqrt{\frac{1+C}{LC}}, \quad (2)$$

а также последовательный резонансный контур с частотой

$$\omega_{rc}^s = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (3)$$

В этой работе мы концентрируемся на параллельном резонансе. Некоторые детали модели и методов расчета представлены в работах [1, 36]. Мы исследуем в основном сверхпроводящий ток

$$I_s = \langle \sin \varphi \rangle, \quad (4)$$

т. е. средний сверхпроводящий ток, текущий через нелинейный джозефсоновский элемент. Этот ток дает вклад в полный базовый ток вместе с током через сопротивление (среднее значение тока смещения, очевидно, равно нулю). Отметим, что вклад тока через джозефсоновский элемент является существенным для синхронизации перехода с внешним воздействием, как следует из стандартного подхода с помощью бесселевских функций [39, 40] или метода баланса мощностей [41]. Фактически, в обоих подходах ступенька Шапиро определяется постоянным током, который течет через ДП. Этот ток (мощность в методе баланса мощностей) может быть либо положительным, либо отрицательным (в зависимости от произвольной фазы), и чем больше его вклад, тем больше ширина ступеньки Шапиро. Отметим также, что в системе ДП постоянный ток возбуждает осцилляции, ответственные за связь между переходами [42].

## 3. РЕЗОНАНСНАЯ ВЕТЬ И СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ТОК

Как мы упоминали во Введении, специфической особенностью ВАХ шунтированного ДП является

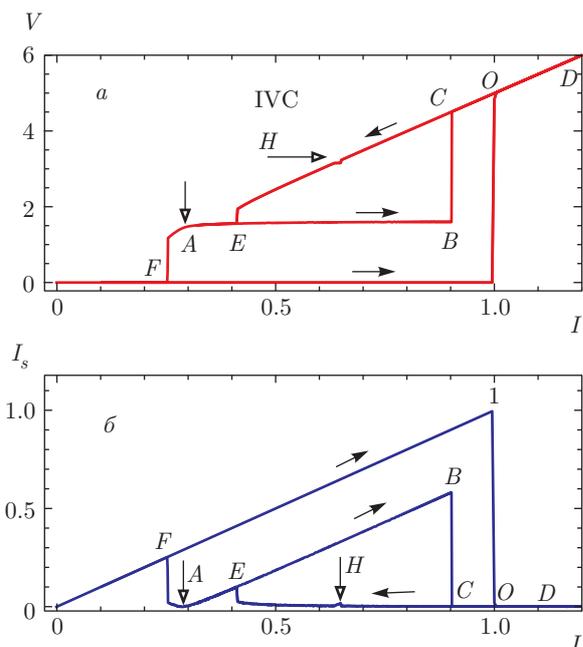


Рис. 2. а)  $rc$ -ветвь  $AB$  на ВАХ ДП с шунтирующими элементами  $L = 1.9531, C = 0.25$ , полученная при свипе базового тока вдоль пути  $01ODEAEBCDEF0$ ; б) зависимость среднего сверхпроводящего тока  $I_s = \langle \sin \varphi \rangle$ , полученная при том же свипе базового тока

резонансная ветвь. Рисунок 2а демонстрирует процедуру изменения базового тока вдоль ВАХ для перехода к резонансной ветви. Эта процедура наиболее близко воспроизводит экспериментальную ситуацию. Для определения ВАХ система уравнений (1) решается численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Ее решение при фиксированном значении внешнего тока  $I$  определяет разность фаз  $\varphi(t)$  и напряжение  $V(t)$  как функции времени в определенном заданном интервале. Методика расчета ВАХ соответствует стандартной схеме и изложена в ряде работ [38, 43, 44].

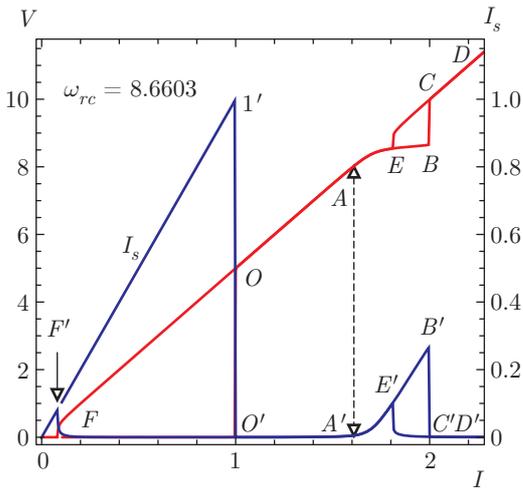
ВАХ ДП с шунтирующими элементами  $L = 1.9531, C = 0.25$ , приводящими к частоте резонансного контура  $\omega_{rc} = 1.6$ , показана на рис. 2а. Она получена на основе системы уравнений (1) при изменении (свипе) базового тока вдоль пути  $01ODEAEBCDEF0$ . В отличие от ВАХ без учета шунтирования, имеющей при  $\beta < 1$  стандартный вид с гистерезисом (см. например, работу [45]) на ВАХ с  $LC$ -шунтированием присутствуют  $rc$ -ветви, обусловленные резонансом джозефсоновских осцилляций с собственными колебаниями резонансного контура,  $\omega_J = \omega_{rc}$ . В случае, представленном на рис. 2а,  $rc$ -ветвью является ветвь  $AB$ . Полая стрелка указывает на ее начало.

Окончание  $rc$ -ветви соответствует напряжению  $V = 1.6$ , что совпадает с собственной частотой образованного резонансного контура, рассчитанной при  $L = 1.9531, C = 0.25$  по формуле (3), и подтверждает, что  $rc$ -ветвь на ВАХ возникает в результате резонанса джозефсоновских осцилляций с собственными колебаниями резонансного контура. При изменении параметров контура, соответствующих уменьшению или увеличению его собственной частоты,  $rc$ -ветвь на ВАХ соответственно опускается или поднимается по напряжению [37].

Чтобы проследить изменение сверхпроводящего тока вдоль ВАХ, мы показываем на рис. 2б зависимость сверхпроводящего тока  $I_s = \langle \sin \varphi \rangle$ , полученную при том же свипе базового тока, представленного на рис. 2а. Соответствующие точки на ВАХ и зависимости  $I_s(I)$  отмечены одинаковыми буквами. На участке ВАХ, соответствующем состоянию с нулевым напряжением, ток  $I_s$  нарастает от нуля до единицы. Когда ДП переходит в резистивное состояние при  $I = 1$ , сверхпроводящий ток скачком уменьшается на 3–4 порядка и далее, вдоль резистивной ветви, постепенно уменьшается до нуля.

На обратном ходе (от  $D$  вниз) ток  $I_s$  опять медленно нарастает, испытывая небольшой скачок в области гармоник  $rc$ -ветви при  $V = 3.2$  (указанной на ВАХ полой стрелкой с буквой  $H$ ), а затем, в области точки  $E$ , где происходит прыжок на  $rc$ -ветвь, существенно подрастает. Если продолжить двигаться вниз по ВАХ, то ток  $I_s$  уменьшается до тех пор, пока не произойдет переход в состояние с  $V = 0$  (точка  $F$ ), где  $I_s$  резко увеличивается. Мы полагаем, что точка  $A$ , где значение  $I_s$  минимально или равно нулю, и есть начало  $rc$ -ветви, т. е.  $AB$  на ВАХ и есть  $rc$ -ветвь. При увеличении базового тока вдоль  $rc$ -ветви ток  $I_s$  линейно возрастает, достигая максимума в точке  $B$ , где  $I_s = 0.52$ .

Аналогичная ситуация наблюдается и при других параметрах резонансного контура. На рис. 3 представлена ВАХ ДП с шунтирующими элементами  $L = 0.015, C = 8$  и соответствующая зависимость сверхпроводящего тока  $I_s = \langle \sin \varphi \rangle$ , полученные при свипе базового тока вдоль пути  $01OBCDCEF0$ . Соответствующие точки на зависимости  $I_s(I)$  отмечены буквами со штрихами. Данные параметры  $LC$ -контура приводят к собственной резонансной частоте  $\omega_{rc} = 8.6603$ . Рисунок 3 также демонстрирует соответствие собственной частоты резонансного контура положению ветви при  $V = 8.6603$ . Таким образом, рис. 3 показывает, что поведение, наблюдаемое на рис. 2, является общим.



**Рис. 3.** ВАХ (жирная линия) ДП с шунтирующими элементами  $C = 8$ ,  $L = 0.015$  вместе с соответствующей зависимостью сверхпроводящего тока  $I_s = \langle \sin \varphi \rangle$  (тонкая линия), полученные при свипе базового тока вдоль пути 010BCDCEFO

Однако, в отличие от предыдущего случая,  $rc$ -ветвь располагается вне гистерезисной области на ВАХ. Ее начало и соответствующая точка на зависимости  $I_s(I)$  указаны двойной стрелкой. Здесь имеется также другая существенная разница: максимальный сверхпроводящий ток в конце  $rc$ -ветви значительно меньше его значения в предыдущем случае и составляет  $I_s = 0.27$  (точка  $B'$ ) в сравнении с  $I_s = 0.52$  при  $\omega_{rc} = 1.6$ . Возникает вопрос: от чего зависит максимальная величина  $I_s$  на  $rc$ -ветви, достигаемая в точке ее окончания? Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в следующем разделе.

**4.  $rc$ -ВЕТВИ ПРИ РАЗНОЙ ДИССИПАЦИИ И ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКА ОТ ПАРАМЕТРА ДИССИПАЦИИ**

В этом разделе мы приводим результаты детальных исследований ВАХ и сверхпроводящего тока в области  $rc$ -ветви при различных значениях резонансной частоты и параметра диссипации  $\beta$ . На рис. 4а представлены  $rc$ -ветви на ВАХ ДП с  $\beta = 0.2$  при значениях резонансной частоты в интервале (1.7, 10). Обратим внимание на тот факт, что длина горизонтального участка  $rc$ -ветви изменяется немонотонным образом при увеличении резонансной частоты: нарастание сменяется сокращением. Аналогичный характер демонстрируют  $rc$ -ветви и при других значениях  $\beta$ . В частности, на рис. 4б, в представлены результаты для  $\beta = 0.1$  и  $\beta = 0.05$ . Во всех случаях реализуется  $rc$ -ветвь с максимальной

длиной. Следует отметить, что изменение частоты осуществлялось за счет изменения индуктивности при фиксированном значении шунтирующей емкости  $C = 0.25$ . Этим обусловлено изменение формы  $rc$ -ветви. Во всех случаях мы наблюдали, что максимум сверхпроводящего тока достигается в точках окончания ветвей (при наибольшем постоянном токе  $I$ ).

Зависимости максимального сверхпроводящего тока, соответствующего  $rc$ -ветви, от резонансной частоты при разных значениях параметра диссипации  $\beta = 0.05, 0.1, 0.2$  представлены на рис. 5а. Каждая точка на этом рисунке соответствует максимальному сверхпроводящему току вдоль ветвей, представленных на рис. 4. Немонотонная зависимость  $I_s^{max}(\omega_{rc})$  связана с тем, что вклад тока  $I_s$  в полный ток возрастает с приближением к  $I_c$ , но сильно уменьшается, когда значение  $I_c$  пройдено.

Все зависимости демонстрируют наличие некоторого предельного значения максимума сверхпроводящего тока в интервале между  $I_s^{max} = 0.581$  и  $I_s^{max} = 0.583$ . В случае  $\beta = 0.2$  величина предельного значения сверхпроводящего тока составляет  $I_s^{max} = 0.5828$ . При  $\beta = 0.1$  и  $\beta = 0.05$  эта величина равна соответственно  $I_s^{max} = 0.5819$  и  $I_s^{max} = 0.5817$ . Уменьшение диссипации (увеличение гистерезиса на ВАХ) приводит к смещению максимума в сторону больших значений  $\omega_{rc}$ . Предельное значение  $I_s^{max}$  на  $rc$ -ветви определяется близостью точки ее окончания  $I_{end}$  к критическому значению  $I_c$ . В рассмотренных случаях предельные максимальные значения  $I_s$  реализуются при  $I_{end} = 0.9227$  в случае  $\beta = 0.2$  и при  $I_{end} = 0.9318$  в случае  $\beta = 0.1$  и  $\beta = 0.05$ .

Отметим, что увеличение базового тока при резонансе происходит за счет сверхпроводящего тока. В частности, как мы можем видеть на рис. 5б, это приращение составляет  $\Delta I \approx 0.58$  при  $\beta = 0.05$ . Полагая, что ток квазичастиц определяется выражением  $I_{qp} = \beta V$ , мы находим, что при резонансе  $V = \omega_{rc} = 7$  его величина равна  $I_{qp} = 0.35$ . Соответственно, сумма  $I_s^{max} + I_{qp}$  равна  $I_{end} = 0.93$ , что находится в согласии с данными, представленными на рис. 4. С увеличением резонансной частоты точка окончания ветви приближается к  $I_c$ , вызывая рост максимального сверхпроводящего тока  $I_s^{max}$ . Аналогично, при дальнейшем увеличении  $\omega_{rc}$ , когда точка окончания ветви удаляется от  $I_c$ , приращение полного тока на  $rc$ -ветви уменьшается, вызывая уменьшение  $I_s^{max}$ .

Чтобы понять влияние диссипации, отметим, что ВАХ при больших диссипациях имеет мень-

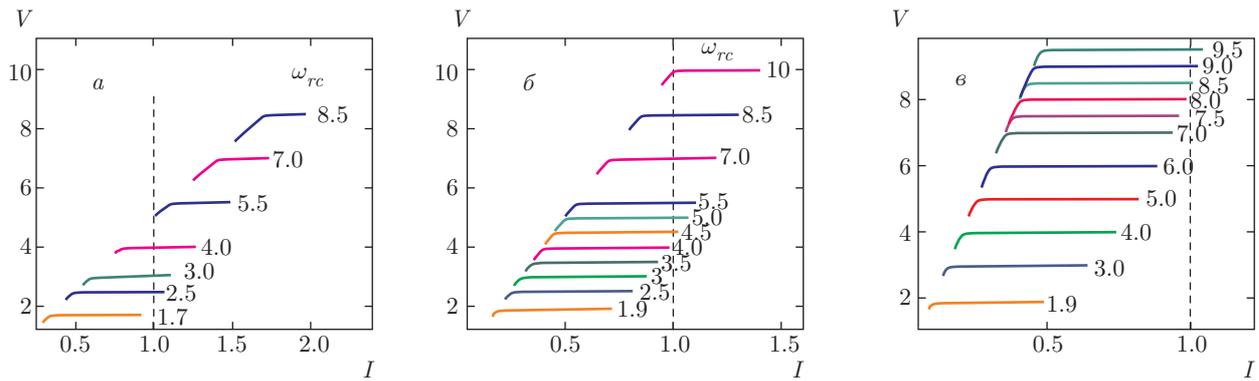


Рис. 4. *r-c*-ветви на ВАХ при различных значениях резонансной частоты  $\omega_{rc}$  и  $\beta = 0.2$  (а),  $0.1$  (б),  $0.05$  (в). Штриховая линия определяет значение базового тока  $I = 1$

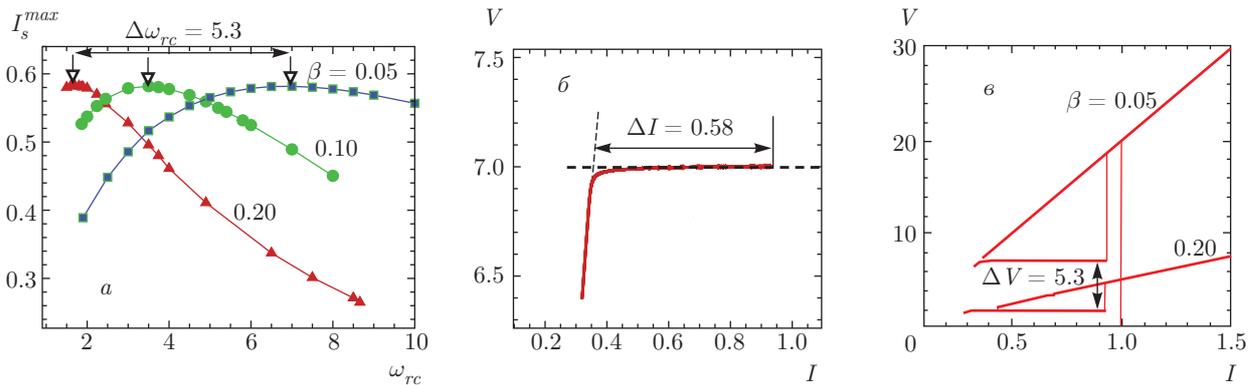


Рис. 5. а) Зависимости максимального сверхпроводящего тока от резонансной частоты при разных значениях параметра диссипации. Квадраты ( $\beta = 0.05$ ), кружки ( $\beta = 0.1$ ) и треугольники ( $\beta = 0.2$ ) указывают значения резонансной частоты, при которой проводились расчеты. б) *r-c*-ветвь при  $\omega_{rc} = 7$  и  $\beta = 0.05$ . в) Части *r-c*-ветвей ВАХ, соответствующие предельным значениям максимального сверхпроводящего тока. Числа указывают значения параметра диссипации

ший наклон, т. е. чем больше  $\beta$ , тем ниже по напряжению располагается резистивная ветвь на ВАХ. Поскольку предельное значение  $I_s^{max}$  реализуется при резонансе вблизи критического тока, когда  $V = \omega_{rc} = (I_{end} - I_s^{max})/\beta$ , естественно, что максимум на зависимости  $I_s^{max}(\omega_{rc})$  при больших  $\beta$  будет наблюдаться при меньших напряжениях и, соответственно, при меньших  $\omega_{rc}$ . В качестве примера на рис. 5в мы показываем части ВАХ при  $\beta = 0.05$  и  $\beta = 0.2$  при резонансах, соответствующих предельным значениям  $I_s^{max}$ , где *r-c*-ветви отстоят по напряжению на величину  $V = 5.3$ , что согласуется с расстоянием между соответствующими максимумами на рис. 5а.

### 5. ТОЧКА ОКОНЧАНИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ

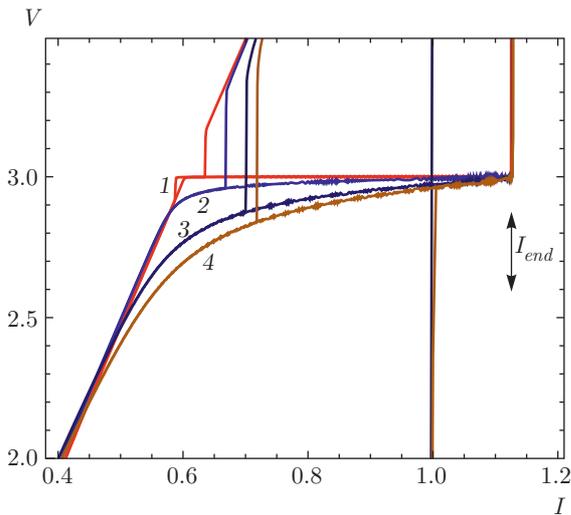
Возникает другой вопрос: от чего зависит длина на *r-c*-ветви? Мы изменяли емкость и индуктив-

ность шунтирующих элементов в широких пределах, оставляя резонансную частоту одной и той же,  $\omega_{rc} = 3.0$ . Значения некоторых использованных параметров приведены на рис. 6. Оказывается, что для фиксированной резонансной частоты точка окончания ветви не меняется при изменении параметров шунтирующих элементов. Однако величина шунтирующих элементов  $L$  и  $C$  влияет на начало *r-c*-ветви и ее характер. При малых  $C$  *r-c*-ветвь представляет практически прямую линию. С ростом  $C$  ветвь становится полой и ее начало затягивается в область меньших токов.

### 6. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ $I_s(\omega_{rc})$

Реактивное сопротивление  $X$  исследуемой системы выражается посредством формулы

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{X_C + X_L} + \frac{1}{X_{C_j}}, \quad (5)$$



**Рис. 6.** Демонстрация независимости точки окончания ветви от параметров шунтирующих элементов для фиксированной резонансной частоты  $\omega_{rc} = 3.0$  и  $\beta = 0.2$ : кривая 1 —  $C = 0.002$ ,  $L = 55.6667$ ; 2 —  $C = 0.2$ ,  $L = 0.6667$ ; 3 —  $C = 2$ ,  $L = 0.1667$ ; 4 —  $C = 20$ ,  $L = 0.1167$

где  $X_C = 1/i\omega C$ ,  $X_L = i\omega L$  и  $X_{C_j} = 1/i\omega C_j$ , так что

$$X = i\omega \frac{1 - \omega^2 LC}{C + C_j - \omega^2 LCC_j}.$$

Отсюда следует, что в системе наблюдаются два типа резонансов: последовательный и параллельный. Последовательный резонанс реализуется, когда реактивное сопротивление равно нулю; в этом случае резонансная частота определяется выражением (3). Эта формула приводит к максимуму переменного тока через шунтированную часть контура и к минимуму переменного напряжения. Случай, когда проводимость равна нулю, соответствует параллельному резонансу с частотой (2), что приводит к максимуму переменного напряжения. Для параллельного резонанса на вершине резонансного пика базовый ток  $I = I_{end}$  есть сумма  $I_s^{max}$  и  $I_{qp}$ , т. е.

$$I_{end} = I_s^{max} + \beta V = I_s^{max} + \beta \omega_{rc}. \tag{6}$$

Таким образом, при фиксированном значении  $I_{end}$  максимальный сверхпроводящий ток определяется величиной  $I_{qp}$  при резонансе. Приближение  $I_s^{max} + \beta \omega_{rc} \simeq I_{end}$  находится в хорошем согласии с результатами численных расчетов. Это уравнение содержит две неизвестные функции базового тока (или  $\omega_{rc}$ ). Чтобы пояснить это, мы привели на рис. 7 рассчитанные зависимости  $I_{end}$  и  $I_s^{max}$  от  $\omega_{rc}$  при различных значениях параметра диссипации  $\beta$

**Таблица.** Коэффициенты уравнения (7)

Коэффици- циент	$\beta = 0.05$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$
$A_0$	0.10061	0.25578	0.50439
$A_1$	0.25557	0.33344	0.32673
$A_2$	-0.03179	-0.05588	-0.06008
$A_3$	0.00214	0.00511	0.00791
$A_4$	-0.00006	-0.00017	-0.00035

вместе с результатами представления величины  $I_{end}$  полиномом четвертой степени,

$$I_{end} = A_0 + A_1 \omega_{rc} + A_2 \omega_{rc}^2 + A_3 \omega_{rc}^3 + A_4 \omega_{rc}^4, \tag{7}$$

с коэффициентами, представленными в таблице.

Используя уравнения (6) и (7), находим  $I_s$ . Рост  $I_{end}$  при малых  $\omega_{rc}$  и уменьшении  $I_s^{max}$  при больших  $\omega_{rc}$  приводит к появлению максимума на зависимости  $I_s^{max}(\omega_{rc})$ .

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что нами исследована фазовая динамика и ВАХ джозефсоновского перехода, шунтированного  $LC$ -элементами, особенности  $rc$ -ветви и соответствующего сверхпроводящего тока при различных значениях резонансной частоты. Показано, что максимальная величина сверхпроводящего тока через джозефсоновский переход на  $rc$ -ветви зависит от резонансной частоты и определяется близостью точки окончания  $rc$ -ветви к значению критического тока. Зависимость максимального сверхпроводящего тока от резонансной частоты при различных параметрах диссипации оказывается общей для широкого интервала значений параметров системы. Сопоставление зависимости сверхпроводящего тока от резонансной частоты полиномиальной формулой оказывается эффективным для практических значений параметров джозефсоновских переходов. Отметим, что полученные результаты могут быть также важны при исследовании системы джозефсоновских переходов, где вклад сверхпроводящего тока является ключевым в процессе синхронизации осцилляций в разных переходах с незначительно отличающимися параметрами.

Авторы благодарят С. Пагано (S. Pagano), К. В. Куликова, В. Корнева, М. Ю. Куприяно-

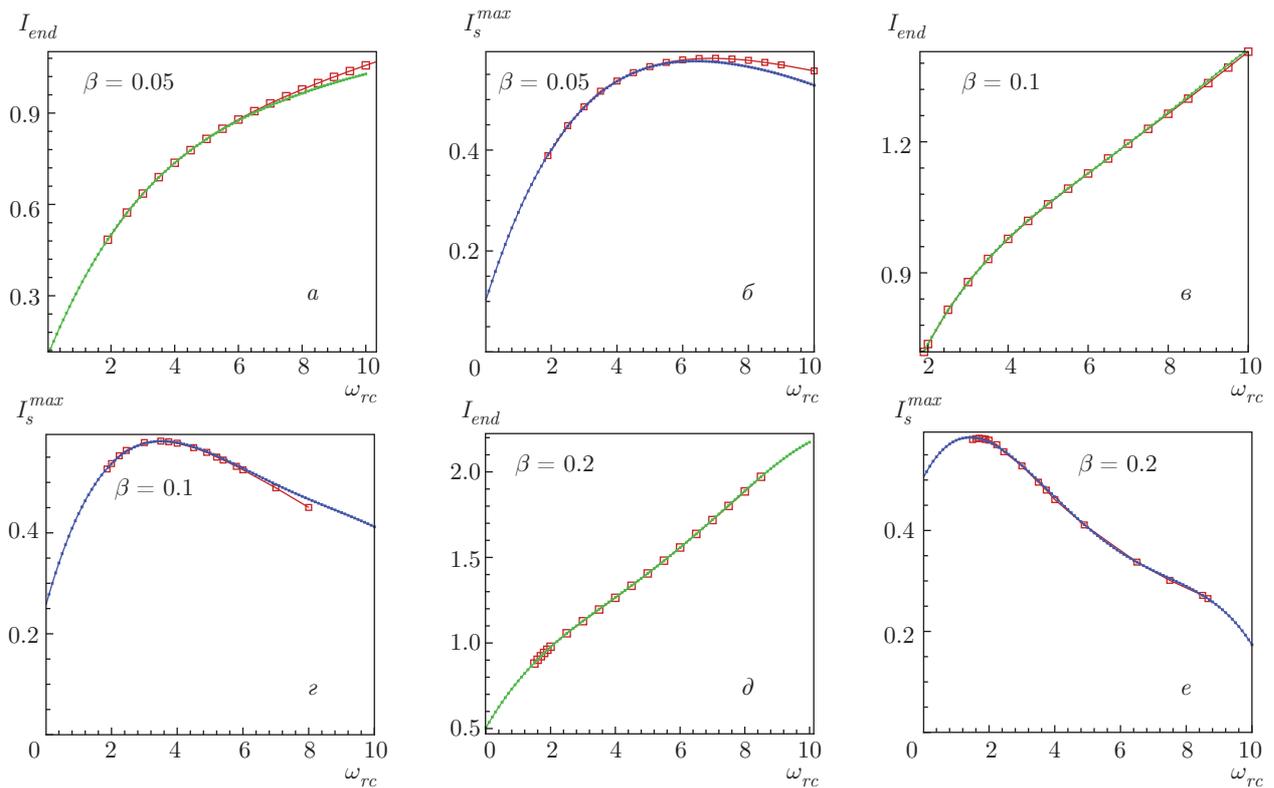


Рис. 7. Расчетные зависимости  $I_{end}$  и  $I_s^{max} = I_{end} - \beta\omega_{rc}$  от  $\omega_{rc}$  (кривые с точками) при различных параметрах диссипации вместе с результатами сопоставления по формуле (7) — сплошные кривые

ва и В. П. Кошелеца за полезную дискуссию. Один из авторов (Ю. М. Ш.) выражает благодарность проф. С. Пагано за гостеприимство в период его визита в Италию, где была выполнена часть данной работы. Исследование проведено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 15-51-61011\_Египет, 15-29-01217 и 16-52-45011\_Индия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach, Philadelphia (1986).
2. M. Tachiki, K. Ivanovic, K. Kadowaki, and T. Koyama, *Phys. Rev. B* **83**, 014508 (2011).
3. N. Falsig Pedersen, M. R. Samuelsen, and K. Saermark, *J. Appl. Phys.* **44**, 5120 (1973).
4. N. F. Pedersen, G. Filatrella, V. Pierro, and M. P. Srensen, *Physica C* **503**, 178 (2014).
5. A. M. Hriscu and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 097002 (2013).
6. S. Z. Lin, X. Hu, and L. Bulaevskii, *Phys. Rev. B* **84**, 104501 (2011).
7. O. Decroly and A. Goldbeter, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **79**, 6917 (1982).
8. M. Morita, K. Iwamoto, and M. Seno, *Phys. Rev. A* **40**, 6592 (1989).
9. O. V. Sosnovtseva, D. Setsinsky, A. Fausboll, and E. Mosekilde, *Phys. Rev. E* **66**, 041901 (2002).
10. H. G. Enjieu Kadji, J. B. Chabi Orou, R. Yamapi, and P. Wofo, *Chaos, Solitons, and Fractals* **32**, 862 (2007).
11. A. Zakharova, T. Vadivasova, V. Anishchenko et al., *Phys. Rev. E* **81**, 011106 (2010).
12. R. Yamapi, G. Filatrella, and M. A. Aziz-Alaoui, *Chaos* **20**, 013114 (2010).
13. P. Ghosh, S. Sen, S. S. Riaz, and D. S. Ray, *Phys. Rev. E* **83**, 036205 (2011).
14. R. Yamapi, G. Filatrella, M. A. Aziz-Alaoui, and H. A. Cerdeira, *Chaos* **22**, 043114 (2012).

15. V. Casagrande and A. S. Mikhailov, *Physica D* **205**, 154 (2005).
16. A. Ventura, D. G. Kirsch, M. E. McLaughlin et al., *Nature (London)* **445**, 661 (2007).
17. H. Gonzalez, H. Arce, and M. R. Guevara, *Phys. Rev. E* **78**, 036217 (2008).
18. P. Hadley, M. R. Beasley, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. B* **38**, 8712 (1988).
19. G. Filatrella, G. Rotoli, N. Gronbech-Jensen et al., *J. Appl. Phys.* **72**, 3179 (1992).
20. L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter et al., *Science* **318**, 1291 (2007).
21. B. Gross, J. Yuan, D. Y. An et al., *Phys. Rev. B* **88**, 014524 (2013).
22. A. Grib, M. Mans, J. Scherbel et al., *Supercond. Sci. Technol.* **19**, 200 (2006).
23. A. Grib, M. Mans, M. Buenfeld et al., *Proc. IEEE 14th Superconductive Electronics Conf.*, Vol. 1, IEEE, Piscataway, NJ (2013).
24. R. Yamapi and G. Filatrella, *Phys. Rev. E* **89**, 052905 (2014).
25. E. Almaas and D. Stroud, *Phys. Rev. B* **65**, 134502 (2002).
26. P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov, and C. J. Lobb, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1963 (1999).
27. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, and P. Seidel, *Europhys. Lett.* **110**, 47001 (2015).
28. L. Fu and C. L. Kane, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096407 (2008).
29. Alicea Jason, *Nature Nanotechnol.* **8**, 623 (2013).
30. L. P. Rokhinson, X. Liu, and J. K. Furdyna, *Nature Phys.* **8**, 795 (2012).
31. F. Wilczek, *Nature* **486**, 195 (2012).
32. R. Avriller and F. Pistolesi, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 037003 (2015).
33. U. Welp, K. Kadowaki, and R. Kleiner, *Nature Photon.* **7**, 702 (2013).
34. Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов, *ЖЭТФ* **142**, 323 (2012).
35. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, and P. Seidel, *Europhys. Lett.* **110**, 47001 (2015).
36. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, A. Plectenik et al., *Eur. Phys. J. Web of Conf.* **108**, 02042 (2016).
37. Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов, К. В. Куликов, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 657 (2012).
38. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, and M. Hamdi-pour, *Lect. Notes Comp. Sci.* **7125**, 234 (2012).
39. R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.* **52**, 3528 (1981).
40. Y. Braiman, E. Ben-Jacob, and Y. Imry, in *SQUID'80*, ed. by H. D. Halhbohn and H. Lübbig, de Gruyter, Berlin (1980), pp. 783–795.
41. G. Filatrella, B. A. Malomed, and R. D. Parmentier, *Phys. Lett. A* **180**, 346 (1993).
42. P. Hadley, M. R. Beasley, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. B* **38**, 8712 (1988).
43. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, and M. Suzuki, *Phys. Rev. B* **78**, 134521 (2008).
44. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, and N. F. Pedersen, *Phys. Rev. B* **75**, 104508 (2007).
45. W. Buckel and R. Kleiner, *Superconductivity: Fundamentals and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim (2004).