

РЕЗОНАНСЫ В КОМПТОНОПОДОБНЫХ ПРОЦЕССАХ РАССЕЯНИЯ ВО ВНЕШНЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Д. А. Румянцев*, Д. М. Шленев**, А. А. Ярков***

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Ярославль, Россия

Поступила в редакцию 3 февраля 2017 г.

Рассмотрены возможные резонансные эффекты в древесных двухвершинных амплитудах для переходов $jf \rightarrow j'f'$ в постоянном однородном магнитном поле и в присутствии замагниченной плазмы, состоящей из заряженных фермионов для различных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов. В качестве приложения полученных результатов исследован процесс рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы, $\gamma e \rightarrow \gamma e$, в области резонанса и вычислен коэффициент поглощения фотона в этой реакции. Получено сечение данного процесса и проведено его сравнение с имеющимися в литературе результатами.

DOI: 10.7868/S0044451017090061

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время является установленным фактом, что наличие магнитного поля в широком классе астрофизических объектов представляет типичную ситуацию для наблюдаемой Вселенной. При этом масштаб индукции магнитного поля может варьироваться в очень широких пределах: от крупномасштабных (~ 100 кпк) межгалактических магнитных полей $\sim 10^{-21}$ Гс [1], до полей, реализующихся в сценарии ротационного взрыва сверхновой $\sim 10^{17}$ Гс [2, 3]. При этом особый интерес представляют объекты с полями масштаба так называемого критического значения $B_e = m^2/e \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс¹). К ним, в частности, относятся изолированные нейтронные звезды, включающие в себя радиопульсары и так называемые магнитары, обладающие магнитными полями с индукцией от 10^{12} Гс (радиопульсары) до $4 \cdot 10^{14}$ Гс (магнитары). Недавние наблюдения позволяют, в частности, отождествить некоторые астрофизические объекты, такие как источники мягких повторяющихся

гамма-всплесков (SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (AXP), с магнитарами (для обзора см., например [4]). Согласно наиболее известной в настоящее время модели [5–7] в окрестности таких объектов возможно существование сильного магнитного поля, достигающего величины 10^{15} – 10^{16} Гс.

Анализ спектров излучения радиопульсаров и магнитаров свидетельствует также о наличии электрон-позитронной плазмы в их магнитосферах с концентрацией порядка значения концентрации Голдрайха – Джулиана [8]:

$$n_{GJ} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3} \left(\frac{B}{100 B_e} \right) \left(\frac{10 \text{ с}}{P} \right). \quad (1)$$

Естественно ожидать, что такие экстремальные условия будут оказывать существенное влияние на квантовые процессы, где в конечном или начальном состоянии могут присутствовать как электрически заряженные, так и электрически нейтральные частицы, например, нейтрино и фотоны. Кроме того, внешняя активная среда может катализировать реакции с участием таких экзотических частиц, как аксионы, фамилонны и т. п., что представляет интерес для поиска новой физики за пределами стандартной модели.

Среди квантовых процессов, свойства которых существенно, а иногда принципиально меняются под воздействием замагниченной среды, особый интерес для астрофизики представляют одно- и двухвер-

* E-mail: rda@uniyar.ac.ru

** E-mail: allen_caleb@rambler.ru

*** E-mail: a12l@mail.ru

¹) В работе используется естественная система единиц, где $c = \hbar = k_B = 1$, m — масса электрона, m_f — масса фермиона, e_f — заряд фермиона, $e > 0$ — элементарный заряд.

шинные процессы. Это обусловлено тем, что с точки зрения влияния микрофизических процессов на макроскопические характеристики астрофизических объектов (например, скорость потери энергии, число рождаемых частиц, коэффициент диффузии и т. п.) существенными будут лишь те реакции, которые дают лидирующие по константам связи вклады.

Исследование одно- и двухвершинных процессов во внешней активной среде (электромагнитном поле и/или плазме) имеет довольно длинную историю. Так, в работе [9] были получены наиболее общие выражения для двухвершинных однопетлевых амплитуд вида $jf \rightarrow j'f'$ в постоянном однородном магнитном поле и скрещенном поле для различных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов. В недавней работе [10] этот результат был обобщен на случай взаимодействия обобщенных токов j и j' с замагниченной плазмой, состоящей из заряженных фермионов f и f' . С другой стороны, подобного обобщения для одновершинных процессов, несмотря на непрекращающиеся исследования [11–16], по-видимому, ранее не проводилось. В настоящей статье мы, в частности, попытаемся заполнить этот пробел. Кроме того, результаты работы [10] можно дополнить, если учесть также возможность проявления резонанса на виртуальном фермионе в процессе $jf \rightarrow j'f'$. Отметим, что резонанс подобного типа для электродинамического процесса с двумя векторными вершинами, $\gamma e \rightarrow \gamma e$, в настоящее время представляет огромный интерес для астрофизических приложений к задаче формирования спектров излучения в магнитосферах нейтронных звезд [17, 18]. В этих работах исследование резонанса в реакции $\gamma e \rightarrow \gamma e$ проводилось в случае конечной ширины резонансных пиков, что представляет собой достаточно громоздкую вычислительную задачу. С другой стороны, использование δ -функциональной аппроксимации пиков может не только значительно упростить вычисления, но и позволяет также рассмотреть резонансы в реакциях общего вида $jf \rightarrow j'f'$.

В настоящей работе мы подробно исследуем двухвершинные процессы $jf \rightarrow j'f'$ в замагниченной среде, в древесном приближении, с учетом возможного резонанса на виртуальном фермионе. В качестве приложения полученных результатов, мы анализируем реакцию резонансного рассеяния фотона на электроны в условиях магнитосферы радиопульсара, вычисляем коэффициент поглощения фотона в данном процессе и проводим сравнение с имеющимися в литературе результатами.

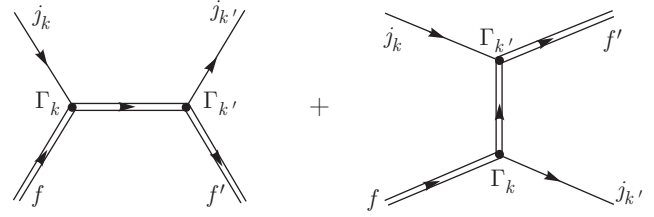


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для реакции $jf \rightarrow j'f'$. Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов, а также на фермионный пропагатор, учтено точно

2. АМПЛИТУДЫ РЕАКЦИЙ ВИДА $jf \rightarrow j'f'$ В ОБЛАСТИ РЕЗОНАНСА

Для анализа обобщенных амплитуд рассеяния $jf \rightarrow j'f'$ будем использовать эффективный локальный лагранжиан взаимодействия токов j с фермионами f в следующей форме:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\psi}_f(x) \Gamma_k \psi_f(x)] J_k(x), \quad (2)$$

где индекс $k = S, P, V, A$ соответствует матрицам Γ_k , $\Gamma_S = 1$, $\Gamma_P = \gamma_5$, $\Gamma_V = \gamma_\alpha$, $\Gamma_A = \gamma_\alpha \gamma_5$; $J_k(x)$ — операторы обобщенных токов ($J_S, J_P, J_{V\alpha}$ или $J_{A\alpha}$), g_k — соответствующие константы взаимодействия и $\psi_f(x)$ — операторы фермионного поля.

Используя лагранжиан (2), можно описать широкий класс взаимодействий. Например, полагая в (2) $k = V$, $g_V = -e_f$, $\Gamma_V j_V = \hat{A}$, где A_α — потенциал поля фотонов, получим лагранжиан электромагнитного взаимодействия,

$$\mathcal{L}_{em}(X) = -e_f [\bar{\Psi}_f(X) \gamma^\mu A_\mu(X) \Psi_f(X)];$$

при подстановках в (2) $k = A$, $g_A = C_f/(2f_a)$, $\Gamma_A J_A = \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu a(x)$ получим лагранжиан взаимодействия фермионов с квантованным полем $a(x)$ легких псевдоскалярных частиц — аксионов:

$$\mathcal{L}_{af}(X) = C_f (2f_a)^{-1} [\bar{\Psi}_f(X) \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_f(X)] \partial_\mu a(X),$$

с константой f_a [19] и модельно зависимым коэффициентом C_f [20] порядка единицы и т. д.

В общем случае, исходя из лагранжиана (2), S -матричный элемент процесса $jf \rightarrow j'f'$, который в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1, может быть представлен в виде

$$S_{k'k}^{s's} = -g_k g_{k'} \int d^4 X d^4 Y \langle J_k(X) J_{k'}^\dagger(Y) \rangle \times \\ \times \left[\bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \Gamma_{k'} \hat{S}(Y, X) \Gamma_k \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + \\ + (J_k, \Gamma_k \leftrightarrow J_{k'}, \Gamma_{k'}). \quad (3)$$

Здесь $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$ и $p'^\mu = (E'_{\ell'}, \mathbf{p}')$ — четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермионов, находящихся на уровнях Ландау ℓ и ℓ' соответственно, $\Psi_{p,\ell}^s(X)$ — волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля, s и s' обозначают поляризационные состояния соответственно начального и конечного фермионов, токи между угловыми скобками обозначают матричный элемент между соответствующими начальным и конечным состояниями,

$$\langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle = j_k(X) j_{k'}(Y), \quad X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3),$$

$$Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3).$$

Токи $j_k(X)$ и $j_{k'}(Y)$, в свою очередь, могут быть представлены в виде плосковолновых решений с амплитудами $j_k(q)$ и $j'_{k'}(q')$ следующим образом:

$$j_k(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} j_k(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \quad (4)$$

$$j_{k'}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} j'_{k'}(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \quad (5)$$

где $V = L_x L_y L_z$ — нормировочный объем.

Существует несколько возможных способов построения волновых функций фермионов в присутствии внешнего магнитного поля из уравнения Дирака (см., например, [21–27], а также [13, 28]). В большинстве случаев эти решения представлены в виде, когда две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной $1/2$ и $-1/2$.

Однако при расчете конкретных характеристик (сечений, ширин, коэффициентов поглощения и т. д.) процессов с двумя и более вершинами во внешнем магнитном поле стандартным методом, включающим возведение в квадрат модуля амплитуды с учетом вклада всех диаграмм, суммирование и усреднение по поляризационным состояниям фермионов, а также вычисление следов от произведений биспиноров и матриц Дирака, представляет значительные вычислительные сложности. Поэтому оказывается удобным найти парциальные вклады в амплитуду от различных поляризационных состояний фермионов для каждой диаграммы в отдельности непосредственным перемножением биспиноров и матриц Дирака. Если при этом использовать волновые функции фермионов с фиксированной проекцией спина, вычисленные парциальные вклады в амплитуду не будут обладать лоренц-инвариантной

структурой при преобразованиях вдоль магнитного поля. Инвариантом будет только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по поляризации фермионов.

По этой причине оказывается целесообразным использовать решения уравнения Дирака, являющиеся собственными функциями для ковариантного оператора $\hat{\mu}_z$. Его можно получить непосредственно из введенного в работе [23] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda), \quad (6)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$, $P^\lambda = i\partial^\lambda + e_f A^\lambda = (i\partial_0 + e_f A_0, -i\nabla + e_f \mathbf{A})$ — оператор обобщенного 4-импульса с 4-потенциалом внешнего магнитного поля A^λ . Заметим, что в работе [23] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров ψ^\dagger и ψ , тогда как в современной литературе (см., например, [29]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\bar{\psi}$ и ψ .

При учете того, что в представлении Шредингера уравнение Дирака имеет вид $i\partial_0\psi = H\psi$, где $H = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}) + m_f \gamma_0 - eA_0$ — гамильтониан Дирака, из пространственных компонент $F_{\mu\nu 0}$ оператора (6) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0}, \quad (7)$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (7) имеет смысл оператора поляризации [23, 24]. Его можно представить в виде

$$\hat{\mu} = m_f \boldsymbol{\Sigma} - i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\mathbf{P}}], \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \gamma_5$ — трехмерный оператор спина.

Нетрудно показать, что компоненты оператора (8) коммутируют с гамильтонианом, т. е. H и μ_z имеют общие собственные функции. В нерелятивистском пределе оператор (8), будучи приведенным к виду $\hat{\mu}/m_f^2$, переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [30], который имеет явную физическую интерпретацию.

Следовательно, мы можем построить волновые функции фермионов как собственные функции оператора $\hat{\mu}_z$ [23, 24]:

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z - i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z, \quad (9)$$

где $\mathbf{P} = -i\nabla + e_f \mathbf{A}$.

Такие решения дают возможность построить парциальные амплитуды, которые с точностью до

одинаковой для обеих диаграмм комплексной фазы будут обладать явной лоренц-инвариантностью.

Мы используем систему отсчета, где магнитное поле направлено вдоль оси z , и калибровку Ландау, в которой 4-потенциал имеет вид $A^\lambda = (0, 0, xB, 0)$. Удобно использовать следующее обозначение $\beta = |e_f|B$ и ввести знак заряда фермиона как $\eta = e_f/|e_f|$. В этом случае собственные функции оператора $\hat{\mu}_z$ имеют вид

$$\Psi_{p,\ell}^s(X) = \frac{\exp\{-i(E_\ell X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)\} U_\ell^s(\xi)}{\sqrt{4E_\ell M_\ell (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) L_y L_z}}, \quad (10)$$

$$E_\ell = \sqrt{M_\ell^2 + p_z^2}, \quad M_\ell = \sqrt{m_f^2 + 2\beta\ell}, \quad (11)$$

и являются решениями уравнения

$$\hat{\mu}_z \Psi_{p,\ell}^s(X) = s M_\ell \Psi_{p,\ell}^s(X), \quad s = \pm 1. \quad (12)$$

Удобно представить биспиноры $U_\ell^s(\xi)$ в виде разложения по решениям для положительного и отрицательного зарядов фермиона следующим образом:

$$U_\ell^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{\ell,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{\ell,+}^s(\xi). \quad (13)$$

Здесь

$$U_{\ell,-}^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$U_{\ell,-}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$U_{\ell,+}^-(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$U_{\ell,+}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$V_\ell(\xi)$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) — нормированные функции гармонического осциллятора, которые выражаются через полиномы Эрмита $H_\ell(\xi)$ [31] как

$$V_\ell(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^\ell \ell! \sqrt{\pi}}} H_\ell(\xi), \quad (18)$$

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta} \left(X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right).$$

Для дальнейших вычислений удобно также ввести волновые функции $\phi_{p,\ell}^s(X_1)$ (индекс p обозначает совокупность компонент импульса фермиона, p_0, p_y, p_z), связанные с $U_\ell^s(\xi)$ следующим образом:

$$\phi_{p,\ell}^s(X_1) = \frac{U_\ell^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_\ell(E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)}}. \quad (19)$$

Для анализа возможных резонансных эффектов в процессах $jj \rightarrow j'j'$ будем использовать пропагатор фермиона в виде суммы по уровням Ландау [28, 32]. Его удобно представить в следующем виде:

$$\hat{S}(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n(X, X'), \quad (20)$$

где вклад n -го уровня Ландау может быть получен из решений уравнения Дирака (10) и записан в форме

$$\hat{S}_n(X, X') = \sum_{s=\pm 1} \hat{S}_n^s(X, X'), \quad (21)$$

$$\hat{S}_n^s(X, X') = \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \times \frac{\exp\{-i(p(X - X'))_{\parallel} + ip_y(X_2 - X'_2)\}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_{\Sigma}^s(p) + i\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)} \times \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X'_1). \quad (22)$$

Здесь и далее четырехмерные векторы с индексами \perp и \parallel относятся соответственно к подпространствам Евклида $\{1, 2\}$ и Минковского $\{0, 3\}$. Для произвольных четырехмерных векторов a_μ, b_μ имеем

$$a_{\perp}^\mu = (0, a_1, a_2, 0), \quad a_{\parallel}^\mu = (a_0, 0, 0, a_3), \\ (ab)_{\perp} = (a\Lambda b) = a_1 b_1 + a_2 b_2, \\ (ab)_{\parallel} = (a\tilde{\Lambda}b) = a_0 b_0 - a_3 b_3,$$

где матрицы $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$, $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}$ построены из приведенного к безразмерному виду тензора внешнего магнитного поля, $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$, и дуального ему тензора $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}/2$. Матрицы $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ связаны соотношением

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

и играют роль метрических тензоров соответственно в перпендикулярном (\perp) и параллельном (\parallel) подпространствах.

Возникающие в знаменателе пропагатора (22) действительная $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ и мнимая $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ части собственного значения массового оператора фермиона, соответствующие поляризованному состоянию s , есть результат вычисления радиационных поправок к массе фермиона в замагниченной плазме. В частности, мнимая часть $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ может быть получена из результатов работ [33, 34] и представлена в следующем виде:

$$\mathcal{I}_\Sigma^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (23)$$

где Γ_n^s — полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии s и занимающего n -й уровень Ландау.

Действительная часть массового оператора $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ определяет изменение (по сравнению с вакуумным) закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. Однако, как показывает анализ [13, 25], в магнитных полях, характерных для большинства известных астрофизических объектов ($B \lesssim 10^{16}$ Гс), поправка к массе фермиона, обусловленная вкладом $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$, оказывается несущественной.

С учетом этих замечаний, подставляя решения (10), фурье-образы токов (4), пропагатор (20)–(22) в (3) и интегрируя по $dX_0 dX_2 dX_3$ и $dY_0 dY_2 dY_3$, матричный элемент можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{k'k}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0 V \cdot 2q'_0 V \cdot 2E_\ell L_y L_z \cdot 2E_{\ell'} L_y L_z}} \times \mathcal{M}_{k'k}^{s's}, \quad (24)$$

где введена амплитуда

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k}^{s's} &\approx i g_k g_{k'} j_{k'}'(q') j_k(q) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} \int dX_1 dY_1 \exp\{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x\} \times \\ &\times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_\parallel^2 - M_n^2 + i\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(P)} + \\ &+ (j_k(q), \Gamma_k, P, q \leftrightarrow j_{k'}'(q'), \Gamma_{k'}, P', -q'), \end{aligned} \quad (25)$$

а также $P_\alpha = (p + q)_\alpha$, $P'_\alpha = (p - q')_\alpha$, $\alpha = 0, 2, 3$.

Анализ амплитуды (25) позволяет выделить две возможные ситуации.

1. При $\ell, \ell' \geq n$ действительная часть знаменателя $P_\parallel^2 - M_n^2$ в (25) не обращается в нуль, что указывает на невозможность реализации резонанса на виртуальном фермионе. Этот случай был проанализирован в работе [10], где были получены наборы амплитуд $\mathcal{M}_{k'k}^{s's}$ для всевозможных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов в области вне резонанса.

2. Если $\ell, \ell' < n$, то существуют решения уравнения $P_\parallel^2 - M_n^2 = 0$, т. е. виртуальный фермион становится реальным с определенным законом дисперсии и имеет место резонанс на виртуальном фермионе. При этом в случае малости $\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(P)$ по сравнению с действительной частью везде, кроме точки резонанса, основной вклад в амплитуду (25) для узкого резонансного пика будет давать только первая диаграмма на рис. 1.

Покажем, что в приближении узкого резонансного пика квадрат \mathcal{S} -матричного элемента процесса перехода $jf \rightarrow j'f'$ фермиона факторизуется произведением квадратов \mathcal{S} -матричных элементов перехода фермиона из начального состояния в промежуточное и из промежуточного состояния в конечное соответственно.

Действительно, квадрат \mathcal{S} -матричного элемента, просуммированный по поляризованным состояниям начального и конечного фермионов, может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} &= \\ &= \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x \cdot 2q'_0 V \cdot 2E_\ell L_y L_z \cdot 2E_{\ell'} L_y L_z} \times \\ &\times |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где τ — время взаимодействия,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 &= \sum_{s''=\pm 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int dX_1 dY_1 \times \right. \\ &\times \left. \frac{\bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1)}{P_\parallel^2 - M_n^2 + i\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(P)} \right|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

— соответствующие парциальные амплитуды. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) &\equiv g_{k'} \bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) j_{k'}'(q') \Gamma_{k'} \exp\{iY_1 q'_x\}, \\ \phi_{jf}^s(X_1) &\equiv g_k j_k(q) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1) \exp\{-iX_1 q_x\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Предполагая, что основной вклад в амплитуду будут давать области энергий вблизи резонансов, с учетом (23) мы можем приближенно заменить соответствующую часть уравнения (27) δ -функцией:

$$|\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 \simeq \sum_{s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1) \right|^2. \quad (29)$$

С учетом (29) квадрат \mathcal{S} -матричного элемента процесса $jf \rightarrow j'f'$ факторизуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \\ &= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x \cdot 2q'_0 V \cdot 2E_\ell L_y L_z \cdot 2E_{\ell'} L_y L_z} \times \\ & \times \int \frac{dp''_y dp''_z}{(2E''_n)^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') \times \\ & \times |\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством δ -функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E''_n} \delta(P_0 - E''_n), \quad (31)$$

где $E''_n = \sqrt{p''^2 + M_n^2}$.

Нетрудно видеть, что теперь уравнение (30) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} &= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp''_y dp''_z}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \times \\ & \times \frac{|\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2}{\tau}. \quad (32) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} &= \\ &= \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V \cdot 2E_\ell L_y L_z \cdot 2E''_n L_y L_z}} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} \quad (33) \end{aligned}$$

— \mathcal{S} -матричный элемент перехода некоторого начального состояния jf в фермион с энергией E''_n , импульсами p''_y, p''_z и поляризационным состоянием s'' , находящийся на уровне Ландау n с соответствующей амплитудой $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} &= \frac{\exp\{-iq_x(p_y + p''_y)/(2\beta)\}}{\sqrt{M_\ell M_n(M_\ell + m)(M_n + m)}} \times \\ & \times \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_k^{s''s}, \quad (34) \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$ — \mathcal{S} -матричный элемент перехода фермиона из состояния с $E''_n, p''_y, p''_z, s'', n$ в некоторое конечное состояние $j'f'$ с соответствующей амплитудой $\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$, причем $\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''} = \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}(q \rightarrow q', E_\ell \rightarrow E_{\ell'})$.

Основная часть задачи состоит в вычислении величин $\mathcal{T}_k^{s''s}$, которые выражаются через следующие лоренц-коварианты и инварианты в подпространстве $\{0, 3\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1\alpha} &= \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \times \\ & \times \{M_\ell(\tilde{\Lambda}p'')_\alpha + M_n(\tilde{\Lambda}p)_\alpha\}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2\alpha} &= \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \times \\ & \times \{M_\ell(\tilde{\varphi}p'')_\alpha + M_n(\tilde{\varphi}p)_\alpha\}, \quad (36) \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2[(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n]}, \quad (37)$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} (p\tilde{\varphi}p''). \quad (38)$$

При вычислениях мы воспользовались следующим интегралом [31]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dZ \exp(-Z^2) \times \\ & \times H_n \left(Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) H_\ell \left(Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) = \\ & = 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} \times \\ & \times \exp \frac{q_\perp^2}{4\beta} I_{n,\ell} \left(\frac{q_\perp^2}{2\beta} \right), \quad (39) \end{aligned}$$

где для $n \geq \ell$

$$\begin{aligned} I_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \quad (40) \\ I_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} I_{n,\ell}(x), \end{aligned}$$

и $L_n^k(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра [31].

Далее будем использовать обозначение $I_{n,\ell} \equiv I_{n,\ell}(q_\perp^2/(2\beta))$ и для определенности рассматривать отрицательно заряженные фермионы, для которых $\eta = -1$. В Приложении представлен полный набор величин $\mathcal{T}_k^{s''s}$ для jf -взаимодействия вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов.

3. РЕЗОНАНСНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим процесс $\gamma e \rightarrow \gamma e$ рассеяния фотона на электронах замагниченной среды для энергий начального фотона, близких к области резонанса. Будем вычислять коэффициент поглощения фотона в реакции $\gamma e \rightarrow \gamma e$, где начальный и конечный электроны могут находиться на уровнях Ландау ℓ и ℓ' соответственно, а виртуальный электрон может занимать уровень n . Определяя коэффициент поглощения согласно работам [35, 36], получим

$$W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{E_\ell} \times \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} (1 - f_{E_{\ell'}}) \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \times \sum_{s, s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{VV}^{s' s}|^2}{\tau}. \quad (41)$$

Здесь f_{E_ℓ} ($f_{E_{\ell'}}$) — равновесные функции распределения начальных (конечных) электронов, $f_{E_\ell} = \{\exp[(E_\ell - \mu)/T] + 1\}^{-1}$, T — температура, μ — химический потенциал электронного газа, $f_{\omega'} = [\exp(\omega'/T) - 1]^{-1}$ — равновесная функция распределения конечных фотонов в системе покоя плазмы, $\mathcal{S}_{VV}^{s' s}$ — \mathcal{S} -матричный элемент процесса $\gamma e \rightarrow \gamma e$. Он может быть получен из (24) заменой $m_f = m$, $g_V = e > 0$, $j_{V\alpha} = \varepsilon_\alpha(q)$, $j'_{V\alpha} = \varepsilon_\alpha^*(q')$. $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ и $q'^\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$ — 4-векторы соответственно начального и конечного фотонов, $\varepsilon_\alpha(q)$ и $\varepsilon_\alpha(q')$ — их векторы поляризации. Анализ дисперсионных свойств фотонов в условиях магнитосфер радиопульсаров и магнитаров показывает, что фотон в таких условиях может иметь два поляризационных состояния, определяемых векторами [18, 35]²⁾

$$\varepsilon_\alpha^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}. \quad (42)$$

Предполагая, что основной вклад в коэффициент поглощения фотона будут давать области резонансов, с учетом (32) перепишем (41) в виде

$$W_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow \gamma^{(\lambda')} e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times f_{E_\ell} \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} (1 - f_{E_{\ell'}}) \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \times \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s'' s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma^{(\lambda')}}^{s' s''}|^2}{\tau}, \quad (43)$$

где $\lambda, \lambda' = 1, 2$ и связь $\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s'' s}$ с соответствующей амплитудой определяется формулой (33), в которой $jf \rightarrow e\ell\gamma^{(\lambda)}$, $(n, s'') \rightarrow e_n$.

С другой стороны, согласно [37] полную ширину изменения состояния электрона $\Gamma_n^{s''}$ можно представить в виде суммы ширин поглощения $\Gamma_n^{(abs) s''}$ и рождения $\Gamma_n^{(cr) s''}$ электрона следующим образом:

$$\Gamma_n^{s''} = \Gamma_n^{(abs) s''} + \Gamma_n^{(cr) s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma}^{(abs) s''} \left[1 + \exp\left\{-\frac{E_n'' - \mu}{T}\right\} \right], \quad (44)$$

где введена ширина поглощения электрона в процессе $e_n \rightarrow e\ell'\gamma$:

$$\Gamma_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma}^{(abs) s''} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} (1 - f_{E_{\ell'}}) \times \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma^{(\lambda')}}^{s' s''}|^2}{\tau}. \quad (45)$$

Подставляя (44) в (43) с учетом (45) и суммируя по поляризациям конечных фотонов, получим

$$W_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow \gamma e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s, s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{E_\ell} \times \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} (1 - f_{E_n''}) \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s'' s}|^2}{\tau}. \quad (46)$$

Интегрируя это выражение с учетом формул (60)–(63) из Приложения, получим следующие парциальные вклады в коэффициент поглощения:

$$W_{\gamma^{(1)} e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_{E_\ell}^\epsilon (1 - f_{E_\ell^\epsilon + \omega})}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2](I_{n, \ell-1}^2 + I_{n-1, \ell}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n} I_{n, \ell-1} I_{n-1, \ell} \right\}, \quad (47)$$

²⁾ Обозначения векторов поляризации фотонов индексами 1 и 2 соответствуют X- и O-модам работы [18].

$$W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_{E_\ell^\epsilon}(1-f_{E_\ell^\epsilon+\omega})}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \left\{ \left[\frac{(2\beta(n-\ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n+\ell) - 4m^2 \right] \times (I_{n,\ell}^2 + I_{n-1,\ell-1}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n} I_{n,\ell} I_{n-1,\ell-1} \right\}, \quad (48)$$

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[\omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right].$$

В (47) и (48) нижний предел суммирования по n определяется из закона сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left\lceil \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell \sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta} \right\rceil, \quad (49)$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

В недавней работе [18] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях $B \sim 10^{12}-10^{15}$ Гс, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров, без δ -функциональной аппроксимации резонансных пиков. Поэтому представляет интерес провести сравнительный анализ полученных нами результатов с соответствующими результатами работы [18]. Исходя из (46) и следуя [18], введем сечение процесса $\gamma e \rightarrow \gamma e$, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения f_{E_ℓ} при $\mu = 0$, следующим образом:

$$\sigma_\lambda^* = \frac{1}{N_e} \int \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \quad (50)$$

где $j = |(p\tilde{\varphi}q)|/(E\omega V)$ — плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве,

$$N_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_{E_\ell} \quad (51)$$

— концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Кроме того, для параметров поля и плазмы, характерных для магнитосфер радиопульсаров [8], мы можем пренебречь изменением (по сравнению с немагнитиченным вакуумом) дисперсионных свойств фотонов, положив $k_z = \omega \sin \theta$, где θ —

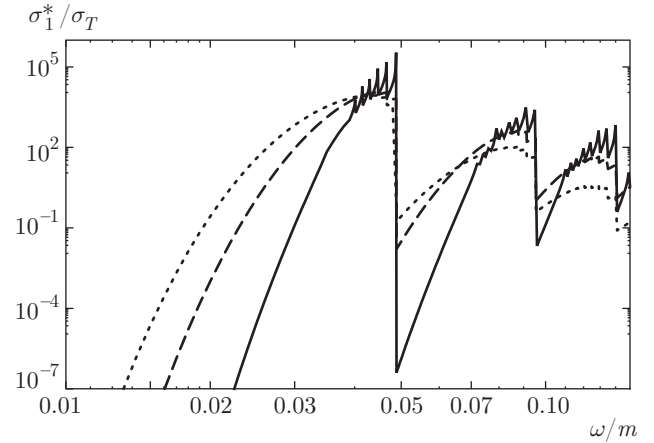


Рис. 2. Сечение (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$, в сильном магнитном поле $B = 5 \cdot 10^{12}$ Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения f_{E_ℓ} при $T = 20$ кэВ и $\mu = 0$, как функция энергии (в единицах массы электрона) фотона для различных значений углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля: $\theta = 90^\circ$ (сплошная кривая), 60° (штриховая кривая), 30° (пунктирная кривая)

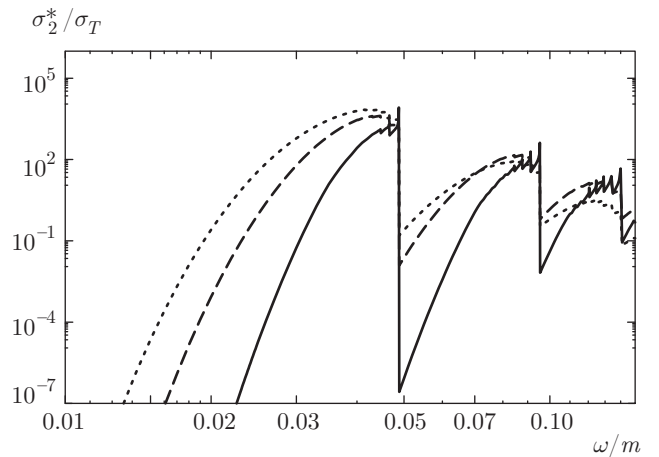


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, для канала $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$

угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. В силу этого в области энергий фотонов $\omega \ll m$ перенормировка волновой функции фотона также становится несущественной. Отметим, что данное утверждение заведомо не будет справедливым вблизи циклотронных резонансов, когда $q_\parallel^2 \simeq (M_n + M_\ell)^2$ (см., например, [35]).

Результаты численного анализа отношения $\sigma_\lambda^*/\sigma_T$, где $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$ — томпсоновское сечение, представлены на рис. 2 и 3. Полученные оценки в окрестности резонансных пиков хорошо согласуются с соответствующими результатами

работы [18]. Следовательно, применение приближения (29) правомочно в области полей $B \sim 10^{12}$ Гс, характерных для радиопульсаров. С другой стороны, полученные нами коэффициенты поглощения фотона (47) и (48) имеют относительно простой вид и, следовательно, оказываются гораздо более удобными в применении к решению задачи переноса излучения по сравнению с численно полученными результатами работы [18]. Отметим (см. рис. 2 и 3, а также (47) и (48)), что коэффициенты поглощения фотона для обеих мод имеют узкие максимумы, соответствующие значениям энергии фотона $\omega_{n\ell} = (M_n - M_\ell) / \sin \theta$, хорошо известные в литературе (см., например, [38–40]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены древесные двухвершинные амплитуды для переходов $jf \rightarrow j'f'$ в постоянном однородном магнитном поле и в присутствии замагниченной плазмы, состоящей из заряженных фермионов, для различных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов с учетом возможного резонанса на виртуальном фермионе. Показано, что в случае δ -функциональной аппроксимации резонансных пиков квадрат амплитуды процесса $jf \rightarrow j'f'$ может быть факторизован квадратами одновершинных амплитуд подпроцессов перехода некоторого начального состояния jf в фермион, находящийся на n -м уровне Ландау, и перехода фермиона с уровня n в некоторое конечное состояние $j'f'$. С помощью метода непосредственного перемножения биспиноров и матриц Дирака получены одновершинные амплитуды для вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов, представленные в явном лоренц-инвариантном виде. Такой подход представляет собой альтернативу методу матрицы плотности в постоянном однородном магнитном поле [16, 41], согласно которому амплитуды возводятся в квадрат и суммируются по поляризационным состояниям фермионов.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрена реакция резонансного рассеяния $\gamma e \rightarrow \gamma e$ в присутствии замагниченной плазмы. Получен коэффициент поглощения фотона в данном процессе, представленный в простой аналитической форме, удобной для дальнейшего использования при решении задачи переноса излучения. Вычислено сечение и проведено сравнение с имеющимися

в литературе результатами. Показано, что использование δ -функциональной аппроксимации резонансных пиков в области резонансов хорошо согласуется с соответствующими результатами работы [18], полученными громоздкими численными расчетами.

Авторы выражают благодарность А. В. Кузнецову, А. Я. Пархоменко, А. А. Гвоздеву и И. С. Огневу за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00233-а). Работа Д. Р. выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Одновершинные амплитуды

Коэффициенты $\mathcal{T}_k^{s''s}$, входящие в (34), могут быть получены с использованием волновых функций (10) и представлены в следующей лоренц-инвариантной форме:

- скалярная вершина, $k = S$,

$$\mathcal{T}_S^{--} = g_s j_s \mathcal{K}_3 [(m_f + M_\ell)(m_f + M_n) I_{n,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell n} I_{n-1,\ell-1}], \quad (52)$$

$$\mathcal{T}_S^{-+} = -i g_s j_s \mathcal{K}_4 [\sqrt{2\beta n} (m_f + M_\ell) I_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta \ell} (m_f + M_n) I_{n,\ell}], \quad (53)$$

$$\mathcal{T}_S^{+-} = -i g_s j_s \mathcal{K}_4 [\sqrt{2\beta \ell} (m_f + M_n) I_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (m_f + M_\ell) I_{n,\ell}], \quad (54)$$

$$\mathcal{T}_S^{++} = g_s j_s \mathcal{K}_3 [(m_f + M_\ell)(m_f + M_n) I_{n-1,\ell-1} - 2\beta \sqrt{\ell n} I_{n,\ell}]; \quad (55)$$

- псевдоскалярная вершина, $k = P$,

$$\mathcal{T}_P^{--} = -g_p j_p \mathcal{K}_4 [2\beta \sqrt{\ell n} I_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) I_{n,\ell}], \quad (56)$$

$$\mathcal{T}_P^{-+} = -i g_p j_p \mathcal{K}_3 [\sqrt{2\beta n} (m_f + M_\ell) I_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta \ell} (m_f + M_n) I_{n,\ell}], \quad (57)$$

$$\mathcal{T}_P^{+-} = -ig_p j_p \mathcal{K}_3 [\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)I_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)I_{n,\ell}], \quad (58)$$

$$\mathcal{T}_P^{++} = g_p j_p \mathcal{K}_4 [(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)I_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n}I_{n,\ell}]; \quad (59)$$

• векторная вершина, $k = V$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{--} = g_v \left[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V)I_{n-1,\ell-1} + \right. \\ \left. + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V)I_{n,\ell} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n,\ell-1} \right], \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{+-} = ig_v \left[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V)I_{n-1,\ell-1} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V)I_{n,\ell} + \right. \\ \left. + 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} \right], \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{+-} = \\ = -ig_v \left[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V)I_{n-1,\ell-1} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V)I_{n,\ell} + \right. \\ \left. + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} \right], \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{++} = g_v \left[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V)I_{n,\ell} + \right. \\ \left. + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V)I_{n-1,\ell-1} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} \right]; \quad (63) \end{aligned}$$

• аксиально-векторная вершина, $k = A$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{--} = g_a \left[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A)I_{n-1,\ell-1} - \right. \\ \left. - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A)I_{n,\ell} + \right. \\ \left. + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} \right], \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{+-} = ig_a \left[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)I_{n-1,\ell-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)I_{n,\ell} - \right. \\ \left. - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} - \right. \\ \left. - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} \right], \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{+-} = -ig_a \times \\ \times \left[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)I_{n-1,\ell-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)I_{n,\ell} - \right. \\ \left. - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n,\ell-1} - \right. \\ \left. - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1,\ell} \right], \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_A^{++} = & \\
= g_a & \left[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A) I_{n-1, \ell-1} - \right. \\
& - 2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A) I_{n, \ell} + \\
& + \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Delta q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n-1, \ell} - \\
& - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \times \\
& \left. \times \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Delta q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} I_{n, \ell-1} \right]. \quad (67)
\end{aligned}$$

Отметим, что полученные амплитуды для векторной и аксиально-векторной вершин после возведения в квадрат и суммирования по поляризационным состояниям фермионов согласуются с ранее полученными результатами в работах [11, 42].

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ryu et al., *Space Sci. Rev.* **166**, 1 (2012).
2. Г. С. Бисноватый-Коган, *Астрон. ж.* **47**, 813 (1970).
3. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).
4. S. A. Olausen and V. M. Kaspi, *Astrophys. J. Suppl.* **212**, 6 (2014).
5. C. Thompson and R. C. Duncan, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **275**, 255 (1995).
6. R. C. Duncan and C. Thompson, *Astrophys. J.* **473**, 322 (1996).
7. C. Thompson, M. Lyutikov, and S. R. Kulkarni, *Astrophys. J.* **574**, 332 (2002).
8. P. Goldreich and W. H. Julian, *Astrophys. J.* **157**, 869 (1969).
9. М. Ю. Боровков, А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев, *ЯФ* **62**, 1714 (1999) [M. Yu. Borovkov, A. V. Kuznetsov, and N. V. Mikheev, *Phys. Atom. Nucl.* **62**, 1601 (1999)].
10. A. V. Kuznetsov, D. A. Rumyantsev, and D. M. Shlenev, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550049 (2015); arXiv: 1312.5719 [hep-ph].
11. H. G. Latal, *Astrophys. J.* **309**, 372 (1986).
12. R. Barbieri and R. N. Mohapatra, *Phys. Rev. D* **39**, 1229 (1989).
13. A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev, *Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields*, Springer-Verlag, New York (2003).
14. T. Erber and H. G. Latal, *Europ. J. Phys.* **24**, 67 (2003).
15. L. Semionova, D. Leahy, and J. Paez, *Research Astron. Astrophys.* **10**, 1023 (2010).
16. А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, *ТМФ* **170**, 423 (2012) [A. A. Gvozdev and E. V. Osokina, *Theor. Math. Phys.* **170**, 354 (2012)].
17. P. L. Gonthier, M. G. Baring et al., *Phys. Rev. D* **90**, 043014 (2014).
18. A. A. Mushtukov, D. I. Nagirner, and J. Poutanen, *Phys. Rev. D* **93**, 105003 (2016).
19. R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev. D* **16**, 1791 (1977).
20. G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, Univ. Chicago Press, Chicago (1996).
21. M. H. Johnson and B. A. Lippmann, *Phys. Rev.* **76**, 828 (1949).
22. А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
23. A. A. Sokolov and I. M. Ternov, *Synchrotron Radiation*, Pergamon, Oxford (1968).
24. D. B. Melrose and A. J. Parle, *Aust. J. Phys.* **36**, 755 (1983).
25. A. A. Sokolov and I. M. Ternov, *Radiation from Relativistic Electrons*, Amer. Inst. Phys., New York (1986).
26. K. Bhattacharya and P. B. Pal, *Pramana J. Phys.* **62**, 1041 (2004).
27. I. A. Balantsev, Yu. V. Popov, and A. I. Studenikin, *J. Phys. A* **44**, 255301 (2011).
28. A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev, *Electroweak Processes in External Active Media*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2013).
29. M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Reading, Addison-Wesley (1995).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
31. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1963).

32. A. V. Kuznetsov and A. A. Okrugin, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 2725 (2011).
33. А. В. Борисов, А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, *УФН* **167**, 241 (1997) [A. V. Borisov, A. S. Vshivtsev, V. C. Zhukovsky, and P. A. Eminov, *Phys. Usp.* **40**, 229 (1997)].
34. В. Ч. Жуковский, П. Г. Мидодашвили, П. А. Эминов, *ЖЭТФ* **106**, 929 (1994) [V. C. Zhukovsky, P. G. Midodashvili, and P. A. Eminov, *JETP* **79**, 509 (1994)].
35. M. V. Chistyakov and D. A. Romyantsev, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 3995 (2009).
36. M. V. Chistyakov, D. A. Romyantsev, and N. S. Stus', *Phys. Rev. D* **86**, 043007 (2012).
37. H. A. Weldon, *Phys. Rev. D* **28**, 2007 (1983).
38. G. G. Pavlov, V. G. Bezchastnov, P. Meszaros, and S. G. Alexander, *Astrophys. J.* **380**, 541 (1991).
39. Н. П. Клепиков, *ЖЭТФ* **26**, 19 (1954).
40. V. N. Baier and V. M. Katkov, *Phys. Rev. D* **75**, 073009 (2007).
41. М. С. Андреев, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская, *ЖЭТФ* **137**, 259 (2010) [M. S. Andreev, N. V. Mikhcheev, and E. N. Narynskaya, *JETP* **110**, 227 (2010)].
42. A. D. Kaminker, O. Yu. Gnedin, and D. G. Yakovlev, *Phys. Rev. D* **46**, 4133 (1992).