

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАГНИТОПРОВОДИМОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ УСТОЙЧИВЫХ ОТКРЫТЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА СЛОЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 6 октября 2016 г.

Рассматривается электрическая проводимость в нормальных металлах в присутствии сильного магнитного поля. Предполагается, что ферми-поверхность металла имеет достаточно сложную форму, так что на уровне Ферми могут возникать квазиклассические электронные траектории различных типов при различных направлениях магнитного поля \mathbf{B} . Рассматриваемые эффекты связаны с наличием регулярных (устойчивых) открытых электронных траекторий, которые могут возникать в общем случае на сложных поверхностях Ферми. Траектории этого типа имеют красивое геометрическое описание и представляют собой квазипериодические линии с фиксированным средним направлением в \mathbf{p} -пространстве. Будучи устойчивыми геометрическими объектами, траектории такого вида существуют для некоторых открытых областей в пространстве направлений \mathbf{B} , которые могут быть представлены «зонами устойчивости» на единичной сфере \mathbb{S}^2 . Описано аналитическое поведение проводимости в зонах устойчивости, которое в общем случае носит нетривиальный характер.

DOI: 10.7868/S0044451017050169

1. ВВЕДЕНИЕ

Наши исследования здесь будут связаны с геометрией квазиклассических электронных траекторий на поверхности Ферми в присутствии сильного магнитного поля. Главной целью работы является детальное рассмотрение вклада устойчивых открытых траекторий в тензор проводимости в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$. Как мы увидим ниже, несмотря на довольно регулярные геометрические свойства устойчивых (общего положения) открытых траекторий, их вклад в магнитопроводимость является довольно нетривиальным с аналитической точки зрения, что вызывается нетривиальными статистическими свойствами траекторий этого вида. Здесь мы попытаемся представить общую картину поведения магнитопроводимости в случае присутствия таких траекторий на ферми-поверхности, включая описание зависимости проводимости как от величины, так и от направления \mathbf{B} . Мы увидим, что как структура «зон устойчивости» на угловой диаграмме, так и

поведение проводимости в сильных магнитных полях демонстрируют довольно нетривиальные свойства.

Наши рассуждения будут основываться на топологической картине для динамики электронов в пространстве квазимпульсов, возникающей для дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ общего вида в присутствии магнитного поля. Так, согласно стандартному подходу, будем предполагать, что электронные состояния в зоне проводимости параметризуются значениями квазимпульса \mathbf{p} , которые в действительности должны рассматриваться как точки трехмерного пространства, факторизованного по векторам обратной решетки:

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / \{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}.$$

Базисные векторы обратной решетки связаны с базисными векторами $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ прямой решетки формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \\ \mathbf{a}_2 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \\ \mathbf{a}_3 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)} \end{aligned}$$

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru



Рис. 1. Каноническое представление поверхностей рода $g = 0, 1, 2, \dots$

и определяют фундаментальную область (зону Бриллюэна) в \mathbf{p} -пространстве.

Противоположные грани параллелепипеда, образованного векторами $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, должны быть отождествлены друг с другом, так что пространство электронных состояний (для данной зоны проводимости) в действительности представляет собой¹⁾ трехмерный тор \mathbb{T}^3 .

Дисперсионное соотношение $\epsilon(\mathbf{p})$ может рассматриваться или как 3-периодическая функция в \mathbf{p} -пространстве, или просто как гладкая функция на компактном многообразии \mathbb{T}^3 , определяемом факторизацией \mathbf{p} -пространства по обратной решетке L . Точно так же уровни постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ могут рассматриваться или как 3-периодические двумерные поверхности в \mathbf{p} -пространстве, или как гладкие компактные поверхности $S_\epsilon \subset \mathbb{T}^3$, вложенные в трехмерный тор \mathbb{T}^3 . При последнем рассмотрении каждый несингулярный энергетический уровень представляет собой гладкую компактную ориентируемую поверхность, топологически эквивалентную одной из канонических поверхностей, задаваемых родом g (рис. 1).

Род g поверхности Ферми представляет важную топологическую характеристику электронного спектра в металле. Другой важной топологической характеристикой электронного спектра является способ вложения ферми-поверхности в \mathbb{T}^3 . В качестве примера, на рис. 2 представлено вложение поверхности рода $g = 3$ в первую зону Бриллюэна, имеющее «максимальный ранг».

Квазиклассическая эволюция электронных состояний в присутствии внешнего однородного магнитного поля \mathbf{V} может быть описана адиабатическим уравнением (см., например, [1, 2]):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}] \quad (1.1)$$

в пространстве квазиимпульсов.

Уравнение (1.1) аналитически интегрируемо в \mathbf{p} -пространстве, и квазиклассические траектории задаются пересечениями поверхностей постоянной

¹⁾ Мы не рассматриваем здесь спиновые переменные, которые не будут играть существенной роли в нашей картине.

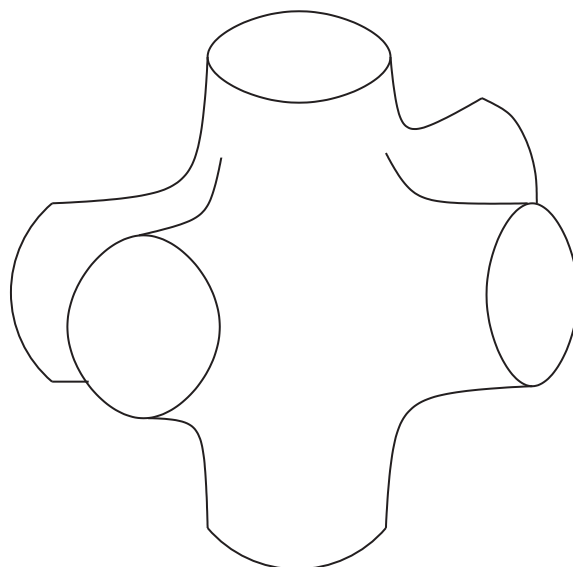


Рис. 2. Вложение «максимального ранга» поверхности рода $g = 3$ в тор \mathbb{T}^3

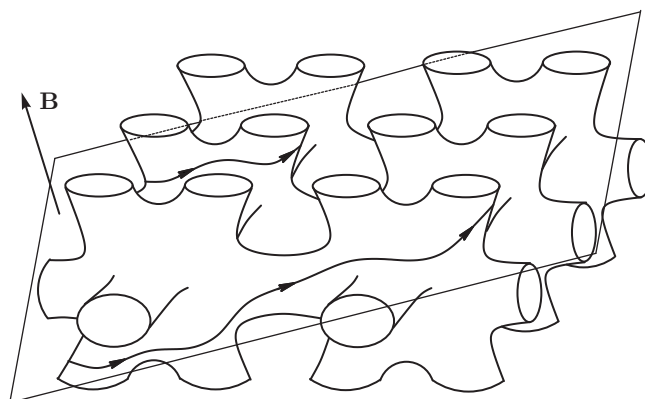


Рис. 3. Общая картина пересечения сложной 3-периодической поверхности с плоскостями, ортогональными общему направлению \mathbf{V}

энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ с плоскостями, ортогональными \mathbf{V} . Тем не менее, несмотря на это аналитическое свойство системы (1.1), глобальная геометрия квазиклассических траекторий в \mathbf{p} -пространстве может быть достаточно сложной. Причиной такого обстоятельства является то, что полное \mathbf{p} -пространство не является компактным, в то время как в \mathbb{T}^3 функция $\epsilon(\mathbf{p})$ представляет единственный однозначный интеграл движения (1.1). В общем случае мы можем ожидать довольно сложной картины пересечения 3-периодической поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ с плоскостями, ортогональными общему (полностью иррациональному) направлению \mathbf{V} (рис. 3).

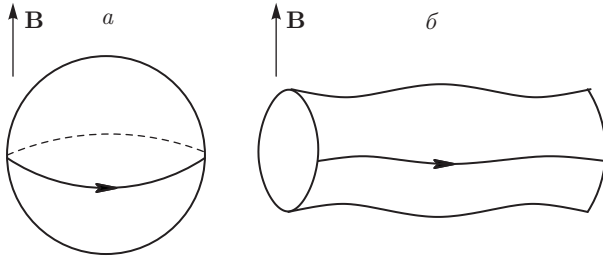


Рис. 4. Замкнутая (а) и периодическая (б) квазиклассические электронные траектории на различных поверхностях Ферми в \mathbf{p} -пространстве (показана только одна зона Бриллюэна)

Как обычно в случае нормальных металлов, мы будем здесь предполагать, что все электронные состояния с энергиями ниже энергии Ферми ϵ_F заполнены электронами, в то время как все электронные состояния с энергиями выше энергии Ферми являются пустыми. Поверхность Ферми $S_F : \epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ представляет двумерную поверхность в \mathbb{T}^3 , отделяющую занятые электронные состояния от пустых. При этом $\epsilon_{min} < \epsilon_F < \epsilon_{max}$, где ϵ_{min} и ϵ_{max} — минимальная и максимальная возможные энергии в зоне проводимости.

Система (1.1) сохраняет энергию частиц, а также элемент фазового объема d^3p . Как следствие, эволюция согласно системе (1.1), не меняет ферми-распределения квазичастиц или более общих, зависящих от температуры равновесных распределений

$$n(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(\epsilon(\mathbf{p}) - \mu)/T] + 1}.$$

Тем не менее, как оказывается, форма траекторий системы (1.1) играет важную роль для отклика электронной системы на слабые электрические поля \mathbf{E} , который определяет свойства магнитопроводимости нормальных металлов. Вследствие сильного вырождения электронного газа в металлах все свойства таких транспортных явлений определяются в действительности свойствами системы (1.1) лишь на одном уровне энергии $\epsilon = \epsilon_F$, т.е. лишь на одной энергетической (Ферми) поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$.

Роль глобальной геометрии квазиклассических электронных траекторий в транспортных явлениях в сильных магнитных полях была впервые выявлена школой И. М. Лифшица (И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, В. Г. Песчанский) в 1950-х гг. [3–8]. Так, в работе [3] была указана ключевая разница во вкладах в магнитопроводимость замкнутых (рис. 4а) и открытых периодических (рис. 4б) квазиклассических траекторий в пределе $B \rightarrow \infty$.

Как было показано [3], вклад в магнитопроводимость траекторий первого типа является почти изотропным в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и имеет быстрорубящийся характер в этой плоскости при $B \rightarrow \infty$. В противоположность этому присутствие открытых периодических траекторий дает дополнительный вклад в проводимость в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , который является сильноанизотропным в пределе $B \rightarrow \infty$. Асимптотическая форма тензора проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , в рассматриваемых случаях при подходящем выборе координат может быть представлена в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty$

для замкнутых траекторий и

$$\sigma^{\alpha\beta} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty$

для открытых периодических траекторий. (Здесь и ниже «*» означает некоторую константу порядка единицы.)

Формулы (1.2), (1.3) представляют асимптотическую форму тензора проводимости, так что все равенства задают в действительности лишь порядок абсолютных значений соответствующих величин. Величина m^* представляет здесь некоторую (приблизительную) эффективную массу электрона в кристалле, в то время как τ обозначает среднее время свободного пробега электрона, определяемое интенсивностью процессов рассеяния.

Величина $\omega_B \simeq eB/m^*c$ может рассматриваться как «приблизительное» значение циклотронной частоты в кристалле. С геометрической точки зрения ω_B представляет приблизительное обратное время движения вдоль замкнутой траектории (см. рис. 4а) или обратное время движения через одну зону Бриллюэна для периодических открытых траекторий (см. рис. 4б). С этой точки зрения становится ясно, что глобальная геометрия квазиклассических траекторий проявляется в точности в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$, когда среднее время свободного пробега превосходит время движения внутри одной зоны Бриллюэна. Заметим здесь, что при экспериментальном наблюдении «геометрического предела сильных магнитных полей» должны обычно использоваться довольно чистые материалы при довольно низких температурах ($T \sim 1$ К) и довольно сильных магнитных полях ($B \sim 10^4$ Гс).

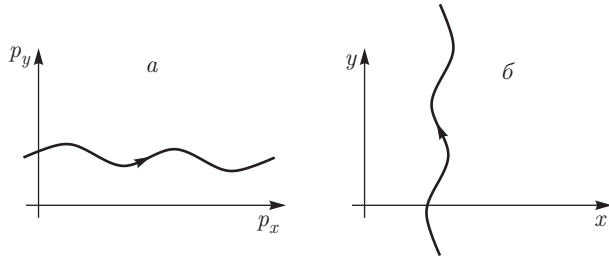


Рис. 5. Квазиклассическая электронная траектория в \mathbf{p} -пространстве (а) и ее проекция на плоскость, ортогональную \mathbf{B} , в x -пространстве (б)

В формуле (1.3) ось x выбрана вдоль среднего направления периодических траекторий в \mathbf{p} -пространстве. Как нетрудно вывести из системы (1.1), проекция соответствующей траектории в координатном пространстве на плоскость, ортогональную \mathbf{B} , дается поворотом траектории в \mathbf{p} -пространстве на угол 90° (рис. 5).

Таким образом, можно видеть, что в присутствии траекторий, показанных на рис. 4б, даже очень сильное магнитное поле не блокирует движение электронов вдоль оси y в координатном пространстве. Как результат, y -компонента проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , остается конечной в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$. Сильная анизотропия тензора проводимости в этой ситуации дает экспериментальную возможность наблюдения этого явления и определения среднего направления открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве.

Проводимость вдоль направления \mathbf{B} остается конечной в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ в обоих случаях, описанных выше. Асимптотическая форма полного тензора проводимости в x -пространстве может быть представлена в виде

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty$

для замкнутых траекторий и

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\omega_B\tau \rightarrow \infty$$

для открытых периодических траекторий.

Заметим здесь, что обе траектории, показанные на рис. 4, в действительности являются замкнутыми в торе \mathbb{T}^3 . Тем не менее их вложения в \mathbb{T}^3 совершенно различны с топологической точки зрения. Так, вложение траектории, показанной на рис. 4а, является «гомологичной нулю», в то время как вложение траектории, показанной на рис. 4б, представляет ненулевой класс гомологий в \mathbb{T}^3 . Конечно, различие между траекториями, показанными на рис. 4а и 4б, более очевидно в накрывающем \mathbf{p} -пространстве, где они имеют разную глобальную геометрию.

Заметим здесь также, что обе ситуации, показанные на рис. 4, отражают специальный случай, когда тензор проводимости может быть представлен в виде регулярного ряда по степеням $(\omega_B\tau)^{-1}$ в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$. Так, мы можем в действительности написать

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) \simeq & \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-1} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} + \dots \quad (1.6) \end{aligned}$$

для замкнутых траекторий и

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) \simeq & \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-1} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} + \dots \quad (1.7) \end{aligned}$$

для открытых периодических траекторий. Здесь четные степени $\omega_B\tau$ соответствуют симметрической части $\sigma^{kl}(B)$, в то время как нечетные степени $\omega_B\tau$ представляют антисимметрическую часть в соответствии с соотношениями Онсагера.

Как мы увидим ниже, эта ситуация не имеет места для открытых траекторий более общего вида на поверхности Ферми.

В работах [4, 5] были рассмотрены различные примеры сложных поверхностей Ферми и более общие типы открытых электронных траекторий в сильных магнитных полях. Траектории, рассматриваемые в [4, 5], в общем случае не являются периодическими и не замкнуты как в \mathbb{T}^3 , так и в \mathbf{p} -пространстве и представляют первые примеры устойчивых открытых траекторий на сложной поверхности Ферми. Форма траекторий, построенных в работах [4, 5], также проявляет сильноанизотропные свойства, так что в этом случае следует ожидать сильной анизотропии тензора проводимости в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$. Как было указано в работе [9], аналитическое поведение проводимости в этих примерах может в действительности отличаться от (1.5) и характеризуется более медленным приближением к ее предельной форме в интервале не слишком сильных магнитных полей. Здесь мы попытаемся исследовать этот вопрос в общем случае, используя топологическое описание устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми.

В работах [6, 7, 10], а также в книге [8] представлен замечательный обзор как теоретических, так и экспериментальных исследований в данной области электронной теории металлов, проведенных в то время. Нам бы хотелось здесь сослаться также на работу [9], которая возвращается к данной тематике спустя сорок лет, и содержит ее аспекты, возникшие в более поздний период.

Общая проблема классификации всех возможных типов траекторий динамической системы (1.1) с произвольным (периодическим) дисперсионным законом $\epsilon(\mathbf{p})$ была поставлена С. П. Новиковым [11] и интенсивно исследовалась в его топологической школе (С. П. Новиков, А. В. Зорич, С. П. Царев, И. А. Дынников). Топологическое исследование системы (1.1) привело к довольно детальному пониманию геометрии траекторий различных типов и дало в итоге полную классификацию траекторий (1.1). Одна из наиболее важных частей математической теории траекторий (1.1), играющая также очень важную роль в настоящей работе, связана с детальным описанием устойчивых открытых траекторий системы (1.1). Отметим здесь, что наиболее важные результаты в этой проблеме были получены в работах [12, 13], где были доказаны довольно глубокие теоремы о незамкнутых траекториях системы (1.1).

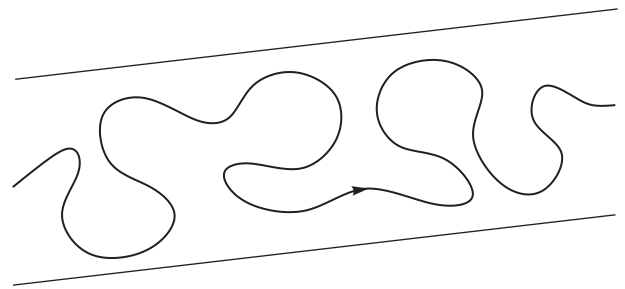


Рис. 6. Устойчивая (квазипериодическая) открытая траектория системы (1.1), проходящая через прямую полосу конечной ширины в плоскости, ортогональной \mathbf{B}

С использованием топологического описания устойчивых открытых траекторий системы (1.1) оказалось возможным определить важные топологические характеристики устойчивых нетривиальных режимов поведения магнитопроводимости в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$, введенные в работе [14]. В общем случае, характеристики, введенные в [14], могут быть описаны следующим образом.

Исключим сейчас «тривиальные» случаи, когда у нас имеются лишь замкнутые электронные траектории на поверхности Ферми в \mathbf{p} -пространстве, и рассмотрим ситуацию, когда открытые траектории (в \mathbf{p} -пространстве) присутствуют на уровне Ферми. Кроме того, потребуем, чтобы открытые траектории были устойчивы по отношению к малым поворотам направления \mathbf{B} , так что у нас имеется «зона устойчивости» (ЗУ) в пространстве направлений \mathbf{B} , в которой на уровне Ферми присутствуют открытые траектории одного типа.

Из топологического описания устойчивых открытых траекторий системы (1.1) следует, что траектории этого типа обладают следующими замечательными свойствами:

1) каждая устойчивая открытая (в \mathbf{p} -пространстве) траектория (1.1) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , проходя ее насквозь от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 6);

2) среднее направление всех устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве дается пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и некоторой целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости Γ , одной и той же для всей ЗУ в пространстве направлений \mathbf{B} .

Отметим здесь, что утверждение 1) было впервые сформулировано С. П. Новиковым в форме гипотезы, которая была доказана позднее для устойчивых открытых траекторий (1.1) [12, 13].

Как было указано в работе [14], целочисленные плоскости Γ_α представляют экспериментально на-

блюдаемые объекты в силу замечательных геометрических свойств устойчивых открытых траекторий, описанных выше. Так, измерение проводимости в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ позволяет наблюдать ее сильноанизотропное поведение в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , для всех $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ и определить целочисленную плоскость Γ_α , заматаемую направлениями наибольшего убывания проводимости в \mathbf{x} -пространстве.

Введем величины

$$\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) = \lim_{\omega_B \tau \rightarrow \infty} \sigma^{kl}(\mathbf{V}), \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Тогда, можно выбрать в \mathbf{x} -пространстве базис

$$(\mathbf{e}_1(\mathbf{V}), \mathbf{e}_2(\mathbf{V}), \mathbf{e}_3 = \mathbf{V}/B),$$

гладко зависящий от \mathbf{V} в Ω_α , в котором величины σ_∞^{kl} будут иметь вид

$$\sigma_\infty^{kl} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Как мы сказали выше, направление вектора $\mathbf{e}_1(\mathbf{V})$ задается пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , с целочисленной плоскостью, т. е. с плоскостью, порожденной двумя векторами обратной решетки, \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , одной и той же для ЗУ Ω_α .

Целочисленная плоскость Γ_α может быть представлена несократимой тройкой целых чисел ($M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3$) согласно уравнению

$$M_\alpha^1(\mathbf{x}, \mathbf{l}_1) + M_\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{l}_2) + M_\alpha^3(\mathbf{x}, \mathbf{l}_3) = 0, \quad (1.9)$$

где $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис прямой решетки. Числа ($M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3$) были названы [14] топологическими квантовыми числами, наблюдаемыми в проводимости нормальных металлов. Отметим здесь, что наборы ($M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3$) могут быть довольно нетривиальными для сложных поверхностей Ферми.

Полная ЗУ Ω_α может быть названа здесь математической ЗУ, соответствующей заданной энергии Ферми. Мы должны сказать здесь, однако, что в экспериментальных исследованиях магнитопроводимости оказывается естественным ввести расширенную «экспериментально наблюдаемую» ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ ($\Omega_\alpha \subset \hat{\Omega}_\alpha$), обусловленную специальным поведением траекторий системы (1.1) вблизи границы Ω_α . Везде в $\hat{\Omega}_\alpha$ поведение проводимости оказывается экспериментально неотличимым от ее поведения в Ω_α даже при хорошем выполнении условия $\omega_B \tau \gg \gg 1$, пока величина B магнитного поля не становится очень большой. Условная форма $\hat{\Omega}_\alpha$ зависит в

действительности от условий эксперимента и определяется, главным образом, максимальными значениями B в эксперименте. Разница между ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ и Ω_α , которая может быть определена в очень сильных магнитных полях, представляет в действительности одну из существенных особенностей аналитического поведения проводимости, рассматриваемого здесь.

Отметим теперь, что устойчивые открытые квазиклассические траектории не представляют всех возможных типов незамкнутых траекторий системы (1.1) и траектории с более сложной геометрией могут также возникать на сложных поверхностях Ферми для специальных направлений \mathbf{V} . Так, первый пример траектории, которая не может быть ограничена какой-либо прямой полосой конечной ширины, был построен С. П. Царевым²⁾. Траектория Царева характеризуется явным хаотическим поведением на поверхности Ферми и существенно отличается от устойчивых открытых траекторий с этой точки зрения. С другой стороны, траектория Царева также сильноанизотропна в \mathbf{p} -пространстве и имеет асимптотическое направление в плоскости, ортогональной \mathbf{V} . Таким образом, с экспериментальной точки зрения вклад траекторий Царева в магнитопроводимость также является сильноанизотропным в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ и соответствует режиму (1.8). Отметим, однако, что хаотические траектории Царева являются совершенно неустойчивыми по отношению к малым вращениям направления \mathbf{V} и не связаны с топологически устойчивыми характеристиками в противоположность устойчивым открытым траекториям, обсуждавшимся выше. Надо также сказать, что траектории типа Царева (если они присутствуют) могут появляться лишь на множестве нулевой меры в пространстве направлений \mathbf{V} .

Другой пример незамкнутой траектории (1.1), обладающей сильнохаотическим поведением как в \mathbb{T}^3 , так и в \mathbf{p} -пространстве, был построен Дынниковым [15]. Траектории Дынникова довольно сильно отличаются от хаотических траекторий Царева и требуют максимальной иррациональности направления \mathbf{V} для своего наблюдения. Поведение тензора проводимости в присутствии хаотических траекторий, построенных в [15], было исследовано в работе [16] и оказалось отличным как от режима, задаваемого (1.4), так и от режима (1.5). Наиболее интересной особенностью вклада в тензор проводимости траекторий этого типа является то, что присутствие таких траекторий подавляет проводимость во всех

²⁾ Частное сообщение (1992–1993 гг.).

направлениях, включая направление \mathbf{V} , в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$.

В общем случае хаотические траектории Дынникова и Царева представляют два разных общих типа возможного хаотического поведения траекторий системы (1.1), так что в этом смысле все хаотические траектории (1.1) могут быть отнесены к типу Царева или Дынникова. Отметим здесь, что различные свойства хаотических траекторий системы (1.1) также интенсивно исследуются в современной математической литературе [17–27].

Направления \mathbf{V} , отвечающие хаотическим открытым траекториям, могут появляться только вне ЗУ, соответствующих устойчивым открытым траекториям системы (1.1). Точно так же хаотические открытые траектории различных типов (типа Царева или Дынникова) не могут появляться при одном и том же направлении \mathbf{V} . Заметим, однако, что в общем случае вклад незамкнутых траекторий в тензор проводимости должен складываться с вкладом (1.4) замкнутых траекторий системы (1.1), которые обычно присутствуют вместе с открытыми траекториями (любого типа) на той же поверхности Ферми.

Более строгое описание возможных ситуаций в поведении траекторий (1.1) с произвольным периодическим дисперсионным законом может быть найдено в подробном математическом обзоре [22], посвященном этим вопросам. Подробное рассмотрение различных физических результатов, основанное на результатах топологических исследований системы (1.1), можно найти в работах [28–30].

Наша главная цель в данной работе — более детальное исследование поведения проводимости в ЗУ, основанное на детальном топологическом описании устойчивых открытых электронных траекторий, возникающих для соответствующих направлений \mathbf{V} . Как мы уже сказали, соответствующие устойчивые открытые траектории характеризуются довольно регулярными топологическими свойствами в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} . Так, все устойчивые открытые траектории имеют форму, показанную на рис. 6, и одно и то же среднее направление в \mathbf{p} -пространстве, задаваемое пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , с целочисленной плоскостью Γ_α , фиксированной для соответствующей ЗУ Ω_α . В результате тензор проводимости имеет здесь асимптотическую форму (1.8) в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ и характеризуется специфическими геометрическими свойствами, описанными выше. Эти геометрические (или топологические) свойства тензора проводимости дают наиболее устойчивые (топологические) характеристики проводимости для данной ЗУ и связа-

ны с «чисто геометрическим» пределом $\omega_{BT} \rightarrow \infty$. В то же время мы увидим ниже, что тензор проводимости характеризуется в общем случае довольно нетривиальной аналитической зависимостью от \mathbf{V} в различных частях экспериментально наблюдаемых ЗУ, что вызывается специфическими особенностями различных траекторий системы (1.1) в этих областях. Здесь мы исследуем аналитические свойства проводимости для случая довольно больших (но конечных) значений параметра ω_{BT} , используя топологическое описание «носителей открытых траекторий» на поверхности Ферми, определенных для соответствующих направлений \mathbf{V} . Мы увидим ниже, что как зависимость от параметра ω_{BT} , так и зависимость от направления \mathbf{V} обладают здесь довольно нетривиальными свойствами.

В следующем разделе мы дадим описание экспериментально наблюдаемой ЗУ и постараемся описать главные особенности аналитического поведения проводимости в различных ее частях, что дает, с нашей точки зрения, основное описание картины, возникающей в общем случае. В разд. 3 и 4 мы представим более детальное рассмотрение вклада устойчивых открытых траекторий в магнитопроводимость, основанное на топологическом описании таких траекторий на сложных поверхностях Ферми. Разделы 3 и 4 имеют более математический характер по сравнению с разд. 2.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО НАБЛЮДАЕМОЙ ЗОНЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Чтобы описать вкратце общую картину, приведем здесь основные аспекты, которые будут играть наиболее существенную роль в нашем рассмотрении. Данный раздел будет в большей части описательным, в то время как более детальный анализ будет представлен в разд. 3 и 4.

Как мы уже говорили, устойчивые открытые траектории демонстрируют квазипериодические свойства для направлений \mathbf{V} общего положения ($\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$). Тем не менее они становятся чисто периодическими для некоторых специальных направлений магнитного поля. Нетрудно видеть, что такая ситуация возникает всякий раз, когда плоскость, ортогональная \mathbf{V} , пересекает плоскость Γ_α вдоль целочисленного вектора в \mathbf{p} -пространстве:

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{q}_1 + k_2 \mathbf{q}_2 = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 \quad (2.1)$$

$$(k_1, k_2, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

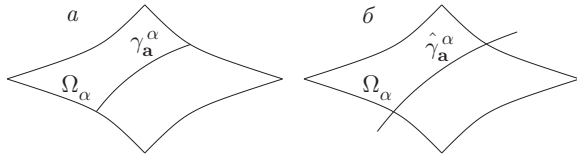


Рис. 7. а) Схематическое представление семейства γ_a^α специальных направлений \mathbf{V} , соответствующих рациональному среднему направлению \mathbf{a} открытых траекторий, внутри ЗУ Ω_α . б) Полное одномерное множество $\hat{\gamma}_a^\alpha$ направлений \mathbf{V} , отвечающих существованию периодических траекторий со средним направлением \mathbf{a} , пересекающее ЗУ Ω_α

Оба случая квазипериодических и периодических траекторий в этой ситуации приводят в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ к тензору проводимости (1.8), имеющему одни и те же геометрические свойства для данной ЗУ. Тем не менее, как мы увидим ниже, предельные значения компонент $\sigma^{22}, \sigma^{23}, \sigma^{32}, \sigma^{33}$, т. е. величины

$$\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) = \lim_{\omega_B \tau \rightarrow \infty} \sigma^{kl}(\mathbf{V}), \quad k, l = 2, 3$$

(направление \mathbf{V}/B фиксировано), будут иметь здесь резкие «скачки» по отношению к тем же величинам, определенным для близких направлений \mathbf{V} общего положения.

Более точно можно ввести функции $\bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)$, $k, l = 2, 3$, представляющие собой непрерывные функции $\mathbf{n} = \mathbf{V}/B$ в ЗУ Ω_α и совпадающие с соответствующими величинами $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)$ для направлений $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ общего положения. Однако для специальных направлений \mathbf{V} , описанных выше, мы будем иметь $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) \neq \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)$, что вызвано особенностями статистического усреднения по открытым траекториям (1.1) вблизи поверхности Ферми. Нетрудно показать также, что для таких направлений \mathbf{V} мы всегда будем иметь неравенства

$$\sigma_\infty^{22}(\mathbf{V}/B) - \bar{\sigma}_\infty^{22}(\mathbf{V}/B) > 0,$$

$$\sigma_\infty^{33}(\mathbf{V}/B) - \bar{\sigma}_\infty^{33}(\mathbf{V}/B) > 0,$$

в то время как знаки $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) - \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)$, $k \neq l$, вообще говоря, могут быть произвольными.

Направления $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$, соответствующие фиксированному рациональному среднему направлению \mathbf{a} открытых траекторий, представляют одномерную кривую γ_a^α (на S^2), задаваемую пересечением большого круга, ортогонального \mathbf{a} , и ЗУ Ω_α (рис. 7а). Мы должны отметить, однако, что, согласно более детальному рассмотрению, периодические траектории существуют в действительности на некоторой большей кривой $\hat{\gamma}_a^\alpha$, представляющей продолжение кривой γ_a^α за пределы ЗУ Ω_α (рис. 7б). Все открытые

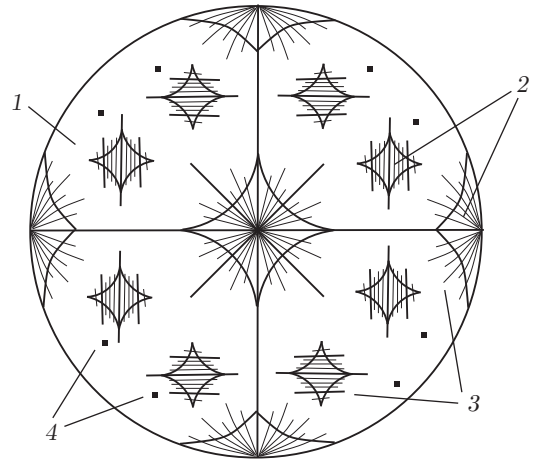


Рис. 8. Схематическая угловая диаграмма, представляющая различные ситуации для разных направлений \mathbf{V} на единичной сфере: 1 — замкнутые траектории; 2 — ЗУ (устойчивые открытые траектории); 3 — неустойчивые периодические траектории; 4 — хаотические траектории типа Царева и Дынникова

траектории имеют при этом одно и то же среднее направление \mathbf{a} для всех $\mathbf{V}/B \in \hat{\gamma}_a^\alpha$, при этом площадь, покрываемая открытыми траекториями на поверхности Ферми, обращается в нуль в конечных точках $\hat{\gamma}_a^\alpha$. Периодические открытые траектории демонстрируют устойчивые свойства внутри ЗУ Ω_α и становятся неустойчивыми вне Ω_α на кривой $\hat{\gamma}_a^\alpha$. Отметим здесь также, что мера открытых траекторий общего положения (квазипериодических) на поверхности Ферми остается конечной вплоть до границы ЗУ. В общем случае схематическая угловая диаграмма, соответствующая сложной поверхности Ферми, может быть представлена рис. 8.

Мы хотели бы подчеркнуть, что для уровня Ферми ϵ_F общего положения мера устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми остается конечной вплоть до границы «математической» ЗУ Ω_α . Тем не менее в литературе часто предполагается, что эта мера обращается в нуль на границе ЗУ на угловой диаграмме, что представляется согласованным с экспериментальными данными. Как мы увидим ниже, последнее обстоятельство вызвано существованием большей «экспериментально наблюдаемой» ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$, включающей дополнительную область Λ_α , примыкающую к границе Ω_α , с весьма специальным поведением траекторий системы (1.1). Будет также показано, что присутствие дополнительной зоны Λ_α ответственно также за возникновение довольно нетривиальных аналитических режимов в поведении проводимости в расширенной ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$.

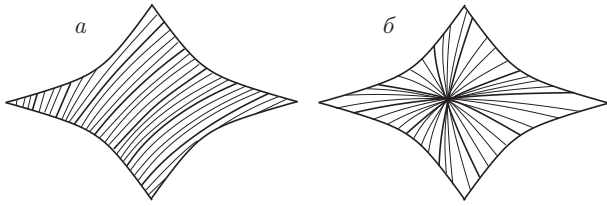


Рис. 9. Плотная сеть направлений \mathbf{V} внутри Ω_α , соответствующих возникновению периодических траекторий, в случаях, когда направление, ортогональное Γ_α , не принадлежит Ω_α (а) и когда это направление принадлежит Ω_α (б)

Мы можем видеть, таким образом, что каждая ЗУ Ω_α в действительности покрыта всюду плотной сетью, представляющей «специальные направления» \mathbf{V} , соответствующие различным средним направлениям \mathbf{a} устойчивых открытых траекторий (рис. 9). Множество всех возможных рациональных средних направлений \mathbf{a} открытых траекторий задается двумя условиями:

- 1) $\mathbf{a} \in \Gamma_\alpha$,
- 2) $C_{\mathbf{a}} \cap \Omega_\alpha \neq \emptyset$,

где $C_{\mathbf{a}}$ представляет большой круг, ортогональный направлению \mathbf{a} .

Везде на описанной сети мы имеем ситуацию

$$\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) \neq \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B),$$

однако разность

$$|\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) - \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)|$$

убывает с ростом номеров m_1, m_2, m_3 в выражении (2.1). Как мы увидим ниже, приближительная оценка этой разности для сложных поверхностей Ферми может быть записана в виде ($k, l = 2, 3$)

$$|\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B) - \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{V}/B)| \sim \frac{\ln^2(|m_1| + |m_2| + |m_3|)}{(|m_1| + |m_2| + |m_3|)^2}. \quad (2.2)$$

В физической ситуации, когда величины \mathbf{V} являются конечными, но довольно большими, «скачки» на кривых $\gamma_{\mathbf{a}}^\alpha$ становятся очень резкими «пиками» на этих кривых, которые могут быть названы «рациональными пиками» в значениях магнитопроводимости в соответствии с рациональностью среднего направления соответствующих открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве.

Второй важный аспект в нашей картине связан с поведением траекторий системы (1.1) вблизи границ ЗУ Ω_α вне ЗУ. Как мы уже сказали, периодические траектории системы (1.1) на уровне Ферми

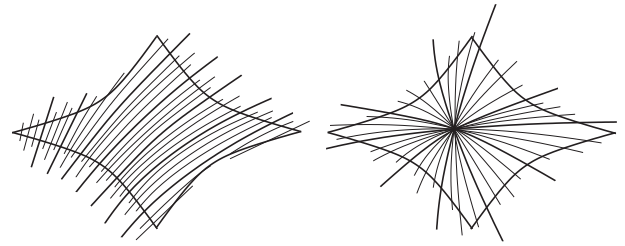


Рис. 10. Полные множества направлений \mathbf{V} вблизи Ω_α , отвечающие возникновению периодических траекторий на поверхности Ферми

существуют в действительности для направлений \mathbf{V} , принадлежащих расширенным кривым $\hat{\gamma}_{\mathbf{a}}^\alpha$, так что только в конечных точках $\hat{\gamma}_{\mathbf{a}}^\alpha$ мера траекторий с периодом \mathbf{a} на поверхности Ферми обращается в нуль. В результате полное множество направлений \mathbf{V} вблизи Ω_α , соответствующее наличию открытых траекторий на уровне Ферми, представляет ЗУ Ω_α с набором дополнительных сегментов около Ω_α , который является всюду плотным на границе ЗУ Ω_α (рис. 10).

Здесь мы хотели бы отметить, что присутствие дополнительных сегментов, примыкающих к ЗУ на угловой диаграмме и соответствующих наличию периодических открытых траекторий на поверхности Ферми, обсуждалось в литературе (см., например, [4–10]). Обычно полагается, однако, что этот набор задается конечным числом сегментов, соответствующих некоторым специальным (главным) рациональным направлениям \mathbf{a} . Мы хотели бы здесь подчеркнуть, что дополнительные сегменты возникают для любой кривой $\gamma_{\mathbf{a}}^\alpha \subset \Omega_\alpha$, связанной с рациональным средним направлением траекторий (1.1). В результате, эти сегменты образуют всюду плотное множество вблизи границы Ω_α , что играет важную роль в образовании дополнительной экспериментально наблюдаемой зоны Λ_α вокруг точной математической ЗУ Ω_α .

В то же время мера открытых траекторий на поверхности Ферми для направлений общего положения $\mathbf{V}/B \notin \hat{\gamma}_{\mathbf{a}}^\alpha$ остается конечной вплоть до границы ЗУ и скачком обращается в нуль вне Ω_α . Перестройка открытых траекторий на границе Ω_α приводит в этом случае к появлению длинных замкнутых траекторий вблизи границы Ω_α , которые очень близки к открытым траекториям с экспериментальной точки зрения вплоть до очень больших значений B . Мы можем утверждать, таким образом, что при экспериментальном наблюдении проводимости мы наблюдаем в действительности некоторую расширен-

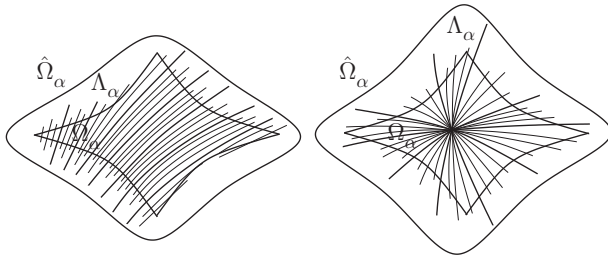


Рис. 11. Расширенные ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$, наблюдаемые в экспериментах

ную ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$, включающую точную ЗУ в качестве подмножества. Границы расширенной ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ являются в некотором смысле условными и зависят от максимальных значений B , используемых в эксперименте. Мы можем утверждать, тем не менее, что экспериментально наблюдаемая ЗУ больше точной ЗУ на множество конечной меры для любого максимального значения магнитного поля B_{max} (рис. 11).

Множество $\Lambda_\alpha = \hat{\Omega}_\alpha / \Omega_\alpha$ может быть названо дополнением к ЗУ Ω_α , возникающим при экспериментальном наблюдении проводимости в сильных магнитных полях.

Можно также ввести величины $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ и $\bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ в областях Λ_α , которые будут иметь тот же смысл, что и в областях Ω_α . В этих областях имеем тождественно

$$\bar{\sigma}_\infty^{22} \equiv \bar{\sigma}_\infty^{23} \equiv \bar{\sigma}_\infty^{32} \equiv 0.$$

Как и в Ω_α , для направлений \mathbf{B} общего положения имеем $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B) \equiv \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ и в общем случае $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B) \neq \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ для $\mathbf{B}/B \in \hat{\gamma}_\alpha$.

Как в областях Ω_α , так и в Λ_α , приближение величин σ^{kl} к их предельным значениям σ_∞^{kl} является довольно нерегулярным (но с некоторым общим трендом), что делает поведение проводимости довольно нетривиальным с экспериментальной точки зрения даже для величин B , удовлетворяющих формальному критерию $\omega_{BT} \gg 1$.

Во-первых, как мы уже отмечали, величины $\sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ отличны от величин $\bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)$ на кривых $\hat{\gamma}_\alpha$ как в областях Ω_α , так и в областях Λ_α . Эти величины непрерывны вдоль каждой кривой $\hat{\gamma}_\alpha$ вплоть до границы ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ (более точно, до конечных точек $\hat{\gamma}_\alpha$), в то же время они являются разрывными в трансверсальных к $\hat{\gamma}_\alpha$ направлениях.

Формально говоря, все открытые траектории в зоне Λ_α являются периодическими, так что их вклад в магнитопроводимость может быть представлен в регулярной форме (1.5). Однако, как нетрудно видеть, период траекторий, задаваемый формулой

(2.1), может быть довольно большим для больших чисел (m_1, m_2, m_3) . В результате особенности регулярного разложения могут наблюдаться в действительности лишь на масштабах

$$\omega_{BT} \gg |m_1| + |m_2| + |m_3|.$$

В то же время на масштабах величин B , удовлетворяющих условию

$$1 < \omega_{BT} < |m_1| + |m_2| + |m_3|, \quad (2.3)$$

вклад периодических траекторий обладает свойствами, аналогичными свойствам, соответствующим открытым траекториям общего положения. Можно утверждать, таким образом, что для больших величин $|m_1| + |m_2| + |m_3|$ периодические открытые траектории неотличимы от траекторий общего положения, если величины B удовлетворяют ограничению (2.3). Отметим здесь также, что при тех же ограничениях на B периодические открытые траектории также неотличимы от длинных замкнутых траекторий вблизи кривой $\hat{\gamma}_\alpha$ в зоне Λ_α .

Мы хотели бы сделать теперь несколько замечаний, относящихся к экспериментальным наблюдениям магнитопроводимости в (монокристаллических) металлах со сложными поверхностями Ферми. Отметим прежде всего, что измерение магнитопроводимости в присутствии открытых траекторий очень часто производится для направлений \mathbf{B} , принадлежащих наиболее крупным ЗУ, характеризующимся наибольшей площадью и наиболее высокой симметрией на угловой диаграмме. Довольно часто удобно также зафиксировать небольшое количество направлений \mathbf{B} внутри ЗУ и измерять магнитопроводимость, меняя величину B магнитного поля. В силу особенностей экспериментальной установки довольно часто оказывается, что соответствующий набор направлений \mathbf{B} представляет в действительности некоторые симметричные или «рациональные» точки на угловой диаграмме, так что все (или часть) направления принадлежат в действительности некоторым кривым $\hat{\gamma}_\alpha \subset \hat{\Omega}_\alpha$, отвечающим довольно простым периодам \mathbf{a} открытых траекторий. Это в точности соответствует случаю, когда магнитопроводимость проявляет регулярное поведение (1.7) при простом условии $\omega_{BT} \gg 1$.

Соответствующий тензор магнитосопротивления может быть записан в этом случае в виде

$$\begin{aligned} \rho_{kl} \simeq & \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} (\omega_{B\tau})^2 & \omega_{B\tau} & \omega_{B\tau} \\ \omega_{B\tau} & * & * \\ \omega_{B\tau} & * & * \end{pmatrix} + \\ & + \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} (\omega_{B\tau})^{-1} + \\ & + \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} (\omega_{B\tau})^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

В частности, поведение поперечной проводимости ($\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$) описывается регулярным квадратичным законом:

$$\rho_{\perp} \propto B^2 \cos^2 \varphi + \text{const}, \quad \omega_{B\tau} \gg 1, \quad (2.5)$$

где φ — угол с осью x в нашей координатной системе.

Ситуация становится иной в случае, когда открытые траектории имеют иррациональное среднее направление

$$\hat{d} \sim \mathbf{q}_1 + \kappa \mathbf{q}_2, \quad \kappa \notin \mathbb{Q} \quad (2.6)$$

в плоскости Γ_{α} . С одной стороны, предельные значения тензора проводимости также задаются здесь соотношениями (1.8) в пределе $\omega_{B\tau} \rightarrow \infty$. В то же время регулярные разложения (1.7) и (2.4) не могут быть записаны в общем случае для среднего направления открытых траекторий общего положения. Можно показать также, что асимптотическое поведение величин $\sigma^{kl}(B)$ описывается здесь более медленным (нерегулярным) приближением к их предельным значениям $\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$. В общем случае асимптотическое поведение $\sigma^{kl}(B)$ внутри ЗУ Ω_{α} для иррационального среднего направления открытых траекторий может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) = \\ = \begin{pmatrix} a^2(B) & b(B) & c(B) \\ -b(B) & \bar{\sigma}_{\infty}^{22} + q^2(B) & \bar{\sigma}_{\infty}^{23} + r(B) \\ -c(B) & \bar{\sigma}_{\infty}^{23} - r(B) & \bar{\sigma}_{\infty}^{33} + p^2(B) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функции $a(B)$, $b(B)$, $c(B)$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$a(B) \sim b(B) \sim c(B) \sim (\omega_{B\tau})^{-1}. \quad (2.8)$$

В то же время функции $q(B)$, $p(B)$ имеют следующий «общий тренд»:

$$q(B) \sim p(B) \sim \frac{\ln \omega_{B\tau}}{\omega_{B\tau}}. \quad (2.9)$$

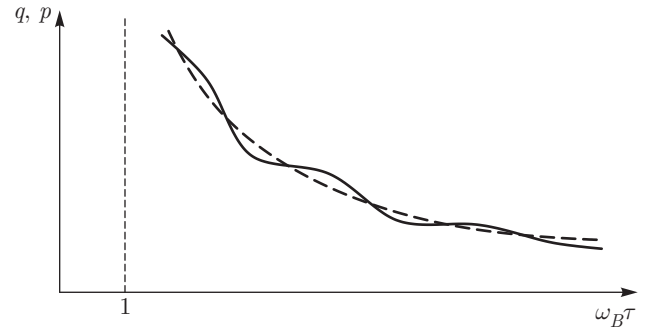


Рис. 12. Схематическое изображение поведения функций $q(B)$ и $p(B)$ в области $\omega_{B\tau} \gg 1$ (сплошная линия); штриховая линия — общий тренд

Подчеркнем здесь, что знак « \sim » в (2.9) означает лишь некоторый общий тренд в поведении соответствующих функций, который допускает дополнительные нерегулярные поправки на конечных масштабах. В общем случае эти поправки могут быть охарактеризованы как «каскады ступенчатых возмущений» со структурой, определяемой свойствами числа κ (рис. 12). Отметим здесь, что поведение функций $q(B)$, $p(B)$ может характеризоваться заметными локальными отклонениями от тренда для специальных иррациональных чисел κ , могущих быть приближенными рациональными числами с высокой точностью. В частности, последнее обстоятельство может быть важным для направлений \mathbf{B} , близких к специальным направлениям $\mathbf{B}/B \in \gamma_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, которые обсуждались выше.

Поведение функций $r(B)$ является еще более сложным по сравнению с поведением $q(B)$ и $p(B)$. Здесь мы хотели бы предложить лишь следующее «доверительное» ограничение на B :

$$|r(B)| \leq \frac{\ln \omega_{B\tau}}{\omega_{B\tau}} \quad (2.10)$$

— зависимость функции $r(B)$, которая может характеризоваться довольно нерегулярным поведением при различных значениях B .

Другой важной особенностью соотношений (2.9), (2.10) является то, что простое условие $\omega_{B\tau} \gg 1$ не является здесь достаточным для того, чтобы получить значения σ_{∞}^{kl} с хорошей точностью. Последнее обстоятельство может быть понято из того факта, что величины σ_{∞}^{kl} задаются теперь усреднением определенных динамических величин по довольно сложной части поверхности Ферми, а не по одномерной окружности. В результате соотношения (2.9), (2.10) могут содержать в действительности большой безразмерный коэффициент, определяемый геомет-

рией поверхности Ферми. Можно ожидать, таким образом, что в интервале не очень больших значений B геометрические характеристики носителей открытых траекторий будут играть важную роль в поведении $\sigma^{kl}(B)$ и могут определять заметные отклонения от асимптотического режима (2.9). Как следствие этого мы должны ожидать также, что в интервале не очень сильных магнитных полей как предельные значения величин $\sigma^{kl}(B)$, так и зависящие от B поправки к ним будут играть существенную роль в поведении проводимости.

В общем случае картина, приведенная выше, дает описание главных особенностей поведения $\sigma^{kl}(B)$ внутри математической ЗУ Ω_α .

В зоне Λ_α мы должны ввести функцию $\lambda(\mathbf{B}/B)$, $1 \leq \lambda < \infty$, характеризующую средний размер длинных замкнутых траекторий для направлений \mathbf{B} общего положения. В общем случае функция $\lambda(\mathbf{B}/B)$ может быть определена как отношение длины таких траекторий в \mathbf{p} -пространстве к размеру зоны Бриллюэна. Заметим, что определение функции $\lambda(\mathbf{B}/B)$ имеет в действительности довольно приблизительный характер. При этом естественно ввести «промежуточные» устойчивые значения проводимости $\bar{\sigma}_{int}^{kl}(\mathbf{B}/B)$, $k, l = 2, 3$, пропорциональные мере длинных замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Для исследования поведения проводимости при не очень сильных магнитных полях, $1 \ll \omega_B \tau < \lambda(\mathbf{B}/B)$, и для направлений \mathbf{B} общего положения в Λ_α мы можем при этом использовать соотношения ($1 \ll \omega_B \tau < \lambda$)

$$\sigma^{kl}(B) = \begin{pmatrix} a^2(B) & b(B) & c(B) \\ -b(B) & \bar{\sigma}_{int}^{22} + q^2(B) & \bar{\sigma}_{int}^{23} + r(B) \\ -c(B) & \bar{\sigma}_{int}^{23} - r(B) & \bar{\sigma}_{int}^{33} + p^2(B) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

с теми же замечаниями относительно функций $a(B)$, $b(B)$, $c(B)$, $q(B)$, $r(B)$, $p(B)$.

Для описания асимптотического поведения проводимости в области очень сильных магнитных полей, $\omega_B \tau \gg \lambda(\mathbf{B}/B)$, при тех же направлениях \mathbf{B} удобно рассматривать отдельно симметричную $s^{kl}(B)$ и антисимметричную $a^{kl}(B)$ части тензора $\sigma^{kl}(B)$. Как будет показано ниже, соответствующие части тензора $\sigma^{kl}(B)$ могут быть приближены соответственно выражениями

$$s^{kl}(B) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'^{33} \end{pmatrix} + \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_B \tau)^{-2} & \lambda(\omega_B \tau)^{-2} & \lambda(\omega_B \tau)^{-2} \\ \lambda(\omega_B \tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B \tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B \tau)^{-2} \\ \lambda(\omega_B \tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B \tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B \tau)^{-2} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где

$$\sigma'^{33} < \bar{\sigma}_{int}^{33}, \quad (2.13)$$

и

$$a^{kl}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} 0 & (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & 0 & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Заметим, что взаимные вклады симметрической и антисимметрической частей тензора $\sigma^{kl}(B)$ имеют здесь довольно нетривиальный характер. Так, можно видеть, что величины $\sigma^{23}(B)$ и $\sigma^{32}(B)$ определяются главным образом симметрической частью в интервале $\lambda(\mathbf{B}/B) \leq \omega_B \tau \leq \lambda^2(\mathbf{B}/B)$ и антисимметрической частью для $\omega_B \tau > \lambda^2(\mathbf{B}/B)$. Другая важная особенность в поведении проводимости определяется здесь соотношением (2.13), которое указывает на подавление проводимости вдоль направления \mathbf{B} в области $\omega_B \tau \gg \lambda(\mathbf{B}/B) \gg 1$.

Значения $\lambda(\mathbf{B}/B)$ равны единице на внешней границе области Λ_α . В то же время мы должны положить $\lambda(\mathbf{B}/B) = \infty$ на кривых $\hat{\gamma}_\alpha^\alpha$ в Λ_α и на границе между областями Ω_α и Λ_α . Нетрудно видеть, что функции $\bar{\sigma}_{int}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ теряют свой смысл и не являются хорошо определенными на внешней границе области Λ_α . На границе между Ω_α и Λ_α можно написать $\bar{\sigma}_{int}^{kl}(\mathbf{B}/B) = \bar{\sigma}_{\infty+}^{kl}(\mathbf{B}/B)$, где величины $\bar{\sigma}_{\infty+}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ — граничные значения $\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ внутри Ω_α .

Согласно приведенным замечаниям, видно, что в действительности точная граница между областями Ω_α и Λ_α обычно не наблюдается в экспериментах.

Описанная выше картина делает аналитическую структуру тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ довольно сложной. Наиболее сложная ситуация может возникать в той части зоны Λ_α , где $\omega_B \tau \simeq \lambda(\mathbf{B}/B)$ для типичных значений B в эксперименте. В последнем случае поведение $\sigma^{kl}(B)$ может характеризоваться наиболее сложными трендами, промежуточными между (2.11) и (2.12)–(2.14). При экспериментальном исследовании поведения проводимости может быть удоб-

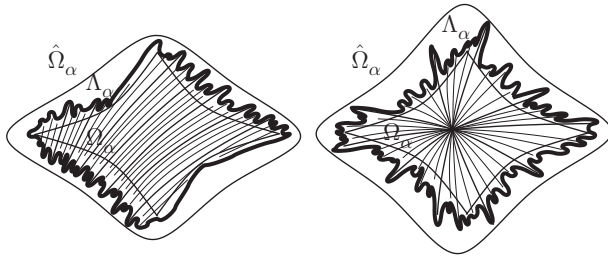


Рис. 13. Зона наиболее сложного поведения тензора проводимости (выделено темным) в экспериментально наблюдаемой ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$

но приближение соответствующих режимов с помощью промежуточных степеней $\omega_B\tau$, имеющее вид

$$\sigma^{kl}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2\mu} & (\omega_B\tau)^{-\nu} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-\nu} & * \end{pmatrix}$$

($0 \leq \mu, \nu \leq 1, \mu \simeq \nu$) в интервалах довольно больших значений B .

В качестве примера, полагая приближенно $\mu = \nu$, мы можем записать соотношение для поведения сопротивления в сильных магнитных полях:

$$\rho_{kl}(B) \simeq \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{2-2\mu} & \omega_B\tau & (\omega_B\tau)^{1-\mu} \\ \omega_B\tau & * & * \\ (\omega_B\tau)^{1-\mu} & * & * \end{pmatrix}.$$

В частности, получаем следующее приближение для сопротивления в плоскости, ортогональной \mathbf{B} :

$$\rho_\perp \propto B^{2-2\mu} \cos^2 \varphi + \text{const}, \quad \omega_B\tau \gg 1,$$

где φ — угол с осью x в нашей координатной системе.

Мы должны сказать, однако, что степени μ и ν играют здесь лишь роль локальных аппроксимирующих параметров и являются неустойчивыми как по отношению к изменению направления \mathbf{B} , так и по отношению к большим изменениям его абсолютной величины. Заметим также, что соответствующая часть Λ_α имеет в общем случае довольно сложную структуру ввиду сложного поведения функции $\lambda(\mathbf{B}/B)$ (рис. 13).

Таким образом, экспериментальное исследование гальваномагнитных явлений в присутствии открытых траекторий может выявлять довольно нетривиальное поведение магнитопроводимости, обусловленное как сложной зависимостью проводимости от величины B , так и возможными вариациями направления \mathbf{B} в эксперименте. Общая аналитическая картина, описанная выше, может

быть использована для описания зависимости магнитопроводимости как от величины B , так и от направления \mathbf{B} внутри экспериментально наблюдаемой ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$. Отметим снова, что описанная выше картина основана лишь на геометрическом рассмотрении траекторий системы (1.1) и не включает множество других существенных эффектов, которые могут быть важны в реальных металлах.

В конце раздела хотелось бы отметить, что описанная нами картина основана на предположении, что поверхность Ферми металла имеет сложную форму. Это предположение означает, в частности, что носители устойчивых открытых траекторий имеют форму, определяемую общими топологическими теоремами для дисперсионного закона общего положения. Эта форма будет описана в следующем разделе и имеет некоторые характерные особенности для поверхностей Ферми S_F общего положения. Тем не менее для простых поверхностей Ферми специальной формы носители открытых траекторий могут иметь более простую форму, что проявляется также в более простом поведении проводимости в сравнении с описанным выше.

В качестве примера простой поверхности Ферми можно рассмотреть пару слабodeформированных целочисленных плоскостей в \mathbf{p} -пространстве (как для некоторых классов органических металлов). Нетрудно видеть, что точная математическая ЗУ Ω может быть отождествлена здесь со всей сферой S^2 и совпадает с экспериментально наблюдаемой ЗУ $\hat{\Omega}$. В результате мы не можем наблюдать здесь эффекты, связанные с перестройкой открытых траекторий, типичных для зон Λ_α . Рациональные пики в проводимости могут здесь наблюдаться в случае поверхностей, имеющих существенные деформации (см., например, работу [31]), однако они убывают экспоненциально с ростом чисел (m_1, m_2, m_3) . Как результат, мы можем ожидать экспериментального наблюдения лишь конечного числа линий γ_a вместо сложной угловой зависимости, наблюдаемой в зонах Ω_α . Нетрудно видеть также, что для случая исчезающей амплитуды деформации плоскостей тензор проводимости характеризуется очень быстрым приближением к его предельной форме, задаваемой формулой (1.8).

В следующих разделах мы приведем более детальное рассмотрение описанных выше эффектов, используя кинетическое описание транспортных явлений. В общем и целом, все приведенные выше утверждения могут быть получены в рамках τ -приближения в кинетическом уравнении для электронного газа.

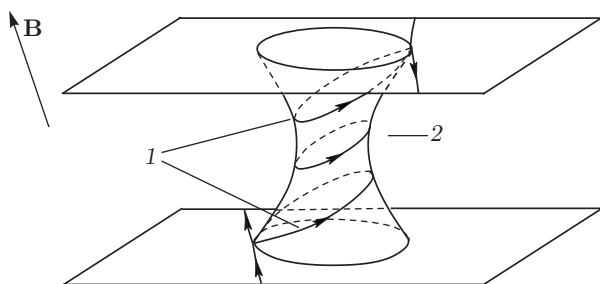


Рис. 14. Часть поверхности Ферми, представляющая цилиндр замкнутых траекторий, ограниченный сингулярными траекториями: сингулярные (1) и несингулярные (2) замкнутые траектории

3. ГЕОМЕТРИЯ УСТОЙЧИВЫХ ОТКРЫТЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ТЕНЗОР ПРОВОДИМОСТИ

Начнем с описания ситуации общего положения, возникающей на поверхности Ферми в случае наличия устойчивых открытых траекторий при $\epsilon = \epsilon_F$ [22]. Везде ниже будем подразумевать, что поверхность Ферми представляет собой гладкую несамопересекающуюся 3-периодическую поверхность в \mathbf{p} -пространстве.

Рассмотрим общую картину пересечения 3-периодической поверхности в \mathbf{p} -пространстве плоскостями, ортогональными \mathbf{V} (см. рис. 3). Прежде всего рассмотрим замкнутые траектории в \mathbf{p} -пространстве, если они присутствуют на поверхности Ферми.

Несингулярные замкнутые траектории в \mathbf{p} -пространстве всегда являются локально-устойчивыми и могут быть объединены в связные цилиндры, состоящие из траекторий такого типа. В случае, когда связная компонента поверхности Ферми не состоит только из замкнутых траекторий, эти цилиндры имеют конечные высоты и ограничены сингулярными замкнутыми траекториями (рис. 14).

Проведем теперь следующую перестройку поверхности Ферми: удалим все цилиндры замкнутых траекторий с поверхности Ферми и заполним образовавшиеся отверстия двумерными дисками, ортогональными \mathbf{V} (рис. 15). Нетрудно видеть, что реконструированная поверхность Ферми содержит те же открытые траектории, что и исходная, так что мы можем исследовать поведение открытых траекторий на реконструированной поверхности.

Реконструированная поверхность Ферми представляет собой 3-периодическую поверхность, содержащую в общем случае бесконечно много связных компонент в \mathbf{p} -пространстве. Можно сформулировать следующую важную теорему о связных компонентах реконструированной поверхности Ферми в

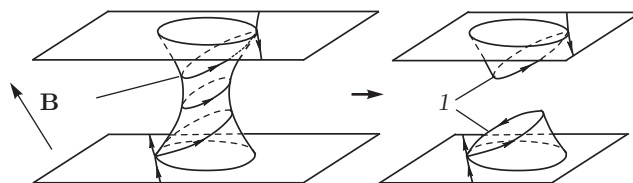


Рис. 15. Перестройка поверхности Ферми, задаваемая удалением несингулярных замкнутых траекторий и заполнением отверстий двумерными дисками (1), ортогональными \mathbf{V}

случае наличия устойчивых открытых траекторий [12, 13, 22]:

каждая связная компонента реконструированной поверхности Ферми, несущей открытые электронные траектории, представляет собой периодическую деформацию целочисленной плоскости в \mathbf{p} -пространстве.

Напомним здесь, что плоскость Γ называется целочисленной, если она порождена двумя векторами обратной решетки. Таким образом, каждая связная компонента реконструированной поверхности Ферми имеет два независимых периода, представленных двумя векторами обратной решетки. Отметим также, что представленная выше картина является устойчивой по отношению к малым вращениям направления \mathbf{V} ввиду локальной устойчивости несингулярных замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Все связные компоненты реконструированной поверхности Ферми параллельны друг другу, что приводит к совпадению средних направлений всех устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве. Последнее свойство было названо в работах [28, 29] топологическим резонансом и играет важную роль в экспериментальном наблюдении анизотропных режимов в проводимости и топологических чисел, соответствующих данной ЗУ.

В данной работе мы будем использовать описанную выше картину как общую картину, возникающую в случае наличия устойчивых незамкнутых электронных траекторий на поверхности Ферми. Отметим здесь, что эта картина может иметь некоторые дополнительные особенности для некоторых специальных направлений \mathbf{V} внутри ЗУ [22], которые также могут быть обнаружены в экспериментальных исследованиях [28, 29]. Эти явления, однако, имеют необщий характер и не будут здесь рассматриваться.

После факторизации по векторам обратной решетки каждая связная компонента реконструированной поверхности Ферми превращается в двумер-

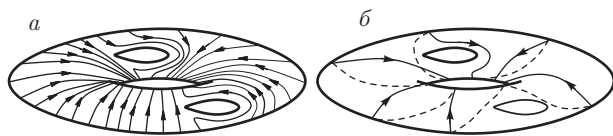


Рис. 16. Схематическое топологическое представление всюду плотной (непериодической) траектории на $\mathbb{T}^2 \setminus \cup D_i^2$ (а) и замкнутой (периодической в \mathbf{p} -пространстве) траектории (б) на том же многообразии после факторизации по векторам обратной решетки

ный тор \mathbb{T}^2 , вложенный в \mathbb{T}^3 . Количество неэквивалентных компонент в \mathbb{T}^3 всегда является конечным и задается четным числом.

Открытые (в \mathbf{p} -пространстве) траектории системы (1.1) на уровне Ферми даются пересечениями компонент реконструированной поверхности Ферми с плоскостями, ортогональными \mathbf{V} , и представляют иррациональные обмотки соответствующих торов \mathbb{T}^2 (за исключением двумерных дисков D^2) в случае общего положения (рис. 16а). Тем не менее для специальных направлений \mathbf{V} пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , с целочисленной плоскостью Γ_α ($\mathbf{V} \in \Omega_\alpha$) может иметь рациональное (целочисленное) направление, что означает в действительности, что соответствующие траектории (1.1) становятся периодическими в \mathbf{p} -пространстве. Соответствующие траектории в \mathbb{T}^3 становятся при этом замкнутыми кривыми на торах \mathbb{T}^2 и не являются более всюду плотными на множествах $\mathbb{T}^2 \setminus \cup D_i^2$, которые могут быть названы носителями открытых траекторий на поверхности Ферми (рис. 16б).

Открытые траектории общего положения и периодические открытые траектории обладают разными статистическими свойствами на носителях открытых траекторий. Как мы увидим ниже, это обстоятельство будет играть важную роль в поведении тензора проводимости $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$.

Периодические траектории не могут появляться для полностью иррациональных направлений \mathbf{V} , поскольку плоскость, ортогональная \mathbf{V} , должна содержать по меньшей мере один вектор обратной решетки. Заметим, что класс рациональности направления магнитного поля \mathbf{V} определяется как число линейно независимых векторов обратной решетки, лежащих в плоскости, ортогональной \mathbf{V} . В частности, направление $\hat{\mathbf{V}}_\alpha^0$, ортогональное плоскости Γ_α , представляет полностью рациональное направление согласно этому определению.

В общем случае направления \mathbf{V} в ЗУ Ω_α , отвечающие периодическим открытым траекториям, образуют всюду плотную сеть одномерных кривых,

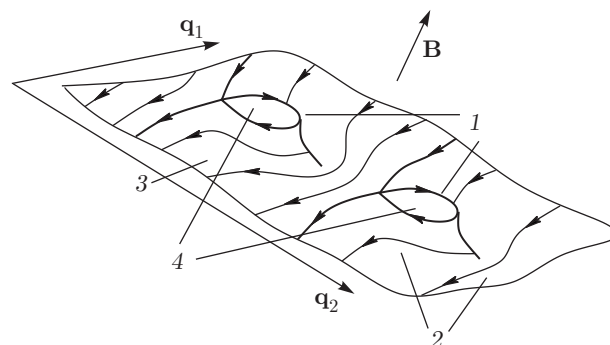


Рис. 17. Связная компонента реконструированной поверхности Ферми, представляющая периодически деформированную целочисленную плоскость в \mathbf{p} -пространстве с периодами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in L^*$: 1 — сингулярные замкнутые траектории; 2 — открытые траектории; 3 — их носители; 4 — двумерные диски

не пересекающих друг друга в Ω_α в случае, когда направление $\hat{\mathbf{V}}_\alpha^0 \perp \Gamma_\alpha$ не принадлежит Ω_α (см. рис. 9а), или пересекающихся в одной точке $\hat{\mathbf{V}}_\alpha^0$, если $\hat{\mathbf{V}}_\alpha^0 \in \Omega_\alpha$ (см. рис. 9б).

Как мы уже сказали выше, все одномерные кривые γ_α^α должны быть в действительности продолжены за пределы ЗУ Ω_α , поскольку периодические открытые траектории в действительности существуют для более широкого множества направлений \mathbf{V} , окружающего Ω_α . Периодические открытые траектории при этом становятся неустойчивыми по отношению к малым вращениям направления \mathbf{V} вне Ω_α . Мы должны отметить также, что разница между кривыми γ_α^α и $\hat{\gamma}_\alpha^\alpha$ уменьшается с ростом «знаменателя» рационального среднего направления периодических траекторий и исчезает в пределе $|\mathbf{a}| \rightarrow \infty$ (см. рис. 10).

Рассмотрим теперь носители открытых траекторий более детально.

Общая форма связных компонент реконструированной поверхности Ферми показана на рис. 17 и представляет периодически деформированную целочисленную плоскость в \mathbf{p} -пространстве с двумя периодами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, задаваемыми двумя независимыми векторами обратной решетки.

Носители открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве представляют собой те же самые периодически деформированные целочисленные плоскости без «искусственных» двумерных дисков D^2 , вклеенных после удаления замкнутых траекторий. Мы исключим здесь специальный случай, когда магнитное поле \mathbf{V} ортогонально плоскости Γ_α и рассмотрим случай общего положения

$$\mathbf{V} \parallel \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (3.1)$$

В нашем рассмотрении будем предполагать, что ось z всегда выбирается вдоль направления \mathbf{V} , в то время как оси x и y ортогональны \mathbf{V} . В случае общего положения, описанном выше, величина p_z разделяет все различные траектории на заданной компоненте, так что p_z может быть выбрана в качестве «координаты» на соответствующем носителе открытых траекторий. Вторая координата на носителях открытых траекторий естественно задается параметром t , измеряемым вдоль траекторий согласно системе (1.1).

В общем случае естественная система локальных координат в \mathbf{p} -пространстве (или \mathbb{T}^3) задается тройкой (p_z, t, ϵ) , если мы рассматриваем систему (1.1) для всех значений ϵ . Координаты (p_z, t, ϵ) естественно связаны с системой (1.1) и обладают также еще одним замечательным свойством:

$$dp_z dt d\epsilon \equiv \frac{c}{eB} dp_x dp_y dp_z. \quad (3.2)$$

Последнее свойство обусловлено в действительности гамильтоновыми свойствами системы (1.1), являющейся гамильтоновой системой с гамильтонианом $\epsilon(\mathbf{p})$ и скобкой Пуассона

$$\{p_1, p_2\} = \frac{e}{c} B, \quad \{p_2, p_3\} = 0, \quad \{p_3, p_1\} = 0$$

($\mathbf{V} \parallel \nabla z$).

Можно видеть также, что интегрирование по слою, ограниченному значениями энергии ϵ_0 и $\epsilon_0 + d\epsilon$, может быть представлено как интегрирование по энергетической поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0$ в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \iiint_{\epsilon_0 < \epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_0 + d\epsilon} f(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z = \\ = \frac{eB d\epsilon}{c} \iint_{\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0} f(p_z, t, \epsilon_0) dp_z dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формула (3.3) дает в действительности довольно удобный способ статистического усреднения любых величин по распределению Ферми в присутствии магнитного поля.

Нетрудно видеть, что каждая связная компонента реконструированной поверхности Ферми может быть представлена как периодический набор фундаментальных (минимальных) областей, тождественных друг другу (рис. 18). Фундаментальные области могут быть выбраны в форме «криволинейных»

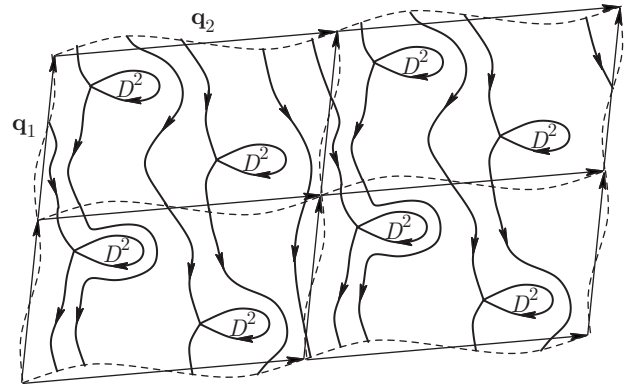


Рис. 18. Периодический набор фундаментальных областей на связной компоненте реконструированной поверхности Ферми

параллелограммов со сторонами, соответствующими векторам \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 . Соответствующее разделение связных компонент реконструированной поверхности Ферми дает также естественное разделение на фундаментальные области соответствующих носителей открытых траекторий.

Все фундаментальные области физически эквивалентны друг другу, так что каждая область представляет в действительности полный набор физических состояний, задаваемых всей компонентой. Двумерные торы $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^3$, которые мы обсуждали выше, могут также рассматриваться как любая из фундаментальных областей с отождествленными противоположными сторонами. Как мы уже сказали, каждая несингулярная открытая траектория становится при этом гладкой кривой на торе \mathbb{T}^2 , которая может быть открытой или замкнутой (периодической в \mathbf{p} -пространстве) в зависимости от направления \mathbf{V} (см. рис. 16).

Разница между замкнутыми и незамкнутыми траекториями на торах \mathbb{T}^2 обуславливает очевидную разницу в усреднении любой физической величины по времени на таких траекториях. Так, мы можем утверждать, что любое временное среднее по траектории общего положения (незамкнутой на \mathbb{T}^2) совпадает с усреднением соответствующей величины по носителю открытых траекторий, которое гладко зависит от направления \mathbf{V} внутри ЗУ. С другой стороны, временное усреднение на периодической (замкнутой на \mathbb{T}^2) траектории в общем случае отлично от среднего значения той же величины на носителе открытых траекторий. Последнее обстоятельство может приводить к нерегулярной зависимости тензора проводимости от направления \mathbf{V} внутри Ω_α .

Рассмотрим теперь стандартное кинетическое описание (см., например, [2, 8, 32]) магнитотранспортных явлений, используя геометрическую картину, описанную выше.

Полная динамическая система для адиабатической эволюции электронных состояний в присутствии как магнитного, так и электрического поля может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] + e\mathbf{E}. \quad (3.4)$$

В системе (3.4) электрическое поле \mathbf{E} будет рассматриваться в качестве малой величины, в то же время предполагается, что величина магнитного поля удовлетворяет условию для сильных магнитных полей $\omega_B\tau \gg 1$.

В кинетическом приближении мы должны ввести одночастичную функцию распределения $f(\mathbf{p}, t)$, удовлетворяющую уравнению Больцмана

$$f_t + \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]^l \frac{\partial f}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f}{\partial p^l} = I[f](\mathbf{p}, t), \quad (3.5)$$

где $I[f]$ — интеграл столкновений. Здесь нас будут интересовать стационарные решения уравнения (3.5), так что мы полагаем $f(\mathbf{p}, t) = f(\mathbf{p})$.

В отсутствие электрического поля функция распределения $f(\mathbf{p})$ задается ее равновесными значениями

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon_F)/T] + 1}$$

и мы имеем тождественно $I[f](\mathbf{p}) \equiv 0$. Тензор проводимости $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ определяется линейной по \mathbf{E} поправкой к функции $f_0(\mathbf{p})$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]^l \frac{\partial f_{(1)}}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f_0}{\partial p^l} = \left[\hat{L}_{[f_0]} \cdot f_{(1)} \right](\mathbf{p}), \quad (3.6)$$

где $\hat{L}_{[f_0]}$ представляет линеаризацию функционала $I[f](\mathbf{p})$ на соответствующей функции f_0 . Величина $\hat{L}_{[f_0]} \cdot f_{(1)}$ может рассматриваться в качестве члена, связанного с релаксацией неравновесных возмущений к равновесному состоянию. В так называемом τ -приближении правая часть системы (3.6) может быть заменена величиной $-f_{(1)}(\mathbf{p})/\tau$, где τ играет роль характерного времени релаксации. Нам будет удобно использовать здесь τ -приближение для уравнения (3.6), которое является достаточным, чтобы описать все основные особенности нашей карти-

ны. Характерное время релаксации τ обычно отождествляется со средним временем свободного пробега электрона.

Введем теперь новую переменную $s = teB/c$, где t — параметр вдоль траекторий системы (1.1), введенный выше, и рассмотрим координатную систему (p_z, s, ϵ) в \mathbf{p} -пространстве. Параметр s имеет чисто геометрический смысл в \mathbf{p} -пространстве и не зависит от величины B . Согласно (3.2), (3.3), можно написать

$$dp_z ds d\epsilon \equiv dp_x dp_y dp_z,$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\epsilon_0 < \epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_0 + d\epsilon} f(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z &= \\ &= d\epsilon \iint_{\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0} f(p_z, s, \epsilon_0) dp_z ds. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть также, что при наших предположениях уравнение для функции $f_{(1)}(p_z, s, \epsilon)$ в координатной системе (p_z, s, ϵ) может быть представлено в виде

$$\frac{eB}{c} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial s} + e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{gr}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = -\frac{f_{(1)}}{\tau}.$$

После подстановки

$$f_{(1)}(p_z, s, \epsilon) = -\frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \sum_{l=1}^3 E^l g^l(p_z, s, \epsilon) \quad (3.7)$$

получаем для функций $g^l(p_z, s, \epsilon)$ линейные системы

$$\frac{eB}{c} \frac{\partial g^l}{\partial s} - e v_{gr}^l(p_z, s, \epsilon) = -\frac{1}{\tau} g^l. \quad (3.8)$$

Решения систем (3.8), необходимые нам, могут быть записаны в виде

$$g^l(p_z, s, \epsilon) = \frac{c}{B} \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s', \epsilon) \times \exp\left[\frac{c(s' - s)}{eB\tau}\right] ds', \quad (3.9)$$

где интегрирование проводится вдоль всей части траектории, предшествующей точке (p_z, s, ϵ) .

Среднее значение плотности электрического тока дается формулой

$$j^k = e \int v_{gr}^k(p_z, s, \epsilon) f_{(1)}(p_z, s, \epsilon) \frac{dp_z ds d\epsilon}{(2\pi\hbar)^3}$$

(в линейном приближении по E).

Форма (3.7) поправки $f_{(1)}$ соответствует в действительности сильной концентрации $f_{(1)}(p_z, s, \epsilon)$ вблизи поверхности Ферми для большинства нормальных металлов, так что член $-\partial f_0/\partial \epsilon$ может быть заменен дельта-функцией $\delta(\epsilon - \epsilon_F)$ при интегрировании по ϵ . В конечном итоге мы приходим к следующему простому выражению для величины плотности электрического тока:

$$j^k = \frac{ec}{B} \iint_{S_F} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} v_{gr}^k(p_z, s) \times \sum_{l=1}^3 \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s') \exp\left[\frac{c(s' - s)}{eB\tau}\right] ds' E^l.$$

Общая форма тензора проводимости σ^{kl} может быть представлена в виде

$$\sigma^{kl}(B) = \frac{ec}{B} \iint_{S_F} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} v_{gr}^k(p_z, s) \times \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s') \exp\left[\frac{c(s' - s)}{eB\tau}\right] ds'. \quad (3.10)$$

Вклад открытых траекторий $\Delta\sigma^{kl}$ дается ограничением интеграла в (3.10) на множество носителей открытых траекторий \hat{S}_F вместо всей поверхности Ферми, так что мы можем написать

$$\Delta\sigma^{kl}(B) = \frac{ec}{B} \iint_{\hat{S}_F} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} v_{gr}^k(p_z, s) \times \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s') \exp\left[\frac{c(s' - s)}{eB\tau}\right] ds'. \quad (3.11)$$

Заметим, что нерегулярное поведение $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в Ω_α полностью определяется функциями $\Delta\sigma^{kl}(\mathbf{B})$, поэтому будем интересоваться главным образом поведением $\Delta\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в пределе $B \rightarrow \infty$.

Нетрудно видеть, что для всех типов траекторий в нашем случае в пределе $B \rightarrow \infty$ для тензора проводимости можно написать

$$\sigma_\infty^{kl} = e^2\tau \iint_{S_F} v_{gr}^k(p_z, s) \langle v_{gr}^l \rangle_{tr}(p_z, s) \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\langle v_{gr}^l \rangle_{tr}(p_z, s)$ — среднее значение групповой скорости на траектории, проходящей через точку (p_z, s) :

$$\langle v_{gr}^l \rangle_{tr}(p_z, s) = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0} \int_{s-s_0}^s v_{gr}^l(p_z, s') ds'.$$

Для получения вклада открытых траекторий мы должны теперь ограничить интегрирование на множество носителей открытых траекторий \hat{S}_F на поверхности Ферми, так что для вклада устойчивых открытых траекторий в проводимость в пределе $B \rightarrow \infty$ можно написать

$$\Delta\sigma_\infty^{kl} = e^2\tau \iint_{\hat{S}_F} v_{gr}^k(p_z, s) \langle v_{gr}^l \rangle_{tr}(p_z, s) \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Отметим здесь, что согласно нашему выбору системы координат (x, y, z) мы всегда будем иметь $\langle v_{gr}^x \rangle_{tr} = 0$ и $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr} \neq 0$, $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr} \neq 0$ для устойчивых открытых траекторий.

Согласно данному выше определению, величины $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z, s)$ не зависят от переменной s для траекторий нашего типа. Как следствие, первый множитель может быть также заменен его средним значением на каждой из траекторий системы (1.1). В итоге для вклада устойчивых открытых траекторий в магнитопроводимость при $B \rightarrow \infty$ можно написать

$$\Delta\sigma_\infty^{kl} = e^2\tau \iint_{\hat{S}_F} \langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z) \langle v_{gr}^l \rangle_{tr}(p_z) \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.12)$$

Заметим, что тензор σ_∞^{kl} является чисто симметричным согласно (3.12), что не имеет места для конечных величин B .

Дадим теперь качественный вывод режимов поведения проводимости, описанных в предыдущем разделе.

В случае направления \mathbf{B} общего положения (непериодические открытые траектории) средние значения $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ могут быть отождествлены со средними значениями тех же величин на соответствующих (связных) носителях открытых траекторий \hat{S}_F^γ ,

$$\langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^\gamma} = \iint_{\hat{S}_F^\gamma} v_{gr}^k(p_z, s) dp_z ds / \iint_{\hat{S}_F^\gamma} dp_z ds,$$

и являются постоянными на каждом носителе устойчивых открытых траекторий.

В общем случае, средние значения $\langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^\gamma}$ могут быть также выражены через величины $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ по формуле

$$\langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^\gamma} = \iint_{\hat{S}_F^\gamma} \langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z) dp_z ds / \iint_{\hat{S}_F^\gamma} dp_z ds. \quad (3.13)$$

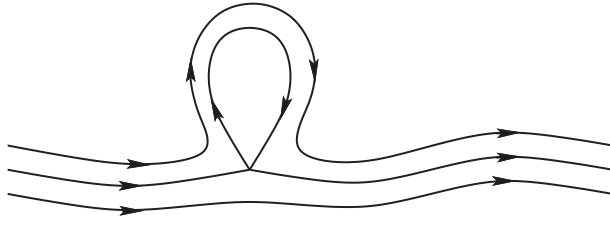


Рис. 19. Открытые периодические траектории, имеющие различную геометрию, вблизи сингулярной траектории на поверхности Ферми

Введем теперь функции

$$\Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) = e^2\tau \sum_{\gamma} \int_{\hat{S}_F^{\gamma}} \langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^{\gamma}} \langle v_{gr}^l \rangle_{\hat{S}_F^{\gamma}} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3},$$

где суммирование ведется по всем связным носителям \hat{S}_F^{γ} устойчивых открытых траекторий. Функции $\Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ являются гладкими функциями направления \mathbf{B} внутри любой ЗУ Ω_{α} . Согласно (3.12), функции $\Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ совпадают с предельными значениями $\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ для направлений \mathbf{B} общего положения, соответствующих непериодической форме открытых траекторий.

В то же время для специальных направлений \mathbf{B} , отвечающих периодической форме устойчивых открытых траекторий, величины (3.12) не совпадают с $\Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ из-за зависимости величин $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ от p_z . Из неравенства Шварца в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{\infty}^{22}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{22}(\mathbf{B}/B) &> 0, \\ \Delta\sigma_{\infty}^{33}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{33}(\mathbf{B}/B) &> 0, \end{aligned}$$

как было написано выше. Величины

$$\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B), \quad k \neq l$$

могут иметь произвольные знаки. В нашей системе координат $\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) = \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) = 0$, если k или l равно единице.

Отметим здесь важную роль геометрии носителей открытых траекторий на сложных поверхностях Ферми для обсуждаемого нами эффекта. Разность $\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ определяется в действительности «непостоянством» функций $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ на носителях устойчивых открытых траекторий. Как можно видеть на рис. 19, присутствие сингулярных траекторий на носителях открытых траекторий делает поведение $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ достаточно нерегулярным в случае периодичности открытых траекторий на поверхности Ферми. Так, периодические траектории, примыкающие к сингулярной траектории с

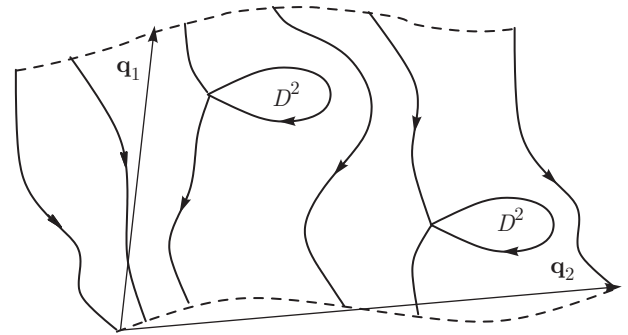


Рис. 20. Фундаментальная область на носителе открытых траекторий, имеющая форму параллелограмма с двумя противоположными сторонами, представленными двумя эквивалентными частями открытых электронных траекторий

разных сторон, имеют довольно разную геометрию в \mathbf{p} -пространстве. Можно ожидать, что средние вариации величин $\langle v_{gr}^k \rangle_{tr}(p_z)$ на носителе открытых траекторий могут быть сравнимы с этими величинами, и то же самое можно утверждать относительно разности $\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$, $k, l = 2, 3$. Надо здесь заметить, однако, что этот эффект уменьшается с ростом «знаменателей» рациональных средних направлений открытых траекторий из-за увеличения плотности периодической открытой траектории на носителе открытых траекторий. Как мы уже говорили, в нашей системе координат мы имеем тождества $\langle v_{gr}^x \rangle_{tr} \equiv 0$.

Для оценки зависимости $\Delta\sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta\bar{\sigma}_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ от чисел (k_1, k_2) удобно выбрать фундаментальную область на носителе открытых траекторий в форме криволинейного параллелограмма с двумя противоположными сторонами, представленными двумя эквивалентными частями периодических открытых траекторий (рис. 20).

Величины p_z и s дают хорошую параметризацию фундаментальной области при выполнении условия (3.1). Мы можем полагать без нарушения общности, что направление \mathbf{B} не является ортогональным вектору \mathbf{q}_2 , что означает, что среднее направление открытых траекторий не совпадает с направлением \mathbf{q}_2 . Положим здесь также, что значения p_z принадлежат интервалу $[0, p_z^0]$ для нашей фундаментальной области, где $p_z^0 = |(\mathbf{B}, \mathbf{q}_2)|/B$.

Параметр s не является непрерывным в нашей фундаментальной области и имеет сингулярности на уровнях p_z , содержащих особые точки внутри области. Как мы увидим, это обстоятельство не будет играть важной роли в наших рассуждениях. Положим здесь, что значения s ограничены величинами

$s_1(p_z)$ и $s_2(p_z)$ при данном значении p_z в нашей фундаментальной области. Функции $s_1(p_z)$ и $s_2(p_z)$ также имеют особенности при тех же p_z , определяемые сингулярным поведением $s_2(p_z) - s_1(p_z)$,

$$s_2(p_z) - s_1(p_z) \sim |\ln(|\Delta p_z|/p_z^0)|$$

вблизи особых уровней.

Нетрудно видеть также, что особенности поведения разности $s_2(p_z) - s_1(p_z)$ имеют асимметричный характер, поскольку соответствующие траектории приближаются к особой точке один раз или два в зависимости от знака Δp_z . Заметим здесь, что последнее обстоятельство играет важную роль в доказательстве факта перемешивания в динамических системах, аналогичных рассмотренным выше. Данный факт был доказан в работе [33], где системы такого типа рассматривались в связи с другой проблемой гамильтоновой динамики [34].

Каждая траектория с периодом $\mathbf{q} = k_1 \mathbf{q}_1 + k_2 \mathbf{q}_2$ представляется в нашей области $|k_1| + |k_2|$ отдельными линиями, дающими замкнутую кривую после отождествления эквивалентных точек в \mathbf{p} -пространстве. Значения функций $\langle v_{gr}^l \rangle_{tr}$ являются одними и теми же на каждом наборе компонент $|k_1| + |k_2|$, представляющих одну периодическую траекторию.

Наличие особых точек играет также большую роль в глобальном движении электронов вдоль несингулярных траекторий, поскольку они возникают многократно на довольно малых расстояниях от периодической траектории с большим периодом $\mathbf{q} = k_1 \mathbf{q}_1 + k_2 \mathbf{q}_2$. В результате, длина S периодической траектории в терминах параметра s ($S \sim |k_1| + |k_2|$) имеет существенные флуктуации, вызываемые наличием особых точек внутри фундаментальной области. Заметим, что согласно системе (1.1) мы можем записать в нашей системе координат

$$\langle v_{gr}^y \rangle_{tr} = L(k_1, k_2) / S(p_z), \quad (3.14)$$

где $L(k_1, k_2)$ — длина соответствующего топологического цикла в \mathbf{p} -пространстве, зависящая только от чисел (k_1, k_2) . В общем случае, мы имеем $(|k_1| + |k_2|)N$ особых точек $p_z^j \in [0, p_z^0]$ функции $S(p_z)$, где N — число (неэквивалентных) особых точек системы (1.1) на носителе открытых траекторий.

Функция $S(p_z)$ является периодической функцией с периодом $P = p_z^0 / (|k_1| + |k_2|)$ и интегрируемыми (асимметричными) особенностями,

$$S(p_z) \sim \ln(p_z^0 / |\Delta p_z|),$$

при значениях p_z , соответствующих особым электронным траекториям. В частности, в интервале

$I^j = [p_z^j, p_z^{j+1}]$, ограниченном двумя последовательными «особыми» значениями p_z ($|p_z^{j+1} - p_z^j| \leq P$), можно записать вклад сингулярностей в точках p_z^j и p_z^{j+1} в величину $S(p_z)$ в виде

$$\delta_1 S(p_z) \sim \alpha_+^j \ln\left(\frac{p_z^0}{p_z - p_z^j}\right) + \alpha_-^{j+1} \ln\left(\frac{p_z^0}{p_z^{j+1} - p_z}\right) \quad (3.15)$$

($\alpha_+^j, \alpha_-^{j+1} \sim 1$). Кроме того, сингулярности в точках $(\dots, p_z^{j-2}, p_z^{j-1})$ и (p_z^{j+2}, \dots) , близких к интервалу I^j , также играют важную роль для вариаций $S(p_z)$ внутри интервала I^j при больших значениях k_1 и k_2 .

Соответствующий вклад в $S(p_z)$ может быть записан в виде суммы членов, аналогичных (3.15), число которых пропорционально $|k_1| + |k_2|$. Мы будем интересоваться здесь флуктуациями $S(p_z)$, вызываемыми этими сингулярностями, так что только вариация этого вклада по переменной p_z является для нас важной. Нетрудно показать, что разность этого вклада в точках p_z^j и p_z^{j+1} имеет порядок $\ln(|k_1| + |k_2|)$. Для наших целей (мы опускаем здесь строгие оценки) соответствующий вклад $\delta_2 S(p_z)$ в функцию $S(p_z)$ на каждом интервале I^j может быть приближен линейной функцией

$$\delta_2 S(p_z) \sim \Gamma^j (|k_1| + |k_2|) \ln(|k_1| + |k_2|) \frac{p_z - p_z^j}{p_z^0}$$

($|\Gamma^j| \sim 1$).

Функции $\delta_1 S(p_z)$ и $\delta_2 S(p_z)$ представляют главные поправки к «основному значению» \bar{S} функции $S(p_z)$, которые отвечают за главные члены в зависимости $\Delta \sigma_{\infty}^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta \bar{\sigma}^{kl}(\mathbf{B}/B)$ от чисел (k_1, k_2) (или (m_1, m_2, m_3)). Основное значение \bar{S} функции $S(p_z)$ дается постоянной функцией на всем интервале $[0, p_z^0]$, которая в главном порядке пропорциональна длине $L(k_1, k_2)$ (или $L(m_1, m_2, m_3)$) топологического цикла (m_1, m_2, m_3) в \mathbf{p} -пространстве. Нетрудно видеть, что для любой последовательности рациональных направлений, сходящейся к некоторому (иррациональному) направлению, в главном порядке можно записать $L(k_1, k_2) \sim |k_1| + |k_2|$.

Функции $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}, \langle v_{gr}^z \rangle_{tr}$ — непрерывные функции p_z , однако они не являются гладкими на кривых, представляющих особые траектории. Так, для компоненты v_{gr}^y вблизи этих кривых можно записать

$$\langle v_{gr}^y \rangle_{tr} \sim [\ln(p_z^0 / |\Delta p_z|)]^{-1} \rightarrow 0.$$

В общем случае, значения $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}$ представляют периодическую функцию p_z с периодом $P = p_z^0 / (|k_1| +$

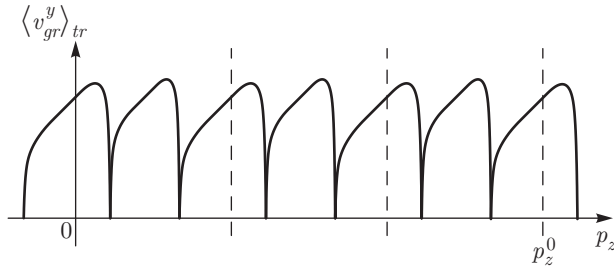


Рис. 21. Общий вид периодической функции $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}(p_z)$ на носителе открытых траекторий для случая рационального среднего направления $\mathbf{q} = k_1 \mathbf{q}_1 + k_2 \mathbf{q}_2$ траекторий

+ $|k_2|$) и очень узкими пиками при значениях p_z , соответствующих сингулярным электронным траекториям (рис. 21). Видно, что число пиков на периоде функции $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}$ равно числу N неэквивалентных особых точек системы (1.1) на соответствующем носителе открытых траекторий.

В нашем случае на каждом интервале I^j можно положить приближенно

$$S(p_z) \simeq \bar{S} + \delta_1 S(p_z) + \delta_2 S(p_z) \sim \\ \sim |k_1| + |k_2| + \alpha_+^j \ln \left(\frac{p_z^0}{p_z - p_z^j} \right) + \\ + \alpha_-^{j+1} \ln \left(\frac{p_z^0 (p_z^{j+1} - p_z)}{p_z} \right) + \\ + \Gamma^j (|k_1| + |k_2|) \ln (|k_1| + |k_2|) \frac{p_z - p_z^j}{p_z^0}$$

и

$$\langle v_{gr}^y \rangle_{tr} \simeq \frac{L(k_1, k_2)}{\bar{S} + \delta_1 S(p_z) + \delta_2 S(p_z)}.$$

Заметим здесь, что введенное выше приближение в нашей схеме используется также для вычисления приближенных значений $\langle v_{gr}^y \rangle_{\hat{S}_F^\gamma}$ согласно формуле (3.13). Используя это приближение для вычисления значений $(k, l = 2)$

$$\Delta \sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B) = \\ = e^2 \tau \sum_\gamma \iint_{\hat{S}_F^\gamma} \langle v_{gr}^k \rangle_{tr} \langle v_{gr}^l \rangle_{tr} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} - \\ - e^2 \tau \sum_\gamma \iint_{\hat{S}_F^\gamma} \langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^\gamma} \langle v_{gr}^l \rangle_{\hat{S}_F^\gamma} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.16)$$

мы в итоге имеем соотношения

$$|\Delta \sigma_\infty^{22}(\mathbf{B}/B) - \Delta \bar{\sigma}_\infty^{22}(\mathbf{B}/B)| \sim \frac{\ln^2(|k_1| + |k_2|)}{(|k_1| + |k_2|)^2}.$$

Чтобы получить необходимое приближение для функции $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}$, мы должны оценить также интеграл

$$J(p_z) = \oint v_{gr}^z(p_z, s) ds$$

по периодической траектории. Прежде всего, следует заметить, что мы также приписываем данному интегралу «основное значение»

$$J(p_z) \simeq \bar{J} \simeq \bar{v}_{gr}^z (|k_1| + |k_2|),$$

являющееся постоянным на интервале $[0, p_z^0]$. Существенные поправки к значению \bar{J} на интервалах I^j вызваны снова наличием особых точек и могут быть представлены в виде двух главных вкладов.

1) Вклад конечных точек I^j , который может быть приближенно записан в виде

$$\delta_1 J(p_z) \simeq v_j^z \alpha_+^j \ln \left(\frac{p_z^0}{p_z - p_z^j} \right) + \\ + v_{j+1}^z \alpha_-^{j+1} \ln \left(\frac{p_z^0}{p_z^{j+1} - p_z} \right),$$

где v_j^z и v_{j+1}^z — значения v_{gr}^z в особых точках, приходящих к соответствующим сингулярным траекториям.

2) Вклад других особых точек, близких к интервалу I^j , который снова может быть аппроксимирован линейной функцией

$$\delta_2 J(p_z) \simeq v_*^z \Gamma^j (|k_1| + |k_2|) \ln (|k_1| + |k_2|) \frac{p_z - p_z^j}{p_z^0},$$

где v_*^z — некоторое взвешенное среднее значений v_j^z по всем особым точкам в фундаментальной области.

Теперь можно использовать следующее приближение для функции $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z)$:

$$\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z) \simeq \frac{\bar{J} + \delta_1 J(p_z) + \delta_2 J(p_z)}{\bar{S} + \delta_1 S(p_z) + \delta_2 S(p_z)}. \quad (3.17)$$

Видно, что функция $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z)$ не имеет пиков в точках p_z^j и значения $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z^j)$ равны v_j^z . Тем не менее структура функции $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z)$ в остальном весьма сходна со структурой функции $\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}(p_z)$. В частности, используя приближение (3.17) в формуле (3.16), $k, l = 2, 3$, мы получаем те же соотношения

$$|\Delta \sigma_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B) - \Delta \bar{\sigma}_\infty^{kl}(\mathbf{B}/B)| \sim \frac{\ln^2(|k_1| + |k_2|)}{(|k_1| + |k_2|)^2}, \quad (3.18)$$

что влечет также соотношения (2.2) для фиксированной ЗУ Ω_α .

Аргументы, использованные выше, могут быть применены также для оценки функций $q(B)$, $r(B)$, $p(B)$ в соотношениях (2.7). Отметим сразу, что мы не приводим здесь строгих вычислений, тем не менее приближенное рассмотрение, приводимое ниже, дает все основные детали, необходимые для наших

целей. Так, для оценки функций (3.9) можно использовать приближение, в котором интегрирование в (3.9) проводится по части траектории, имеющей длину порядка $eB\tau/c$ по параметру s . Точно так же мы можем использовать для усредненных значений

$$\langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s) \equiv \frac{c}{eB\tau} \int_{-\infty}^s v_{gr}^k(p_z, s') \times \exp\left[\frac{c(s' - s)}{eB\tau}\right] ds' \quad (3.19)$$

приближение

$$\langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s) \simeq \frac{c}{eB\tau} \int_{s - eB\tau/c}^s v_{gr}^k(p_z, s') ds'.$$

Выберем снова фундаментальную область в форме, показанной выше на рис. 20. Открытые траектории имеют теперь иррациональное среднее направление и не являются периодическими в \mathbf{p} -пространстве. Соответствующие части открытых траекторий представлены сетками, состоящими из приблизительно $eB\tau/m^*c = \omega_B\tau$ кривых в фундаментальной области с приблизительным расстоянием $p_z^0/\omega_B\tau$ между кривыми.

Функции $\langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s)$ почти постоянны вдоль кривых $p_z = \text{const}$ в фундаментальной области и меняются главным образом вдоль координаты p_z . Для направления открытых траекторий общего положения функции $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_B(p_z, s)$ в фундаментальной области не имеют периодов, меньших p_z^0 , тем не менее в остальных существенных деталях поведение функции $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_B(p_z, s)$ в нашем приближении аналогично описанному выше поведению функций $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_{tr}(p_z)$, рассматриваемых для рационального среднего направления открытых траекторий с $|k_1| + |k_2| \simeq \omega_B\tau$. В частности, мы можем также ввести здесь значения p_z^j в фундаментальной области, определенные условием наличия особой точки на предшествующей части соответствующей траектории на расстоянии, не превышающем величины $\omega_B\tau r_F$ в \mathbf{p} -пространстве. Количество таких значений p_z^j в фундаментальной области имеет порядок $\omega_B\tau$ при $B \rightarrow \infty$, и мы снова можем рассмотреть деление интервала $[0, p_z^0]$ на сегменты I^j , аналогичные рассмотренным выше. Анализ показывает также, что поведение функций $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_B(p_z, s)$ характеризуется на интервалах I^j особенностями, аналогичными особенностям поведения $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_{tr}(p_z)$ для рационального среднего направления открытых траекторий с числами k_1, k_2 , имеющими порядок $\omega_B\tau$.

Введем теперь симметричную и антисимметричную части тензора проводимости:

$$\sigma^{kl} = s^{kl} + a^{kl}.$$

Согласно соотношениям Онсагера, имеем тождества

$$s^{kl}(-\mathbf{B}) = s^{kl}(\mathbf{B}), \quad a^{kl}(-\mathbf{B}) = -a^{kl}(\mathbf{B}).$$

После некоторых элементарных вычислений из формулы (3.11) можно получить

$$\Delta s^{kl}(B) = e^2\tau \sum_{\gamma} \iint_{\hat{S}_F^{\gamma}} \langle v_{gr}^k \rangle_B \langle v_{gr}^l \rangle_B \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.20)$$

$$\Delta a^{kl}(B) = \frac{e^2\tau}{2} \times \sum_{\gamma} \iint_{\hat{S}_F^{\gamma}} \left(v_{gr}^k \langle v_{gr}^l \rangle_B - \langle v_{gr}^k \rangle_B v_{gr}^l \right) \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.21)$$

Нетрудно видеть, что для любого иррационального среднего направления открытых траекторий величины $\langle v_{gr}^k \rangle_B, \langle v_{gr}^l \rangle_B$ совпадают со значениями $\langle v_{gr}^k \rangle_{\hat{S}_F^{\gamma}}, \langle v_{gr}^l \rangle_{\hat{S}_F^{\gamma}}$ в пределе $B \rightarrow \infty$. В то же время для больших, но конечных значений B поведение функций $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_B(p_z, s)$ аналогично поведению $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_{tr}$ для рационального среднего направления открытых траекторий с $k_1, k_2 \simeq \omega_B\tau$. Как результат, в полной аналогии с формулой (3.16), мы можем написать соотношения

$$\Delta s^{kl}(B) - \Delta s_{\infty}^{kl} \simeq \frac{\ln^2(\omega_B\tau)}{(\omega_B\tau)^2}, \quad k, l = 2, 3 \quad (3.22)$$

для направлений открытых траекторий общего положения.

Оценка (3.22) дает теперь соотношения (2.9) для функций $q(B)$ и $p(B)$. В то же время соотношения (2.10) для функции $r(B)$ определяются поведением антисимметричной части тензора $\sigma^{kl}(B)$. Используя те же приближения для функций $\langle v_{gr}^{2,3} \rangle_B(p_z, s)$, имеем оценку

$$|\Delta a^{23}(B)| \leq \frac{\ln \omega_B\tau}{\omega_B\tau}. \quad (3.23)$$

Используя тождество $a_{\infty}^{kl} \equiv 0$, получаем, таким образом, соотношения (2.10) для функции $r(B)$.

Отметим здесь, что более точное единообразное описание функции $\Delta a^{23}(B)$ не может быть получено в общем случае, поскольку ее поведение допускает существенные вариации в зависимости от формы поверхности Ферми.

Как мы уже сказали, соотношения (3.22) могут рассматриваться лишь как «общий тренд» в поведении проводимости в сильных магнитных полях.

Дадим здесь более детальное объяснение этого утверждения.

Аналогия между соотношениями (3.18) и (3.22) требует предположения об «однородном покрытии» носителя открытых траекторий частями траекторий, имеющими длину примерно $\omega_{BT}p_F$. Это предположение выполняется «в среднем», однако оно может нарушаться для конкретных значений ω_{BT} при определенных направлениях открытых траекторий. Нетрудно видеть, что такое нарушение определенно имеет место, когда направление открытых траекторий может быть приближено рациональным направлением с очень высокой точностью ($\ll |k_1| + |k_2|$). Соответствующие открытые траектории будут тогда очень близки к периодическим траекториям на длинах

$$\omega_{BT}p_F \gg (|k_1| + |k_2|)p_F,$$

так что в действительности в соотношении (3.22) мы должны использовать параметр $|k_1| + |k_2|$ вместо ω_{BT} вплоть до значений $\omega_{BT} \gg |k_1| + |k_2|$. Как результат, общий тренд (3.22) может иметь существенные поправки.

Для лучшего описания поведения $\sigma^{kl}(B)$ для направлений устойчивых открытых траекторий общего положения скажем здесь несколько слов о проблеме приближения иррациональных чисел рациональными. В нашем случае мы должны исследовать возможность рациональных приближений числа κ в соотношении (2.6), соответствующих рациональным приближениям среднего направления открытых траекторий в плоскости Γ_α .

Согласно классической теореме (Дирихле), мы можем утверждать, что для любого числа $N \in \mathbb{N}$ существуют два целых числа, k_1 и k_2 ,

$$1 \leq k_1 \leq N, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

такие что

$$\left| \kappa - \frac{k_2}{k_1} \right| < \frac{1}{k_1 N}. \quad (3.24)$$

Заметим, что мы можем положить без нарушения общности $|\kappa| < 1$, так что будем предполагать также $|k_2| \leq |k_1|$ для достаточно точных приближений κ .

Для значения $N \simeq \omega_{BT}$ можно переписать соотношение (3.24) в виде

$$\omega_{BT}p_F \left| \kappa - \frac{k_2}{k_1} \right| < \frac{p_F}{k_1}. \quad (3.25)$$

Это означает, что отклонение открытой траектории от соответствующей периодической траектории не превышает величины p_F/k_1 на длине $L \simeq \omega_{BT}p_F$. Соотношение (3.25) может рассматриваться в качестве первого шага в приближении иррациональ-

ных направлений открытых траекторий рациональными, поскольку среднее расстояние между кривыми, представляющими периодическую траекторию в фундаментальной области, имеет порядок

$$p_F/(|k_1| + |k_2|) \simeq p_F/k_1.$$

Мы должны сказать, однако, что соотношение (3.25) не дает точной связи между величинами ω_{BT} и k_1 , так что эта связь должна специально исследоваться для каждой конкретной иррациональной величины κ . Используя теорему Дирихле, можно показать, что для любого иррационального κ всегда существует бесконечная последовательность рациональных приближений

$$k_2^{(s)}/k_1^{(s)}, \quad s = 1, \dots, \infty,$$

таких что для каждого s имеют место соотношения

$$\left| \kappa - \frac{k_2^{(s)}}{k_1^{(s)}} \right| < \frac{1}{(k_1^{(s)})^2}. \quad (3.26)$$

Если мы рассмотрим теперь последовательность $B^{(s)}$ значений B , таких что $\omega_{B^{(s)}}\tau \simeq k_1^{(s)}$, мы получим для этой последовательности соотношения

$$\omega_{B^{(s)}}\tau p_F \left| \kappa - \frac{k_2^{(s)}}{k_1^{(s)}} \right| < \frac{p_F}{k_1^{(s)}},$$

аналогичные (3.25). Приведенная выше оценка не должна в общем случае вызывать больших отклонений от общего тренда согласно нашей картине.

Нужно отметить, однако, что оценка (3.26) может быть в действительности улучшена, если мы рассматриваем иррациональные числа κ общего положения, представляющие множество полной меры в \mathbb{R} . В качестве примера для иррациональных κ общего положения можно сформулировать следующую теорему.

Теорема [35]

Пусть $f(x)$ является положительной функцией положительной переменной x , такой что функция $xf(x)$ является невозрастающей. Тогда для почти всех иррациональных κ неравенство

$$\left| \kappa - \frac{k_2^{(s)}}{k_1^{(s)}} \right| < \frac{f(k_1^{(s)})}{k_1^{(s)}}$$

имеет бесконечно много решений $(k_1^{(s)}, k_2^{(s)})$, если для некоторого положительного c интеграл

$$\int_c^\infty f(x) dx$$

является расходящимся.

Приведенная теорема дает улучшение оценки (3.26) для «почти всех» иррациональных чисел κ в смысле стандартной меры в \mathbb{R} . Легко видеть, что множество функций $f(x)$, которые могут быть использованы для улучшения оценки (3.26), является довольно большим. К примеру, мы можем положить

$$f_1(x) = [x \ln x]^{-1}, \quad x > 1,$$

$$f_2(x) = [x \ln x \ln \ln x]^{-1}, \quad x > e$$

и т. д. В частности, используя функцию $f_1(x)$, мы получаем для соответствующей последовательности $B^{(s)}$ оценку

$$\omega_{B^{(s)}} \tau p_F \left| \kappa - \frac{k_2^{(s)}}{k_1^{(s)}} \right| < \frac{p_F}{k_1^{(s)} \ln k_1^{(s)}} \quad (3.27)$$

($\omega_{B^{(s)}} \tau \simeq k_1^{(s)}$). Эта оценка показывает, что общий тренд (2.9) для функций $q(B)$, $p(B)$ должен иметь в действительности дополнительную структуру, представляемую наличием плато вблизи значений $B^{(s)}$.

Как мы уже сказали, оценка (3.27) может быть использована для почти всех иррациональных чисел, характеризующих среднее направление открытых траекторий. Для специальных иррациональных чисел соответствующие оценки могут быть гораздо более сильными. В этом случае мы можем сказать, что соответствующее число имеет «очень хорошие» приближения рациональными числами.

Можно видеть, таким образом, что общий тренд в поведении $s^{kl}(B)$, $k, l = 2, 3$, можно понимать как выполнение соотношений (2.9) для «реперных» значений B , представляющих бесконечную последовательность на интервале $m^*c/e\tau < B < \infty$. В то же время вблизи значений $B^{(s)}$ поведение $s^{kl}(B)$ характеризуется наличием некоторых плато, где локальная зависимость от B в действительности отличается от общего тренда. Как результат, глобальное поведение $s^{kl}(B)$, $k, l = 2, 3$, характеризуется некоторой «каскадной структурой», определяемой свойствами иррациональности κ . Отметим также, что каскадная структура является более выраженной для чисел κ , имеющих лучшие рациональные приближения, и сглаживается для иррациональных κ общего положения.

Согласно приведенному выше замечанию, можно видеть, что тренд (2.9) имеет в некотором смысле условный характер и может также рассматриваться лишь как удобный выбор среди близких возможных описаний асимптотического поведения проводимости. Мы должны также отметить, что в специальном случае, когда носители открытых траекторий

не содержат отверстий с особыми точками, соотношения (2.9) должны быть в действительности заменены на более простой тренд

$$q(B) \sim p(B) \sim (\omega_{B\tau})^{-1}.$$

Все приведенные выше замечания относятся также и к оценке (3.23), которая может нарушаться в тех же ситуациях, что и (3.22). По этой причине мы должны рассматривать соотношение (2.10) лишь как «доверительное» ограничение на функцию $r(B)$, определяемую соотношением (2.7).

В заключение данного раздела рассмотрим поведение компонент $\sigma^{kl}(B)$, где k или l равно единице. Заметим, что соотношения (2.7) представляют в этом случае главные члены в описании этих компонент, что определяет разницу между функциями $a(B)$, $b(B)$, $c(B)$ и $q(B)$, $r(B)$, $p(B)$. Согласно системе (1.1), интеграл

$$\int_{-\infty}^s v_{gr}^x(p_z, s') ds'$$

представляет величину $-p_y(s) + \text{const}$ и является ограниченной функцией в нашей системе координат. Элементарная оценка интеграла (3.19) дает при этом главный член

$$\langle v_{gr}^1 \rangle_B(p_z, s) \sim (\omega_{B\tau})^{-1} \quad (3.28)$$

в асимптотическом поведении функции $\langle v_{gr}^1 \rangle_B$, который может быть использован в формулах (3.20), (3.21). В частности, мы легко получаем из (3.20) соотношение

$$\Delta\sigma^{11}(B) \sim (\omega_{B\tau})^{-2},$$

которое, будучи сложено также с соответствующим членом (1.6), дает первую часть соотношения (2.8).

Заметим теперь, что величина $\langle v_{gr}^1 \rangle_B$ обладает также свойством

$$\iint_{\hat{S}_F^2} \langle v_{gr}^1 \rangle_B(p_z, s) \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} = 0$$

(в силу того же свойства $v_{gr}^1(p_z, s)$). Используя представление

$$\langle v_{gr}^l \rangle_B = \langle v_{gr}^l \rangle_{\hat{S}_F^2} + o(1), \quad B \rightarrow \infty$$

($l = 2, 3$) для среднего направления открытых траекторий общего положения в формуле (3.20), получаем для симметричной части $\Delta\sigma^{kl}(B)$ соотношения

$$\Delta s^{12}(B) \sim \Delta s^{13}(B) = o((\omega_{B\tau})^{-1}).$$

Таким образом, главные члены в асимптотическом поведении величин $\sigma^{1l}(B)$, $\sigma^{kl}(B)$, $l, k = 2, 3$ определяются антисимметричной частью тензора проводимости. Чтобы оценить соответствующие члены, заметим теперь, что оценка (3.28) верна также для функции

$$\langle v_{gr}^1 \rangle_{-B}(p_z, s) \equiv \frac{c}{eB\tau} \int_s^\infty v_{gr}^1(p_z, s') \exp\left[\frac{c(s-s')}{eB\tau}\right] ds'$$

для траекторий нашего типа. Используя теперь замену порядка интегрирования в формуле (3.21), мы можем написать

$$\Delta a^{1l}(B) = \frac{e^2\tau}{2} \times \sum_\gamma \iint_{\hat{S}_F^\gamma} (\langle v_{gr}^1 \rangle_{-B} - \langle v_{gr}^1 \rangle_B) v_{gr}^l \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}$$

($l = 2, 3$), что дает необходимую оценку для функций $\Delta a^{1l}(B)$. Прибавляя также антисимметричную часть тензора (1.6), мы получаем в итоге оставшуюся часть соотношения (2.8).

Отметим также, что высшие поправки к компонентам $\sigma^{1l}(B)$, $\sigma^{kl}(B)$ имеют более сложное поведение для открытых траекторий общего положения в \mathbf{p} -пространстве, но обычно не рассматриваются в приложениях.

Надо сказать, что структура $\sigma^{kl}(B)$, описанная выше, имеет в некотором смысле абстрактный теоретический характер и, вероятно, не наблюдается во всех деталях в большинстве экспериментов. Тем не менее мы ожидаем, что основные элементы описанной выше картины все-таки должны наблюдаться в специальных исследованиях проводимости в сильных магнитных полях. В общем же случае можно ожидать, что во многих реальных экспериментах часто возможно лишь констатировать, что величины $\sigma^{kl}(B) - \bar{\sigma}_\infty^{kl}$, $k, l = 2, 3$, характеризуются некоторым общим убыванием с ростом B с некоторым неоднозначно определенным законом убывания. Довольно часто является удобной аппроксимация поведения $\sigma^{kl}(B)$ некоторыми промежуточными степенями $(\omega_B\tau)^\mu$ параметра $\omega_B\tau$, однако в этом случае мы должны допускать нерегулярную зависимость параметра μ от направления и величины \mathbf{B} . Отметим здесь также, что правые части соотношений (3.22), (3.23) могут содержать большие безразмерные коэффициенты геометрической природы, так что для сложных поверхностей Ферми вклад как величин $\bar{\sigma}_\infty^{kl}$, так и $q^2(B)$, $r(B)$, $p^2(B)$ может быть важен даже при больших значениях $\omega_B\tau$.

Отметим, что вопросы, рассмотренные выше, были связаны в основном с геометрией устойчивых открытых траекторий. В следующем разделе мы рассмотрим аспекты поведения проводимости, связанные с перестройкой траекторий этого типа.

4. ПЕРЕСТРОЙКА ОТКРЫТЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ПОВЕДЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО НАБЛЮДАЕМОЙ ЗОНЕ УСТОЙЧИВОСТИ $\hat{\Omega}_\alpha$

Для объяснения поведения проводимости в зоне Λ_α мы должны рассмотреть перестройку носителей открытых траекторий после пересечения границы ЗУ Ω_α на единичной сфере. В общем случае наиболее существенные детали такой перестройки могут быть показаны с помощью следующей упрощенной схемы.

Представим поверхность Ферми в пространстве \mathbb{R}^3 в форме бесконечного набора целочисленных плоскостей (с отверстиями), соединенных параллельными цилиндрами конечных высот (рис. 22). Подразумеваем, что все плоскости разделены на «четные» и «нечетные» плоскости, что дает также разделение цилиндров на два разных класса. Полагаем, что все плоскости данного класса представляют один и тот же объект после факторизации по векторам обратной решетки, и то же самое предполагаем относительно цилиндров одного класса. Таким образом, физическая поверхность Ферми представляет здесь два параллельных двумерных тора (с отверстиями) $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^3$, соединенных двумя цилиндрами \mathbb{T}^3 .

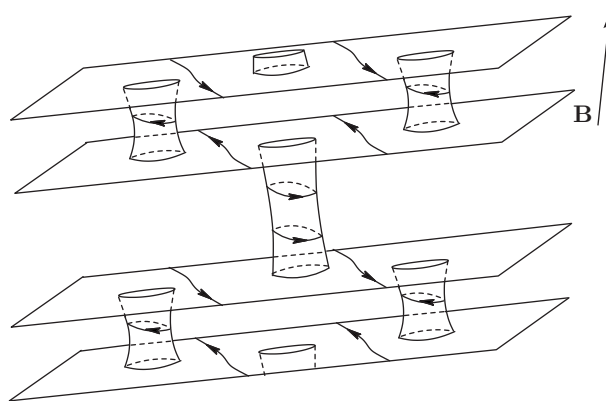


Рис. 22. Упрощенная (схематическая) поверхность Ферми, показывающая главные особенности, возникающие на границе ЗУ Ω_α

Для направлений \mathbf{V} , почти параллельных осям цилиндров, построенные выше цилиндры представляют цилиндры замкнутых электронных траекторий, в то время как плоскости с отверстиями играют роль носителей открытых траекторий. Можно видеть также, что открытые траектории на плоскостях различного типа представляют движение в противоположных направлениях, в то время как два типа цилиндров конечного размера содержат замкнутые траектории соответственно «электронного» и «дырочного» типов. Таким образом, мы получаем ЗУ Ω_α вокруг направления $\hat{\mathbf{V}}^\parallel$, параллельного осям цилиндров, соединяющих целочисленные плоскости.

Цилиндры замкнутых траекторий почти совпадают с цилиндрами, соединяющими плоскости, для направлений \mathbf{V} , близких к $\hat{\mathbf{V}}^\parallel$, однако они становятся короче и представляют лишь части этих цилиндров для направлений \mathbf{V} , отклоняющихся от $\hat{\mathbf{V}}^\parallel$. Граница ЗУ Ω_α определяется следующим условием: высота цилиндров замкнутых траекторий одного из типов (скажем, электронного) обращается в нуль, в то время как высота цилиндров замкнутых траекторий второго типа остается конечной. После пересечения границы ЗУ Ω_α индивидуальные целочисленные плоскости больше не представляют собой носителей открытых траекторий, тем не менее мы все еще можем утверждать, что возле границы ЗУ Ω_α цилиндры замкнутых траекторий второго типа разрезают нашу поверхность Ферми на пары соединенных целочисленных плоскостей в \mathbb{R}^3 . Таким образом, мы можем исследовать здесь траектории системы (1.1) отдельно на этих разделенных частях поверхности Ферми, что дает в действительности довольно простое описание траекторий в \mathbb{R}^3 .

Обозначим через Γ_α целочисленную плоскость, задающую общее целочисленное направление плоскостей, рассмотренных выше, и через $\Pi(\mathbf{V})$ — плоскость, ортогональную \mathbf{V} . При этом все траектории на нашей поверхности Ферми становятся замкнутыми, если пересечение плоскостей Γ_α и $\Pi(\mathbf{V})$ имеет иррациональное направление.

Появление замкнутых траекторий на каждой паре соединенных плоскостей может рассматриваться как результат перестройки открытых траекторий, вызываемой «перескоками» траекторий между двумя плоскостями вне Ω_α (рис. 23). Видно, что эти замкнутые траектории имеют очень большую длину в непосредственной близости к границе ЗУ Ω_α из-за низкой вероятности перескоков в этой области. Видно также, что для любого фиксированного иррационального направления пересечения плоскостей Γ_α и

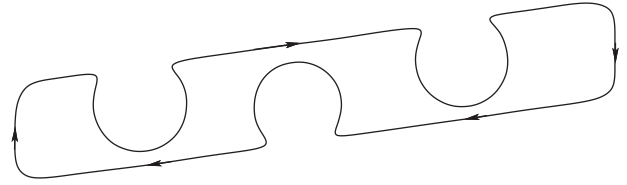


Рис. 23. Длинные замкнутые траектории, возникающие в результате перестройки пары открытых траекторий на паре соединенных плоскостей после пересечения границы ЗУ Ω_α на угловой диаграмме

$\Pi(\mathbf{V})$ все открытые траектории обязательно проходят через перестройку после пересечения границы ЗУ Ω_α .

Другая ситуация возникает в случае, когда пересечение плоскостей Γ_α и $\Pi(\mathbf{V})$ имеет рациональное направление \mathbf{a} . В этом случае лишь часть открытых траекторий испытывает перестройку после пересечения границы ЗУ Ω_α направлением магнитного поля, в то время как остальные траектории остаются открытыми. Таким образом, в этой ситуации длинные и открытые периодические траектории сосуществуют на целочисленных плоскостях и имеют разную меру для различных направлений \mathbf{V} . Нетрудно видеть также, что открытые траектории имеют максимальную меру вблизи границы ЗУ Ω_α и исчезают в конечных точках кривой $\hat{\gamma}_\alpha$.

Из простой оценки интегралов в (3.10) мы легко получаем, что в интервале $1 \ll \omega_B \tau \ll \lambda(\mathbf{V}/B)$ вклад длинных замкнутых траекторий в проводимость аналогичен вкладу устойчивых открытых траекторий. В результате в этом интервале мы получаем формулу (2.11).

Для оценки вклада траекторий, показанных на рис. 23, в пределе $\omega_B \tau \gg \lambda(\mathbf{V}/B)$ заметим прежде всего, что в общем случае для траекторий этого типа мы имеем соотношения

$$\langle v_{gr}^y \rangle_{tr}(p_z) = 0, \quad \langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z) \neq 0.$$

В то же время траектория, показанная на рис. 23, может рассматриваться как состоящая из двух частей, принадлежащих различным прежним носителям открытых траекторий с противоположными значениями $\langle v_{gr}^y \rangle_{\hat{S}_F^\gamma}$ и $\langle v_{gr}^z \rangle_{\hat{S}_F^\gamma}$. Как результат, типичная величина $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}$ на замкнутых траекториях довольно мала и определяется плотностью траектории на (прежних) носителях в зоне Бриллюэна. Точная зависимость $\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z)$ от величины $\lambda(\mathbf{V}/B)$ может иметь сложный характер. Нетрудно видеть, однако, что для нашего довольно грубого определения

функции $\lambda(\mathbf{B}/B)$ можно использовать простое приближение

$$\langle v_{gr}^z \rangle_{tr}(p_z) \sim \lambda^{-1}(\mathbf{B}/B).$$

С той же точностью мы можем использовать приближения

$$\langle v_{gr}^y \rangle_B \sim \langle v_{gr}^z \rangle_B - \langle v_{gr}^z \rangle_{tr} \sim \lambda(\mathbf{B}/B)/\omega_{B\tau} \quad (4.1)$$

для больших, но конечных значений B . В то же время для величин $\langle v_{gr}^x \rangle_B$ мы можем для всех $\omega_{B\tau} \gg 1$ использовать соотношение

$$\langle v_{gr}^x \rangle_B \sim \langle v_{gr}^x \rangle_{-B} \sim (\omega_{B\tau})^{-1}. \quad (4.2)$$

Используя приведенные выше соотношения, мы затем легко получаем из (3.20) оценки

$$\Delta s^{kl}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & *\lambda^{-2} \end{pmatrix} + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda(\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda(\omega_{B\tau})^{-2} \\ \lambda(\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda^2(\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda^2(\omega_{B\tau})^{-2} \\ \lambda(\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda^2(\omega_{B\tau})^{-2} & \lambda^2(\omega_{B\tau})^{-2} \end{pmatrix}$$

для вклада длинных замкнутых траекторий в симметричную часть тензора проводимости. Заметим здесь также, что интегрирование по набору носителей открытых траекторий $\hat{S}_F = \cup \hat{S}_F^\gamma$ в формуле (3.20) следует понимать теперь как интегрирование по части поверхности Ферми S_{LCT} , занятой длинными замкнутыми траекториями.

Напомним теперь, что тензор $\Delta s^{kl}(B)$ необходимо сложить с симметрической частью вклада коротких замкнутых траекторий, получаемого из соотношений (1.6). В результате величина $s^{33}(B)$ приобретет конечный вклад, не зависящий от величины $\lambda(\mathbf{B}/B)$. Мы можем утверждать, тем не менее, что поведение проводимости характеризуется здесь частичным подавлением ее вдоль направления \mathbf{B} , что выражается формулой (2.13).

Для оценки вклада длинных замкнутых траекторий в антисимметричную часть тензора проводимости нам необходимо более детальное рассмотрение поведения $v_{gr}^k(p_z, s)$ на траекториях этого типа. Так, используя формулу (3.21) в виде

$$\Delta a^{kl}(B) = \frac{e^2\tau}{2} \iint_{S_{LCT}} (\langle v_{gr}^k \rangle_{-B} - \langle v_{gr}^k \rangle_B) v_{gr}^l \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (4.3)$$

из соотношения (4.2) мы можем легко получить оценку

$$\Delta a^{12}(B) \sim \Delta a^{13}(B) \sim (\omega_{B\tau})^{-1}.$$

Оценка величины $\Delta a^{23}(B)$ требует более детального анализа формулы (4.3). Так, оценки (4.1) не могут быть прямо использованы в формуле (4.3) для получения соответствующей оценки $\Delta a^{23}(B)$ из-за специфической формы траекторий, показанных на рис. 23.

Действительно, величины $v_{gr}^y(s)$ и $v_{gr}^z(s)$ являются сильнокоррелированными на больших масштабах (порядка $\lambda(\mathbf{B}/B)$) на траекториях такой формы. Следовательно, их медленные гармоники будут уничтожать друг друга в антисимметричной части $\sigma^{kl}(B)$. Более точно, представим величины $v_{gr}^k(p_z, s)$ на длинных замкнутых траекториях в виде

$$v_{gr}^k(p_z, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{gr}^k(m)(p_z) \exp(im\omega_0(p_z)s)$$

($v_{gr}^k(-m) = \bar{v}_{gr}^k(m)$), где

$$\omega_0(p_z) \simeq (m^*\lambda(\mathbf{B}/B))^{-1}.$$

Нетрудно проверить прямым вычислением, что вклад длинных замкнутых траекторий в антисимметричную часть тензора проводимости может быть записан в виде

$$\Delta a^{kl}(B) = \frac{ec}{2B} \int \frac{dp_z}{(2\pi\hbar)^3} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi im (v_{gr}^k(m)\bar{v}_{gr}^l(m) - \bar{v}_{gr}^k(m)v_{gr}^l(m))}{(m\omega_0(p_z))^2 + (c/eB\tau)^2}, \quad (4.4)$$

где интегрирование по p_z проводится вдоль высот цилиндров длинных замкнутых траекторий. Заметим, что общая высота неэквивалентных цилиндров длинных замкнутых траекторий имеет порядок $p_F/\lambda(\mathbf{B}/B)$, в то время как плотность частот $\omega(m)(p_z) = m\omega_0(p_z)$ пропорциональна $\lambda(\mathbf{B}/B)$.

Корреляция функций $v_{gr}^y(p_z, s)$ и $v_{gr}^z(p_z, s)$ на траектории означает теперь, что коэффициенты $v_{gr}^y(m)(p_z)$ и $v_{gr}^z(m)(p_z)$ являются коррелированными по фазе, т. е. имеют почти одинаковые комплексные фазы при малых значениях m . В общем случае мы можем использовать оценку

$$\left| \text{Arg } v_{gr}^y(m)(p_z) - \text{Arg } v_{gr}^z(m)(p_z) \right| \sim \frac{|m|}{\lambda(\mathbf{B}/B)}$$

в интервале

$$-\lambda(\mathbf{B}/B) \leq m \leq \lambda(\mathbf{B}/B).$$

Для траекторий нашего типа можно написать для тех же значений m соотношения

$$\left| v_{gr(m)}^y \right| \simeq \left| v_{gr(m)}^z \right| \sim \lambda^{-1/2} (\mathbf{B}/B).$$

В результате в интервале $|m| \leq \lambda(\mathbf{B}/B)$ имеем приближенно

$$\left| 2\pi i m \left(v_{gr(m)}^y \bar{v}_{gr(m)}^z - \bar{v}_{gr(m)}^y v_{gr(m)}^z \right) \right| \sim \frac{m^2}{\lambda^2 (\mathbf{B}/B)}.$$

Используя приведенные выше оценки в формуле (4.4), мы можем получить регулярное разложение для величины $\Delta a^{23}(B)$ в области $\omega_B \tau \gg \lambda(\mathbf{B}/B)$, имеющее вид

$$\begin{aligned} \Delta a^{23}(B) &\simeq \\ &\simeq (\omega_B \tau)^{-1} \left(\Delta a_{(0)}^{23} + \sum_{k \geq 1} \Delta a_{(k)}^{23} \left(\frac{\omega_B \tau}{\lambda} \right)^{-2k} \right), \end{aligned}$$

где все $\Delta a_{(k)}^{23}$ имеют порядок $ne^2\tau/m^*$. В частности, в главном порядке можно записать

$$\Delta a^{23}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B \tau)^{-1}.$$

Для вклада длинных замкнутых траекторий в антисимметричную часть тензора проводимости имеем оценку

$$\Delta a^{kl}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & 0 & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть также, что после сложения с вкладом коротких замкнутых траекторий мы в итоге получаем формулу (2.14) для антисимметричной части тензора проводимости.

Для величин $\omega_B \tau \simeq \lambda(\mathbf{B}/B)$ формула (3.10) дает некоторые промежуточные режимы между (2.11) и (2.12)–(2.14), которые имеют в общем случае нерегулярную форму. Мы не рассматриваем здесь эти режимы подробно и говорим лишь об экспериментальных подходах к описанию $\sigma^{kl}(B)$ с использованием промежуточных степеней $\omega_B \tau$. Как мы уже сказали, соответствующие степени $\omega_B \tau$ имеют в этом случае лишь локальный характер и не являются хорошо определенными как устойчивые характеристики поведения проводимости.

Схематическая поверхность Ферми, рассмотренная выше, выглядит довольно специальной с общей точки зрения. Тем не менее она проявляет все основные особенности поведения открытых траекторий вблизи границы ЗУ Ω_α , которые важны для

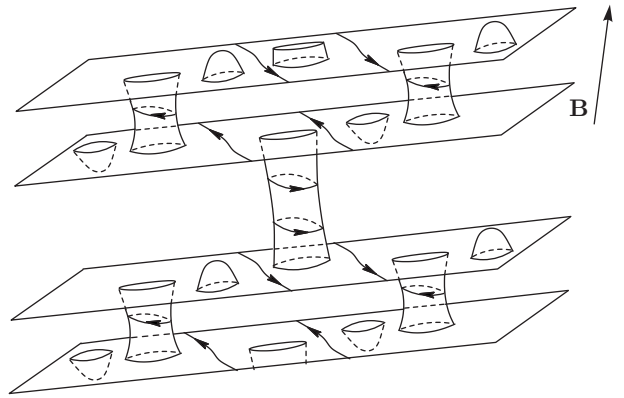


Рис. 24. Более общая схематическая поверхность, представляющая структуру траекторий на реальной поверхности Ферми для направлений \mathbf{B} , принадлежащих фиксированной ЗУ Ω_α

нас. В общем случае схематическая картина, приведенная выше, может быть дополнена добавочными цилиндрами замкнутых траекторий, соединяющими целочисленные плоскости или имеющими точку в качестве основания цилиндра (рис. 24). Тем не менее главные особенности перестройки носителей открытых траекторий после пересечения границы Ω_α для дисперсионного соотношения и уровня Ферми ϵ_F общего положения обусловлены обращением в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий и подразделением поверхности Ферми на пары целочисленных плоскостей, разделенные другими цилиндрами замкнутых траекторий. Наиболее общая картина подразделения поверхности Ферми для $\mathbf{B} \in \Omega_\alpha$ дается схемой, содержащей более двух неэквивалентных целочисленных плоскостей (с одним и тем же целочисленным направлением), соединенных цилиндрами замкнутых траекторий. В последней ситуации, которая теоретически возможна на поверхностях Ферми очень высокого рода, пары целочисленных плоскостей и индивидуальные носители открытых траекторий могут сосуществовать после перестройки части открытых траекторий. Математически мы имеем в этом случае перекрытие двух ЗУ, Ω_α и Ω'_α , с одними и теми же «топологическими квантовыми числами», что будет приводить также к перекрытию зон $\hat{\Omega}_\alpha$ и $\hat{\Omega}'_\alpha$ в экспериментальных исследованиях проводимости. Полный тензор проводимости в перекрытиях

$$\Omega_\alpha \cap \Omega'_\alpha, \quad \Omega_\alpha \cap \Lambda'_\alpha, \quad \Lambda_\alpha \cap \Omega'_\alpha, \quad \Lambda_\alpha \cap \Lambda'_\alpha$$

дается в этом случае суммой соответствующих асимптотических выражений, приведенных выше, так что мы имеем здесь теоретическую возможность

наблюдать очень сложное асимптотическое поведение в пределе $B \rightarrow \infty$.

Отметим, что возможность представления поверхности Ферми в специальной форме, описанной выше, в случае наличия устойчивых открытых траекторий основано на довольно глубоких топологических теоремах, играющих наиболее важную роль в работах [12, 13, 22]. Таким образом, картина, описанная выше, представляет в действительности (при некоторых требованиях общего положения) наиболее общую ситуацию.

Необходимо отметить, что приведенное выше утверждение нужно понимать лишь как топологическую характеристику системы (1.1) в случае наличия устойчивых открытых траекторий. Таким образом, топологическая структура, показанная на рис. 24, может иметь гораздо более сложное (визуальное) геометрическое представление в \mathbf{p} -пространстве.

В итоге мы можем кратко описать структуру экспериментально наблюдаемой ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$, возникающей в квазиклассическом приближении, как объединение следующих главных частей.

I. Центральная часть ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ (содержащая математическую ЗУ Ω_α). Поведение проводимости в этой части характеризуется «наиболее регулярной» зависимостью от величины B , представленной асимптотическим режимом (2.7) или (2.11). В то же время угловая зависимость $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ обладает довольно нерегулярным характером из-за наличия «рациональных пиков» в значениях $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ на плотном множестве направлений \mathbf{B} в этой области (см. рис. 13).

II. Зона довольно сложной формы вокруг центральной части ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ (темная область на рис. 13). Тензор $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ обладает здесь наиболее сложной зависимостью от величины и направления \mathbf{B} , соответствующей постепенному переходу от режима (2.11) к (2.12)–(2.14). Для аппроксимации поведения $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ могут быть локально использованы промежуточные степени $(\omega_B \tau)^\mu$; в общем случае величина μ характеризуется неустойчивым поведением. В то же время поведение $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ характеризуется подавлением проводимости вдоль направления \mathbf{B} ($\sigma^{33}(\mathbf{B})$) до некоторых меньших значений на внешней границе этой зоны.

III. Пограничная область ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$. Поведение $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ характеризуется здесь постепенным переходом от режима (2.12)–(2.14) к более простому поведению (1.4). Поведение $\sigma^{33}(\mathbf{B})$ показывает постепенный рост проводимости вдоль направления \mathbf{B} до его максимального значения на границе ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$.

В заключение работы, мы хотели бы сделать также одно дополнительное существенное замечание. Именно, как может быть показано, топологическая структура системы (1.1) допускает также аналогичное описание, когда она рассматривается для всего дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$, а не только для фиксированного уровня Ферми $\epsilon = \epsilon_F$ [22]. В частности, ЗУ (отвечающие наличию устойчивых открытых траекторий хотя бы на одном уровне энергии) могут быть введены для всего спектра $\epsilon(\mathbf{p})$. С этой точки зрения, экспериментально наблюдаемые ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ имеют связь с точными математическими ЗУ, определенными для всего энергетического спектра. В частности, каждая экспериментально наблюдаемая ЗУ $\hat{\Omega}_\alpha$ всегда принадлежит большей математической ЗУ Ω'_α , определенной для всего спектра $\epsilon(\mathbf{p})$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали аналитическое поведение проводимости нормальных металлов в сильных магнитных полях при наличии устойчивых открытых электронных траекторий на поверхности Ферми. Как показано в работе, поведение проводимости характеризуется довольно нетривиальными аналитическими свойствами в экспериментально наблюдаемых ЗУ даже при условии $\omega_B \tau \gg 1$. В частности, в различных частях экспериментально наблюдаемой ЗУ поведение проводимости может проявлять различные типы «регулярных» или более сложных промежуточных «нерегулярных» режимов в зависимости от величины магнитного поля. Результаты работы основаны на топологическом описании носителей открытых траекторий на сложных поверхностях Ферми, полученном в результате недавних математических исследований соответствующей геометрической проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
2. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974).
3. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
4. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
5. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).

6. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
7. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
8. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
9. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
10. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
11. С. П. Новиков, Успехи математ. наук **37**(5), 3 (1982).
12. И. А. Дынников, Математ. заметки **53**(5), 57 (1993).
13. А. В. Зорич, УФН **39**(5), 235 (1984).
14. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
15. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 45–73.
16. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
17. Р. Де Лео, Успехи математ. наук **55**(1), 181 (2000).
18. Р. Де Лео, Успехи математ. наук **58**(5), 197 (2003).
19. R. De Leo, Exp. Mathem. **15**(1), 109 (2006).
20. Р. Де Лео, И. А. Дынников, Успехи математ. наук **62**(5), 151 (2007).
21. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**(1), 51 (2009).
22. И. А. Дынников, Успехи математ. наук **54**(1), 21 (1999).
23. I. A. Dynnikov, Proc. Steklov Inst. Math. **263**, 65 (2008).
24. I. Dynnikov and A. Skripchenko, On typical leaves of a measured foliated 2-complex of thin type., Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014, Advances in the Mathematical Sciences, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 234, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 173 (2014), arXiv:1309.4884.
25. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32**(2), 643 (2012).
26. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
27. A. V. Zorich, in: Proc. "Geometric Study of Foliations" (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Sci., Singapore (1994), p. 479.
28. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Bull. Braz. Math. Soc., New Ser. **34**(1), 171 (2003).
29. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Statist. Phys. **115**(1–2), 31 (2004).
30. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**(3), 249 (1998).
31. T. Osada, S. Kagoshima, and N. Miura, Phys. Rev. B **46**, 1812 (1992).
32. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
33. Я. Г. Синай, К. М. Ханин, Функц. анализ и его прилож. **26**(3), 1 (1992).
34. В. И. Арнольд, Функц. анализ и его прилож. **25**(2), 1 (1991).
35. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматлит, Москва (1960).