

ДИНАМИКА ПРЯМЫХ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ В БОЗЕ-КОНДЕНСАТЕ С ГАУССОВЫМ ПРОФИЛЕМ ПЛОТНОСТИ

*В. П. Рубан**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Рассмотрена в гидродинамическом «безэластичном» приближении динамика взаимодействующих квантованных вихревых нитей во вращающемся бозе-конденсате, который находится в режиме Томаса – Ферми при нуле температуры и подчиняется уравнению Гросса – Питаевского. При наличии плавно неоднородного массива нитей (вихревой решетки) получено неканоническое гамильтоново уравнение движения для макроскопически усредненной завихренности с учетом пространственной неоднородности равновесной плотности конденсата, определяемой потенциалом ловушки. Минимум соответствующего гамильтониана описывает статическую конфигурацию деформированной вихревой решетки на заданном фоне плотности. Условие минимума сводится к векторному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка, для которого найдены некоторые точные и приближенные решения. Показано, что если плотность конденсата имеет анизотропный гауссов профиль, то уравнение движения для усредненной завихренности допускает решения в виде нетривиально зависящего от времени, но однородного по пространству вектора. Получено также интегральное представление для матричной функции Грина, которая определяет нелокальный гамильтониан системы нескольких квантованных вихревых нитей произвольной формы в бозе-конденсате с гауссовой плотностью. В частности, если все нити прямые и ориентированы вдоль одной из главных осей эллипсоида, то получается конечномерная редукция, способная описать динамику системы точечных вихрей на неоднородном фоне. Предложено простое приближенное выражение для двумерной функции Грина при достаточно произвольном профиле плотности и проведено его численное сравнение с точным результатом в гауссовом случае. Выведены соответствующие приближенные уравнения движения, описывающие длинноволновую динамику взаимодействующих вихревых нитей в конденсатах с плотностью, зависящей только от поперечных координат.

DOI: 10.7868/S0044451017060116

1. ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом рассмотрении динамики квантованных вихревых нитей во вращающемся бозе-конденсате, который описывается уравнением Гросса – Питаевского и находится (при нуле температуры) в так называемом режиме Томаса – Ферми, часто используется гидродинамическое приближение (см., например, работы [1–5] и многочисленные ссылки в них). В системе координат, которая вращается с угловой скоростью Ω вместе с потенциалом ловушки $V(\mathbf{r})$, поведение относительно тонкой вихревой нити с хорошей точностью подчиняется классическим уравнениям медленной гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости

на заданном пространственно-неоднородном статическом фоне плотности $\rho_0(\mathbf{r}) \approx \text{const}[\mu - V(\mathbf{r})]$, где μ – химический потенциал бозонов. Другими словами, конденсат рассматривается в «безэластичном» приближении, т.е. вместо полного уравнения непрерывности используется условие $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0$ и тем самым исключается из рассмотрения взаимодействие вихрей с потенциальными возмущениями, в частности — с поверхностными модами. При этом подразумевается, что $\Omega \ll \omega_\perp$, где ω_\perp – характерная поперечная частота ловушки. Этим неравенством, во-первых, обеспечивается устойчивость конденсата [6, 7]. Во-вторых, поскольку вызванная центробежной силой дополнительная статическая деформация равновесного профиля плотности имеет относительный порядок малости $(\Omega/\omega_\perp)^2$, этим эффектом можно пренебречь. В то же время величина μ достаточно велика, $\mu - V_{\min} \gg$

* E-mail: ruban@itp.ac.ru

$\gg \hbar\omega_{\perp}$, из чего, как нетрудно проверить, следует также малость отношения толщины кора вихря $\xi(\mathbf{r}) \propto \rho_0^{-1/2}$ к характерному поперечному размеру конденсата R_{\perp} почти везде в его объеме. Условие

$$\frac{R_{\perp}}{\xi} \sim \frac{\mu - V_{min}}{\hbar\omega_{\perp}} \sqrt{\frac{\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_0(0)}} \gg 1$$

нарушается только вблизи поверхности Томаса – Ферми $\mu - V(\mathbf{r}) = 0$. Пространственная неоднородность плотности вносит существенный вклад в статику и динамику вихрей [1–5, 8–15], но вопрос этот пока еще далеко не полностью изучен. В данной работе будут приведены некоторые новые результаты, полученные на этом направлении с помощью гамильтонова формализма.

Прежде чем сформулировать цели работы, необходимо кратко напомнить основные сведения из гамильтоновой механики вихревых нитей. Как известно, в классической гидродинамике непрерывное поле завихренности $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}_{lab}$ в лабораторной системе координат подчиняется уравнению

$$\boldsymbol{\omega}_t = \text{curl}[\mathbf{v}_{lab} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (1)$$

Поле скорости $\mathbf{v}_{lab} = \nabla\varphi_0 + \mathbf{v}$ состоит из двух слагаемых. Во-первых, это явно зависящее от времени потенциальное поле скорости $\nabla\varphi_0(\mathbf{r}, t)$ не возмущенной вихрями жидкой среды, создаваемое поперечной анизотропией вращающегося потенциала ловушки. Когда мы переходим во вращающуюся систему отсчета, величина $\nabla\varphi_0$ перестает зависеть от времени, но к ней прибавляется слагаемое $-\mathbf{[\Omega \times r]}$, так что невозмущенная скорость жидкости есть $\mathbf{v}_0 = \nabla\varphi_0 - \mathbf{[\Omega \times r]}$. В безэластичном приближении должно выполняться условие $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$, что означает наличие векторного потенциала $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$:

$$\rho_0 \mathbf{v}_0 = \text{curl } \mathbf{A}_0, \quad \text{curl } \mathbf{v}_0 = -2\boldsymbol{\Omega}. \quad (2)$$

Во-вторых, у \mathbf{v}_{lab} имеется вклад \mathbf{v} , определяемый завихренностью, т. е.

$$\rho_0 \mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{A}, \quad \text{curl } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

Другими словами, векторный потенциал \mathbf{A} должен быть найден из уравнения

$$\text{curl } \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r})} \text{curl } \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) выражается через (матричную) функцию Грина $\hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, симметричную по своим аргументам:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при этом

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -2 \int \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{r}_1. \quad (6)$$

Ясно, что во вращающейся системе координат вместо уравнения (1) мы имеем

$$\boldsymbol{\omega}_t = \text{curl}[(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (7)$$

Фактически уравнения (2), (3) и (7) определяют неканоническую гамильтонову систему

$$\boldsymbol{\omega}_t = \text{curl} \left[\frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) \times \boldsymbol{\omega} \right] \quad (8)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H}\{\boldsymbol{\omega}\} = \frac{1}{2} \iint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (9)$$

Заметим, что двойной интеграл в правой части представляет собой кинетическую энергию завихренного течения в отсутствие вращения.

Нас интересуют распределения завихренности в виде тонких вихревых нитей, имитирующих сингулярные квантовые вихревые нити с циркуляцией скорости $\Gamma = 2\pi\hbar/m_{atom}$. Для исследования подобных конфигураций удобно использовать так называемое представление вихревых линий (см. подробности в работах [16–18]),

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{N}} d^2\nu \oint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\nu, \beta, t)) \mathbf{R}_{\beta} d\beta, \quad (10)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathcal{N}$ — метка отдельной вихревой линии, принадлежащая некоторому двумерному многообразию \mathcal{N} , а β — произвольный продольный параметр вдоль линии. Формула (10) представляет соленоидальное поле завихренности как распределение в пространстве замкнутых вихревых линий. Такая параметризация позволяет из неканонического уравнения (8) получить вариационное уравнение движения вихревой линии,

$$[\mathbf{R}_{\beta} \times \mathbf{R}_t] \rho_0(\mathbf{R}) = \delta \mathcal{H}_{VL} / \delta \mathbf{R}(\nu, \beta), \quad (11)$$

где гамильтониан вихревых линий $\mathcal{H}_{VL}\{\mathbf{R}(\nu, \beta)\}$ получается подстановкой выражения (10) в гамильтониан (9). В пределе одной бесконечно тонкой вихревой нити векторная функция $\mathbf{R}(\nu, \beta, t)$ перестает зависеть от ν , а циркуляция скорости вокруг нити равна $\Gamma = \int_{\mathcal{N}} d^2\nu$. Уравнение движения тонкой

вихревой нити при этом следует из вариационного принципа с лагранжианом вида [17–19]

$$\mathcal{L} = \Gamma \oint (\mathbf{D}(\mathbf{R}) \cdot [\mathbf{R}' \times \mathbf{R}_t]) d\beta - \mathcal{H}\{\mathbf{R}\}, \quad (12)$$

где $\mathbf{R}' \equiv \mathbf{R}_\beta(\beta, t)$ — касательный вектор, а векторная функция $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Соответствующее вариационное уравнение движения имеет структуру

$$\Gamma[\mathbf{R}' \times \mathbf{R}_t]_{\rho_0}(\mathbf{R}) = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}(\beta) \quad (14)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}\} = \mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\} + \Gamma \oint (\mathbf{A}_0(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}') d\beta. \quad (15)$$

При этом кинетическая энергия $\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\}$ вихря дается формулой

$$\mathcal{K}_\Gamma = \frac{\Gamma^2}{2} \times \oint \oint \mathbf{R}'(\beta_2) \cdot \hat{G}(\mathbf{R}(\beta_2), \mathbf{R}(\beta_1)) \mathbf{R}'(\beta_1) d\beta_1 d\beta_2. \quad (16)$$

Поскольку при $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$ имеет место асимптотика

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \approx \rho_0(\mathbf{r}) / (4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \quad (17)$$

данный логарифмически расходящийся интеграл обрезается на толщине кора вихря ξ . В этом месте теории проявляется некоторое отличие классической «безэластичной» гидродинамики, где диаметр тонкой вихревой нити в каждый момент времени практически постоянен вдоль ее центральной линии, от бозе-конденсатов, где ξ зависит от \mathbf{r} через равновесную плотность. Впрочем, это отличие не очень существенно влияет на динамику при условии $\ln(R_\perp/\xi) \gg 1$.

Обобщение на случай нескольких вихревых нитей очевидно — к каждому интегрированию по продольному параметру добавляется суммирование по всем вихрям.

Техническая трудность состоит в том, что для большинства физически интересных профилей плотности вычислить функцию Грина аналитически не удается. Поэтому в общем случае приходится пользоваться так называемым приближением локальной индукции [1, 17, 19], которое справедливо в силу приближенного равенства (17):

$$\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\} \approx \frac{\Gamma^2 \Lambda}{4\pi} \int \rho_0(\mathbf{R}) |\mathbf{R}_\beta| d\beta, \quad (18)$$

где

$$\Lambda = \ln \frac{R_\perp}{\xi} \approx \text{const} \approx \ln \frac{\mu - V_{min}}{\hbar\omega_\perp} \gg 1$$

— большой логарифм. Соответствующее этому функционалу уравнение движения (14) есть

$$\Gamma[\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_t]_{\rho_0}(\mathbf{R}) = \Gamma[\mathbf{R}_\beta \times \text{curl} \mathbf{A}_0(\mathbf{R})] + \frac{\Gamma^2 \Lambda}{4\pi} \left\{ \nabla \rho_0(\mathbf{R}) |\mathbf{R}_\beta| - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\rho_0(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{R}_\beta}{|\mathbf{R}_\beta|} \right) \right\}. \quad (19)$$

После разрешения относительно временной производной оно принимает вид

$$\mathbf{R}_t = \frac{\Gamma \Lambda}{4\pi} \left\{ \varkappa \mathbf{b} + \left[\frac{\nabla \rho_0(\mathbf{R})}{\rho_0(\mathbf{R})} \times \frac{\mathbf{R}_\beta}{|\mathbf{R}_\beta|} \right] \right\} + \mathbf{v}_0(\mathbf{R}), \quad (20)$$

где \varkappa — локальная кривизна нити, \mathbf{b} — единичный вектор бинормали, $\mathbf{R}_\beta/|\mathbf{R}_\beta|$ — единичный вектор касательной. Ясно, что такое приближение годится только для одного вихря и не способно описать взаимодействие нескольких нитей.

В данной работе будет, во-первых, получена неканоническая гамильтонова система уравнений для макроскопически сглаженной завихренности при наличии большого числа квантованных нитей с учетом пространственной неоднородности плотности конденсата. Во-вторых, будет исследован один из немногих исключительных случаев, когда аналитическое выражение для \hat{G} все же может быть предъявлено. Речь идет о гауссовом распределении равновесной плотности внутри конденсата (т. е. не слишком близко к поверхности Томаса–Ферми): $\rho_0(\mathbf{r}) = \exp(-\mathbf{r} \cdot \hat{S}\mathbf{r})$, где \hat{S} — симметрическая положительно определенная матрица 3×3 (для простоты вычислений, но без потери общности — диагональная с собственными значениями $\{s_1, s_2, s_3\}$). Такая зависимость качественно напоминает перевернутый параболоид $1 - \mathbf{r} \cdot \hat{S}\mathbf{r}$, имеющий место в наиболее простых — гармонических — ловушках. Кроме того, близкую к гауссиану плотность можно получить в ангармонических полиномиальных потенциальных ямах, соответствующих разложению экспоненты по степеням ее аргумента до нечетного порядка, например, $(\mu - V) \propto 1 - (\mathbf{r} \cdot \hat{S}\mathbf{r}) + (\mathbf{r} \cdot \hat{S}\mathbf{r})^2/2 - (\mathbf{r} \cdot \hat{S}\mathbf{r})^3/6$.

Здесь следует отметить два интересных факта, характерных именно для гауссова профиля плотности в контексте вихревой динамики. Во-первых, уравнение локальной индукции (20) на таком фоне допускает нетривиальные решения в виде прямолинейного нестационарного вихря [20]. Во-вторых, как будет показано в разд. 2, в квазинепрерывном макроскопическом пределе также имеются точные

нестационарные решения, в данном случае соответствующие пространственно-однородному полю эффективной завихренности, которое подчиняется интегрируемому обыкновенному дифференциальному уравнению.

Наличие указанных интегрируемых редукций, а также результаты работы [5], где изучалось влияние неоднородности плотности на свойства вихревых решеток в двумерных системах и было найдено, что на гауссовом фоне решетка остается однородной, наводят на мысль о том, что гауссов профиль плотности занимает особое положение среди остальных, когда речь идет о динамике квантованных вихревых нитей. Поэтому имеет смысл изучить свойства этой системы более подробно. В частности, в разд. 3 вычислена соответствующая функция Грина, а в разд. 4 исследованы свойства конечномерной редукции, описывающей движение нескольких нитей, параллельных одной из главных осей эллипсоида $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}\mathbf{r} = \text{const}$.

2. МАКРОСКОПИЧЕСКИ УСРЕДНЕННАЯ СИСТЕМА

Итак, рассмотрим квазинепрерывный предел. Пусть в конденсате присутствует большое число N не перепутанных между собой вихревых нитей, достаточно регулярно распределенных в пространстве. Другими словами, локально в поперечном сечении вихревое поле выглядит как деформированная вихревая решетка без дефектов (дислокации, вакансии, «избыточные» вихри в решетке сейчас не рассматриваются). Приближенные макроскопические уравнения движения для такой системы можно получить путем замены дискретного номера n вихревой нити парой непрерывных величин (переменных Клебша) ν_1 и ν_2 , условно говоря, нумерующих ряды вихрей по двум независимым направлениям. Дискретный лагранжиан тогда заменяется его непрерывным вариантом

$$\mathcal{L}_\nu = \Gamma \int (\mathbf{D}(\mathbf{R}) \cdot [\mathbf{R}' \times \mathbf{R}_t]) d\beta d\nu_1 d\nu_2 - \mathcal{H}_\nu\{\mathbf{R}(\nu_1, \nu_2, \beta)\}, \quad (21)$$

где \mathcal{H}_ν — приближенный гамильтониан, получаемый подстановкой в кинетическую энергию (16) (где к интегрированию по β следует добавить суммирование по n) массива вихрей, соответствующего целочисленным значениям переменных ν_1 и ν_2 в пределах некоторой двумерной области. Аккуратное вычисление функционала $\mathcal{H}_\nu\{\mathbf{R}(\nu_1, \nu_2, \beta)\}$ — проце-

дура весьма нетривиальная, поскольку взаимодействие между близкими соседями макроскопически не сглаживается в полной мере, в результате чего в гамильтониане \mathcal{H}_ν появляется сдвиговая квазиупругая энергия. Как известно, такая энергия приводит к возможности специфических осцилляций вихревой решетки в виде волн Ткаченко [21–27]. Но если пренебречь сдвиговой энергией решетки по сравнению с логарифмически большим вкладом локальной индукции, то в главном приближении гамильтониана \mathcal{H}_ν будет фактически зависеть только от макроскопически усредненной завихренности $\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t)$ и при этом определяться выражением

$$\tilde{\mathcal{H}}\{\tilde{\omega}\} = \frac{1}{2} \iint \tilde{\omega}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \tilde{\omega}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\omega}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} \int \rho_0(\mathbf{r}) |\tilde{\omega}(\mathbf{r})| d\mathbf{r}, \quad (22)$$

в котором нужно провести замены типа $\tilde{\omega}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}' d\beta d\nu_1 d\nu_2$. Перенормировка коэффициента локальной индукции

$$\tilde{\Lambda} = \ln \frac{R_\perp / \sqrt{N}}{\xi} = \Lambda - \ln \sqrt{N} \gg 1 \quad (23)$$

учитывает тот факт, что локальный вклад в энергию набирается теперь на масштабе порядка расстояния между соседними вихрями, т. е. R_\perp / \sqrt{N} , которое все еще предполагается большим по сравнению с толщиной вихря. Таким образом, данное приближение не делает различий между правильной вихревой решеткой и решеткой с дефектами. Переменные Клебша в таком случае теряют свой первоначальный смысл как номера рядов решетки и допускают произвольные преобразования, сохраняющие элемент площади в двумерном пространстве (ν_1, ν_2) .

Отметим для полноты картины, что в эйлеровом представлении макроскопический лагранжиан для переменных Клебша $\nu_1(\mathbf{r}, t)$ и $\nu_2(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\tilde{\mathcal{L}} = \Gamma \int \rho_0(\mathbf{r}) \nu_2 \partial_t \nu_1 d\mathbf{r} - \tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma[\nabla \nu_1 \times \nabla \nu_2]\}. \quad (24)$$

Соответствующие уравнения движения — почти канонические,

$$\begin{aligned} \partial_t \nu_{1,2} &= \pm \frac{1}{\Gamma \rho_0} \left(\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \nu_{2,1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\omega}} \right) \cdot \nabla \nu_{1,2}, \quad (25) \end{aligned}$$

и фактически являются уравнениями переноса с транспортной скоростью

$$\mathbf{V}_{tr} = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}} \right). \quad (26)$$

Поскольку приближенный макроскопический гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$ зависит только от $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \Gamma[\nabla\nu_1 \times \nabla\nu_2]$, но не от других комбинаций градиентов переменных Клебша (которые неизбежно появились бы при учете сдвиговой энергии), наличие данной симметрии приводит к дополнительным интегралам движения вида

$$Q_{(\Psi)} = \int \Psi(\nu_1, \nu_2) \rho_0(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (27)$$

где $\Psi(\nu_1, \nu_2)$ — произвольная функция. При этом соответствующее лагранжиану (21) (либо лагранжиану (24)) уравнение движения для $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}, t)$ обладает все той же стандартной неканонической гамильтоновой структурой гидродинамического типа, что и уравнение (8):

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \text{curl} \left[\frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}} \right) \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right]. \quad (28)$$

Таким образом, принимая во внимание выражение (22), приходим к уравнению

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \text{curl} \left[\left\{ \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi \rho_0} \text{curl} \left(\rho_0 \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{|\tilde{\boldsymbol{\omega}}|} \right) \right\} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right] \quad (29)$$

с условиями (2) и

$$\text{curl} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что в уравнении «вмороженной завихренности» (29) выражение в фигурных скобках — транспортная скорость вихревых линий — отличается от правой части уравнения (20) для отдельной нити лишь перенормированной величиной $\tilde{\Lambda}$ и добавлением самосогласованного макроскопически сглаженного поля $\tilde{\mathbf{v}}$, создаваемого всеми остальными вихрями.

Важным применением данной теории является описание неподвижных равновесных состояний вихревой решетки. Вообще говоря, для уравнения (29) следует различать статические и стационарные решения, на которых $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ не зависит от времени. В стационарных состояниях выражение в квадратных скобках в уравнении (29) является градиентом некоторой функции $\Psi(\nu_1, \nu_2)$. В статических же состояниях (очевидно, что они соответствуют минимуму гамильтониана (22)) обращается в нуль транспортная скорость вихрей:

$$\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_{stat} + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi \rho_0} \text{curl} \left(\rho_0 \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}}{|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}|} \right) = 0. \quad (31)$$

Взяв ротор, получим отсюда замкнутое дифференциальное уравнение для $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}(\mathbf{r})$:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat} = 2\boldsymbol{\Omega} - \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} \text{curl} \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\rho_0 \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}}{|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}|} \right). \quad (32)$$

Таким образом, в отличие от динамики, при исследовании статических состояний вихревой решетки в рамках рассматриваемого приближения можно обойтись без знания функции Грина. Насколько известно автору, трехмерное уравнение (32) — новый результат. Поскольку второе слагаемое в его правой части фактически является относительно малой поправкой (не слишком близко к поверхности конденсата) по сравнению с $2\boldsymbol{\Omega} \approx N\Gamma/\pi R_{\perp}^2$, это уравнение можно приближенно решать итерациями. Результаты первых двух итераций приведены ниже (где введено обозначение для единичного вектора вдоль оси вращения $\mathbf{e} \equiv \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$):

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}^{(1)} &= 2\boldsymbol{\Omega} - \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} \text{curl} \frac{1}{\rho_0} \text{curl} (\rho_0 \mathbf{e}) = \\ &= 2\boldsymbol{\Omega} - \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} [(\mathbf{e} \cdot \nabla) \nabla \ln \rho_0 - \mathbf{e} \Delta \ln \rho_0], \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}^{(2)} = 2\boldsymbol{\Omega} - \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} \text{curl} \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \left(\rho_0 \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}^{(1)}}{|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}^{(1)}|} \right). \quad (34)$$

Кроме этих трехмерных приближенных решений, при $\rho_0 = Z(z)\rho(\mathbf{r}_{\perp})$ и вращении вокруг оси z имеются двумерные точные решения

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{stat}(\mathbf{r}_{\perp}) = \mathbf{e}_z \left[2\boldsymbol{\Omega} + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{4\pi} \Delta_{\perp} \ln \rho(\mathbf{r}_{\perp}) \right]. \quad (35)$$

Таким образом, главный результат работы [5] — формула (35) — воспроизводится здесь гораздо более компактным способом, чем в оригинале, причем для произвольных $\rho(\mathbf{r}_{\perp})$, а не только для осесимметричных. Заметим, что в гауссовом случае макроскопическая завихренность получается однородной, но слегка отличной от $2\boldsymbol{\Omega}$.

Очевидно также, что только при гауссовой зависимости $\rho_0(\mathbf{r})$ система (2), (29), (30) допускает подстановку $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}(t)$ с произвольно направленным начальным вектором $\mathbf{M}(0)$. При этом поля скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ и \mathbf{v}_0 являются линейными по \mathbf{r} :

$$\tilde{\mathbf{v}} = [(\hat{I} \text{Tr} \hat{S} - \hat{S})^{-1} \mathbf{M} \times \hat{S} \mathbf{r}], \quad (36)$$

$$\mathbf{v}_0 = -2[(\hat{I} \text{Tr} \hat{S} - \hat{S})^{-1} \boldsymbol{\Omega} \times \hat{S} \mathbf{r}], \quad (37)$$

где \hat{I} — единичная матрица. Заметим попутно, что векторный потенциал $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ определяется простым выражением

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -\exp(-\mathbf{r} \cdot \hat{S} \mathbf{r}) [\hat{I} \text{Tr} \hat{S} - \hat{S}]^{-1} \boldsymbol{\Omega}. \quad (38)$$

В результате подстановки в уравнение (29) получается обыкновенное дифференциальное уравнение для однородной завихренности,

$$\dot{\mathbf{M}} = \left\{ \left[\hat{I} \text{Tr} \hat{S} - \hat{S} \right]^{-1} (\mathbf{M} - 2\mathbf{\Omega}) + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{2\pi} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \right\} \times \hat{S} \mathbf{M}. \quad (39)$$

Из структуры этого уравнения следуют два не зависящих от времени интеграла движения (предполагается, что вектор $\mathbf{\Omega}$ постоянен во времени):

$$\mathbf{M} \cdot \hat{S} \mathbf{M} = J_1, \quad (40)$$

$$(\mathbf{M} - 2\mathbf{\Omega}) \cdot [\hat{I} \text{Tr} \hat{S} - \hat{S}]^{-1} (\mathbf{M} - 2\mathbf{\Omega}) + \frac{\Gamma \tilde{\Lambda}}{\pi} |\mathbf{M}| = J_2. \quad (41)$$

Фазовые траектории вектора \mathbf{M} являются линиями пересечения соответствующих семейств двумерных поверхностей в трехмерном пространстве. В зависимости от значений параметров, входящих в эти выражения, фазовые портреты могут быть качественно различными. Несколько примеров приведены на рис. 1, 2 в безразмерных величинах, где масштабом длины служит R_{\perp} , а масштабом обратного времени — комбинация $\Gamma/\pi R_{\perp}^2$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Если в конденсате с гауссовой плотностью имеется всего несколько вихрей, то для аккуратного учета их взаимодействия нужно знать функцию Грина. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений в частных производных

$$2[\hat{S} \mathbf{r} \times \mathbf{j}] + [\nabla \times \mathbf{j}] = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{r} \cdot \hat{S} \mathbf{r}), \quad (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0, \quad (42)$$

где $\mathbf{j} = \text{curl} \mathbf{A}$. По счастью, решение находится последовательным применением нескольких стандартных методов математической физики. Перепишем данную систему в фурье-представлении:

$$2[\hat{S} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{j}_{\mathbf{k}}] + [\mathbf{k} \times \mathbf{j}_{\mathbf{k}}] = -i \int \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{q}} \exp[-\mathbf{r} \cdot \hat{S} \mathbf{r} + i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \quad (43)$$

с условием $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{k}} = 0$. Выполнив интегрирование по \mathbf{r} в правой части и сделав подстановку $\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_{\mathbf{k}} \times \exp(-\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \mathbf{k}/4)$, получим уравнение

$$2[\hat{S} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{C}_{\mathbf{k}}] = -i \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\text{Det} \hat{S}}} \times \int \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{q}} \exp\left(-\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{4} + \mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}. \quad (44)$$

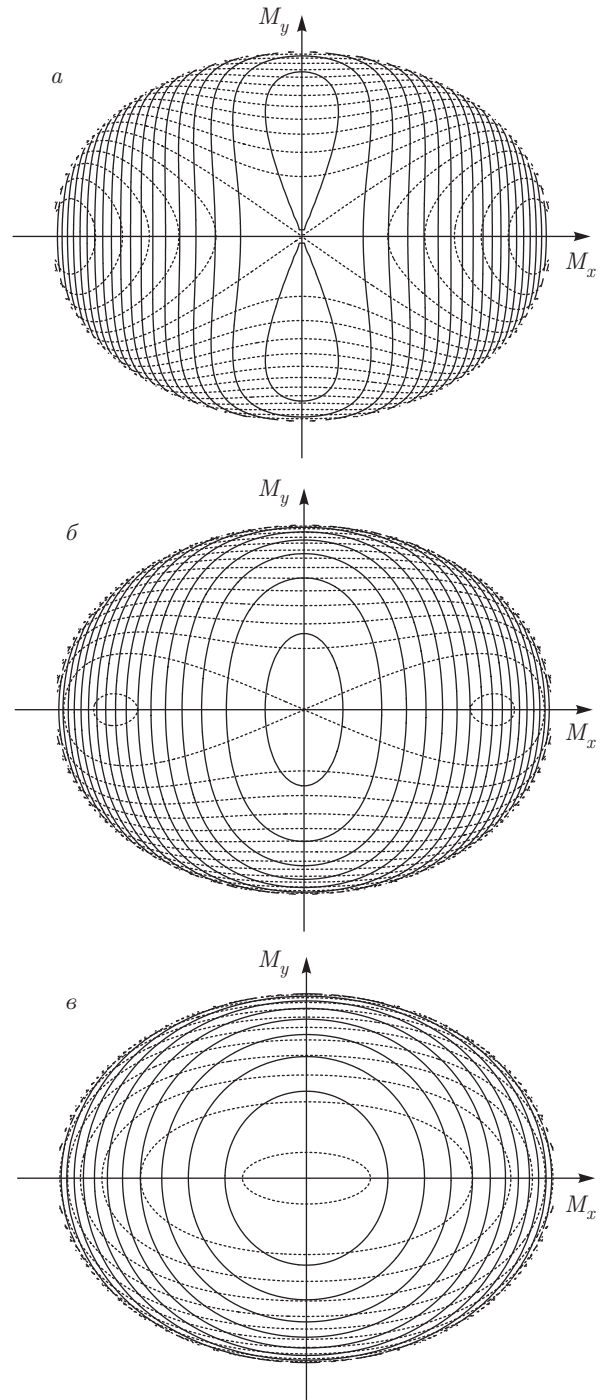


Рис. 1. Фазовые траектории вектора \mathbf{M} на эллипсоиде $\mathbf{M} \cdot \hat{S} \mathbf{M} = 1600$ при $\tilde{\Lambda} = 7.0$, $s_1 = 0.7$, $s_2 = 1.3$, $s_3 = 1.0$ (т. е. вращение происходит вокруг средней оси эллипсоида) для трех значений частоты вращения $\Omega = 2.0$ (а), 4.0 (б), 10.0 (в). Вид со стороны оси вращения z . Пунктиром показаны линии на «южной» половине эллипсоида

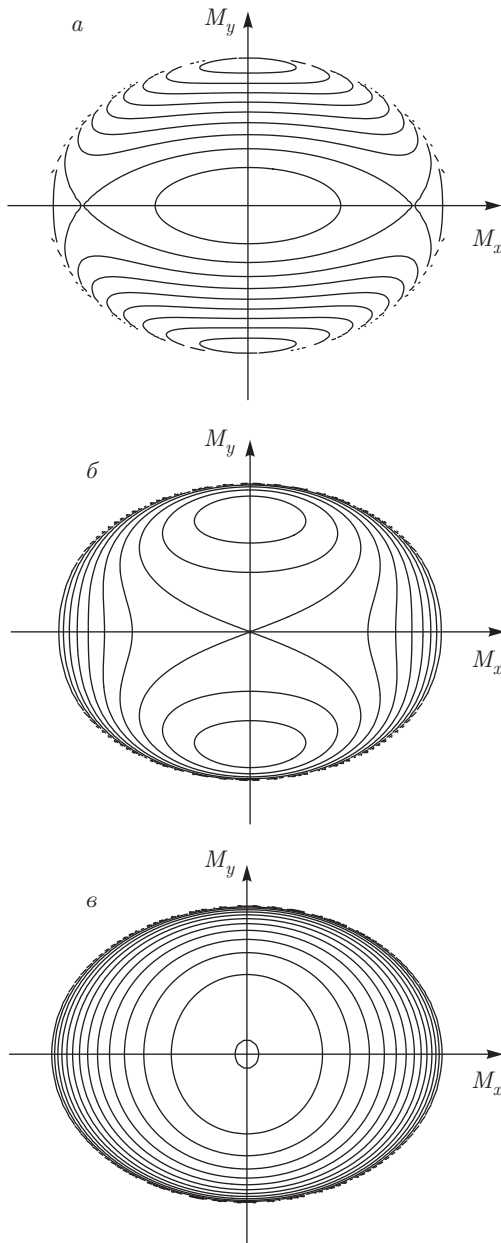


Рис. 2. Фазовые траектории вектора \mathbf{M} на «северной» половине эллипсоида $\mathbf{M} \cdot \hat{S}\mathbf{M} = 800$ при $\hat{\Lambda} = 7.0$, $s_1 = 0.7$, $s_2 = 1.3$, $s_3 = 0.5$ (вращение вокруг большой оси) для трех значений частоты вращения $\Omega = 3.0$ (а), 6.0 (б), 12.0 (в). При ориентации вдоль оси z величина вектора \mathbf{M} на рис. 1 и 2 одна и та же (и равна 40.0)

Его общее решение имеет вид

$$\mathbf{C}_k = -i \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\text{Det } \hat{S}}} \int \left[\mathbf{B}_q \exp\left(\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{2}\right) + \hat{S} \nabla_k f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right] \exp\left(-\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{4}\right) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \quad (45)$$

где \mathbf{B}_q удовлетворяют условию $\mathbf{q} \times \mathbf{B}_q = \omega_q$, а $f(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ — произвольная скалярная функция. Выберем ее таким образом, чтобы удовлетворить условию поперечности $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{C}_k) = 0$:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_q) \exp\left(\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{2}\right) + (\hat{S} \mathbf{k} \cdot \nabla_k) f = 0. \quad (46)$$

Это уравнение решается методом характеристик:

$$f = - \int_{-\infty}^0 (\mathbf{B}_q \cdot e^{\tau \hat{S} \mathbf{k}}) \exp\left(\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} e^{\tau \hat{S}} \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\tau, \quad (47)$$

где матричная экспонента определена стандартным образом. Нетрудно убедиться с помощью интегрирования по частям и применения формулы двойного векторного произведения, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_q \exp\left(\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{q}}{2}\right) + \hat{S} \nabla_k f = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left[\mathbf{k} \times \left[e^{\tau \hat{S}} \mathbf{B} \times e^{\tau \hat{S}} \mathbf{q} \right] \right] \times \\ \times \exp\left(\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} e^{\tau \hat{S}} \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (48)$$

Используем теперь равенство

$$\left[e^{\tau \hat{S}} \mathbf{q} \times e^{\tau \hat{S}} \mathbf{B}_q \right] = \exp[\tau(\hat{I} \text{Tr } \hat{S} - \hat{S})] \omega_q,$$

а также вспомним, что

$$\mathbf{j}_k = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k] = \mathbf{C}_k \exp\left(-\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \frac{\mathbf{k}}{4}\right).$$

Поскольку, по определению,

$$\mathbf{A}_k = \int \hat{G}_{k,q} \omega_q \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \quad (49)$$

из найденного решения для \mathbf{C}_k следует, что функция Грина в фурье-представлении дается выражением

$$\begin{aligned} \hat{G}_{k,q} = \frac{\pi^{3/2}}{2\sqrt{\text{Det } \hat{S}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{k} \cdot \hat{S}^{-1} \mathbf{k}}{4} - \frac{\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} \mathbf{q}}{4}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \hat{S}^{-1} e^{\tau \hat{S}} \mathbf{k}}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\tau(\hat{I} \text{Tr } \hat{S} - \hat{S})\right] d\tau, \end{aligned} \quad (50)$$

которое содержит однократное интегрирование по вспомогательной переменной τ .

Чтобы найти функцию Грина в физическом пространстве, необходимо совершить преобразование

Фурье по \mathbf{k} и \mathbf{q} , причем с противоположными знаками перед мнимой единицей в экспонентах. Выполнив гауссово интегрирование, придем к требуемой формуле:

$$\hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \frac{\sqrt{\text{Det } \hat{S}}}{2\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\exp[\tau(\hat{I} \text{Tr } \hat{S} - \hat{S})]}{\sqrt{\text{Det}[\hat{I} - e^{2\tau\hat{S}}]}} \times \exp\left[-(\mathbf{r}_2 \cdot \hat{S}[\hat{I} - e^{2\tau\hat{S}}]^{-1}\mathbf{r}_2) - (\mathbf{r}_1 \cdot \hat{S}[\hat{I} - e^{2\tau\hat{S}}]^{-1}\mathbf{r}_1)\right] \times \exp\left[2\mathbf{r}_2 \cdot \hat{S}e^{\tau\hat{S}}[\hat{I} - e^{2\tau\hat{S}}]^{-1}\mathbf{r}_1\right] d\tau. \quad (51)$$

Хотя данный интеграл не выражается через элементарные функции, его можно исследовать стандартными аналитическими и численными методами.

Укажем наиболее простые частные случаи. Пусть матрица $\hat{S} = \hat{I}$, т. е. распределение плотности сферически-симметрично. Тогда $\hat{G} = \hat{I}G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, где

$$G = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \times \exp\left[\frac{2\eta(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2)}{1-\eta^2}\right] = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \times \int_1^\infty \exp\left[2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\chi\sqrt{\chi^2-1} - (\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2)\chi^2\right] d\chi = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{2}\right] \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) \times \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{4}v^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{4v^2}\right] dv. \quad (52)$$

Нетрудно проверить, что при малой разности $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ эта функция имеет «правильную» асимптотику.

Второй частный случай, который мы рассмотрим более подробно, — система прямых вихревых нитей, параллельных оси симметрии эллипсоида вращения (т. е. $\hat{S} = \text{Diag}(1, 1, \lambda)$). Тогда поле скорости оказывается в точности двумерным, и взаимодействие точечных вихрей в поперечной плоскости описывается функцией Грина $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, зависящей от пары двумерных векторов. Несколько математически эквивалентных интегральных представления для G приведено ниже:

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{1-\eta^2} \exp\left[\frac{2\eta(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)}{1-\eta^2}\right] = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty \exp\left[2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)\sqrt{\zeta^2-\zeta} - (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)\zeta\right] \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)}{2}\right] \int_1^\infty \frac{u-1}{u(u+1)} \times \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{4}u - \frac{(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^2}{4u}\right] du. \quad (53)$$

Последний интеграл будет использован в следующем разделе для оценки теории, которая из других соображений предлагает приближенное выражение для функции Грина в более общем двумерном случае. Заметим еще, что из (53) легко получить главную асимптотику при малой разности $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$:

$$G \approx \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{2}\right) \ln(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{-1}). \quad (54)$$

4. ГАМИЛЬТониАН ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИКИ ВИХРЕЙ

Хотя уравнения движения с пространственно-неоднородными поправками для систем точечных вихрей в бозе-конденсатах были предложены в работе [5], их гамильтонова формулировка до сих пор отсутствовала. Более того, попытка построить каноническую теорию по примеру однородной жидкости привела к сильно огрубленной модели, в которой при вычислении парных взаимодействий между вихрями учет неоднородности пришлось пожертвовать [28–30]. Неоднородность там проявляется только в виде локально-индуцированной скорости вихрей, пропорциональной градиенту плотности. Здесь будет предложена более аккуратная неканоническая гамильтонова теория для конденсатов с профилями плотности вида $\rho_0 = Z(z)P(q)$, где $q = (1 + \epsilon)x^2 + (1 - \epsilon)y^2$. Хотя такое ограничение на поперечный множитель не принципиально, при этом выборе вклад вращения в уравнения движения имеет особенно простой вид [19].

Пусть движение n -го вихря описывается парой функций $\mathbf{x}_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$. Поскольку в левой части уравнения (14) в качестве множителя присутствует неоднородная плотность, двумерные декартовы координаты вихрей не являются каноническими переменными. Уточнение состоит в том, что динамика системы определяется неканоническими гамильтоновыми уравнениями

$$\sigma_n P(q_n) \dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \quad -\sigma_n P(q_n) \dot{y}_n = \frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad (55)$$

где $\sigma_n = \pm 1$ в зависимости от положительной либо отрицательной ориентации вихря, $q_n = (1 + \epsilon)x_n^2 + (1 - \epsilon)y_n^2$. Гамильтониан H есть сумма вкладов локальной индукции, вращения, а также всех попарных взаимодействий (для удобства все величины приведены к безразмерному виду):

$$H = \sum_n \left[\frac{\tilde{\Lambda}}{2} P(q_n) - \frac{\tilde{\Omega} \sigma_n}{2} \int_{q_n}^{\infty} P(q) dq \right] + \sum_{m \neq n} \frac{\sigma_n \sigma_m}{2} G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m), \quad (56)$$

где $\tilde{\Omega}$ — безразмерная частота вращения, $G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$ — соответствующая двумерная функция Грина (умноженная на 2π). Уравнения движения тогда имеют вид

$$\dot{x}_n = \left\{ \tilde{\Lambda} \sigma_n \frac{P'(q_n)}{P(q_n)} + \tilde{\Omega} \right\} [1 - \epsilon] y_n + \frac{1}{P(q_n)} \sum_{m \neq n} \sigma_m \frac{\partial G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)}{\partial y_n}, \quad (57)$$

$$-\dot{y}_n = \left\{ \tilde{\Lambda} \sigma_n \frac{P'(q_n)}{P(q_n)} + \tilde{\Omega} \right\} [1 + \epsilon] x_n + \frac{1}{P(q_n)} \sum_{m \neq n} \sigma_m \frac{\partial G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)}{\partial x_n}. \quad (58)$$

Заметим, что в гауссовом случае выражение в фигурных скобках в уравнениях (57) и (58) не зависит от x_n и y_n , поскольку $P(q_n) = \exp(-q_n)$, а функция Грина (при $\epsilon = 0$) равна

$$G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = \exp\left(-\frac{q_n}{2}\right) \exp\left(-\frac{q_m}{2}\right) g(a, b), \quad (59)$$

где $a = (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)^2/4$, $b = (\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_m)^2/4$,

$$g(a, b) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{u-1}{u(u+1)} \exp\left(-au - \frac{b}{u}\right) du. \quad (60)$$

Чтобы предложить разумную аппроксимацию для G при других профилях плотности, перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$-\sqrt{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \sqrt{\rho} \left[\frac{A}{\sqrt{\rho}} \right] \right) = \sqrt{\rho} \omega(\mathbf{x}), \quad (61)$$

где $A(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x})$ — компоненты соответствующих векторов вдоль оси z (поперечные компоненты равны нулю). Отсюда легко получаем, что функция $\psi = A/\sqrt{\rho}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) \psi - \Delta \psi = \sqrt{\rho} \omega, \quad (62)$$

где

$$\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) \equiv \sqrt{\rho} \Delta \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \quad (63)$$

Рассмотрим специальный класс плотностей $\rho_\kappa(x, y)$, для которых $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) = \kappa^2 = \text{const} > 0$. В таком случае

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \frac{1}{\sqrt{\rho_\kappa}} = \kappa^2 \frac{1}{\sqrt{\rho_\kappa}}. \quad (64)$$

Общее решение этого уравнения представимо формулой

$$\rho_\kappa = \left[\int_0^{2\pi} C(\phi) \exp(\kappa x \cos \phi + \kappa y \sin \phi) \frac{d\phi}{2\pi} \right]^{-2}, \quad (65)$$

в которой $C(\phi)$ — произвольная неотрицательная функция (в частном случае $C(\phi) = 1$ интеграл равен модифицированной функции Бесселя $I_0(\kappa|\mathbf{x}|)$, что соответствует профилю плотности, предложенному в работе [31]). Уравнение (62) при этом легко решается, и из решения следует, что функция Грина дается точной формулой

$$G_\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{\rho_\kappa(\mathbf{x}_1) \rho_\kappa(\mathbf{x}_2)} K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (66)$$

где K_0 — соответствующая функция Бесселя (функция Макдональда).

В общем случае в выражении для функции Грина множитель $\sqrt{\rho(\mathbf{x}_1) \rho(\mathbf{x}_2)}$ сохраняется, но вместо $K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ стоит (также симметричная по своим аргументам) функция Грина $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ пространственно-неоднородного оператора $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) - \Delta$. Ясно, что если величина $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x})$ везде положительна, то g имеет такую же асимптотику при близких аргументах, как и K_0 с локальным значением $\tilde{\kappa}$. Хорошим приближением является

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx K_0 \left(\min_{\mathbf{x}_1} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \right), \quad (67)$$

где минимум берется по всем кривым, соединяющим точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Но в этом случае, чтобы найти минимизирующий путь, необходимо решить соответствующее вариационное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Как совсем «дешевый» вариант можно предложить учесть неоднородность путем следующей замены:

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx \sqrt{\rho(\mathbf{x}_1) \rho(\mathbf{x}_2)} \times K_0 \left(\sqrt{\frac{\tilde{\kappa}_1^2 + \tilde{\kappa}_2^2}{2}} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \right), \quad (68)$$

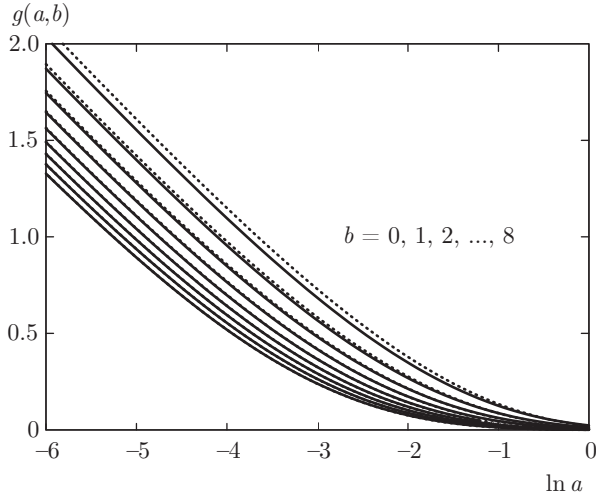


Рис. 3. Численное сравнение формул (60) и (69): сплошные линии — точные решения, пунктирные — аппроксимация

где $\tilde{\kappa}_{1,2} = \tilde{\kappa}(\mathbf{x}_{1,2})$. Вопрос о том, что делать при наличии отрицательных значений $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x})$ в некоторой области, остается пока открытым.

Оценить качество приближения (68) можно на примере гауссовой плотности, сравнив значения точного интеграла (60) с соответствующей аппроксимацией

$$g_{appr}(a, b) = K_0 \left(2\sqrt{a} \sqrt{2+a+b} \right). \quad (69)$$

Такое сравнение приведено на рис. 3. Видно, что приближенная теория в данном случае работает вполне неплохо вплоть до значений a порядка единицы.

Необходимо сделать весьма важное замечание о «неравноправии» вихрей, находящихся в точках с различной плотностью ρ . Поскольку в функцию Грина входит множитель $\sqrt{\rho(\mathbf{x}_n)\rho(\mathbf{x}_m)}$, а при составлении уравнения движения для \mathbf{x}_n происходит деление на $\rho(\mathbf{x}_n)$, в главных слагаемых появляется отношение $\sqrt{\rho(\mathbf{x}_m)/\rho(\mathbf{x}_n)}$, приводящее к иерархии воздействия одного вихря на другой. Вихрь, который находится ближе к центру ловушки (где плотность больше), воздействует достаточно сильно на периферийный вихрь, тогда как периферийный вихрь практически не имеет возможности воздействовать на центральный. Поэтому динамика одного или нескольких «близких по рангу» центральных вихрей может оказаться квазиавтономной, но в то же самое время оказывать существенное влияние на движение всех периферийных вихрей.

В качестве примера применения приближенной формулы (69) рассмотрим интегрируемую систему

двух вихрей при $\epsilon = 0$, у которой имеются два интеграла движения — гамильтониан и угловой момент (слагаемое в (56), пропорциональное $\tilde{\Omega}$):

$$\frac{\tilde{\Lambda}}{2} [P_1 + P_2] + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{P_1 P_2} K_0 \left(\left[2 - \frac{1}{2} \ln(P_1 P_2) \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[-\ln(P_1 P_2) - 2\sqrt{\ln P_1 \ln P_2} \cos \phi \right]^{1/2} \right) = h_0, \quad (70)$$

$$\sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 = 2M, \quad (71)$$

где ϕ — угол между векторами \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Удобно ввести переменные

$$p_+ = (P_1 + P_2)/2, \quad p_- = (P_1 - P_2)/2.$$

Пусть для определенности $\sigma_1 = +1$. Тогда в зависимости от знака $\sigma_2 = \sigma$ получим два варианта: либо $p_+ = M$ при $\sigma = +1$, либо $p_- = M$ при $\sigma = -1$. В новых переменных уравнение

$$\tilde{\Lambda} p_{+ + \sigma} \sqrt{p_+^2 - p_-^2} K_0 \left(\left[2 - \frac{1}{2} \ln(p_+^2 - p_-^2) \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[-\ln(p_+^2 - p_-^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\sqrt{\ln(p_+ + p_-) \ln(p_+ - p_-)} \cos \phi \right]^{1/2} \right) = h_0 \quad (72)$$

задает фазовые траектории системы либо в плоскости (p_-, ϕ) при $\sigma = +1, p_+ = M$, либо в плоскости (p_+, ϕ) при $\sigma = -1, p_- = M$.

Наконец, укажем еще одно интересное применение приближенной формулы (68). Пусть плотность конденсата не зависит от z -координаты. Рассмотрим длинноволновую динамику нескольких вихревых нитей, которая описывается неизвестными функциями $x_n(z, t)$ и $y_n(z, t)$, медленно зависящими от z . Тогда уравнения движения имеют вид

$$\sigma_n P(q_n) \partial_t x_n = \frac{\delta H_*}{\delta y_n}, \quad -\sigma_n P(q_n) \partial_t y_n = \frac{\delta H_*}{\delta x_n}, \quad (73)$$

где $H_* = \int h dz$, а линейная плотность приближенного гамильтониана равна

$$h = \sum_n \left[\frac{\tilde{\Lambda}}{2} P(q_n) \left(1 + \frac{x_n'^2 + y_n'^2}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \sigma_n}{2} \int_{q_n}^{\infty} P(q) dq \right] + \sum_{m \neq n} \frac{\sigma_n \sigma_m}{2} \sqrt{P(q_n) P(q_m)} \times \\ \times K_0 \left(\sqrt{\frac{\tilde{\kappa}_n^2 + \tilde{\kappa}_m^2}{2}} |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m| \right). \quad (74)$$

При этом

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}^2(x, y) = & -2 \frac{P'(q)}{P(q)} + \\ & + \left(3 \frac{P'^2(q)}{P^2(q)} - 2 \frac{P''(q)}{P(q)} \right) [(1+\epsilon)^2 x^2 + (1-\epsilon)^2 y^2]. \end{aligned} \quad (75)$$

В случае гауссовой плотности получаем

$$\tilde{\kappa}_n^2 = 2 + (1 + \epsilon)^2 x_n^2 + (1 - \epsilon)^2 y_n^2.$$

Сравнительно компактным оказывается выражение для линейной плотности гамильтониана при $\epsilon = 0$, $\tilde{\Omega} = 0$ в терминах комплексных функций $w_n(z, t) = x_n(z, t) + iy_n(z, t)$:

$$\begin{aligned} h_w = & \sum_n \left[\frac{\tilde{\Lambda}}{2} \exp(-w_n w_n^*) \left(1 + \frac{w_n' w_n^{*'}}{2} \right) \right] + \\ & + \sum_{m \neq n} \frac{\sigma_n \sigma_m}{2} \exp \left(-\frac{w_n w_n^* + w_m w_m^*}{2} \right) \times \\ & \times K_0 \left(|w_n - w_m| \sqrt{2 + \frac{|w_n|^2 + |w_m|^2}{2}} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} i\partial_t w_n = & \sigma_n \tilde{\Lambda} \left(-\frac{1}{2} w_n'' - w_n + \frac{w_n'^2 w_n^*}{2} \right) - \\ & - w_n \sum_{m \neq n} \sigma_m \exp \left(\frac{|w_n|^2 - |w_m|^2}{2} \right) \times \\ & \times K_0 \left(|w_n - w_m| \sqrt{2 + \frac{|w_n|^2 + |w_m|^2}{2}} \right) + \\ & + \sum_{m \neq n} \sigma_m \exp \left(\frac{|w_n|^2 - |w_m|^2}{2} \right) \times \\ & \times K_0' \left(|w_n - w_m| \sqrt{2 + \frac{|w_n|^2 + |w_m|^2}{2}} \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{w_n - w_m}{|w_n - w_m|} \sqrt{2 + \frac{|w_n|^2 + |w_m|^2}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{|w_n - w_m| w_n}{2\sqrt{2 + (|w_n|^2 + |w_m|^2)/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

В частности, если имеются всего две вихревые нити одинакового знака, то возможны симметричные решения $w_1 = w(z, t)$, $w_2 = -w(z, t)$. При этом получается следующее эволюционное уравнение:

$$\begin{aligned} iw_t = & \tilde{\Lambda} \left(-\frac{1}{2} w'' - w + \frac{w'^2 w^*}{2} \right) - \\ & - w K_0 \left(2|w| \sqrt{2 + |w|^2} \right) + \\ & + 2K_0' \left(2|w| \sqrt{2 + |w|^2} \right) \frac{(1 + |w|^2)w}{|w| \sqrt{2 + |w|^2}}. \end{aligned} \quad (78)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, данная работа показала, что гамильтонов формализм является естественным и эффективным инструментом при теоретическом исследовании динамики квантовых вихрей в пространственно-неоднородных системах, подчиняющихся уравнению Гросса – Питаевского (возможно, с более сложной нелинейностью, и тогда наши результаты почти буквально переносятся на сверхтекучие ферми-газы [32–34]). Этот подход позволил нам без чрезмерных усилий получить достаточно нетривиальные и аккуратные новые результаты в области теории квантовых газов. Не следует также исключать возможность его применения и в иных областях физики, например, в астрофизике при исследовании вихревого движения материи в достаточно плотных квазиравновесных гравитирующих системах, если гидродинамические эффекты преобладают над кинетическими. В этой и других ситуациях гамильтонов метод способен дать если не всегда количественные результаты, то качественное понимание механики жидких неоднородных систем.

На основе результатов, полученных в данной работе, можно будет исследовать еще многие интересные свойства вихрей в захваченных бозе-конденсатах. Например, наша макроскопическая теория не дает ответа на вопрос о том, как в неоднородных статических решетках упакованы вихри — имеет ли место главным образом деформация правильной решетки (как предполагалось в работе [5]) или же появляются многочисленные дефекты. Этот вопрос может быть выяснен в рамках предложенной здесь гамильтоновой теории точечных вихрей путем систематического нахождения и изучения локальных минимумов гамильтониана с приближенной функцией Грина для разных профилей плотности и разного числа вихрей. Другие интересные вопросы: как двигаются индивидуальные вихри в макроскопически квазистационарных динамических состояниях в тех случаях, когда число вихрей не соответствует частоте вращения анизотропной ловушки; имеют ли место блуждания от периферии к центру и наоборот, или же каждый вихрь остается всегда на бо-

лее или менее фиксированной орбите. Еще одна проблема — как соответствуют найденные здесь трехмерные однородные решения $\tilde{\omega} = \mathbf{M}(t)$ макроскопических уравнений динамике систем с относительно небольшим числом вихревых нитей (порядка 10–50).

В гидродинамической теории остается еще множество нерешенных проблем применительно к пространственно-неоднородным системам. Так, насколько известно автору, в трехмерном случае гауссиан является пока, по сути, единственным профилем плотности (если не считать физически менее интересной экспоненты $\rho_0 = \exp(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$), для которого найдена функция Грина, определяющая вихревой гамильтониан. Ясно, что необходимо искать и другие точно решаемые задачи, а также разрабатывать эффективные методы приближенного вычисления трехмерных функций Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).
2. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys.: Condens. Matter **13**, R135 (2001).
3. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
4. J. R. Anglin, Phys. Rev. A **65**, 063611 (2002).
5. D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A **70**, 063620 (2004).
6. A. Recati, F. Zambelli, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **86**, 377 (2001).
7. S. Sinha and Yv. Castin, Phys. Rev. Lett. **87**, 190402 (2001).
8. A. Aftalion and T. Riviere, Phys. Rev. A **64**, 043611 (2001).
9. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, Phys. Rev. A **64**, 053611 (2001).
10. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **89**, 200403 (2002).
11. A. Aftalion and I. Danaila, Phys. Rev. A **68**, 023603 (2003).
12. A. Aftalion and I. Danaila, Phys. Rev. A **69**, 033608 (2004).
13. I. Danaila, Phys. Rev. A **72**, 013605 (2005).
14. A. Fetter, Phys. Rev. A **69**, 043617 (2004).
15. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, Phys. Rev. A **74**, 041603 (2006).
16. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
17. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **64**, 036305 (2001).
18. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **68**, 047302 (2003).
19. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **103**, 878 (2016).
20. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **104**, 875 (2016).
21. I. Coddington, P. Engels, V. Schweikhard, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **91**, 100402 (2003).
22. G. Baym, Phys. Rev. Lett. **91**, 110402 (2003).
23. L. O. Baksmaty, S. J. Woo, S. Choi, and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **92**, 160405 (2004).
24. S. A. Gifford and G. Baym, Phys. Rev. A **70**, 033602 (2004).
25. E. B. Sonin, Phys. Rev. A **71**, 011603(R) (2005).
26. G. Baym, C. J. Pethick, S. A. Gifford, and G. Watanabe, Phys. Rev. A **75**, 013602 (2007).
27. E. B. Sonin, Письма в ЖЭТФ **98**, 853 (2013).
28. P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis et al., Phys. Lett. A **375**, 3044 (2011).
29. S. Middelkamp, P. J. Torres, P. G. Kevrekidis et al., Phys. Rev. A **84**, 011605(R) (2011).
30. R. Navarro, R. Carretero-Gonzalez, P. J. Torres et al., Phys. Rev. Lett. **110**, 225301 (2013).
31. B. Y. Rubinstein and L. M. Pismen, Physica D **78**, 1 (1994).
32. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
33. A. Bulgac, Y.-L. Luo, P. Magierski et al., Science **332**, 1288 (2011).
34. A. Bulgac, M. M. Forbes, M. M. Kelley et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 025301 (2014).