

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНДАКТАНСОВ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

И. М. Сулов\*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 июля 2016 г.

С помощью модификации метода Шапиро вводится двухпараметрическое семейство распределений кондактанса  $W(g)$ , определяемое простыми дифференциальными уравнениями, которое находится во взаимно-однозначном соответствии с распределениями кондактанса квазиодномерных систем размера  $L^{d-1} \times L_z$ , характеризуемых параметрами  $L/\xi$  и  $L_z/L$  ( $\xi$  — корреляционный радиус,  $d$  — размерность пространства). Это семейство содержит гауссовские и логнормальные распределения, характерные для металлической и локализованной фаз. При определенном выборе параметров воспроизводятся результаты для кумулянтных средних в пространстве размерности  $d = 2 + \epsilon$ , полученные с помощью нелинейной сигма-модели. Универсальным свойством распределения является существование двух асимптотик — логнормальной для малых  $g$  и экспоненциальной при больших  $g$ : в металлической фазе они относятся к далеким хвостам, в критической области — определяют практически все распределение, в локализованной фазе первая асимптотика вытесняет вторую. Сингулярность при  $g = 1$ , обнаруженная в численных экспериментах, вполне допустима в рамках использованной в них вычислительной схемы, но связана с дефектным определением проводимости. За исключением этой сингулярности, критическое распределение для  $d = 3$  хорошо описывается настоящей теорией. Однопараметрический скейлинг для распределения в целом имеет место при условии, что два независимых параметра, характеризующих это распределение, являются функциями только от  $L/\xi$ .

DOI: 10.7868/S0044451017050121

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Безразмерный кондактанс  $g = hG/e^2$  определяется полной проводимостью системы  $G = \sigma L^{d-2}$  в единицах  $e^2/h$  (система предполагается имеющей форму  $d$ -мерного куба со стороной  $L$ ,  $\sigma$  — удельная проводимость). Одна из фундаментальных проблем теории неупорядоченных систем связана с распределением кондактансов  $W(g)$  [1–18]. Ее актуальность была осознана после открытия так называемых универсальных флуктуаций кондактанса в металлической фазе [1, 2]:

$$\langle (\delta g)^2 \rangle = c \sim 1, \quad (1)$$

где константа  $c$  в правой части не зависит от размера системы и степени беспорядка, но зависит от размерности пространства и граничных условий. Поскольку вблизи перехода Андерсона среднее значение  $\langle g \rangle$  также порядка единицы, то кондактанс

оказывается сильно флуктуирующей величиной и может недостаточно адекватно описываться своим средним значением. Исследование высших моментов с помощью нелинейной сигма-модели [3, 4] для пространства размерности  $d = 2 + \epsilon$  привело к следующим результатам для кумулянтных средних<sup>1)</sup> в точке перехода:

$$\langle\langle g^n \rangle\rangle \sim \begin{cases} e^{n-2}, & n < n_0, \\ L^{\epsilon n^2 - 2n}, & n > n_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $n_0 \sim 1/\epsilon$ . Обезразмеривание  $L$  во втором соотношении происходит на микроскопический масштаб типа длины пробега  $l$  или постоянной решетки  $a$ , что привело авторов [3, 4] к выводу о нарушении гипотезы однопараметрического скейлинга [5], согласно которой кондактанс  $g$  полностью определяется отношением  $L/\xi$ , где  $\xi$  — корреляционный радиус.

<sup>1)</sup> Напомним, что характеристическая функция  $F(t) = \langle e^{igt} \rangle$  является производящей функцией моментов ( $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle g^n \rangle / n!$ ), а ее логарифм — производящей функцией кумулянтов ( $\ln F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle\langle g^n \rangle\rangle / n!$ ). В частности, второй кумулянт есть дисперсия распределения.

\* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Этот вывод оспорен в работах Шапиро [6–8], согласно которому расходимость высших моментов может определяться ничтожной долей распределения, находящейся в его далеком хвосте, что не мешает основной части распределения подчиняться однопараметрическому скейлингу<sup>2)</sup>. Используя приближенное масштабное преобразование Мигдала–Каданова, Шапиро получил, что распределение  $P_c(\rho)$  безразмерных сопротивлений ( $\rho = 1/g$ ) в критической точке определяется выражением

$$P_c(\rho) = \text{const} (\rho + 1)^{-\alpha}, \quad (3)$$

где  $\alpha = 1/\epsilon$  для  $d = 2 + \epsilon$  [6, 7]. Если бы аналогичный результат был справедлив для распределения кондактансов, то это объяснило бы результаты (2): в бесконечной системе моменты с  $n \gtrsim 1/\epsilon$  не существуют, а в конечной — расходятся при росте  $L$ . Используя рекуррентные соотношения, аналогичные таковым для моментов  $P(\rho)$ , Шапиро построил пример распределения  $W(g)$ , обладающего свойствами (2), но хорошо определенного в термодинамическом пределе; аналогично (3) оно имеет степенное убывание  $W(g) \sim g^{-2/\epsilon}$  при больших  $g$  [8]. Несмотря на явный успех, последний результат является сомнительным: экстраполяция к  $\epsilon \sim 1$  дает степенной хвост с показателем порядка единицы, противоречащий всем численным результатам [11].

Последнее противоречие выглядит довольно фундаментальным, так как на первый взгляд выражения (2) однозначно указывают на степенную зависимость с показателем порядка  $1/\epsilon$ . Эта загадка разрешается в настоящей работе. Как выясняется, результаты (2) не обязательно связаны с наличием у критического распределения степенного хвоста и совместимы с его экспоненциальным убыванием на бесконечности; при этом первый результат (2) справедлив для всех кумулянтов. Что касается второго результата (2), то он возникает в случае, когда стационарное распределение подвергается возмущению, не выводящему систему из критического состояния<sup>3)</sup>. В силу сохранения нормировки это возмущение оказывается знакопеременным, а его релаксация описывается уравнением диффузионного типа: при увеличении размера системы возмущение испытывает диффузионное расплыва-

ние и в пределе стремится к нулю; но при этом его хвост распространяется на бесконечность и обеспечивает расходимость высших моментов. Находит объяснение и странная аналогия между  $P(\rho)$  и  $W(g)$ , обнаруженная Шапиро: для  $d = 2 + \epsilon$  эти распределения описываются уравнениями одинаковой структуры.

Основным источником информации о  $W(g)$  являются численные эксперименты. В настоящее время считается установленной реализация гауссовского распределения в металлической фазе и логнормального — в локализованной; в критической точке распределение близко к одностороннему логнормальному [10] (рис. 1). Более подробное исследование [11] показывает (рис. 2), что критическое распределение с хорошей точностью разбивается на две части: справа от некоторой точки  $A$  логарифм  $W(g)$  линеен по  $g$  (рис. 2а), а левее точки  $A$  логарифм  $P(\ln g)$  квадратичен по  $\ln g$  (рис. 2б). Согласно Маркошу [11], точка  $A$  является реальной сингулярностью, что в рамках некоторой теоретической схемы подтверждено в работе [12]. Однако, согласно общим принципам современной теории критических явлений [19, 20], в конечных системах сингулярности отсутствуют и могут возникать лишь в термодинамическом пределе; это противоречит предполагаемой стационарности критического распределения, которое должно формироваться при сравнительно малых  $L$ , а затем оставаться неизменным. Ниже воспроизводятся все перечисленные свойства и обсуждается вопрос о сингулярности.

Анализ настоящей работы основан на модификации метода Шапиро [6–8]. Мы введем двухпараметрическое семейство распределений кондактанса, определяемое простыми дифференциальными уравнениями, которое находится во взаимно-однозначном соответствии с распределениями кондактанса квазиодномерных систем размера  $L^{d-1} \times L_z$ , характеризуемых параметрами  $L/\xi$  и  $L_z/L$ . Это семейство содержит гауссовские и логнормальные распределения, характерные для металлической и локализованной фаз. При определенном выборе параметров воспроизводятся результаты (2) для кумулянтных средних в пространстве размерности  $d = 2 + \epsilon$ . Универсальным свойством распределения является существование двух асимптотик — логнормальной для малых  $g$  и экспоненциальной при больших  $g$ , однако их актуальность зависит от конкретной ситуации. В металлической фазе распределение определяется центральным гауссовским пиком, а указанные асимптотики относятся лишь к далеким хвостам.

<sup>2)</sup> Аналогичные соображения высказывались в работе [9], где в рамках некоторой иерархической модели получено распределение  $W(g)$  со степенным хвостом, удовлетворяющее однопараметрическому скейлингу.

<sup>3)</sup> На ренормгрупповом языке [19, 20] это означает, что система отклоняется от неподвижной точки, оставаясь на критической поверхности.

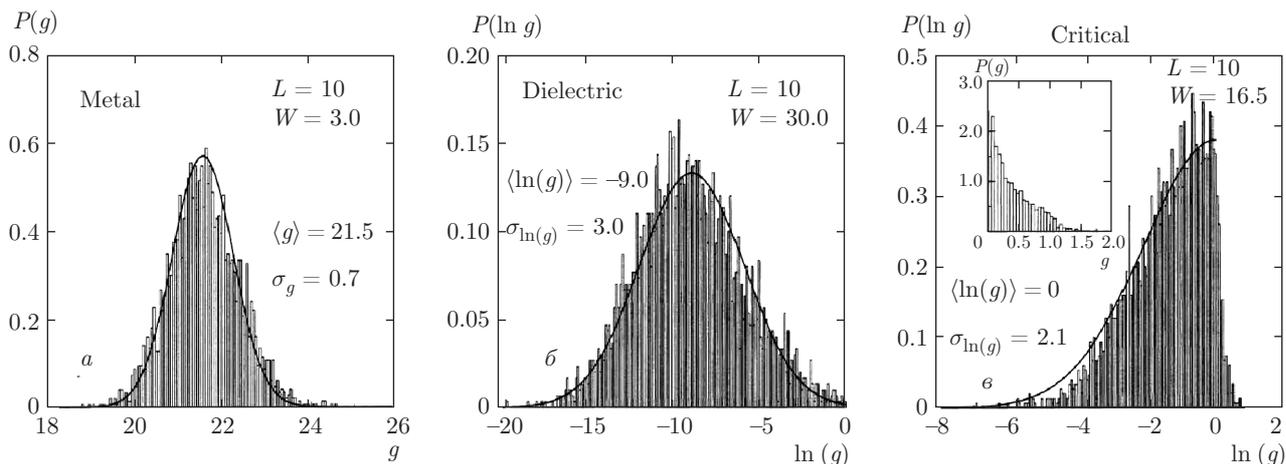


Рис. 1. Распределение кондактансов в металлическом режиме является гауссовским (а), в локализованной фазе — логнормальным (б), в критической точке — близко к одностороннему логнормальному (в) (по данным работы [10]). Сплошные линии соответствуют гауссовскому закону

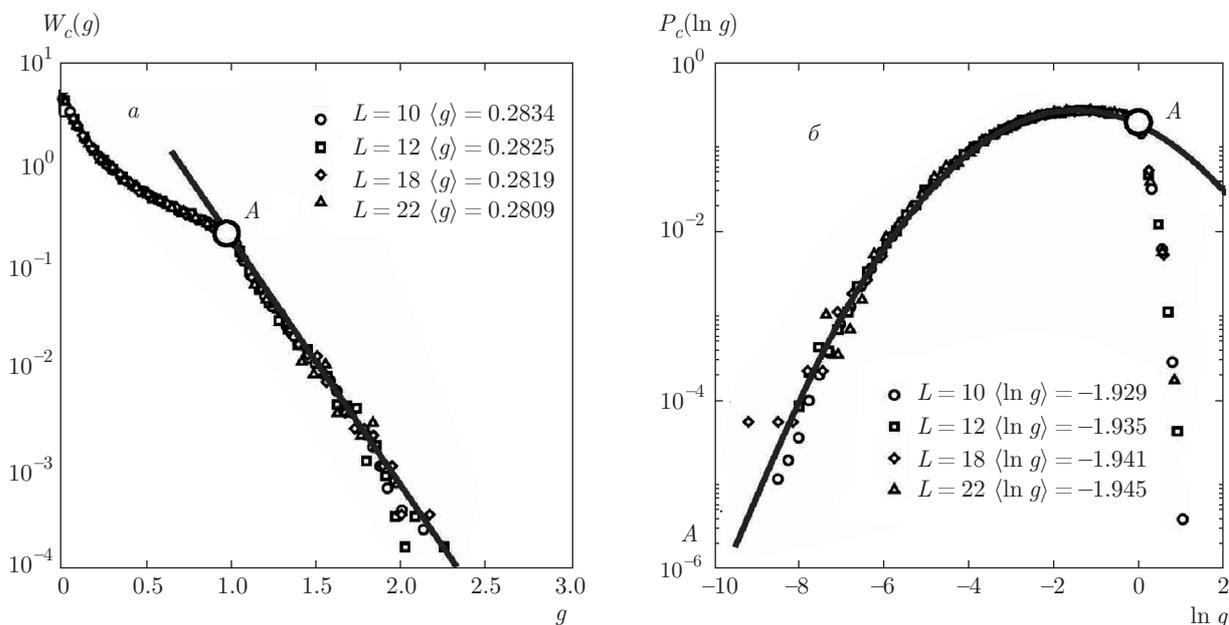
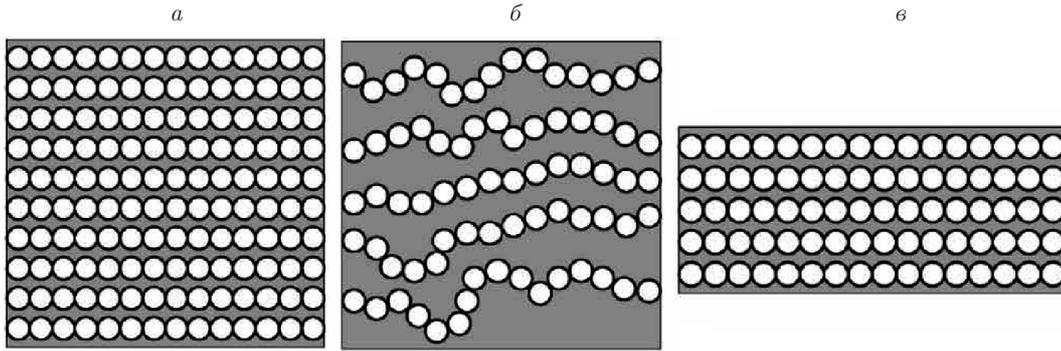


Рис. 2. Распределение кондактансов  $W(g)$  в критической точке (а) и распределение логарифмов кондактанса  $P(\ln g)$  ( $W(g)dg \equiv P(\ln g)d \ln g$ ) (б) согласно численным данным Маркоша [11]. Правее точки  $A$  логарифм  $W(g)$  линеен по  $g$ , а левее точки  $A$  логарифм  $P(\ln g)$  квадратичен по  $\ln g$

В критической области логнормальное поведение распространяется на окрестность максимума, как это имеет место на рис. 2; при этом практически все распределение определяется двумя асимптотиками. При движении в локализованную фазу логнормальное поведение распространяется дальше и вытесняет экспоненциальную асимптотику в область далекого хвоста. Сингулярность в точке  $A$  вполне допустима в рамках использованной в [11] вычислительной схемы, но связана с дефект-

ным определением проводимости; при правильном определении она естественным образом сглаживается. За исключением последнего, результаты рис. 2б удовлетворительно описываются настоящей теорией.

Согласно численным экспериментам, однопараметрическому скейлингу подчиняется все распределение  $W(g)$  в целом. Это подтверждается исследованием так называемых перценталей [13], а также анализом средних  $\langle g \rangle$ ,  $\langle \rho \rangle$ ,  $\langle \ln g \rangle$  [14]. Излагаемый



**Рис. 3.** а) В модели Шапиро  $d$ -мерная система набирается из  $b^{d-1}$  одномерных цепочек длиной  $b$ , помещенных в диэлектрическую среду. б) Более адекватная интерпретация состоит в замене искусственной конструкции рисунка рис. 3а на представление о резонансных каналах. в) «Распрямленная» версия рисунка рис. 3б

ниже анализ основан на предположении об однопараметрическом скейлинге и его результаты согласуются с таким предположением. Для окончательного утверждения о существовании скейлинга для всего распределения нужно доказать, что два независимых параметра, характеризующих это распределение (например,  $\langle g \rangle$  и  $\langle (\delta g)^2 \rangle$ ), являются функциями только от  $L/\xi$ . Для первого параметра указанное свойство установлено в работе [21] с помощью самосогласованной теории локализации [22]; представляется весьма вероятным его справедливость и для второго параметра.

## 2. МЕТОД ШАПИРО

В модели Шапиро  $d$ -мерная система составляется из одномерных цепочек, которые предполагаются независимыми друг от друга, т. е. разделенными диэлектрическими прослойками (рис. 3а). Распределение сопротивлений для каждой цепочки описывается уравнением

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ (\rho^2 + \rho) \frac{\partial P_L(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (4)$$

которое было получено для одномерного случая во многих работах [15–18] и считается достаточно универсальным. Параметр  $\alpha$  пропорционален дисперсии случайного потенциала и определяется соотношением  $\langle \rho \rangle = \alpha L$  при малых  $L$ ; он имеет смысл обратной корреляционной длины одномерной системы. Чтобы получить описание  $d$ -мерной системы, составленной из  $n = b^{d-1}$  одномерных цепочек,

нужно ввести распределение  $W(g)$ , соответствующее  $P(\rho)$ ,

$$W(g) = \int P(\rho) \delta(g - 1/\rho) d\rho = g^{-2} P(1/g), \quad (5)$$

и найти распределение суммы  $n = b^{d-1}$  случайных величин с одинаковым распределением  $W(g)$ : это осуществляется путем перехода к характеристической функции  $F(t) = \langle e^{igt} \rangle$  и возведением ее в степень  $n$ . Уравнение для  $W(g)$ , соответствующее (4), получается заменами  $P = g^2 W$ ,  $\rho = 1/g$ :

$$\frac{\partial W(g)}{\partial L} = \alpha [2g(1+g)W(g) + g^2(1+g)W'_g(g)]'_g. \quad (6)$$

Вместо характеристической функции удобнее использовать преобразование Лапласа

$$F(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau g} W(g) dg, \quad (7)$$

получаемое заменой  $it \rightarrow -\tau$ . Умножая (6) на  $e^{-\tau g}$  и интегрируя по  $g$ , получим уравнение для  $F(\tau)$  одномерной цепочки, которое удобно записать для конечных приращений:

$$F_{L+\Delta L}(\tau) = F_L(\tau) + \alpha \Delta L [-\tau^2 F'''_L(\tau) + \tau(\tau - 1)F''_L(\tau)]. \quad (8)$$

Возводя  $F_L(\tau)$  в степень  $n = b^{d-1}$  и полагая  $b = 1 + \Delta L/L$ , получим в (8) дополнительный член  $(\Delta L/L)(d - 1)F_L \ln F_L$  и окончательно [6, 7]

$$\frac{\partial F(\tau)}{\partial \ln L} = \alpha L [-\tau^2 F'''(\tau) + \tau(\tau - 1)F''(\tau) + pF(\tau) \ln F(\tau)], \quad (9)$$

где  $p = (d - 1)/\alpha L$ . Величина  $\alpha L$  имеет смысл  $L/\xi$  и эволюция по  $L$  при постоянном  $L/\xi$  приводит к стационарному распределению, соответствующему большому масштабу; уравнение (9) описывает переходный процесс при увеличении  $L$  от атомного масштаба к масштабам порядка  $\xi$ . Уравнение (9) адекватно описывает модель рис. 3а, но в работах Шапиро [6, 7] фактически не исследовалось. Вместо этого рассматривалась упрощенная схема (разд. 5), в которой все  $b^{d-1}$  цепочек считались одинаковыми. Эта схема не позволяла получить правильные результаты для металлической фазы, в связи с чем изложенный подход был признан бесперспективным самим автором.

### 3. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Фактически после некоторой модификации схема Шапиро оказывается плодотворной. Прежде всего, изменим интерпретацию модели, перейдя от искусственной конструкции рис. 3а к более адекватной версии, представленной на рис. 3б. Известно [23], что в режиме сильного беспорядка проводимость системы определяется резонансными каналами. Существует конечная вероятность того, что вдоль некоторой траектории амплитуда случайного потенциала окажется существенно меньше, чем в среднем по системе. Некоторое увеличение длины траектории по сравнению с  $L$  компенсируется более сильным уменьшением  $\alpha$ , так что в локализованном режиме, когда  $g \sim \exp(-\alpha L)$ , проводимость такого резонансного канала оказывается экспоненциально больше, чем проводимость типичной цепочки в модели Шапиро (рис. 3а)<sup>4</sup>. Тогда естественным образом возникает представление о наборе одномерных цепочек, помещенных в диэлектрическую среду. При этом легко устраняется и внутреннее противоречие, присущее первоначальной модели; действительно, параллельное соединение  $L^{d-1}$  цепочек с проводимостью  $\exp(-\alpha L)$  дает

<sup>4</sup>) Для иллюстрации сделанных утверждений рассмотрим пример построения резонансной траектории на  $d$ -мерной кубической решетке. Пусть траектория начинается на левом краю системы и строится по следующему алгоритму. Если  $A$  — некоторая точка траектории, то из  $2d$  ее возможных продолжений исключим направление влево и направление назад по траектории; из оставшихся направлений выберем то, которое ведет на узел с минимальным значением случайного потенциала. Легко понять, что (для больших  $d$ ) длина траектории окажется  $\sim Ld$ , а амплитуда случайного потенциала  $W$  вдоль нее будет примерно в  $d$  раз меньше, чем в среднем. Поскольку  $\alpha \sim W^2$ , то величина  $\alpha L$  будет примерно в  $d$  раз меньше, чем для типичной прямолинейной траектории.

$$g \sim L^{d-1} \exp(-\alpha L), \quad (10)$$

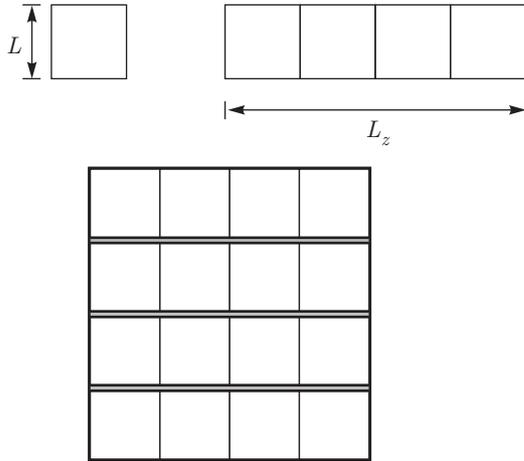
что стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ . Однако статистика резонансных каналов существенно зависит от  $L$ , что приводит к такой же зависимости для параметра  $\alpha$  и делает необязательным нулевой предел в (10)<sup>5</sup>.

Поскольку характерная длина резонансных каналов несколько больше  $L$ , а их число пропорционально площади поперечного сечения, но меньше  $b^{d-1}$ , то «распрямленная» версия рис. 3б соответствует рис. 3в, так что куб превращается в параллелепипед. Если стороны параллелепипеда имеют одинаковый скейлинг по  $L$ , то система топологически  $d$ -мерна и ее распределение кондактансов  $W(g)$  обладает всеми качественными свойствами  $d$ -мерного распределения. Однако имеются и количественные отличия, связанные с превращением куба в параллелепипед, что в схеме Шапиро является неконтролируемым эффектом. Величина этого эффекта зависит от конкретной ситуации: действительно, при слабом беспорядке мы фактически возвращаемся к исходной модели (рис. 3а), так как проводимости цепочек становятся слабо флуктуирующими и линии тока почти параллельны поперечным краям системы; поэтому введение диэлектрических прослоек почти ничего не меняет.

К аналогичным выводам можно придти, рассматривая ситуацию со стороны больших масштабов. Фактически в схеме Шапиро имеются в виду крупномасштабные построения: сначала из  $b$  последовательно соединенных кубиков строится квазиодномерная система (рис. 4), а затем параллельное соединение  $b^{d-1}$  квазиодномерных систем образует  $d$ -мерную систему. При больших  $L$  концентрация вспомогательной диэлектрической фазы, разделяющей квазиодномерные цепочки, убывает и ее влияние уменьшается, указывая на обоснованность схемы Шапиро в пределе больших масштабов. Однако при этом неявно предполагается, что свойства квазиодномерных систем — такие же, как у строго одномерных. Это предположение отчасти правильно, но требует дополнительной аргументации. Если система имеет форму куба со стороной  $L$ , то принято считать, что ее свойства полностью определяются параметром  $L/\xi$ ,

$$g = F(L/\xi), \quad (11)$$

<sup>5</sup>) Зависимость  $\alpha$  от  $L$  предполагалась Шапиро из физических соображений, однако в модели рис. 3, а для этого нет оснований.



**Рис. 4.** Крупномасштабные построения, подразумеваемые в схеме Шапиро: из кубиков размера  $L$  составляются квазиодномерные системы длиной  $L_z$ , которые затем параллельно соединяются, чтобы образовать  $d$ -мерную систему

что фактически соответствует гипотезе однопараметрического скейлинга [5]<sup>6)</sup>. Если составить из кубических блоков квазиодномерную систему, то ее проводимость зависит от свойств одного блока ( $L/\xi$ ) и числа кубиков ( $b = L_z/L$ ), т. е.

$$g = F(L/\xi, L_z/L). \quad (12)$$

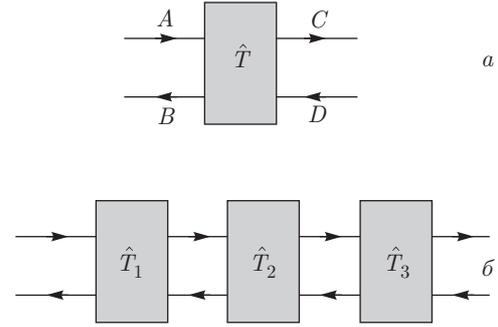
Легко убедиться, что распределение  $g$  зависит от каждого из двух параметров по отдельности, а не от какой-то их комбинации. Действительно, для среднего и дисперсии имеем в металлической фазе

$$\langle g \rangle = \sigma L^{d-1} L_z^{-1} = (L/\xi)^{d-2} (L/L_z), \quad (13)$$

$$\langle (\delta g)^2 \rangle = f(L_z/L),$$

где корреляционный радиус  $\xi$  вводится обычным образом [24]. Последний результат следует из теории универсальных флуктуаций кондактанса [1, 2], согласно которой константа  $c$  в правой части (1) зависит от размерности пространства, так что функция  $f(x)$  меняется от  $c_{d-1}$  при  $x \ll 1$ , проходя через  $c_d$  при  $x = 1$  и стремится к  $c_1$  при  $x \gg 1$ . Полагая  $L = a$  в (12), приходим к выводу, что распределение кондактансов квазиодномерной системы соответствует некоторому распределению кондактансов

<sup>6)</sup> Правильнее сказать, что распределение  $W(g)$  определяется параметром  $L/\xi$ , но мы используем упрощенную запись.



**Рис. 5.** а) В одномерной системе трансфер-матрица  $\hat{T}$  связывает амплитуды плоских волн слева и справа от рассеивателя. б) При последовательном расположении рассеивателей их трансфер-матрицы перемножаются

строго одномерной системы<sup>7)</sup>. Однако при этом выявляется реальный дефект метода Шапиро: согласно уравнению (4),  $P_L(\rho)$  определяется одним параметром  $\alpha L$ , а не двумя, как это требуется уравнением (12).

Фактически уравнение (4) допускает двухпараметрическое обобщение

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = \bar{\alpha} [-\gamma(2\rho+1)P_L(\rho) + (\rho^2 + \rho)P'_L(\rho)]' \quad (14)$$

(штрихами отмечены производные по  $\rho$ ), имеющее примерно тот же уровень универсальности. Действительно, описание одномерных систем удобно проводить, рассматривая каждый рассеиватель как «черный ящик», характеризуемый трансфер-матрицей  $\hat{T}$ , связывающей амплитуды волн слева ( $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ ) и справа ( $Ce^{ikx} + De^{-ikx}$ ) от него (рис. 5а):

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (15)$$

При этом последовательное соединение рассеивателей (рис. 5б) описывается произведением трансфер-матриц. Матрица  $\hat{T}$  определяется амплитудами прохождения ( $t$ ) и отражения ( $r$ ) и при наличии инвари-

<sup>7)</sup> Это утверждение является строгим в рамках ортогонального скейлинга работы [5]. Фактически универсальные функции типа (12) формируются лишь на больших масштабах, а на масштабах  $\sim a$  имеют некоторое переходное поведение. Однако, как обсуждалось еще Вильсоном [19], такое переходное поведение можно исключить, если специальным образом выбрать модель на малых масштабах (см. «идеальную РГ-траекторию» в [25], приближенной реализацией которой являются так называемые «улучшенные» модели [26]). Поскольку для одномерных систем мы используем уравнение, обладающее высокой степенью универсальности (см. ниже), то оно описывает и указанную «идеальную» модель.

антности относительно обращения времени может быть параметризована в виде [27]

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} & -\sqrt{\rho} e^{-i\theta} \\ -\sqrt{\rho} e^{i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $\rho = |r/t|^2$  — сопротивление по Ландауэру [28]. При перемножении  $n$  трансфер-матриц распределение  $\varphi$  и  $\theta$  обычно стабилизируется, так что

$$P_n(\rho, \varphi, \theta) = P_n(\rho) P(\varphi, \theta). \quad (17)$$

Если распределение фаз является однородным ( $P(\varphi, \theta) = \text{const}$ ), то справедливо уравнение (4), тогда как в общем случае возникает уравнение (14) с параметрами (см. Приложение А)

$$\gamma = \frac{1 - 2A_0}{2A_0}, \quad \tilde{\alpha} = 2\alpha A_0, \quad (18)$$

$$A_0 = \langle \sin^2(\varphi - \theta) \rangle,$$

откуда ясно, что  $\gamma \geq -1/2$ . Для стандартных микроскопических моделей уравнение (14) с переменным  $\gamma$  возникает при малых  $L$ , когда распределение  $\varphi$  и  $\theta$  еще не стабилизировалось. Уравнение (14) с постоянным  $\gamma$  возникает в решеточных моделях из-за эффектов соизмеримости волнового вектора  $k$  с постоянной решетки  $a$  (когда  $ka$  — рациональное число) [29], что представляется труднонаблюдаемой экзотикой. Однако существуют систематические причины для появления уравнения (14), которые обсуждаются в следующем разделе<sup>8)</sup>.

Уравнение (14) — диффузионного типа со «временем»  $t = \tilde{\alpha}L$ ; поэтому любое начальное распределение  $P_0(\rho)$ , локализованное при малых  $\rho$ , на больших временах превращается в универсальное распределение, которое имеет различный вид в области малых и больших  $\rho$ :

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \frac{\rho^\gamma \exp\{-\rho/t\}}{t^{\gamma+1}}, \quad \rho \lesssim 1, \quad (19)$$

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{[\ln \rho - (2\gamma + 1)t]^2}{4t}\right\}, \quad (20)$$

$$\rho \gtrsim 1$$

<sup>8)</sup> В несколько другом контексте необходимость двухпараметрического описания одномерных систем мотивировалась в работе [30].

и получается в результате сохранения в (14) главных по  $\rho$  членов при  $P_L(\rho)$  и  $P'_L(\rho)$ . При больших  $\gamma$  первое распределение близко к гауссовскому:

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t^2}} \exp\left\{-\frac{(\rho - \gamma t)^2}{2\gamma t^2}\right\} \quad (21)$$

и справедливо на относительно больших временах, когда диффузионное уширение превышает ширину начального распределения  $P_0(\rho)$ . В противоположном случае можно пренебречь в (14) вторым членом в квадратной скобке (14) и получить автомодельное решение

$$P(\rho, t) = e^{-2\gamma t} P_0\left\{\left(\rho + \frac{1}{2}\right) e^{-2\gamma t} - \frac{1}{2}\right\}, \quad (22)$$

которое при  $\gamma t \ll 1$  сводится к чистому дрейфу:

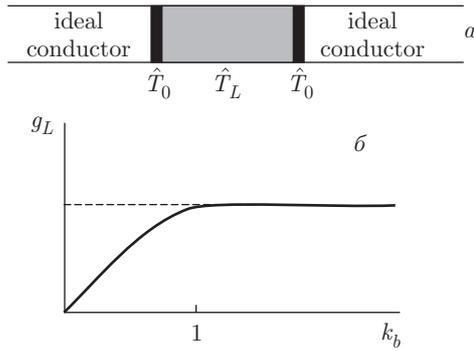
$$P(\rho, t) = P_0(\rho - \gamma t). \quad (23)$$

Если начальное распределение является гауссовским, то (21), (23) соответствуют общепринятым представлениям о распределении кондактансов в металлическом режиме; в оригинальной версии метода Шапиро этот результат оказался камнем преткновения. Выражение (20) соответствует логнормальному распределению, которое считается твердо установленным для локализованной фазы.

#### 4. ПОЛУПРОЗРАЧНЫЕ ГРАНИЦЫ

Как отмечалось в работе [21], для правильного определения проводимости конечной системы полезно введение полупрозрачных границ, отделяющих систему от присоединенных к ней идеальных контактов, которые предполагаются достаточно массивными (рис. 6а). Последнее связано с тем, что формулы теории линейного отклика требуют уширения входящих в них  $\delta$ -функций на величину  $\Gamma$ , которая устремляется к нулю лишь после перехода к термодинамическому пределу; в случае конечных систем термодинамический предел реализуется за счет увеличения размеров идеальных контактов. Такое определение проводимости относится к составной системе «образец + идеальные провода» и возникает вопрос о его отношении к изучаемой системе.

Если  $k_b$  — параметр, характеризующий эффективную прозрачность границы раздела, то зависимость кондактанса от  $k_b$  имеет вид, показанный на рис. 6б [21]: линейное поведение, справедливое при малых  $k_b$  (когда сопротивление определяется слабопроницаемыми границами), выходит на насыщение



**Рис. 6.** а) Для правильного определения проводимости конечной системы полезно введение полупрозрачных границ, отделяющих рассматриваемую систему от присоединенных к ней идеальных контактов. б) Поведение кондактанса как функции параметра  $k_b$ , имеющего смысл эффективной прозрачности границы

при  $k_b \sim 1$ , когда уширение уровней конечной системы сравнивается с расстоянием между ними и возникает непрерывная плотность состояний. Физически разумное определение кондактанса конечной системы соответствует значению на плато при  $k_b \gtrsim 1$ ; при этом не следует брать слишком большие  $k_b$ , так как «плато» может соответствовать медленной зависимости, возникающей из-за усиления влияния на систему ее окружения. Вместо того, чтобы полагать  $k_b \sim 1$  в зависимости  $g = f(k_b)$ , можно взять производную  $dg/dk_b$  при  $k_b \rightarrow 0$ ; тогда проводимость предельно открытой системы определяется в терминах почти закрытых систем<sup>9)</sup> [21]. Такое определение (а) заведомо относится к изучаемой системе и не зависит от свойств окружающей среды, (б) свободно от неоднозначностей, связанных с исключением контактного сопротивления резервуара [31], и (в) обеспечивает бесконечное значение кондактанса в случае идеальной системы [21]. Естественно ожидать, что введение полупрозрачных границ окажется полезным и при обсуждении распределения кондактансов; но это немедленно приводит к уравнению (14) с конечным  $\gamma$ .

Если  $\hat{T}_L$  — трансфер-матрица системы размера  $L$ , то ситуация на рис. 6а описывается матрицей

$$\hat{T}'_L = \hat{T}_0 \hat{T}_L \hat{T}_0, \quad (24)$$

<sup>9)</sup> Эти две процедуры совпадают лишь по порядку величины, но это не должно вызывать беспокойства: физический смысл имеет лишь отношение кондактансов и изменение определения на постоянный множитель соответствует лишь изменению единицы измерения.

где  $\hat{T}_0$  соответствует границе раздела. Увеличение длины системы на  $\Delta L$  дает

$$\hat{T}'_{L+\Delta L} = \hat{T}_0 \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L} \hat{T}_0 = \hat{T}'_L \cdot \hat{T}_0^{-1} \hat{T}_{\Delta L} \hat{T}_0, \quad (25)$$

т.е. соответствует умножению на матрицу  $\hat{T}_0^{-1} \hat{T}_{\Delta L} \hat{T}_0$ , близкую к единичной, что позволяет стандартным способом вывести уравнение эволюции (см. Приложение А). Если принять  $\hat{T}_L$  в виде (16), а для  $\hat{T}_0$  использовать результат, соответствующий точечному рассеивателю,

$$\hat{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix}, \quad (26)$$

то при  $\kappa \gg 1$  получим связь параметров  $\hat{T}'_L$  и  $\hat{T}_L$ :

$$\rho' = 4\kappa^4 \left( \sqrt{\rho+1} \sin \varphi + \sqrt{\rho} \sin \theta \right)^2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi' &= \\ &= 2\kappa \frac{\sqrt{\rho+1} \cos \varphi - \kappa \sqrt{\rho+1} \sin \varphi - \kappa \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{\rho+1} \cos \varphi - 2\kappa \sqrt{\rho+1} \sin \varphi - 2\kappa \sqrt{\rho} \sin \theta}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta' &= \\ &= -2\kappa \frac{\sqrt{\rho+1} \cos \varphi - \kappa \sqrt{\rho+1} \sin \varphi - \kappa \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{\rho} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Нетрудно убедиться, что распределение величин  $\varphi'$  и  $\theta'$  оказывается неоднородным даже при однородном распределении фаз  $P(\varphi, \theta)$  для исходной матрицы  $\hat{T}_L$ . В частности, при  $\kappa \gg 1$  распределения  $\varphi'$  и  $\theta'$  имеют форму узких лоренцевских пиков

$$P(\varphi') = \frac{1}{2\pi} \frac{1/2\kappa^2}{1/4\kappa^4 + (\delta\varphi' + 1/\kappa)^2}, \quad (30)$$

$$P(\theta') = \frac{1}{2\pi} \frac{1/2\kappa^2}{1/4\kappa^4 + (\delta\theta')^2}, \quad (31)$$

где  $\delta\varphi' = \varphi' \pm \pi/2$  и  $\delta\theta' = \theta' \pm \pi/2$ . Здесь учтено, что при  $\rho \gg 1$  величины  $\varphi'$  и  $\theta'$  не зависят от  $\rho$ ; при  $\rho \lesssim 1$  некоторая зависимость от  $\rho$  появляется, но локализация при  $\delta\varphi' \approx 1/\kappa$  и  $\delta\theta' \approx 0$  сохраняется, что непосредственно ясно из (28), (29). Вычисляя среднее в (18) по распределениям (30), (31) получим

$$A_0 = 1/\kappa^2, \quad \gamma = \kappa^2/2. \quad (32)$$

Итак, если распределение фаз  $P(\varphi, \theta)$  для исходной системы однородно, то введение слабопроницаемых границ делает его сильно неоднородным и приводит к уравнению эволюции с  $\gamma \gg 1$ .

### 5. УПРОЩЕННЫЕ СХЕМЫ

В полной версии метода Шапиро уравнение эволюции является нелинейным уравнением для  $F(\tau)$ , что затрудняет его исследование. Определенный методический интерес представляют аппроксимации, в рамках которых получаются более простые уравнения.

#### 5.1. Схема Шапиро для средних

Умножая (4) на  $\rho$  и интегрируя, получим уравнение для среднего сопротивления одномерной системы, решение которого

$$\bar{\rho}_L^{(1)} = \frac{1}{2} (e^{2\alpha L} - 1) \quad (33)$$

совпадает с известными результатами [7, 27, 28]. Составляя систему длины  $bL$  путем последовательного соединения  $b$  блоков размера  $L$ , получим масштабное преобразование для одномерной цепочки

$$\bar{\rho}_{bL}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ (1 + 2\bar{\rho}_L^{(1)})^b - 1 \right], \quad (34)$$

после чего параллельное соединение  $b^{d-1}$  таких цепочек составляет  $d$ -мерную систему:

$$\bar{\rho}_{bL} = \frac{1}{2} b^{-(d-1)} \left[ (1 + 2\bar{\rho}_L)^b - 1 \right]. \quad (35)$$

Беря  $b$  близким к единице, получим дифференциальное уравнение, которое в терминах переменной  $g_L = 1/2\bar{\rho}_L$  имеет вид [7]

$$\frac{d \ln g_L}{d \ln L} = d - 1 - (1 + g_L) \ln(1 + 1/g_L) \equiv \beta(g_L) \quad (36)$$

в соответствии с ожидаемой формой для однопараметрического скейлинга [5]. Уравнение (36) дает качественное описание перехода Андерсона и воспроизводит правильный результат  $\nu = 1/\epsilon$  для критического индекса  $\nu$  корреляционного радиуса в пространстве размерности  $d = 2 + \epsilon$ . Последнее не удивительно, так как единственное существенное предположение делается при переходе от (34) к (35): при параллельном соединении цепочек складываются средние проводимости, т. е.  $\bar{g}_{bL} = b^{d-1} \bar{g}_{bL}^{(1)}$  вместо использованного соотношения  $\bar{\rho}_{bL} = b^{-(d-1)} \bar{\rho}_{bL}^{(1)}$ . Последнее приближенно справедливо для узкого распределения, которое имеет место для  $d = 2 + \epsilon$ .

Используя уравнение (14) вместо уравнения (4) и учитывая, что согласно (18)  $\tilde{\alpha}(\gamma + 1) = \alpha$ , легко убедиться, что зависимость от  $\gamma$  пропадает и для  $\bar{\rho}_L$  по-прежнему справедлив результат (33); поэтому

выражения (34)–(36) остаются неизменными. Таким образом, модифицированная схема Шапиро определяет правильное критическое поведение  $\xi$  в той мере, в которой она позволяет его контролировать.

#### 5.2. Схема Шапиро для $P(\rho)$

В упрощенном варианте схемы Шапиро все цепочки на рис. 3а предполагаются одинаковыми, так что  $P_L(\rho) = b^{d-1} P_L^{(1)}(b^{d-1}\rho)$  и вместо уравнения эволюции (9) получается линейное уравнение для  $P_L(\rho)$ :

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial \ln L} = A [-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + \rho(\rho + 1)P_L'(\rho) + p\rho P_L(\rho)]', \quad (37)$$

где  $A = \tilde{\alpha}L$ . Оно имеет стационарное решение

$$P_c(\rho) = \text{const} \frac{\rho^\gamma}{(\rho + 1)^{p-\gamma}}, \quad (38)$$

которое при  $\gamma = 0$  совпадает с (3). Если принять результат  $\bar{\rho} = \epsilon$  для  $d = 2 + \epsilon$ , следующий из (36), получим  $p = (\gamma + 1)/\epsilon$ . В отличие от результата Шапиро (3), распределение (38) обеспечивает конечность моментов  $\langle g^n \rangle$  для  $n \lesssim \gamma$ . Полагая  $\gamma \sim 1/\epsilon^2$  и вычисляя преобразование Лапласа (7) методом перевала, получим

$$F(\tau) = \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} f(\epsilon\tau) \right\}, \quad (39)$$

где  $f(x)$  имеет регулярное разложение и обеспечивает результаты для кумулянтов, определяемые первым соотношением (2); второе соотношение (2) в этой схеме не выполняется.

#### 5.3. Упрощенная схема для $d = 2 + \epsilon$

Более адекватное приближение можно сформулировать, ориентируясь на ситуацию при  $d = 2 + \epsilon$ . Согласно (2), кумулянты  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  быстро убывают с ростом  $n$ , так что в главном порядке по  $\epsilon$  можно положить  $\ln F(\tau) \approx \text{const} \tau$ . Нетрудно проследить, что это эквивалентно появлению члена  $\rho^2 P$  в квадратной скобке уравнения для  $P(\rho)$ :

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial \ln L} = A [c\rho^2 P(\rho) - \gamma(2\rho + 1)P(\rho) + \rho(\rho + 1)P'(\rho)]'. \quad (40)$$

До настоящего момента мы принимали ландауэровское определение сопротивления  $\rho = |r/t|^2$  [28].

Альтернативным является определение по Эконому – Соукоулису  $\tilde{\rho} = |1/t|^2$  [32], так что  $\rho = \tilde{\rho} - 1$ . Учитывая неоднозначности, связанные с исключением контактного сопротивления резервуара [31], и изменение нормировки  $\rho$  при переходе к квазиодномерным системам, получим, что в общем случае нужно делать замену  $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$ , где  $\rho_0$  зависит от принятого определения. Однако в случае слабопроницаемых границ масштаб  $\rho$  увеличивается в  $\kappa^4$  раз (см. (27)), так что члены, содержащие  $\rho_0$ , несущественны и могут быть опущены. Такое универсальное уравнение (в котором  $\rho(\rho + 1)$  заменяется на  $\rho^2$ ), полученное в пределе  $\kappa \rightarrow \infty$ , может быть затем экстраполировано в область  $\kappa \sim 1$ : это в точности соответствует процедуре, установленной в [21], когда зависимость  $g = \text{const } k_b$ , полученная в пределе  $k_b \rightarrow 0$ , экстраполируется к значению  $k_b = 1$ . Замену  $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$  нужно делать и в остальных членах уравнения (40), где ситуация усложняется ввиду неизвестного поведения параметров в ходе описанной процедуры; фактически последствия замены  $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$  можно устранить путем переобозначения параметров  $c, \gamma$  и изменения общего масштаба  $\rho$ . В результате получается уравнение

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial t} = [(c\rho^2 - 2\gamma\rho - \gamma)P(\rho) + \rho^2 P'(\rho)]', \quad (41)$$

$$t = A \ln L,$$

что после перехода к  $W(g)$  дает уравнение той же структуры

$$\frac{\partial W(g)}{\partial t} = [(\gamma g^2 + 2(\gamma + 1)g - c)W(g) + g^2 W'(g)]', \quad (42)$$

чем объясняется странная аналогия между  $P(\rho)$  и  $W(g)$ , обнаруженная Шапиро. Стационарное решение имеет вид

$$W_c(g) = \text{const } g^{-2(\gamma+1)} \exp\{-c/g - \gamma g\} \quad (43)$$

и обеспечивает конечность всех моментов кондактанса. Вычисляя преобразование Лапласа методом перевала и полагая  $\gamma \sim 1/\epsilon, c \sim 1/\epsilon^3$ , получим результат типа (39), обеспечивающий справедливость первого соотношения (2).

Для эволюции моментов получим из (42)

$$\frac{\partial \langle g^n \rangle}{\partial t} = cn \langle g^{n-1} \rangle + n(n-2\gamma-1) \langle g^n \rangle - \gamma n \langle g^{n+1} \rangle \quad (44)$$

и отклонения  $x_n = \langle g^n \rangle - \langle g^n \rangle_c$  от стационарных значений подчиняются тому же уравнению. Если

считать последние пропорциональными  $\exp(\lambda t)$ , то для определения спектра  $\lambda$  получим тридиагональную матрицу. Собственное значение  $\lambda_n$  определяется матрицей  $n \times n$  и соответствует отличным от нуля отклонениям  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , получаемым при граничных условиях  $x_0 = x_{n+1} = 0$ . Указанная матрица неэрмитова и ее собственные значения комплексны; квазиклассическим методом можно показать, что

$$\text{Re } \lambda_n = \frac{n^2/2 - (2\gamma + 1)n}{\ln n}, \quad n \lesssim 1/\epsilon^2. \quad (45)$$

В области значений  $n \sim 1/\epsilon$  знаменатель можно заменить на  $\ln(1/\epsilon)$  и для эволюции моментов получить

$$\langle g^n \rangle \sim e^{\lambda_n t} \sim L^{\tilde{A}[n^2 - 2(2\gamma+1)n]}, \quad (46)$$

где  $\tilde{A} = A/2 \ln(1/\epsilon)$ . Для воспроизведения второго соотношения (2) надо положить  $\tilde{A} = \epsilon, (2\gamma+1)\tilde{A} = 1$ , что дает  $\gamma \sim 1/\epsilon$  в согласии с указанным выше условием для справедливости результата (39). В рамках описанной упрощенной схемы второй результат (2) воспроизводится лишь с логарифмической точностью; но в полной теории (см. ниже) он получается буквально.

## 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНДАКТАНСОВ В ПОЛНОЙ ТЕОРИИ

### 6.1. Основные уравнения

Из сказанного ясно, что для одномерной системы нужно принять уравнение (14), в котором делается замена  $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$ , проводится переход к пределу слабопроницаемых границ, после чего полученное универсальное уравнение экстраполируется к проницаемости порядка единицы; практически это сводится к заменам  $\rho(\rho + 1) \rightarrow \rho^2$  и  $\gamma(1 - 2\rho_0) \rightarrow \tau_0$ . Тогда уравнение для  $F(\tau)$  в  $d$ -мерном случае имеет вид

$$\frac{\partial F(\tau)}{\partial t} = \tau(\tau + \tau_0)F''(\tau) - 2\gamma\tau F'(\tau) + pF(\tau) \ln F(\tau), \quad t = A \ln L, \quad (47)$$

где параметр  $\tau_0$  должен быть положительным во избежание сингулярностей на положительной полуоси; он задает общий масштаб кондактанса, который в теории не контролируется. Вводя переменную  $u$  соотношением  $F(\tau) = \exp\{u(\tau)\}$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau(\tau + \tau_0) [u'' + u'^2] - 2\gamma\tau u' + pu. \quad (48)$$

Основной интерес представляет стационарная версия уравнения (48), так как оно описывает переходное поведение к пределу больших масштабов (см. сноску 7) при постоянных значениях  $L/\xi$  и  $L_z/L$ ; при этом  $\xi$  неограниченно возрастает и все получаемые распределения относятся к точке перехода Андерсона, различаясь значениями указанных двух параметров<sup>10</sup>). Стационарную конфигурацию можно искать в виде регулярного разложения

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tau^n, \quad (49)$$

в котором нулевой член отсутствует в силу нормировки  $W(g)$  (см. (7)). Подставляя в (48), получим для коэффициентов разложения

$$(p - 2\gamma)B_1 + \tau_0 B_1^2 + 2\tau_0 B_2 = 0,$$

$$(p - 4\gamma)B_2 + 4\tau_0 B_1 B_2 + 6\tau_0 B_3 + 2B_2 + B_1^2 = 0, \quad (50)$$

$$(p - 6\gamma)B_3 + 4\tau_0 B_2^2 + 6\tau_0 B_1 B_3 + 12\tau_0 B_4 + 6B_3 + 4B_1 B_2 = 0$$

и т. д.

### 6.2. Воспроизведение результатов для $d = 2 + \epsilon$

Коэффициенты  $B_n$  пропорциональны кумулянтам  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  и при  $d = 2 + \epsilon$  справедлива иерархия  $B_1 \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots$  (см. (2)); тогда можно опустить член с  $B_2$  в первом уравнении, член с  $B_3$  во втором уравнении и т. д., что соответствует пренебрежению членом  $\tau\tau_0 u''$  в уравнении (48). После этого коэффициенты  $B_1, B_2, \dots$  определяются однозначно и при  $p \gg 1, \gamma \ll p$  получим, что  $B_n \sim p/\tau_0^n$ . Это подсказывает подстановку  $u(\tau) = pf(\tau/\tau_0)$  и в главном порядке по  $p$  дает уравнение для  $f(x)$ :

$$x(x + 1)f'^2 + f = 0, \quad (51)$$

решение которого приводит к результату

$$F(\tau) = \exp\left(-p \operatorname{Arsh}^2 \sqrt{\tau/\tau_0}\right), \quad (52)$$

<sup>10</sup> Критическое распределение, которое обсуждается в [6–8] и других работах, соответствует ситуации  $L_z = L, L/\xi = 0$ . Указанные два условия определяют критические значения  $p_c$  и  $\gamma_c$  для двух параметров, входящих в (48). Мы не ставим целью вычисление этих параметров для каких-то конкретных ситуаций, а исследуем все множество распределений в целом. В условиях применимости однопараметрического скейлинга значения  $p_c$  и  $\gamma_c$  должны зависеть только от размерности пространства и граничных условий.

и требуемая форма (39) получается при  $\tau_0 \sim 1/\epsilon, p \sim 1/\epsilon^2$ . Проводя обратное преобразование Лапласа

$$W(g) = \frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dx \exp\{-p \operatorname{Arsh}^2 \sqrt{x} + \tau_0 g x\} \quad (53)$$

и вычисляя интеграл в перевальном приближении, получим, полагая  $g_c = p/\tau_0$ :

$$W(g) \sim \frac{1}{g} \exp\left\{-\frac{p}{4} \left(\ln \frac{a(g)g_c}{g}\right)^2\right\}, \quad g \ll g_c, \quad (54a)$$

$$W(g) \sim \exp\left\{-\frac{3}{4}p \left(\frac{g - g_c}{g_c}\right)^2\right\}, \quad |g - g_c| \ll g_c, \quad (54b)$$

$$W(g) \sim \left(\frac{g_c}{g}\right)^{3/2} \exp\{-\tau_0 g\}, \quad g \gg g_c, \quad (54c)$$

где  $a(g)$  — медленно (логарифмически) меняющаяся функция. Заметим, что (54a) и (54b) можно формально объединить, если считать, что  $a(g)$  стремится к единице при  $g \rightarrow g_c$ . При  $p \sim 1$  отличие  $a(g)$  от константы практически несущественно и логнормальная асимптотика (54a), формально справедливая при малых  $g$ , вполне удовлетворительно описывает окрестность максимума  $g_c$ , после чего сменяется экспоненциальным убыванием; это объясняет ситуацию, продемонстрированную на рис. 2.

Теперь рассмотрим эволюцию кумулянтов при отклонении распределения от стационарного; считая, что отклонения пропорциональны  $\exp(\lambda t)$ , получим уравнение

$$\tau(\tau + \tau_0)u'^2 + pu = -\tau(\tau + \tau_0)u'' + 2\gamma\tau u' + \lambda u. \quad (55)$$

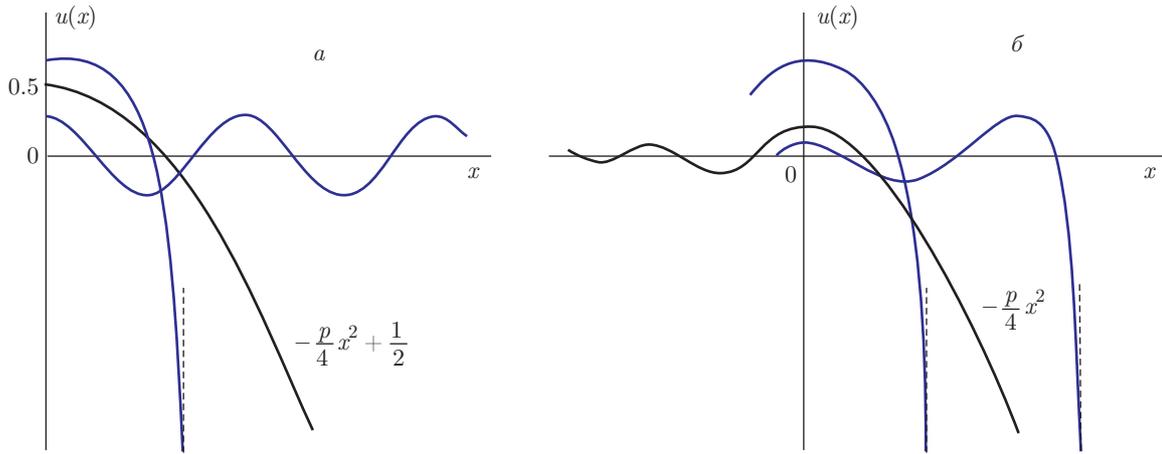
Решение уравнения с нулем в правой части известно, поэтому конечную правую часть можно учесть итерационным образом; полагая  $u = u_c + \delta u$ , имеем

$$\hat{L}\delta u = f\{u\}, \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}\delta u &\equiv \tau(\tau + \tau_0)2u'_c \delta u' + p\delta u, \\ f\{u\} &\equiv -\tau^2 u'' + 2\gamma\tau u' + \lambda u, \end{aligned} \quad (57)$$

и учтено, что член  $\tau\tau_0 u''$  для актуального решения несуществен и может быть опущен или учтен итерационным образом. Поскольку оператор  $\hat{L}$  пропорционален  $p$ , то подстановка  $u = u_c$  в правую часть



**Рис. 7.** а) Исследование квадратуры (61) уравнения (60) с  $\tilde{\gamma} = 0$  приводит к выводу о существовании трех типов решений: квадратичного при  $u(0) = 1/2$ , периодических при  $u(0) < 1/2$  и имеющих логарифмическую сингулярность в конечной точке при  $u(0) > 1/2$ . б) При  $\tilde{\gamma} > 0$  решение с квадратичной асимптотикой остается единственным регулярным; все прочие решения, нарастающие из области отрицательных  $x$ , срываются на логарифмическую сингулярность при достижении амплитуды осцилляций порядка единицы

(56) дает поправку  $\delta u \sim u_c/p$  к ранее полученному стационарному решению. Внесем теперь в правую часть (56) возмущение

$$u = u_n(\tau) = B_n \tau^n, \quad \lambda = \lambda_n = n^2 - (2\gamma + 1)n. \quad (58)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае  $f\{u\} = 0$  и  $\delta u = 0$ . Таким образом, в рамках итерационной процедуры возмущение (58) не нарушает справедливости уравнения (55) и может иметь нестационарную эволюцию. Поскольку коэффициенты  $B_n$  пропорциональны кумулянтам  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ , то

$$\langle\langle g^n \rangle\rangle \sim e^{\lambda_n t} \sim L^{A[n^2 - (2\gamma + 1)n]} \quad (59)$$

и при выборе  $A = \epsilon$ ,  $(2\gamma + 1)A = 2$  воспроизводится второе соотношение (2). Заметим, что проведенный анализ не ограничивается воспроизведением результатов (2), но дает замкнутое выражение (53) для критического распределения  $W(g)$  при  $d = 2 + \epsilon$ .

### 6.3. Единственность физического решения

Как мы видели выше, в главном порядке по  $p$  коэффициенты  $B_n$  определяются однозначно, что обеспечивает однозначность стационарного решения  $u_c(\tau)$ . Учитывая отброшенные члены итерационным образом и решая уравнение (56) методом вариации постоянной, получим  $\delta u(\tau) = f_{reg}(\tau) + C \text{Arsh} \sqrt{\tau/\tau_0}$ , где  $f_{reg}(\tau)$  — регулярная функция. Поэтому поправка к  $u_c(\tau)$  определяется однозначно, если  $u(\tau)$  считать регулярной в нуле. Как показано ниже, такая ситуация сохраняется в общем случае.

При больших  $\tau$  в уравнении (48) можно заменить  $\tau(\tau + \tau_0)$  на  $\tau^2$ , после чего замена  $x = \ln \tau$  приводит его стационарную версию к виду

$$u''_{xx} + (u'_x)^2 - \tilde{\gamma} u'_x + pu = 0, \quad (60)$$

где  $\tilde{\gamma} = 2\gamma + 1$ . При  $\tilde{\gamma} = 0$  уравнение интегрируется в квадратурах [33]

$$x = C_1 + \int \frac{du}{\sqrt{Y}}, \quad \text{где} \quad (61)$$

$$Y = C_2 e^{-2u} + \frac{p}{2} (1 - 2u),$$

и исследование (61) приводит к картине, представленной на рис. 7а. Инвариантность уравнения относительно  $x \rightarrow -x$  и  $x \rightarrow x + x_0$  позволяет рассматривать решения, четные по  $x$ , так что их производная при  $x = 0$  равна нулю. Если  $u(0) = 1/2$ , то уравнение имеет простое решение

$$u(x) = -\frac{p}{4} x^2 + \frac{1}{2}; \quad (62)$$

если  $u(0) < 1/2$ , то решение является периодическим; если  $u(0) > 1/2$ , то решение логарифмически расходится в некоторой конечной точке  $x_c$  (см. рис. 7а). Фактически все характерные режимы определяются доминированием двух (из трех) членов уравнения: при доминировании  $u'^2$  и  $pu$  имеем квадратичное решение  $u \sim x^2$ , при доминировании  $u''$  и  $pu$  — периодическое решение  $u \sim \cos \sqrt{p}x$ , при доминировании  $u''$  и  $u'^2$  — логарифмическую сингулярность  $u \sim \ln(x - x_c)$ .

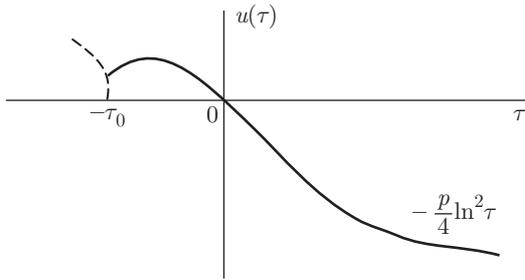


Рис. 8. Поведение физического решения  $u(\tau)$  на действительной оси; при  $\tau < -\tau_0$  оно становится комплексным

При  $\tilde{\gamma} > 0$  инвариантность  $x \rightarrow -x$  нарушается и периодическое решение приобретает отрицательный декремент затухания. В результате квадратичное решение (переходящее в затухающие осцилляции при отрицательных  $x$ ) остается единственным регулярным; все прочие решения после достижения амплитуды осцилляций порядка единицы срываются на логарифмическую сингулярность (рис. 7б).

Как ясно из определения (7), функция  $F(\tau)$  является регулярной и монотонно убывающей; поэтому физически удовлетворительным является лишь квадратичное решение в области  $x = \ln \tau \gg 1$ , которое имеет однопараметрический произвол, связанный со сдвигами по оси  $x$ . В области  $\tau \lesssim 1$  следует вернуться к исходному уравнению (48), где однопараметрический произвол устраняется путем наложения условия  $u(0) = 0$ , следующего из нормировки  $W(g)$ .

### 6.4. Универсальные асимптотики

Результирующее поведение функции  $u(\tau)$  представлено на рис. 8. При больших  $\tau$  она имеет асимптотику

$$u(x) = -\frac{1}{4}p(\ln \tau - x_0)^2, \quad (63)$$

определяемую доминированием членов с  $u'^2$  и  $u$ , что в перевальном приближении дает логнормальный хвост (54а) для области малых  $g$ .

В области больших  $g$  асимптотика распределения определяется сингулярностью в точке  $\tau = -\tau_0$ , вблизи которой общее решение имеет вид

$$u(\tau) = C_1(\tau + \tau_0)^{1+2\gamma} + C_2. \quad (64)$$

Подстановка (64) в обратное преобразование Лапласа дает экспоненциальное поведение при больших  $g$ :

$$W(g) \sim g^{-2-2\gamma} \exp(-\tau_0 g), \quad g \rightarrow \infty. \quad (65)$$

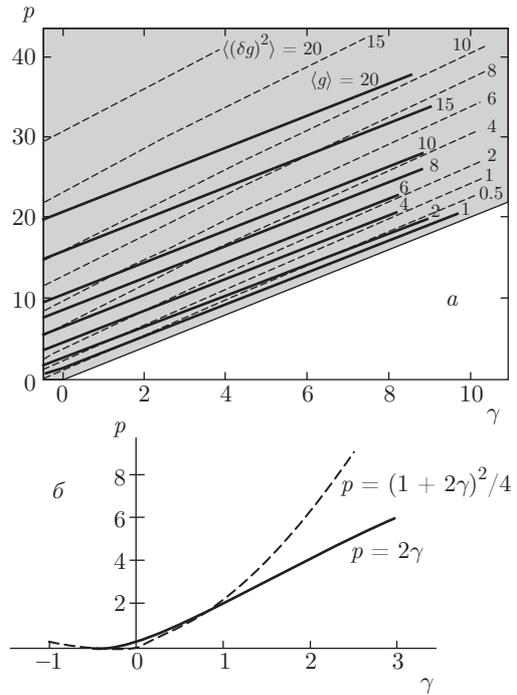


Рис. 9. а) Фазовая диаграмма при  $\tau_0 = 1$ . Сплошные и штриховые линии соответствуют постоянным значениям  $\langle g \rangle$  и  $\langle(\delta g)^2\rangle$  соответственно. б) Построение, поясняющее устройство нижней границы

Это более правильный результат, чем (54с), где характер сингулярности при  $\tau = -\tau_0$  был несколько искажен из-за использованного приближения (52).

Таким образом, хвосты распределения  $W(g)$  являются универсальными, хотя их физическая актуальность зависит от конкретной ситуации.

### 6.5. Фазовая диаграмма

Вычисляя поправки к (52), учитывая отброшенные члены итерационным образом, получим для коэффициентов<sup>11)</sup>  $B_1$  и  $B_2$

$$-B_1 = p - 2\gamma - \frac{2}{3}, \quad 3B_2 = p - \frac{8}{3}\gamma - \frac{38}{45}. \quad (65a)$$

Поскольку  $B_1 = -\langle g \rangle$ ,  $2B_2 = \langle(\delta g)^2\rangle$ , то постоянным  $\langle g \rangle$  и  $\langle(\delta g)^2\rangle$  соответствуют прямые линии в плоскости  $(p, \gamma)$ . Формально результат (65а) справедлив при условиях  $p \gg 1$ ,  $\gamma \ll p$ , но практически он работает почти для всей фазовой диаграммы (рис. 9а).

Нижняя граница физической области определяется двумя зависимостями  $p = 2\gamma$  и  $p = (1 + 2\gamma)^2/4$ ,

<sup>11)</sup> В этом разделе полагаем  $\tau_0 = 1$ . Результаты для произвольных  $\tau_0$  получаются заменой  $\tau \rightarrow \tau/\tau_0$  или  $g \rightarrow g\tau_0$  в окончательных выражениях.

сопрягающимися в точке  $\gamma = 0.5$  (рис. 9б). При приближении к нижней границе коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  стремятся к нулю, сохраняя соотношение  $B_2 \sim B_1$  при  $\gamma < 0.5$ ,  $B_2 \sim B_1^{2\gamma}$  при  $0.5 < \gamma < 1$  и  $B_2 \sim B_1^2$  при  $\gamma > 1$ .

Действительно, из первого соотношения (50) ясно, что ввиду положительности  $B_2$  и отрицательности  $B_1$  справедливо неравенство

$$p - 2\gamma = |B_1| + 2B_2/|B_1| \geq 0, \quad (66)$$

ограничивающее физическую область условием  $p \geq 2\gamma$ . Полагая  $p = 2\gamma + \epsilon$ , перепишем (48) в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}u \equiv \tau(\tau + 1)u'' - 2\gamma\tau u' + 2\gamma u &= \\ &= -\tau(\tau + 1)u'^2 - \epsilon u. \end{aligned} \quad (67)$$

Уравнение  $\hat{L}u = 0$  имеет решение  $u_0(\tau) = A\tau$ , что позволяет учесть правую часть итерационным образом:

$$\hat{L}\delta u = -A^2(\tau^2 + \tau) - \epsilon A\tau. \quad (68)$$

Для разрешимости уравнения (68) его правая часть должна быть ортогональна к решению  $v_0(\tau)$  сопряженного уравнения  $\hat{L}^+v_0 = 0$ :

$$0 = (v_0, \hat{L}\delta u) = -A^2(v_0, \tau^2 + \tau) - \epsilon A(v_0, \tau), \quad (69)$$

где  $v_0(\tau) = (1 + \tau)^{-1-2\gamma}$ . При  $\gamma > 1$  интегралы, определяемые скалярными произведениями  $(v_0, \tau^2)$  и  $(v_0, \tau)$ , сходятся, так что  $A \sim \epsilon$ ,  $\delta u \sim \epsilon^2$ . Поскольку линейный по  $\tau$  член содержится в  $u_0(\tau)$ , а квадратичный в  $\delta u(\tau)$ , то  $B_1 \sim \epsilon$ ,  $B_2 \sim \epsilon^2$ , так что  $B_1$  и  $B_2$  стремятся к нулю при приближении к прямой  $p = 2\gamma$ , сохраняя соотношение  $B_1^2 \sim B_2$ . При  $\gamma < 1$  интеграл  $(v_0, \tau^2)$  расходится и должен быть обрезан при  $\tau \sim 1/A$ , когда происходит переход к логарифмическому решению (63); в результате  $A \sim \epsilon^{1/(2\gamma-1)}$ ,  $\delta u \sim \epsilon A \sim \epsilon^{2\gamma/(2\gamma-1)}$  и исчезновение коэффициентов происходит при сохранении соотношения  $B_2 \sim B_1^{2\gamma}$ .

Выделенность кривой  $p = (1 + 2\gamma)^2/4$  связана с тем, что линейризованная версия (48) сводится к гипергеометрическому уравнению

$$\tau(\tau + 1)u'' + (\alpha + \beta + 1)\tau u' + \alpha\beta u = 0, \quad (70)$$

где параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяются уравнением

$$\alpha, \beta = \frac{-(1 + 2\gamma) \pm \sqrt{(1 + 2\gamma)^2 - 4p}}{2} \quad (71)$$

и оказываются совпадающими на указанной кривой. Решение (70), регулярное в начале координат, имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u(\tau) &= C \left[ -\alpha\beta\tau + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2}\tau^2 + \dots \right], & \tau \ll 1, \\ u(\tau) &= C \left[ \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\beta)}\tau^{-\beta} + \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\beta)}\tau^{-\alpha} \right], & \tau \gg 1. \end{aligned} \quad (72)$$

Коэффициенты при  $\tau^{-\alpha}$  и  $\tau^{-\beta}$  определяются условиями сшивки с (63), так что комбинации  $C\Gamma(\alpha - \beta)$  и  $C\Gamma(\beta - \alpha)$  остаются конечными в пределе  $\alpha \rightarrow \beta$ . При этом  $C$  стремится к нулю из-за расходимости гамма-функций, в результате чего коэффициенты при  $\tau$  и  $\tau^2$  (т.е.  $B_1$  и  $B_2$ ) исчезают по одинаковому закону при приближении к кривой  $p = (1 + 2\gamma)^2/4$ . Сказанное выше верно при условии, что сшивка с (63) происходит при достаточно больших  $\tau$ ; практически это условие выполнено при  $\gamma < 0.5$ .

### 6.6. Металлический и диэлектрический режимы

Согласно [3, 4], в металлической фазе для коэффициентов  $B_n$  справедлива такая же иерархия  $B_1 \gg \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots$ , как и при  $d = 2 + \epsilon$ ; тогда из уравнений (50) нетрудно убедиться, что оценка  $B_n \sim p/\tau_0^n$  сохраняется для больших  $p$  при произвольных  $\gamma$  за исключением окрестности прямой  $2\gamma = p$ . Подстановка возникающего представления  $u(\tau) = pf(\tau/\tau_0)$  в обратное преобразование Лапласа показывает возможность разложения  $f(x)$  в ряд и сохранения лишь двух первых членов; это приводит к гауссовскому распределению. Случай  $2\gamma \approx p$  может быть рассмотрен отдельно и приводит к тому же выводу (см. Приложение В).

Область малых  $p$  может быть корректно рассмотрена при  $\gamma = -1/2$ . Линеаризуя уравнение (48) и отбрасывая малый член  $pu$ , получим решение

$$u(\tau) = A \ln(1 + \tau/\tau_0), \quad (73)$$

стремящееся к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ . Если  $A$  достаточно мало, то это решение остается справедливым в области  $\tau \gg \tau_0$ , где можно заменить  $\tau(\tau + \tau_0)$  на  $\tau^2$ . После этого уравнение (48) с  $\gamma = -1/2$  имеет точное решение

$$u(x) = -\frac{1}{4}p(\ln \tau - \tau_0)^2 + \frac{1}{2}. \quad (74)$$

В пределах точности можно заменить  $\tau$  на  $\tau + \tau_0$  и обеспечить условие  $u(0) = 0$  путем надлежащего выбора  $x_0$ . Тогда решение

$$u(\tau) = -(p/4) \ln^2(\tau + \tau_0) - \mu \ln(\tau + \tau_0) + b \quad (75)$$

с произвольным  $\mu$  и  $b = 1/2 - \mu^2/p$ ,  $\tau_0 = \exp(\sqrt{2/p} - 2\mu/p)$  справедливо при всех  $\tau$ ; оно согласуется с (73) и обеспечивает предположенную малость  $A$ . Результат (75) соответствует логнормальному распределению; при перевальном вычислении это очевидно, но при малых  $p$  применимость метода перевала сильно ограничена и требуется более тонкий анализ (см. Приложение В). В том же приложении показано, что решение, близкое к логнормальному, справедливо в области малых  $p$  при произвольном значении  $\gamma$ .

Из сказанного ясно, что большие  $p$  соответствуют металлическому, а малые  $p$  — локализованному режиму. Поскольку параметры  $p$  и  $\gamma$  находятся во взаимно-однозначном соотношении с параметрами  $L/\xi$  и  $L_z/L$ , то кубическим системам соответствует некоторая линия в плоскости  $(p, \gamma)$ , выходящая из точки  $p = 0, \gamma = -1/2$  и уходящая в область больших  $p$ .

### 6.7. Критическая область

Критическая область соответствует значениям  $p \sim 1$ , когда нужно численно находить решение  $u(\tau)$  и численным образом осуществлять обратное преобразование Лапласа. Численное интегрирование уравнения (48) нужно начинать в логарифмических координатах, стартуя с асимптотики (63), а затем переходить к обычным координатам, подбирая  $x_0$  так, чтобы обеспечить условие  $u(0) = 0$ . При этом нужно следить за монотонностью решения, не допуская осцилляций, существование которых возможно согласно рис. 7б.

Численное обращение преобразования Лапласа можно провести путем рациональной аппроксимации  $F(\tau)$  с последующим разложением на простые дроби:

$$F(\tau) = \frac{P_M(\tau)}{Q_N(\tau)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\tau - \tau_i}, \quad (76)$$

где  $P_M(\tau)$  и  $Q_N(\tau)$  — полиномы степени  $M$  и  $N$ , причем  $M < N$  во избежание  $\delta$ -образных вкладов в начале координат; после этого  $W(g)$  представляется в виде

$$W(g) = \sum_{i=1}^N A_i \exp\{\tau_i g\}. \quad (77)$$

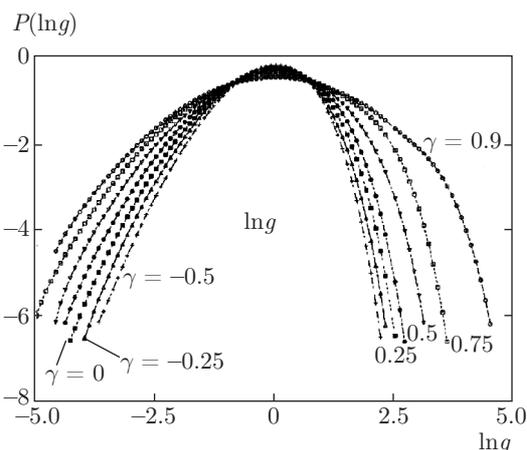


Рис. 10. Распределение  $P(\ln g)$  при разных  $\gamma$  и постоянном значении  $p = 2$

Ввиду монотонного убывания функция  $F(\tau)$  не может содержать сингулярностей в правой полуплоскости. Однако практически полюса с положительной действительной частью могут возникать в результате так называемых дефектов, проявляющихся в появлении пары близких корней и полюса: это приводит к катастрофической потере точности или переполнению. Практический рецепт состоит в использовании аппроксимант максимально высокого порядка, не содержащих полюсов с положительной действительной частью и обеспечивающих максимальную точность аппроксимации  $F(\tau)$ . На ситуацию с «дефектами» можно влиять, меняя количество и расположение точек на оси  $\tau$ , на основании которых строится аппроксимация (75).

На рис. 10 представлено распределение  $P(\ln g)$  при различных  $\gamma$  и постоянном значении параметра  $p = 2$ . Нетрудно видеть, что в окрестности прямой  $p = 2\gamma$  распределение практически симметрично и близко к логнормальному. При уменьшении  $\gamma$  асимметрия распределения сначала быстро увеличивается, а затем остается практически неизменной. Сопоставление с численными данными Маркоша [11] представлено на рис. 11; удовлетворительное согласие достигается при  $\gamma = 0, p = 0.85$ . Изменение параметра  $\tau_0$  не влияет на форму распределения  $P(\ln g)$ , приводя лишь к его параллельному сдвигу; для достижения согласия с [11] требовалось положить  $\tau_0 = 0.67$ , т. е. в соответствии с результатами для  $d = 2 + \epsilon$  выбор  $\tau_0 \sim 1$  обеспечивает правильный масштаб кондактанса в критической области.

Как указывалось в конце разд. 6.6, в плоскости  $(p, \gamma)$  имеется траектория, соответствующая кубическим системам; она определяется изменением

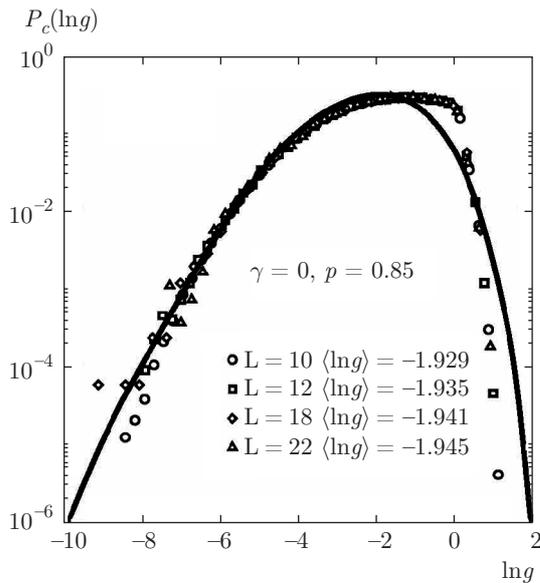


Рис. 11. Сопоставление численных данных Маркоша [11] с результатами настоящей теории при  $\gamma = 0$ ,  $p = 0.85$

формы распределения  $P(\ln g)$  при изменении амплитуды случайного потенциала (ее конкретное положение для нас несущественно и важен лишь факт ее существования). Тогда состояние системы можно характеризовать двумя параметрами — положением на траектории и значением  $\tau_0$ . Для того чтобы все распределение в целом подчинялось однопараметрическому скейлингу, необходимо и достаточно, чтобы такой скейлинг (т.е. зависимость от  $L/\xi$ ) был справедлив для двух независимых параметров, характеризующих распределение — например, для  $\langle g \rangle$  и  $\langle (\delta g)^2 \rangle$ . Для первого параметра указанное свойство установлено в [21] с помощью самосогласованной теории локализации [22]; его справедливость для второго параметра представляется весьма вероятной ввиду результатов для металлической ( $\langle (\delta g)^2 \rangle = \text{const}$ ) и локализованной ( $\langle (\delta g)^2 \rangle \sim \exp(\text{const } L/\xi)$ ) фаз.

Как ясно из рис. 11, отличие теоретической кривой от данных Маркоша [11] сводится к сглаживанию сингулярности в точке  $A$  (рис. 2). Такое отличие не является удивительным. Действительно, в настоящей работе использовалось инвариантное определение кондактанса, не зависящее от способа исключения контактного сопротивления резервуара и заведомо характеризующее изучаемую конечную систему (разд. 4); в такой ситуации сингулярности невозможны в соответствии с общими принципами [19,20]. В работе [11] использовалось опреде-

ление Эконому – Соукоулиса [32], которое содержит встроенные сингулярности — распределение  $W(g)$  для каждого канала резко обрывается при  $g = 1$ . Этот дефект связан с нерешенностью проблемы контактного сопротивления и был бы несущественным в случае действительно многоканальной ситуации, когда на каждый канал приходится малая доля полной проводимости. Однако, как показывает анализ Маркоша [11], критическое распределение в основном определяется самым прозрачным каналом, а остальные каналы формируют лишь его экспоненциальный хвост; дефектность определения является существенной и прямо приводит к сингулярности. С другой стороны, отсутствие в [11] полупрозрачных границ, отделяющих систему от идеальных контактов, приводит к ее сильному взаимодействию с окружением; термодинамический предел, осуществляемый путем увеличения размера контактов, относится ко всей системе «образец + идеальные провода» и делает возможным существование сингулярностей. Таким образом, сингулярность в точке  $A$  вполне допустима в рамках использованной в [11] вычислительной схемы, но заведомо связана с дефектным определением проводимости.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше показано, что модификация метода Шапиро позволяет ввести двухпараметрическое семейство распределений кондактанса, определяемое простыми дифференциальными уравнениями, параметры  $p$  и  $\gamma$  которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с параметрами  $L/\xi$  и  $L_z/L$ , характеризующими квазиодномерную систему. Мы не ставили целью вычисление значений параметров для каких-то конкретных ситуаций, а исследовали все множество распределений в целом. При больших  $p$  все распределения являются гауссовскими, что характерно для металлической области. При малых  $p$  распределения близки к логнормальному, что характерно для локализованной фазы. При  $p \sim 1$  и значений  $\gamma$  в левой части фазовой диаграммы распределения носят асимметричный характер и близки к одностороннему логнормальному, которое установлено в численных экспериментах для критической области. При определенном выборе параметров воспроизводятся результаты для кумулянтных средних, полученные с помощью нелинейной сигма-модели для пространства размерности  $d = 2 + \epsilon$ . Численные результаты для критического распределения при  $d = 3$  удовлетворительно воспроизводятся

при  $\gamma = 0$ ,  $p = 0.85$  (рис. 11), за исключением сингулярности в точке  $A$  (рис. 2). Последняя сингулярность вполне допустима в рамках использованной в работе [11] вычислительной схемы, но противоречит общим принципам теории критических явлений и связана с дефектным определением проводимости.

Универсальным свойством распределений является существование двух асимптотик — логнормальной для малых  $g$  и экспоненциальной при больших  $g$ , однако их актуальность зависит от конкретной ситуации. В металлической фазе распределение определяется центральным гауссовским пиком, а указанные асимптотики относятся лишь к далеким хвостам. В критической области две асимптотики определяют практически все распределение, а логнормальное поведение распространяется на окрестность максимума. В локализованной фазе логнормальное поведение распространяется дальше и вытесняет экспоненциальную асимптотику в область далекого хвоста.

Предположение об однопараметрическом скейлинге лежит в основе анализа, а его результаты согласуются с таким предположением. Однопараметрический скейлинг для всего распределения имеет место, если два независимых параметра, характеризующие это распределение, являются функциями от  $L/\xi$ . Такое свойство установлено в работе [21] для  $\langle g \rangle$  и является весьма вероятным для  $\langle (\delta g)^2 \rangle$ .

Настоящая работа восполняет один из существенных пробелов в теории неупорядоченных систем, связанный с отсутствием регулярных методов для исследования распределений. Использованная выше концепция, приводящая к уравнению (47), является естественным следствием однопараметрического скейлинга и выглядит вполне обоснованной; поэтому проблему распределения кондактансов можно считать в принципе решенной. Значения оставшихся свободных параметров могут быть установлены путем вычисления нескольких первых моментов кондактанса, что может быть сделано стандартными методами.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Вывод уравнения эволюции**

При увеличении длины одномерной системы от  $L$  до  $L + \Delta L$  происходит перемножение трансфер-матриц,  $\hat{T}_{L+\Delta L} = \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L}$ . Полагая, что матрица  $\hat{T}_L$  имеет вид (16), примем для матрицы  $\hat{T}_{\Delta L}$  представление

$$\hat{T}_{\Delta L} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\epsilon^2} e^{i\beta_1} & -i\epsilon e^{i\beta_2} \\ i\epsilon e^{-i\beta_2} & \sqrt{1+\epsilon^2} e^{-i\beta_1} \end{pmatrix}, \quad (A.1)$$

где  $\epsilon$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — малые случайные величины. Аналогия с точечным рассеивателем показывает (см. (26)), что величина  $\epsilon$  пропорциональна амплитуде случайного потенциала и ее среднее следует считать равным нулю, так как в противном случае это может быть сделано сдвигом начала отсчета энергии. Перемножая матрицы, получим для параметра  $\tilde{\rho}$ , соответствующего матрице  $\hat{T}_{L+\Delta L}$ , во втором порядке по  $\epsilon$

$$\tilde{\rho} = \rho - 2\epsilon \sqrt{\rho(\rho+1)} \sin \psi + \epsilon^2(2\rho+1) \equiv f(\rho), \quad (A.2)$$

где

$$\psi = \theta - \varphi + \beta_1 + \beta_2. \quad (A.3)$$

Для распределения  $\tilde{\rho}$  имеем

$$P_{L+\Delta L}(\tilde{\rho}) = \int d\rho d\psi d\epsilon P_L(\rho) P(\psi) P(\epsilon) \delta(\tilde{\rho} - f(\rho)) = \int d\psi d\epsilon P(\psi) P(\epsilon) P_L(f_1(\tilde{\rho})) f'_1(\tilde{\rho}), \quad (A.4)$$

где  $\rho = f_1(\tilde{\rho})$  — обращение соотношения  $\tilde{\rho} = f(\rho)$ , которое находится итерациями по  $\epsilon$ :

$$f_1(\rho) = \rho + 2\epsilon \sqrt{\rho(\rho+1)} \sin \psi + \epsilon^2(2\rho+1)(2\sin^2 \psi - 1). \quad (A.5)$$

Подставляя в (A.4) и раскладывая до второго порядка по  $\epsilon$ , имеем

$$P_{L+\Delta L}(\rho) = P_L(\rho) \left[ 1 + 2\overline{\epsilon^2} (2\overline{\sin^2 \psi} - 1) \right] + P'_L(\rho) \overline{\epsilon^2} (2\rho+1) (4\overline{\sin^2 \psi} - 1) + P''_L(\rho) \overline{\epsilon^2} \rho(\rho+1) 2\overline{\sin^2 \psi} \quad (A.6)$$

и, полагая  $\overline{\epsilon^2} = \alpha \Delta L$ ,  $\overline{\sin^2 \psi} = A_0$ , получим (14) с параметрами (18), если в выражении (A.3) пренебречь малыми величинами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

**К исследованию уравнения (48)**

Восполним некоторые технические детали, опущенные в основном тексте.

Окрестность прямой  $p = 2\gamma$ . Как указывалось выше, при  $p = 2\gamma$  линейризованное по  $u$  уравнение (48) имеет точное решение  $u_0(\tau) = A\tau$  с малым  $A$ , которое распространяется в область больших  $\tau$ , где уравнение (48) после замены  $x = \ln \tau$  принимает вид (60). Считая  $p \gg 1$  и сохраняя главные по  $p$  члены, получим уравнение

$$u'_x{}^2 - pu'_x + pu = 0, \quad (B.1)$$

решение которого можно записать в параметрической форме

$$x = \ln \tau = t + \ln t + x_0, \quad u = -\frac{1}{4}p(t^2 + 2t), \quad (B.2)$$

где бегущий параметр  $t$  меняется от нуля до бесконечности. Подставляя в обратное преобразование Лапласа и переходя от интегрирования по  $\tau$  к интегрированию по  $t$ , получим

$$W(g) = \frac{1}{2\pi i} \int dt(t+1)e^{t+x_0} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4}p(t^2 + 2t) + gte^{t+x_0} \right\}, \quad (B.3)$$

что в перевальном приближении дает логнормальное распределение

$$W(g) = \sqrt{\frac{p}{4\pi}} \frac{1}{g} \exp \left\{ -\frac{p}{4} \left( \ln \frac{g_c}{g} \right)^2 \right\}, \quad (B.4)$$

$$g_c = |A| = \frac{1}{2}pe^{-x_0},$$

которое при больших  $p$  фактически сводится к гауссовскому.

*Малые  $p$ .* При  $\gamma = -1/2$  решение  $u(\tau)$  определяется выражением (75), подстановка которого в обратное преобразование Лапласа и последовательные замены  $\tau \rightarrow \tau - \tau_0$  и  $\tau \rightarrow \tau/g$  дают

$$W(g) = \frac{1}{2\pi i} g^{-1+\mu} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \tau^{-\mu} e^\tau \times \exp \left\{ -\frac{p}{4} \ln^2 \tau + \frac{p}{2} \ln \tau \ln g - \frac{p}{4} \ln^2 g - b - \tau_0 g \right\}. \quad (B.5)$$

Раскладывая экспоненту по  $p \ln \tau$  и вычисляя интегралы с учетом малости  $\mu$ , получим

$$W(g) \sim \frac{1}{g} \exp \left\{ -\frac{p}{4} \left( \ln g - \frac{2\mu}{p} + \frac{1}{\mu} \right)^2 - \tau_0 g \right\}, \quad (B.6)$$

где член  $\tau_0 g$  может быть опущен при  $\mu \ll \sqrt{p}$ . Рассмотрение применимо при условии  $p |\ln g| \ll 1$ , что

при  $p \ll \mu \ll \sqrt{p}$  охватывает окрестность максимума и достаточно для описания всей существенной части распределения.

Фактически распределение, близкое к логнормальному, справедливо в области малых  $p$  при произвольном значении  $\gamma$ . Действительно, полагая  $\gamma = -1/2 + \epsilon$  (где  $0 \leq \epsilon \leq \sqrt{p}$ ) и опуская член  $pu$  в линейризованном уравнении (48), получим

$$u(\tau) = C_1(\tau + \tau_0)^{2\epsilon} + C_2, \quad (B.7)$$

что при  $\epsilon \ln(\tau + \tau_0) \ll 1$  сводится к (73). С другой стороны, уравнение (60) с  $\tilde{\gamma} = 2\epsilon$  имеет при больших  $x$  решение

$$u(x) = -\frac{1}{4}px^2 + \epsilon x(\ln x - 1) - \frac{\epsilon^2}{p} \ln^2 x + \frac{1}{2} + O(x^{-1}), \quad (B.8)$$

где  $O(x^{-1})$  содержит члены типа  $\ln^m x/x$ . Пренебрегая медленными изменениями функции  $\ln x$  и заменяя ее на подходящую константу, легко видеть, что инвариантность относительно замены  $x \rightarrow x - x_0$  позволяет привести (B.8) к виду (75).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985); Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).
2. P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985); P. A. Lee, A. D. Stone, and Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
3. Б. Л. Альтшулер, В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, ЖЭТФ **91**, 2276 (1986).
4. B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, and I. V. Lerner, Phys. Lett. A **134**, 488 (1989).
5. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
6. B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
7. B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
8. B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **65**, 1510 (1990).
9. И. М. Суслов, ЖЭТФ **92**, 1433 (1987).
10. M. Rühländer and C. M. Soukoulis, Physica B: Cond. Matt. **296**, 32 (2001).
11. P. Markoš, Acta Phys. Slovaca **56**, 561 (2006).
12. K. A. Muttalib, P. Wölffe, A. Garcia-Martin, and V. A. Gopar, Europhys. Lett. **61**, 95 (2003).

13. K. Slevin, T. Ohtsuki, and P. Markoš, Phys. Rev. B **67**, 155106 (2003).
14. K. Slevin, T. Ohtsuki, and P. Markoš, Phys. Rev. Lett. **86**, 3594 (2001).
15. В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
16. N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
17. P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
18. A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
19. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение*, Мир, Москва (1975).
20. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
21. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
22. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
23. И. М. Лифшиц, В. Я. Кирпиченков, ЖЭТФ **77**, 989 (1979).
24. B. Shapiro and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 4889 (1981).
25. И. М. Суслов, ЖЭТФ **140**, 712 (2011); arXiv:1506.06128.
26. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rep. **368**, 549 (2002), Sec. 2.3.
27. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
28. R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
29. M. Kappus and F. Wegner, Z. Phys. B **45**, 15 (1981); V. E. Kravtsov and V. I. Yudson, Ann. Phys. (NY) **326**, 1672 (2011).
30. A. Cohen, Y. Roth, and B. Shapiro, Phys. Rev. B **38**, 12125 (1988).
31. A. D. Stone and A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
32. E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
33. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1976).