

КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО НАГРЕВА ПЛАЗМЫ В ПРЯМОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

А. Г. Шалашов^{a,b*}, А. А. Балакин^{a,b}, Т. А. Хусаинов^{a,b},

Е. Д. Господчиков^{a,b}, А. Л. Соломахин^b

^a Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

^b Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 5 июля 2016 г.

Реализовано моделирование резонансного СВЧ-нагрева плазмы в крупномасштабной прямой ловушке, учитывающее все основные волновые эффекты при распространении коротковолновых волновых пучков — дифракцию, дисперсию и абберации, в рамках последовательного квазиоптического приближения уравнений Максвелла. Развито обобщение квазиоптического метода на случай неоднородных сред с дисперсией поглощения, получена новая форма квазиоптического уравнения, найден эффективный метод численного интегрирования, проведена верификация результатов моделирования на примере установки ГДЛ (Новосибирск).

DOI: 10.7868/S0044451017020171

1. ВВЕДЕНИЕ

Поглощение электромагнитных волн в условиях электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса широко используется для нагрева высокотемпературной плазмы в тороидальных магнитных ловушках (токамаках и стеллараторах). Однако применение этого метода в открытых магнитных ловушках до недавнего времени было ограничено либо относительно компактными лабораторными установками [1–6], либо задачами МГД-стабилизации плазмы достаточно низкой плотности [7–9]. Единственное исключение — это проведенная в конце 1980-х гг. серия экспериментов на установке ТМХ-У в Ливерморе (США), в которой ЭЦ-нагрев позволил достичь наибольшей на тот момент температуры электронов 280 эВ [10]. Вместе с тем прямой нагрев именно электронной компоненты в условиях ЭЦ-резонанса (ЭЦР) обеспечил достижение рекордных параметров плазмы на крупномасштабном плазменном стенде ГДЛ (газодинамическая ловушка) в Институте

ядерной физики им. Г. И. Будкера [11]. Успешный эксперимент по комбинированному нагреву плазмы нейтральными пучками и СВЧ-излучением на установке ГДЛ отражен в работах [12–14]. В результате этих исследований впервые была достаточно убедительно продемонстрирована перспективность использования магнитных ловушек открытого типа с осесимметричной конфигурацией в качестве мощных нейтронных источников для термоядерных приложений [15].

Реализация эффективного ЭЦ-нагрева плотной плазмы в достаточно большой открытой ловушке требует пересмотра сложившихся представлений как о физике циклотронного взаимодействия, так и о последующем транспорте энергии и стабилизации плазменного шнура, поскольку ни одна из используемых на практике схем нагрева тороидальной плазмы в этом случае неприменима [16]. Важную роль при этом играют методы моделирования распространения и поглощения электромагнитных волн в неоднородной плазме ловушки. До недавнего времени такое моделирование проводилось исключительно в рамках приближения геометрической оптики методом трассировки лучей. В частности, именно таким способом была обоснована основная схе-

* E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru

ма ЭЦ-нагрева, используемая в ГДЛ [16–18]. В этой схеме возникают области отражения и поглощения волн, в которых среда перестает быть плавнонеоднородной, поэтому детальное понимание физики происходящих процессов требует выхода за рамки геометрикооптического приближения.

Основные эффекты, приводящие к нарушению приближения геометрической оптики — это пространственная дисперсия в сильно неоднородной области резонансного поглощения, дифракционное расплывание волнового пучка и формирование каустик в окрестности точек полного внутреннего отражения. Прямой учет этих эффектов в рамках полной системы уравнений Максвелла сложен, в частности, из-за малой длины волны излучения по сравнению с размерами установки. Хорошей альтернативой этому подходу является последовательный квазиоптический подход, основанный на асимптотическом разложении уравнений Максвелла в параксиальном приближении в окрестности выделенной ВКБ-моды [19, 20].

В настоящей работе квазиоптический метод применяется для описания распространения волновых пучков в высокотемпературной плазме в открытой магнитной ловушке. За основу взята теория, развитая нами для тороидальных магнитных ловушек [21, 22]. Однако специфика СВЧ-нагрева в современных прямых ловушках потребовала существенной модификации квазиоптической теории, связанной с более аккуратным описанием эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации волн. Физика этого отличия обусловлена тем, что в прямой ловушке магнитное поле в основном меняется вдоль своего направления, а в тороидальной — поперек. Поэтому приближения и численные приемы, которые хорошо проявили себя при моделировании распространения волн в тороидальной ловушке, оказались неприменимы в случае прямой ловушки. Это потребовало создания новой теоретической модели и существенной модификации численных алгоритмов, что привело в итоге к созданию абсолютно нового кода.

В статье мы сосредоточимся только на электродинамической составляющей проблемы, считая среду, в которой распространяются волны, известной — это максвелловская плазма с заданными распределениями концентрации и температуры электронов. При этом мы не учитываем возможное при интенсивном СВЧ-нагреве отклонение функции распределения электронов по скоростям от максвелловского распределения. Этот подход оправдан тем обстоятельством, что в интересующем нас случае нагрева

достаточно плотной плазмы энергия вкладывается в тепловую компоненту, для которой кулоновское взаимодействие эффективно поддерживает локально-равновесное распределение¹⁾. Так, например, для установки ГДЛ методом лазерного рассеяния были проведены прямые измерения функции распределения электронов сразу после ЭЦР-нагрева, которые показали, что распределение электронов близко к максвелловскому [11, 13, 14].

Статья построена следующим образом. В разд. 2 получены основные уравнения квазиоптического приближения и условия их применимости. В разд. 3 описан метод решения эволюционного квазиоптического уравнения с учетом особенностей плазмы прямых ловушек. В разд. 4 приведены некоторые модельные примеры, качественно иллюстрирующие особенности излагаемого метода. В разд. 5 в явном виде формулируется квазиоптический эволюционный оператор для электромагнитного поля в открытой ловушке. В разд. 6 обсуждаются первые результаты численного моделирования перспективных сценариев ЭЦ-нагрева плазмы на установке ГДЛ. В Заключение сформулированы основные результаты.

2. КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Строгий вывод квазиоптических уравнений относительно сложен [19, 26]. Ниже мы приведем лишь основные шаги этого вывода. Начнем с уравнений Максвелла для процессов $\exp(-i\omega t)$, записанных в операторной форме:

$$\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{L}_{ij} \equiv \delta_{ij}\hat{k}^2 - \hat{k}_i\hat{k}_j - k_0^2\hat{\epsilon}_{ij}, \quad (1)$$

¹⁾ Кинетические эффекты, связанные с модификацией функции распределения резонансных электронов, проявляются при нагреве более разреженной плазмы, например, на японской установке GAMMA-10 [9] или даже на установке ГДЛ на стадии ЭЦР-пробоя [23]. Традиционно такие эффекты описываются в рамках баунс-усредненного кинетического уравнения с оператором типа Фоккера–Планка, учитывающего совместное действие кулоновских соударений и СВЧ-поля в квазилинейном приближении [24]. При этом для описания распределения СВЧ-поля в разреженной плазме обычно достаточно геометрикооптического приближения с коэффициентом поглощения, отвечающим возмущенной функции распределения электронов. Обобщение указанного подхода на случай плотной плазмы сводится к замене геометрикооптического приближения квазиоптическим. Однако построение квазиоптического отклика среды, отвечающего немаксвелловской функции распределения, нетривиально, поскольку поглощение в плотной плазме не может быть рассчитано в рамках стандартной теории возмущений [25]. Эта задача выходит за рамки настоящей работы.

где оператор $\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})]$ действует на j -ю декартову компоненту $E_j(\mathbf{r})$ вектора электрического поля (далее всюду « $\hat{\cdot}$ » обозначает оператор, действующий на функцию в квадратных скобках), $k_0 = \omega/c$ — вакуумное волновое число. В уравнении (1) оператор $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ определяется как оператор дифференцирования в координатном пространстве (в квазиоптической теории этот оператор часто называют оператором импульса), а $\hat{\varepsilon}_{ij}$ — это оператор, полученный из тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ путем формальной замены волнового вектора \mathbf{k} на оператор $\hat{\mathbf{k}}$ и симметризации полученного выражения. Этот переход наиболее удобно выразить через интеграл Фурье:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = \int \frac{\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}') + \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k}')}{2} \times \\ \times e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} E_j(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}.$$

Подробнее эта процедура описана в разд. 3.

В плавнонеоднородной среде приближенное решение уравнений Максвелла естественно искать в виде квазиоптического пучка, отвечающего заданной волновой моде. Для этого определим вектор поляризации \mathbf{e} интересующей нас геометрооптической моды как решение уравнения $L_{ij}e_j = 0$ в локально-однородной среде. Далее, используя ту же технику, что и при переходе $\varepsilon_{ij} \rightarrow \hat{\varepsilon}_{ij}$, вектору поляризации $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ можно сопоставить оператор $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})$. Тогда приближенное решение уравнения (1) можно искать в виде

$$E_j(\mathbf{r}) = \hat{e}_j(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})[U(\mathbf{r})].$$

Здесь оператор вектора поляризации «действует» на скалярную амплитуду волнового пучка $U(\mathbf{r})$. Уравнение для скалярной амплитуды U принимает вид

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})[U(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{e}_i^* \hat{L}_{ij} \hat{e}_j. \quad (2)$$

Следующим шагом следует выбрать криволинейную систему координат, связанную с опорным лучом, вдоль которого параметры волнового пучка меняются медленно. При построении квазиоптической теории для тороидальных магнитных ловушек в качестве опорного луча выбирается центральный геометрооптический луч [20, 21]. Однако опорный луч не привязан к распределению поля в волновом пучке и в общем случае может быть выбран произвольно. Для квазиоптического моделирования ЭЦ-нагрева плазмы в прямой ловушке опорный луч более естественно направить вдоль оси системы. Такой выбор опорного направления вместо геометрооптического

луча вызван рядом причин. Во-первых, геометрооптические лучи сильно искривляются внутри плазменного шнура, что приводит к формальному нарушению однозначности в сопровождающей криволинейной системе координат при ширине волнового пучка, большей радиуса кривизны луча. Во-вторых, при нагреве плазмы в прямых магнитных ловушках возможен «захват» излучения плотной плазмой, соответствующий полному внутреннему отражению на периферии плазменного шнура. В окрестности точки отражения имеет место сильное разбегание геометрооптических лучей и, соответственно, уширение волнового пучка, что может привести к появлению «отражения» в сопутствующей системе координат, которое не описывается квазиоптическими уравнениями. Указанных трудностей можно избежать при использовании опорного луча, направленного вдоль оси ловушки.

Введем систему координат и канонически сопряженных импульсов:

$$\mathbf{r} \equiv (\mathbf{x}, z), \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv (\hat{\mathbf{q}}, \hat{k}_z), \quad (3)$$

где z — координата вдоль оси ловушки, $\mathbf{x} = \mathbf{r}_\perp$ — совокупность двух декартовых координат поперек оси ловушки, $\hat{\mathbf{q}} = -i\nabla_\perp$ и $\hat{k}_z = -i\partial/\partial z$. Полагая изменение параметров пучка плавным вдоль опорного луча, мы можем представить скалярную амплитуду U в виде

$$U = \tilde{u}(\mathbf{r}) \exp\left(i \int \kappa dz\right),$$

где \tilde{u} — комплексная огибающая волнового пучка, функция $\kappa(z)$ задает зависимость «несущей фазы» волнового поля вдоль оси системы. Подставляя поле в таком виде в (2), получаем уравнение для комплексной огибающей \tilde{u} [19–21]:

$$\hat{\mathcal{H}}\left(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}} + \kappa(z)\mathbf{z}_0\right)[\tilde{u}(z, \mathbf{x})] = 0. \quad (4)$$

Заметим, что, в отличие от геометрической оптики, у нас имеется определенная свобода в выборе $\kappa(z)$, связанная с конечным поперечным размером пучка. При численной реализации излагаемого в данной работе подхода оказалось, что эту величину удобно находить как решение локального дисперсионного уравнения

$$\text{Re } \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{z}) + \kappa(z)\mathbf{z}_0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{r}} = (z, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (5)$$

где $\text{Re } \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ — обычный геометрооптический гамильтониан, $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$ — координата и волновой вектор,

отвечающие соответственно центрам масс пучка и его спектра в заданном поперечном сечении z ,

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\int \mathbf{x}|u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}{\int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \frac{\int \mathbf{q} \left| \int u(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \right|^2 d\mathbf{q}}{(2\pi)^2 \int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}.$$

Полагая, что огибающая \tilde{u} плавно зависит от продольной координаты $|\partial\tilde{u}/\partial z| \ll \kappa|\tilde{u}|$, разложим уравнение (4) до первого порядка по степеням \hat{k}_z (или, что то же самое, по степеням $\partial\tilde{u}/\partial z$):

$$\hat{H}[\tilde{u}] \approx \hat{H}_0[\tilde{u}] - i \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \kappa} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \kappa \partial z} [\tilde{u}] = 0, \quad (6)$$

где

$$\hat{H}_0 = \hat{H}(\mathbf{r}, -i\nabla_{\perp} + \kappa(z)\mathbf{z}_0)$$

— укороченный оператор, в котором отсутствуют производные по эволюционной координате z . Последнее слагаемое в уравнении (6) в пределе геометрической оптики дает предэкспоненциальный множитель, ответственный за изменение амплитуды из-за группового замедления волны. Выполняя формальную замену²⁾

$$\tilde{u} = \left(k_0 \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \kappa} \right)^{-1/2} [u], \quad \hat{H} = - \left(k_0 \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \kappa} \right)^{-1} \hat{H}_0,$$

получаем более простое уравнение, описывающее эволюцию скалярной амплитуды волнового пучка u вдоль оси z ,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ik_0 \hat{H}[u]. \quad (7)$$

Заметим, что, за исключением ряда специальных случаев, оператор $\partial \hat{H}_0 / \partial \kappa$ можно считать локальным, т. е. не содержащим производных по поперечным координатам при условии, что среда является плавнонеоднородной на масштабе длины волны излучения.

Если сопоставить левую и правую части уравнения (7), то становится ясным физический смысл нового гамильтониана \hat{H} — это оператор продольного волнового числа, выраженный через поперечные производные. Символически это можно представить (с учетом вычитания несущей гармоники) как

$$k_0 \hat{H} = \hat{k}_z(\mathbf{r}, -i\nabla_{\perp}) - \kappa(z). \quad (8)$$

Ниже мы покажем, что квазиоптический оператор в такой форме можно построить по решению алгебраического дисперсионного уравнения $k_z(\mathbf{r}, \mathbf{k}_{\perp})$ для

²⁾ Здесь оператор $\hat{B} = \hat{A}^{-1/2}$ определяется как решение операторного уравнения $\hat{A}\partial\hat{B}/\partial z + (1/2)\partial\hat{A}/\partial z\hat{B} = 0$.

рассматриваемой моды в локально-однородной среде, заданной параметрами, отвечающими точке \mathbf{r} .

Поскольку в правой части получившегося уравнения сохранены производные по поперечным координатам, входящие в исходные уравнения Максвелла, можно утверждать, что данное уравнение последовательно описывает основные волновые эффекты в параксиальном приближении $|\partial u / \partial z| \ll \kappa|u|$, включая дифракцию, пространственную дисперсию и диссипацию, если они присутствуют в среде. При этом на неоднородность в поперечном направлении не накладывается никаких дополнительных ограничений, кроме ограничений используемой численной схемы. Это оказывается важным при моделировании резонансного СВЧ-нагрева в магнитных ловушках, где сильная неоднородность поглощения может влиять на распространение волн. В ряде частных случаев для уравнения (7) удается построить автономные решения в виде обобщенных гауссовых пучков [27, 28] (см. также разд. 4). Однако, в отличие от случая токамаков, для прямой ловушки с плотной плазмой такие решения плохо применимы, поэтому мы развиваем метод прямого численного интегрирования квазиоптического уравнения. В этом смысле мы рассматриваем задачу эволюции волнового пучка с учетом его аббераций. Все указанные эффекты, естественно, не могут быть учтены в рамках геометрической оптики.

В дальнейшем мы будем использовать разложение линейного оператора \hat{H} на эрмитову и антиэрмитову части:

$$\hat{H} = \hat{H}_H + i\hat{H}_A, \quad (9)$$

где $\hat{H}_H \equiv (\hat{H} + \hat{H}^\dagger)/2$ и $\hat{H}_A \equiv (\hat{H} - \hat{H}^\dagger)/2i$ — эрмитовы операторы в смысле стандартного скалярного произведения $\int a^* b d\mathbf{x}$.

Можно показать, что в рамках сделанных приближений величина

$$\Pi = \int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x} \quad (10)$$

с точностью до размерного коэффициента совпадает с полным потоком энергии в волновом пучке. Определим плотность поглощенной мощности как

$$\mathcal{P} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z} = - \int \left(u^* \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) d\mathbf{x}.$$

Используя квазиоптическое уравнение (7), эту величину можно представить в виде

$$\mathcal{P} = 2k_0 \int \text{Re}(u^* \hat{H}_A[u]) d\mathbf{x}. \quad (11)$$

Как и ожидалось, антиэрмитова часть эволюционного оператора $i\hat{H}_A$ ответственна за диссипацию или усиление волнового поля. В частности, в бездиссипативной среде, описываемой эрмитовым эволюционным оператором, поток энергии Π сохраняется в силу уравнения (7). Полная мощность потерь определяется интегралом $\int \mathcal{P} dz$ по всему объему, занятому пучком.

При СВЧ-нагреве плазмы в магнитной ловушке вкладываемая мощность быстро перераспределяется по магнитным поверхностям. Поэтому важной количественной характеристикой является одномерное распределение мощности по магнитным поверхностям:

$$P(\rho) = \frac{2k_0}{l(\rho)} \int \text{Re}(u^* \hat{H}_A[u]) \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, z)) d\mathbf{x} dz, \quad (12)$$

где ρ имеет смысл метки магнитной поверхности, определяемой уравнением $\rho(\mathbf{x}, z) = \rho$,

$$l(\rho) = \int \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, z_0)) d\mathbf{x}$$

— эффективный периметр магнитной поверхности в сечении $z = z_0$ (для аксиально-симметричной магнитной конфигурации $l = 2\pi\rho$). В работе [29] приведенный способ вычисления профиля поглощаемой мощности сравнивался с двумя другими распространенными методами — методом геометрической оптики и методом Переверзева, основанным на безабберрационном приближении для гауссова пучка [30,31]. На примере модельной задачи, допускающей аналитическое решение, было показано, что моделирование профиля энерговклада на основе квазиоптического подхода дает хорошее согласие с точным результатом, а остальные способы приводят к существенным ошибкам в условиях сильной пространственной дисперсии и неоднородности поглощения. Для токамака ИТЭР квазиоптическая теория предсказывает дополнительное уширение профиля энерговклада на 10–15% в сценариях с «верхним» вводом СВЧ-излучения [21].

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Основная сложность при практическом использовании уравнения (7) состоит в неопределенности вида оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, необходимого для получения оператора \hat{H} . В работе [32] показано, что линейный оператор $\hat{\epsilon}$ удобно ввести в виде

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \epsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}^n} (\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k})^n + (\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k})^n \frac{\partial^n \epsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}^n} \right), \quad (13)$$

где $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ — заданная матричная функция (ядро), порождающая оператор, а $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$. Для такого представления оператора эрмитова матрица ядра $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^*$ всегда порождает эрмитов оператор $\hat{\epsilon}$, а антиэрмитова матрица $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ij}^*$ порождает антиэрмитов оператор. Это нетривиальное свойство позволяет ввести диэлектрический отклик неоднородной среды, совместимый с законом сохранения энергии. Вторым важным свойством является то обстоятельство, что ядро оператора для рассматриваемого представления получается как сумма поправок к тензору диэлектрической проницаемости по степеням характерного масштаба l неоднородности среды [32]:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{ij}^{(m)}, \quad \epsilon_{ij}^{(m)} = \mathcal{O}((k_0 l)^{-m}).$$

В плавнеоднородных средах $k_0 l \gg 1$, поэтому, как правило, можно ограничиться нулевым членом, т.е. выражением диэлектрической проницаемости, полученным в «локально-однородном» приближении. Заметим, что формально приведенная форма линейного отклика остается справедливой для любой (не обязательно плавно) неоднородной среды, однако за исключением простейших случаев [32] ядро для тензора диэлектрической проницаемости удастся определить лишь в «геометрооптическом» приближении.

Выражая операцию дифференцирования по пространственным переменным через интеграл Фурье, после простых алгебраических преобразований результат действия оператора (13) на электрическое поле можно определить как

$$\hat{\epsilon}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{k}^n} (\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \epsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k})) \times \\ \times (\mathbf{k}' - \mathbf{k})^n e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} E_j(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}.$$

Замечая, что суммирование по n есть в точности разложение в ряд Тэйлора по \mathbf{k}' функций $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}')$ и $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k}')$, получаем выражение для $\hat{\epsilon}_{ij}$, приведенное в начале разд. 2.

Можно показать, что оператор диэлектрического отклика (13) приводит к квазиоптическому эволюционному оператору (7), который можно представить в виде

$$\hat{H}[u] = \int \frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + H(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} \times \\ \times e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}. \quad (14)$$

По форме это выражение совпадает с представлением для $\hat{\varepsilon}_{ij}$, за исключением того, что вместо шестимерного фазового пространства $d\mathbf{r}'d\mathbf{k}'/(2\pi)^3$ здесь используется четырехмерное пространство $d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'/(2\pi)^2$, а координата z входит как параметр. Проще всего это выражение можно получить, если сразу применить разложение, аналогичное (13), непосредственно для оператора \hat{H} . Оператор \hat{H} порождается скалярной функцией $H = \sum H^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, причем в качестве нулевого приближения напришивается решение $H^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ локально-однородной задачи. Отметим, что представление оператора (14) автоматически порождает эрмитовы операторы для действительных $H(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и антиэрмитовы операторы для чисто мнимых $H(\mathbf{x}, \mathbf{q})$.

Квазиоптический оператор (14) вырождается в локальный оператор в пространстве координат для произвольно неоднородной среды без пространственной дисперсии, заданной $H(\mathbf{x})$, или в локальный оператор в пространстве волновых векторов для однородной среды с пространственной дисперсией, заданной $H(\mathbf{q})$. Это обстоятельство использовалось при формулировке квазиоптической теории для тороидальных магнитных систем, в которых квазиоптический оператор хорошо аппроксимировался формой $H = H_1(\mathbf{x}) + H_2(\mathbf{q})$ [21, 22], однако в открытых магнитных ловушках это приближение неприменимо. Поэтому ниже развивается метод квазиоптического моделирования, применимый для ядра $H(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ произвольного вида.

Важным свойством представления (14) является возможность написать приближенное решение уравнения (7) в виде операторной экспоненты. Действительно, нам требуется приближенное решение за малый, но конечный шаг расчета Δ , которое удовлетворяет уравнению (7) при малых $\Delta \rightarrow 0$ и совпадает с точным решением в однородной среде:

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) = \int \exp\{ik_0\Delta H(\mathbf{q}') + i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \times u(\mathbf{x}', z) \frac{d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}. \quad (15)$$

Наиболее простой вид приближенного решения, удовлетворяющего этим требованиям, является обобщение (15) на плавнеоднородные среды:

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{S}_H[u],$$

где

$$\hat{S}_H[u] \equiv \int \exp\left(ik_0\Delta \frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + H(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2}\right) \times e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u(\mathbf{x}', z) \frac{d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}. \quad (16)$$

По форме такой вид приближенного решения совпадает с операторной экспонентой [21, 33] и имеет те же достоинства и недостатки.

Для вычисления оператора вида (16) существует эффективная численная процедура, требующая не более N^2 операций для N ячеек сетки по координате \mathbf{x} . При этом шаг расчета Δ не имеет формальных ограничений со стороны числа точек по эволюционной координате, в отличие от традиционных конечно-разностных методов [34]. Шаг расчета ограничен лишь «физическими» соображениями, а именно, величиной коммутатора операторов $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и $\hat{H}(\mathbf{x}', \mathbf{q})$:

$$\Delta \ll \frac{1}{k_0 \int |u|^2 dx} \times \int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}[x_i u] - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}[u] \right|^2 dx. \quad (17)$$

С другой стороны, метод операторной экспоненты строго обоснован только для сред без диссипации, заданных эрмитовым эволюционным оператором и сохраняющим интеграл (10). В неоднородных диссипативных средах с пространственной дисперсией формула (16) может дать решение с экспоненциально растущей энергией даже для случая диссипации в рамках геометрооптического приближения (т.е. при $\text{Im} H > 0$). Формальная причина заключается в том, что «диссипативное» слагаемое \hat{H}_A в (9), отвечающее «диссипативному» ядру $\text{Im} H(\mathbf{x}, \mathbf{q}) > 0$ после применения процедуры (14), может иметь отрицательные собственные значения. Преобразование (14) гарантирует только действительность всех собственных значений, но не их знакоопределенность.

По сути это известная проблема правильной аппроксимации среды для физически корректного описания поглощения энергии волнового пучка [35]. Ошибки в аппроксимации эрмитовой части (т.е. нарушение условия (17)) лишь возмутят фазовый профиль волнового пучка, а их влияние будет заметно на трассах, больших дифракционной длины. Систематические ошибки в аппроксимации антиэрмитовой части влияют непосредственно на амплитуду пучка. В результате приближенное решение

может, например, экспоненциально быстро увеличивать энергию пучка. Особенно эта проблема актуальна для СВЧ-пучков электрон-циклотронного диапазона частот, когда диссипация резко возрастает как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых векторов.

Простейшая корректная аппроксимация, гарантирующая знакоопределенность собственных чисел антиэрмитовой части оператора \hat{H}_A , состоит в использовании модельного оператора, представимого в виде квадрата некоторого другого эрмитового оператора. Определим \hat{H}_A как

$$\hat{H}_A = \hat{G}[\hat{G}[u]], \quad (18)$$

где оператор \hat{G} строится аналогично (14),

$$\hat{G}[u] = \int \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + G(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} \times e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}, \quad (19)$$

но с ядром $G = \sqrt{\text{Im } H(\mathbf{x}, \mathbf{q})}$.

Итак, при использовании модифицированного представления (18) для диссипативной части квазиоптического уравнения (7) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ik_0 \hat{H}_H[u] - k_0 \hat{G}[\hat{G}[u]]. \quad (20)$$

Для построения численного алгоритма решения этого уравнения воспользуемся методом «split-step», который заключается в последовательном учете эрмитова $\hat{H}_H[u]$ и антиэрмитова $\hat{G}[\hat{G}[u]]$ слагаемых в уравнении

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{S}_{iGG}[\hat{S}_H[u]],$$

где \hat{S} определяется операторной экспонентой (16).

Как уже отмечалось, вычисление операторной экспоненты \hat{S}_H от действительной части H не вызывает трудностей. Однако прямое вычисление экспоненты \hat{S}_{iGG} от матрицы $\hat{G}\hat{G}$ оказывается весьма ресурсоемким. Использование методов Адамса, Рунге-Кутты и подобных проблематично, так как оператор \hat{G} может иметь большие собственные значения, соответствующие быстро затухающим модам. Это приводит к необходимости уменьшать шаг расчета Δ для обеспечения устойчивости метода. С другой стороны, такие быстро затухающие моды не представляют физического интереса, так как они соответствуют нераспространяющимся волнам. Это обстоятельство позволяет заменить операторную экспоненту \hat{S}_{iGG} некоторым приближенным оператором

\hat{D} , который должен правильно описывать слаботухающие моды и обеспечивать при этом экспоненциальное затухание при больших собственных числах.

Для выполнения первого условия потребуем, чтобы оба оператора имели одинаковые асимптотики при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\hat{S}_{iGG} \approx \hat{D} = \hat{1} - k_0 \Delta \hat{G}\hat{G} + O(\Delta^2).$$

Чтобы обеспечить второе требование достаточно «обрезать» ядро оператора \hat{D} при больших Δ . Одним из простейших операторов, удовлетворяющих указанным условиям, является

$$\hat{D}[u] = u - \hat{T}[\hat{T}[u]], \quad (21)$$

$$\hat{T}[u] = \int \frac{T(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + T(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} \times e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2},$$

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \phi(\sqrt{k_0 \Delta} G(\mathbf{x}, \mathbf{q})).$$

Здесь $\phi(x)$ — любая одномерная функция, обладающая следующими свойствами: $\phi(x) \rightarrow x$ при $x \rightarrow 0$, $\phi''(0) = 0$ и $\phi(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. В нашей программе в качестве такой функции мы использовали гиперболический тангенс $\phi = \text{th}(x)$. Вычисление оператора (21) сводится к последовательному применению преобразования Фурье к факторизованному ядру, поэтому вычислительная сложность для оператора (21) с точностью до коэффициента 2 такая же, как и для операторной экспоненты (16).

Таким образом, используя операторы (16) и (21), для квазиоптического уравнения (20) удастся построить явную схему (для шага по продольной координате)

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{D}[\hat{S}_H[u]],$$

которая обеспечивает устойчивое решение.

Развитый квазиоптический подход был использован для разработки нового квазиоптического кода, позволяющего моделировать электронно-циклотронный нагрев плазмы в открытых магнитных ловушках с учетом всех основных волновых эффектов (резонансное поглощение, дифракция, дисперсия и абберации), возникающих при распространении волновых пучков.

4. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ

В этом разделе мы приведем несколько модельных примеров, поясняющих суть предложенного ме-

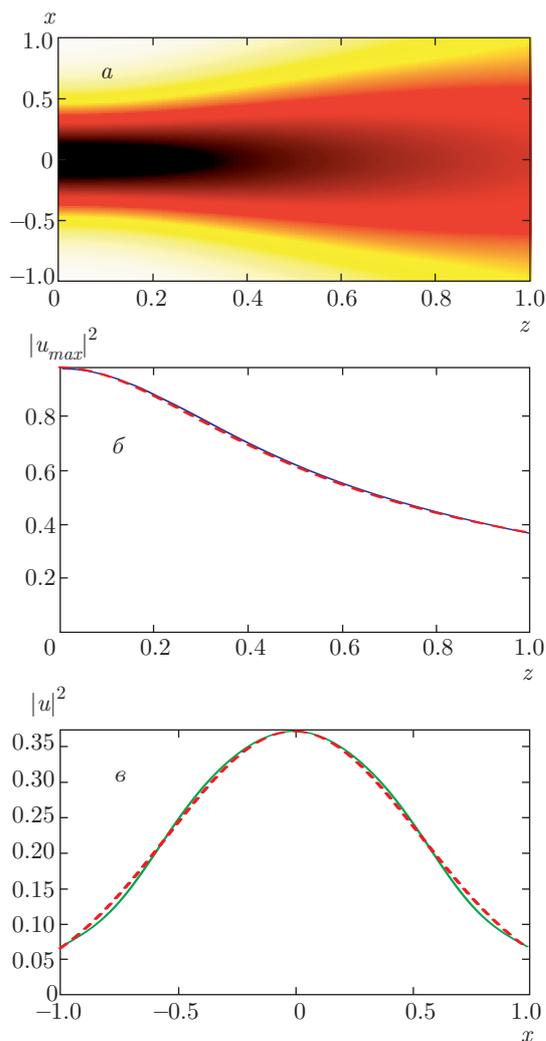


Рис. 1. (В цвете онлайн) Пример дифракции гауссова волнового пучка в однородной среде с $H = k_x^2/k_0^2$ и $k_0 = 10$. На рис. б и в приведены зависимости $|u|^2(0, z)$ и $|u|^2(x, 1)$. Штриховыми линиями показано точное решение (22)

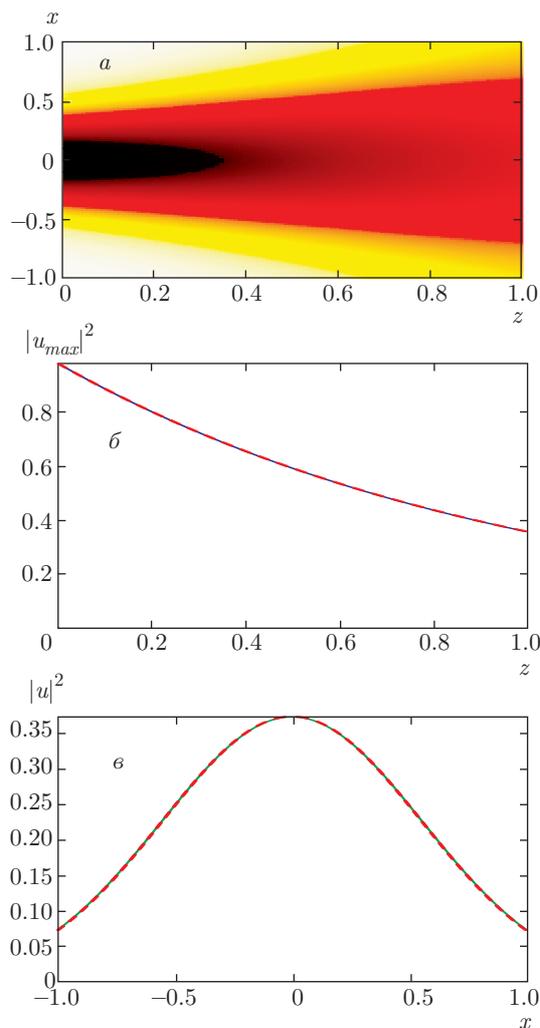


Рис. 2. (В цвете онлайн) Пример расплывания гауссова волнового пучка в среде с гамильтонианом $H = xk_x$ и $k_0 = 10$. На рис. б и в приведены зависимости $|u|^2(0, z)$ и $|u|^2(x, 1)$. Штриховыми линиями показано точное решение (23)

тогда и полезных при тестировании численного кода, его реализующего.

4.1. Среды без диссипации

В качестве первого тестового примера приведем дифракцию гауссова импульса (рис. 1) в однородной среде с гамильтонианом $H = k_x^2/k_0^2$. Задача имеет точное решение вида

$$|u|^2 = \frac{A^2}{\sqrt{1+z^2/k_0^2 w_0^4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{w_0^4+z^2/k_0^2 w_0^2}}\right), \quad (22)$$

где w_0 — начальная ширина гауссова импульса.

Следующим примером будет эрмитова среда с абберациями растяжения/сжатия, описываемая га-

мильтонианом вида $H = \alpha x k_x$. Общее решение в данном случае также может быть записано через разложение по функциям Эрмита. В частности, решением будет (рис. 2)

$$|u|^2 = A^2 \exp\left(-\exp(-2\alpha k_0 z) \frac{x^2}{w_0^2} - \alpha k_0 z\right). \quad (23)$$

Еще одним точно решаемым примером среды являются линзоподобные среды с параболическим профилем неоднородности, описываемые гамильтонианом вида $H = k_x^2/k_0^2 + \alpha^2 k_0^2 x^2$. Такие среды относятся к классу безабберационных сред, т.е. сохраняют гауссов профиль импульса. Соответственно, частное решение для амплитуды волнового пучка имеет вид (рис. 3)

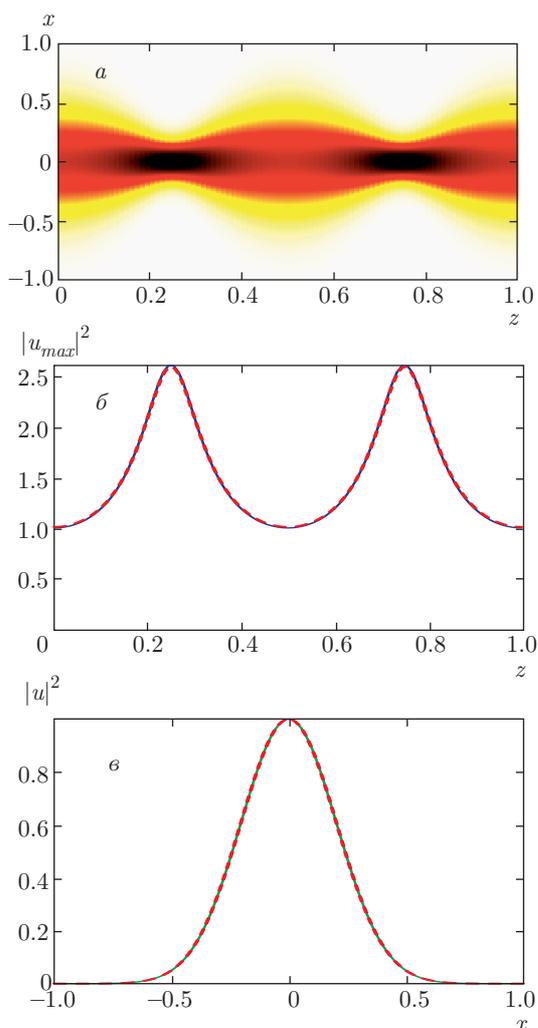


Рис. 3. (В цвете онлайн) Пример распространения гауссова волнового пучка в линзоподобной среде с гамильтонианом $H = k_x^2/k_0^2 + 0.1k_0^2x^2$ и $k_0 = 10$. На рис. б и в приведены зависимости $|u|^2(0, z)$ и $|u|^2(x, 1)$. Штриховыми линиями показано точное решение (24)

$$|u|^2 = \frac{A^2}{\varkappa(z)} \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2 \varkappa(z)}\right), \quad (24)$$

где $\varkappa(z) = 1 + \beta + (1 - \beta) \cos(4\alpha k_0 z)$ и $\beta = 1/\alpha^2 k_0^4 w_0^4$.

4.2. Среда с резкой неоднородностью поглощения

Важным показательным примером является среда с резкой неоднородностью поглощения, описываемая гамильтонианом вида $H = k_x^2/k_0^2 + i\alpha \text{step}(x)$, см. рис. 4. Такая ситуация характерна, например, для «тангенциального» ввода излучения в тороидальных магнитных ловушках [35, 36]. Для описания волнового пучка, запускаемого вдоль границы

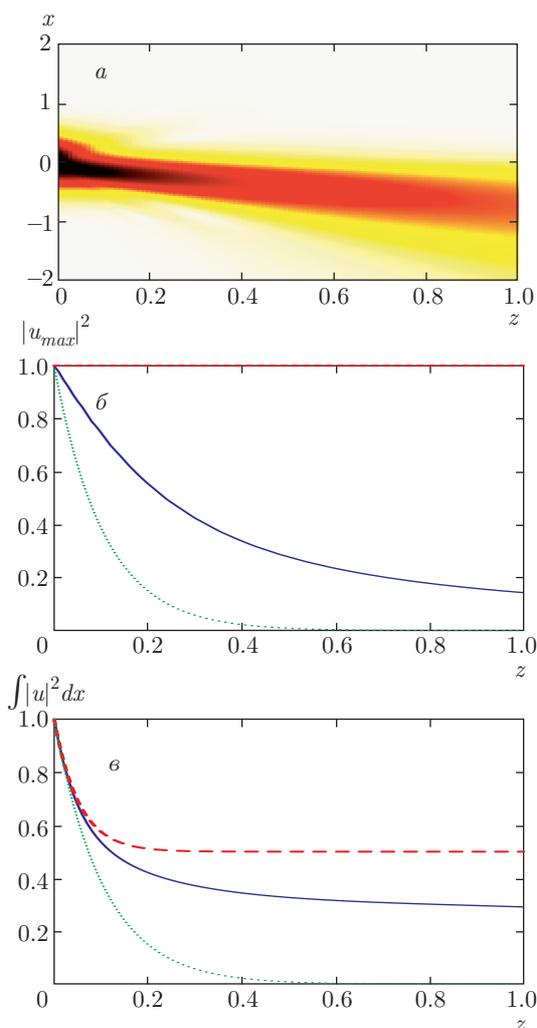


Рис. 4. (В цвете онлайн) Пример дифракции волнового пучка с изначально гауссовым профилем интенсивности в однородной изотропной среде с неоднородным поглощением. Среда задана гамильтонианом $H = k_x^2/k_0^2 + \{i, x > 0; 0, x \leq 0\}$, $k_0 = 10$. На рис. б и в приведены зависимости максимума поля $\max |u|^2(x)$ и потока энергии $\int |u|^2 dx$. Сплошными линиями показано квазиоптическое решение, штриховыми — геометрическое решение, пунктирными — решение в рамках безабберационного приближения

поглощения такой среды, оказываются неприменимы как геометрическое, так и безабберационное приближения. Действительно, в рамках геометрической оптики поглощение приведет к экспоненциально быстрому уменьшению интенсивности в области поглощения, но не затронет распределение волнового поля в области без диссипации (штриховая линия на рис. 4). Наоборот, при использовании безабберационного приближения интенсивность будет

экспоненциально быстро убывать до нуля (пунктирные линии на рис. 4), поскольку безабберационное приближение навязывает структуру решения в виде гауссова пучка без аббераций, фиксированная часть которого всегда попадает в область диссипации.

Из качественных соображений можно заключить, что резкая неоднородность диссипации приводит к экспоненциально быстрому уменьшению полного потока энергии до тех пор, пока не произойдет полное поглощение части начального пучка, попавшей в область диссипации. Эта стадия удовлетворительно моделируется как геометрооптическим, так и безабберационным приближениями. Однако при дальнейшей эволюции пучка за счет дифракции должно происходить «затекание» волнового поля в область поглощения. Этот процесс приводит к дальнейшему уменьшению полного потока энергии, более медленному по сравнению с предсказанием безабберационного приближения [35]. При этом центр масс волнового пучка смещается в сторону от области диссипации. Эта ситуация хорошо описывается предложенным выше квазиоптическим уравнением (7) (сплошные линии на рис. 4).

4.3. Неоднородная среда с дисперсией поглощения

Продемонстрируем проблему определения поглощаемой мощности в неоднородной среде с пространственной дисперсией на примере простейшего модельного геометрооптического гамильтониана с положительно-определенной мнимой частью вида

$$H_A = \alpha^2 x^2 k_x^2 \geq 0. \tag{25}$$

Если мы формально, используя формулу (14), сформируем оператор Гамильтона \hat{H} , то получим

$$\hat{H}_A = -\alpha^2 (x^2 \partial_{xx} + 2x \partial_x + 1).$$

Согласно (11) плотность поглощаемой мощности вдоль оси z есть

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\alpha^2 k_0 \int (u^* (x^2 \partial_{xx} u + 2x \partial_x u + u) + \text{c.c.}) dx = \\ &= 2\alpha^2 k_0 \int (|x \partial_x u|^2 - |u|^2) dx. \end{aligned}$$

Полученное выражение не является знакоопределенным. Например, гауссову волновому пучку $u = u_0 \exp(-(x-a)^2/w^2)$ соответствует

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\alpha^2 k_0 u_0^2}{w} (4a^2 - w^2).$$

В частности, несмещенному пучку ($a = 0$) независимо от его ширины всегда соответствует отрицательная поглощаемая мощность, а смещенный на $a = w/2$ пучок распространяется без поглощения! Воспользуемся теперь процедурой (18), (19) для построения антиэрмитовой части оператора Гамильтона. Операторы \hat{G} и \hat{H}_A в данном случае равны

$$\hat{G} = i\alpha \left(x \partial_x + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{H}_A = -\alpha^2 \left(x^2 \partial_{xx} + 2x \partial_x + \frac{1}{4} \right).$$

Проведя аналогичные вычисления, можно убедиться, что плотность поглощаемой мощности для нового оператора становится знакоопределенной:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 2\alpha^2 k_0 \int \left(|x \partial_x u|^2 - \frac{1}{4} |u|^2 \right) dx = \\ &= 2\alpha^2 k_0 \int \left| x \partial_x u + \frac{1}{2} u \right|^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Интересно, что решение без поглощения формально сохраняется, однако в данном случае оно отвечает ненормируемому распределению $u \propto 1/\sqrt{|x|}$.

Рассмотрим диссипацию импульса в среде с гамильтонианом (25). Точное решение в данном случае написать затруднительно, но при распространении волнового пучка в такой среде должны оставаться профили, близкие к бездиссипативному решению $|u|^2 \propto 1/|x|$. Именно это и демонстрируют результаты численного моделирования (рис. 5).

4.4. Однородная среда с резкой дисперсией поглощения

В заключение этого раздела рассмотрим численно сложный случай, в котором проявляются артефакты, связанные с использованием дискретной сетки в поперечном направлении. Очевидно, что сетка должна содержать достаточно точек описания мелкомасштабных неоднородностей. Менее очевидно, что сетка должна иметь еще и достаточно большой пространственный масштаб для описания неоднородностей в импульсном пространстве.

Проиллюстрируем последнее на примере резкой дисперсии поглощения — все гармоники с $k_x > 0$ затухают с инкрементом γ , а гармоники с $k_x < 0$ не затухают. Этому соответствует гамильтониан вида $H = i\gamma \text{step}(k_x)$. Такая система имеет аналитическое решение вида

$$\begin{aligned} |u|^2 &= \frac{A^2}{4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \left[(1 + \exp(-\gamma k_0 z))^2 - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \exp(-\gamma k_0 z))^2 \text{erf}\left(ix/\sqrt{2}w\right) \right]^2. \tag{26} \end{aligned}$$

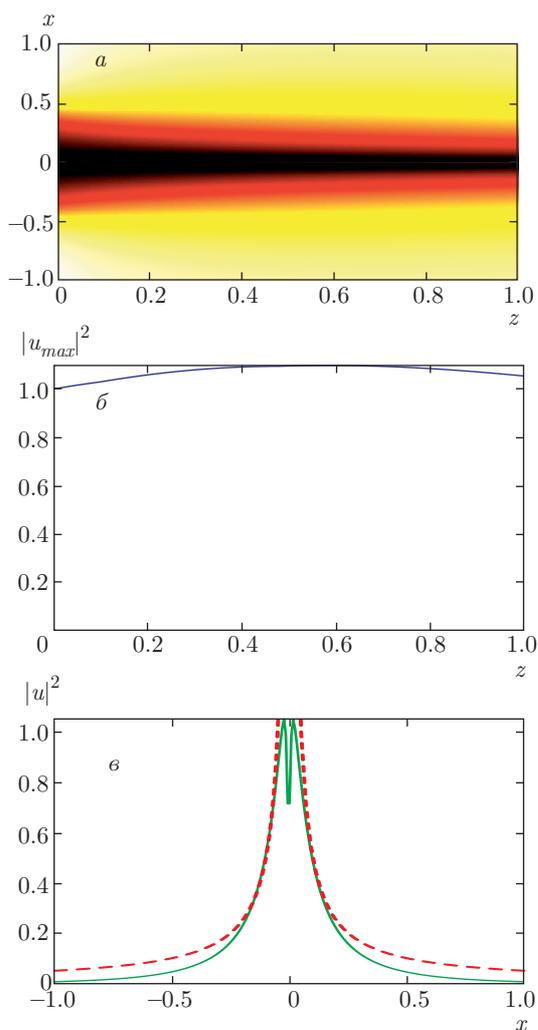


Рис. 5. (В цвете онлайн) Пример диссипации гауссова волнового пучка в среде с гамильтонианом $H = ix^2k_x^2$ и $k_0 = 10$. На рис. б и в приведены зависимости $|u|^2(0, z)$ и $|u|^2(x, 1)$. Штриховыми линиями показано асимптотическое решение без диссипации $|u|^2 \propto 1/|x|$

Однако численное моделирование такой среды представляет определенную сложность (рис. 6). Причина в слишком резкой зависимости диссипации от волнового вектора. Это приводит к недостаточному разрешению пучка в импульсном представлении, так что вес центральной ($k_x = 0$) гармоники оказывается слишком большим, и включение ее в область затухания значительно меняет результирующее поле. В качестве примера на рис. 6а,б приведены решения для почти эквивалентных профилей поглощения

$$H_a = \begin{cases} i\gamma, & k_x > 0, \\ 0, & k_x \leq 0, \end{cases} \quad H_b = \begin{cases} i\gamma, & k_x \geq 0, \\ 0, & k_x < 0, \end{cases}$$

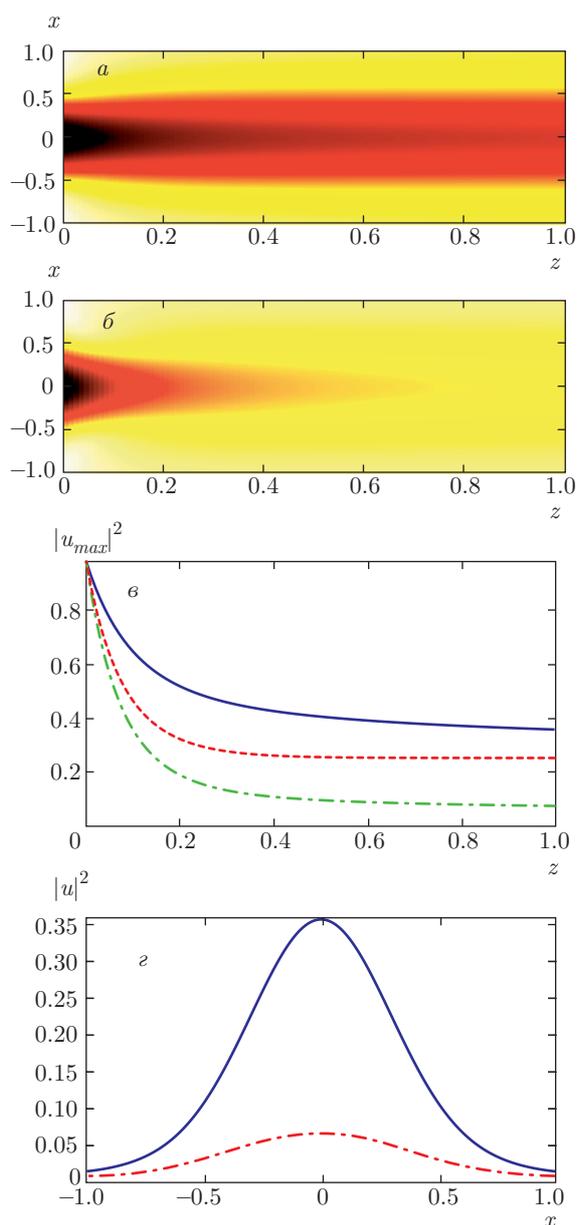


Рис. 6. (В цвете онлайн) Пример дифракции гауссова волнового пучка в однородной изотропной среде с дисперсией поглощения: а) для $H = \{i, k_x > 0; 0, k_x \leq 0\}$, б) для $H = \{i, k_x \geq 0; 0, k_x < 0\}$ и $k_0 = 10$. На рис. в и г приведены зависимости $|u|^2(0, z)$ и $|u|^2(x, 1)$. Штриховой линией на рис. в показано точное решение (26). Сплошные линии на рис. в, г соответствуют случаю а, штрихпунктирные — случаю б

различающихся только в одной точке $k_x = 0$. Численные решения при этом различаются значительно. Для увеличения точности решений следует повысить разрешение в импульсном пространстве, т. е. значительно (на порядок для рис. 7) увеличить размер расчетной области.

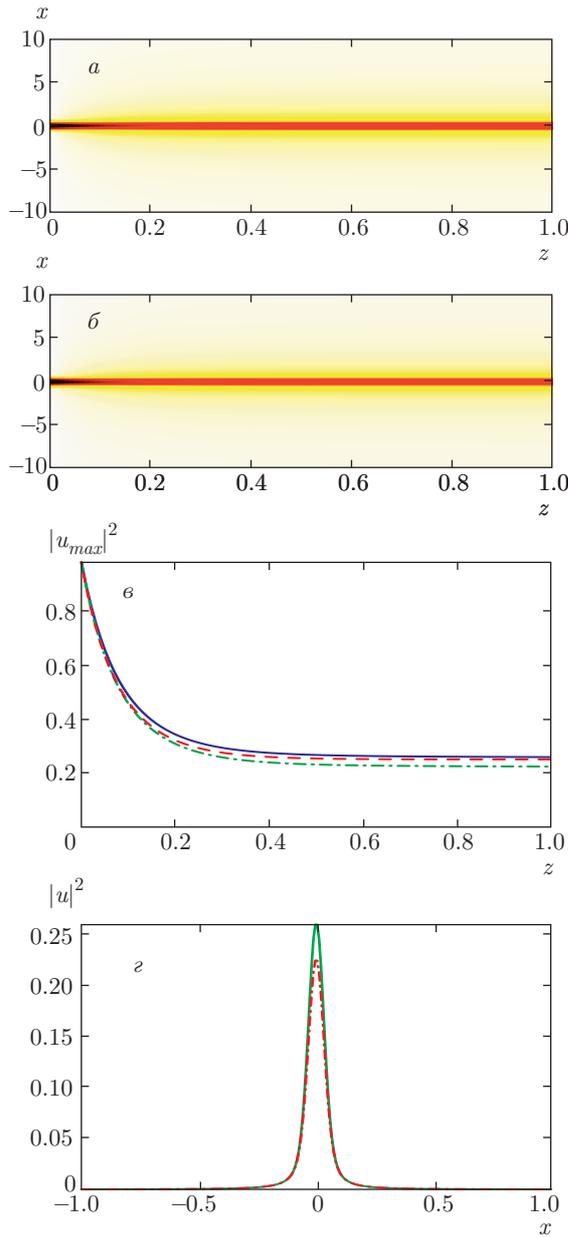


Рис. 7. (В цвете онлайн) Аналогично рис. 6, но с увеличенным в 10 раз размером сетки по x

5. КВАЗИОПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ОТКРЫТОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

В этом разделе на основе развитого выше подхода в явном виде определяются ядра квазиоптических операторов, используемых в численном коде для моделирования СВЧ-нагрева плазмы в прямой ловушке.

Прежде всего, нам необходимо определить модель среды. Дисперсионное уравнение для элект-

ромагнитных волн, распространяющихся в локально-однородной теплой магнитоактивной плазме в окрестности первой ЭЦ-гармоники, можно представить в следующем виде [25]:

$$n_{\perp}^2 [(\varepsilon_{+} - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_{-} - n^2) + (\varepsilon_{-} - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_{+} - n^2)] = 2\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_{+} - n^2)(\varepsilon_{-} - n^2), \quad (27)$$

где $n = \sqrt{n_{\perp}^2 + n_{\parallel}^2}$, n_{\parallel} и n_{\perp} — компоненты волнового числа вдоль и поперек направления магнитного поля,

$$\varepsilon_{-} = 1 + \frac{XZ(\zeta)}{n_{\parallel}\beta_e}, \quad \varepsilon_{+} = 1 - \frac{X}{1+Y}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - X,$$

$X = \omega_p^2/\omega^2$ и $Y = \omega_H/\omega$ — стандартные параметры Стикса, определяющие плотность плазмы и напряженность внешнего магнитного поля соответственно через ленгмюровскую и циклотронную частоту для электронов. Все эффекты, связанные с пространственной дисперсией и резонансной диссипацией в окрестности первой гармоники, определяются «теплой» добавкой в ε_{-} , зависящей от функции Краппа

$$Z(\zeta) = \exp(-\zeta^2) \left(i\sqrt{\pi} \operatorname{sign} \operatorname{Re}(n_{\parallel}) - 2 \int_0^{\zeta} \exp t^2 dt \right)$$

от аргумента $\zeta = (1 - Y)/(n_{\parallel}\beta_e)$ и нормированной тепловой скорости электронов $\beta_e = \sqrt{2T_e/mc^2}$. Приведенные формулы получены для слабoreлятивистской плазмы $\beta_e \ll 1$, малого ларморовского радиуса $n_{\perp}\beta_e \ll Y$ и «квазипродольного» распространения волн $n_{\parallel} \gtrsim \beta_e$. В современном эксперименте эти условия выполняются, как правило, с большим запасом.

Как уже отмечалось, при построении квазиоптического приближения в прямой ловушке удобно выбрать опорный луч, совпадающий с осью системы. В текущей реализации кода магнитное поле в прямой ловушке также считается направленным строго по оси системы, что хорошо подходит, например, для описания длинной и осесимметричной установки ГДЛ. Это ограничение непринципально для нашей методики и может быть обойдено при необходимости, однако оно позволяет упростить процедуру восстановления квазиоптического гамильтониана по дисперсионному уравнению (27).

Действительно, в этом случае квазиоптический набор переменных (3) проектируется на используемые выше волновые числа как

$$n_{\parallel} = k_z/k_0, \quad n_{\perp} = |\mathbf{q}|/k_0.$$

С учетом этой подстановки можно определить комплексное решение $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$ дисперсионного уравнения (27), отвечающее действительным поперечным импульсам \mathbf{q} . Вдали от области резонанса это решение будет близко к корням биквадратного уравнения, соответствующего холодной плазме $\beta_e \rightarrow 0$. Это позволяет выбрать «правильный» корень, отвечающий заданной электромагнитной моде, и использовать его в качестве стартового значения для итеративного поиска решения трансцендентного относительно k_z уравнения (27). Дополнительную помощь оказывает использование значений k_z в соседних ячейках сетки, которые позволяют контролировать правильный выбор моды по плавности изменения найденного решения $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$.

В соответствии с изложенной выше методикой эволюционный оператор (8) задается ядром $k_0 H = k_z - \kappa$ или в наших обозначениях

$$H_H = \frac{\text{Re } k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q}) - \kappa(z)}{k_0}, \quad G = \sqrt{\frac{\text{Im } k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})}{k_0}}.$$

В соответствии с (5), несущее волновое число определяется как решение локального дисперсионного уравнения

$$\kappa = \text{Re } k_z(\tilde{\mathbf{x}}, z, \tilde{\mathbf{q}}),$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$ соответствуют центрам масс волнового поля и его спектра в заданном поперечном сечении z .

Для решения квазиоптического уравнения (7) с определенным выше эволюционным оператором, расчета профиля энерговклада (12) в геометрии открытой магнитной ловушки и визуализации результатов был разработан новый код QOOT (Quasi-Optics for Open Traps). Как уже отмечалось во Введении, при разработке использовался квазиоптический код LAQO, созданный для тороидальных магнитных ловушек [21]. Однако поскольку условия распространения волн в теплой анизотропной плазме в прямой и тороидальной магнитных конфигурациях имеют существенные различия, в итоге был создан, по сути, абсолютно новый код.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО НАГРЕВА ПЛАЗМЫ НА УСТАНОВКЕ ГДЛ

Основная схема нагрева плазмы на установке ГДЛ использует режим захвата излучения неоднородным плазменным столбом. В основе эффекта лежит зависимость рефракции плазмы от величины магнитного поля. Излучение вводится через боковую поверхность плазменного столба со стороны

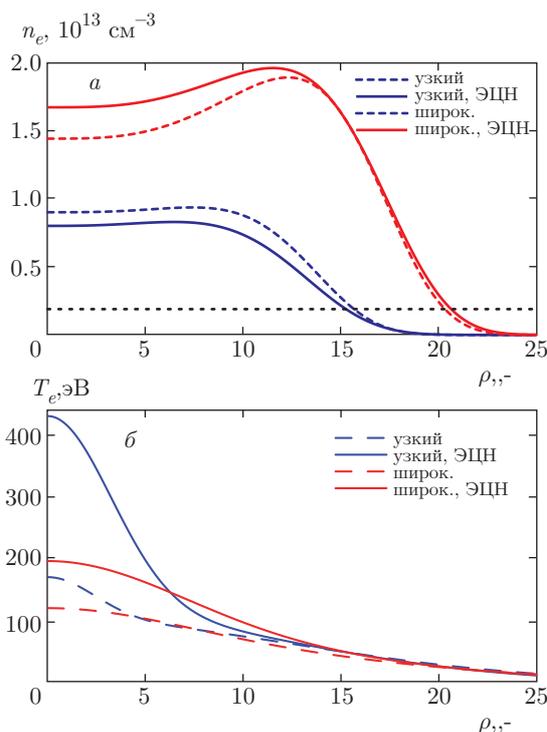


Рис. 8. (В цвете онлайн) Радиальные распределения плотности плазмы (а) и электронной температуры (б) в ГДЛ в центральном сечении ловушки до (штриховые линии) и после (сплошные линии) ЭЦ-нагрева (ЭЦН). При пересчете в другие сечения z профили масштабировались так, чтобы обеспечить постоянство магнитного потока через поперечное сечение плазменного столба. Горизонтальной пунктирной линией отмечено значение плотности плазмы, которое определяет условную границу области плотной плазмы на рис. 9–11

сильного магнитного поля и распространяется в направлении центра ловушки. Поэтому к точке возможного выхода из плазменного столба излучение подходит при более низкой величине магнитного поля, чем в точке ввода. Можно показать, что этой вариации магнитного поля соответствует вариация продольного показателя преломления необыкновенной волны на первой гармонике [16]

$$\Delta n_{\parallel}^2 \approx \Delta \epsilon_{-} \frac{n_{\parallel}^2 / n^2 + \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{+} + \epsilon_{\parallel}}.$$

При этом может оказаться, что после прохода через плазменный столб $n_{\parallel} > 1$, т.е. возникают условия для полного внутреннего отражения. В результате плазма формирует своеобразный волновод, неоднородный как в поперечном, так и в продольном направлениях, по которому излучение доставляется к поверхности ЭЦ-резонанса.

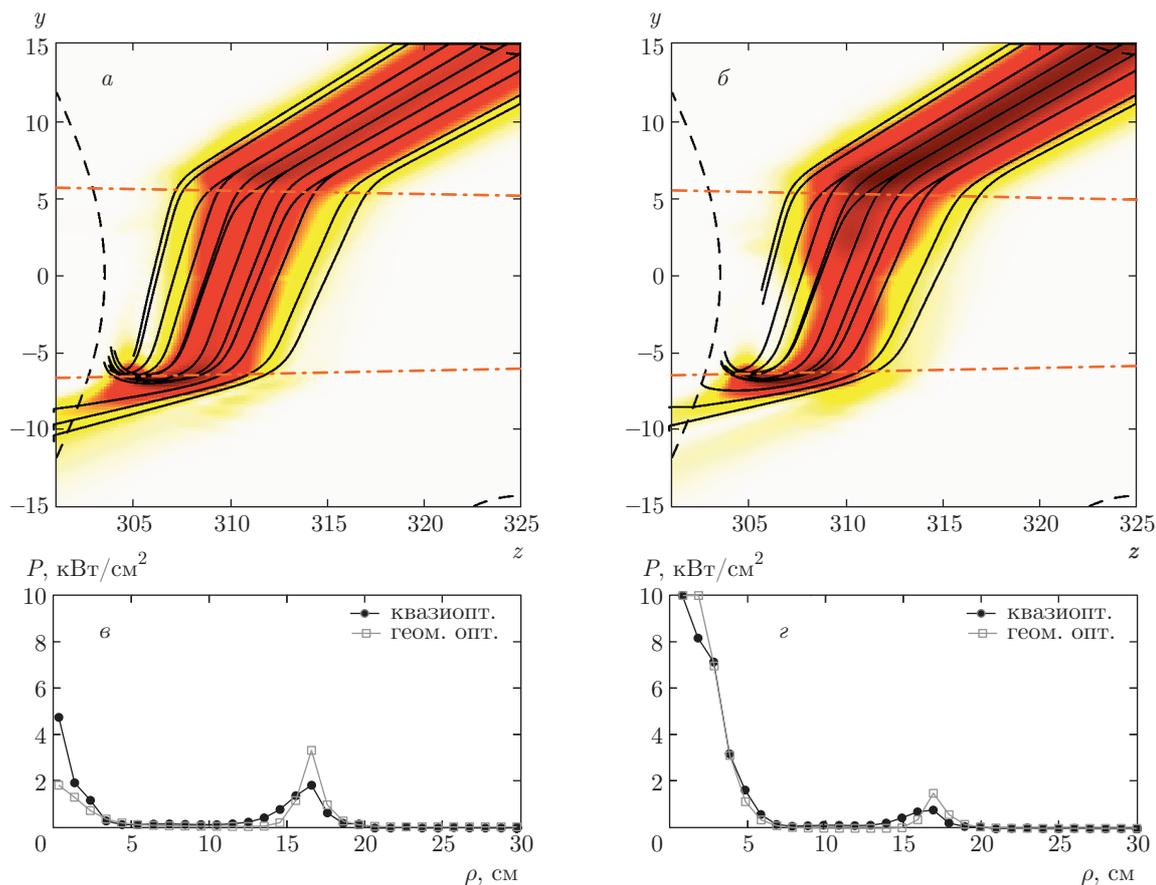


Рис. 9. (В цвете онлайн) Распределения интенсивности поля в пучке (а,б) и профилей поглощаемой мощности (в,г) в режиме с «узким профилем энерговклада» в состоянии до (а,в) и после (б,г) нагрева. Сплошными линиями на рис. а,б показаны геометрооптические лучи, штриховыми и штрихпунктирными — соответственно область ЭЦ-резонанса и граница плотной плазмы. Эффективность поглощения почти 100 %

В областях отражения и поглощения волнового поля среда перестает быть плавнонеоднородной, что ставит под сомнение применимость геометрооптического приближения. Поэтому в качестве первой задачи для нового квазиоптического кода была проведена проверка полученных ранее результатов геометрооптического моделирования. В частности, была повторно проанализирована задача об оптимизации эффективности ЭЦР-нагрева в ГДЛ. Ранее при оптимизации эффективности ЭЦР-нагрева плазмы в ГДЛ было установлено, что нагрев может осуществляться в двух режимах с сильно различающимися распределениями поглощаемой СВЧ-мощности [13,14]. При этом управление радиальным распределением поглощаемой в условиях ЭЦР мощности осуществляется за счет относительно небольшой перестройки внешнего магнитного поля в окрестности резонансной поверхности.

Расчеты проводились для экспериментально измеренных профилей плотности плазмы и температуры электронов до и после ЭЦ-нагрева (рис. 8). Результаты расчетов приведены на рис. 9–11. Для двумерной визуализации квазиоптического пучка в плоскости (y, z) была выбрана интенсивность, т. е. плотность потока энергии вдоль направления групповой скорости, проинтегрированная вдоль оси x (перпендикулярно плоскости рисунка)

$$J(y, z) = \int \frac{|\mathbf{v}_{gr}|}{|\mathbf{v}_{gr}\mathbf{z}_0|} |u|^2 dx,$$

где

$$\frac{|\mathbf{v}_{gr}|}{|\mathbf{v}_{gr}\mathbf{z}_0|} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} k_z}{\partial k_x}\right)_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} k_z}{\partial k_y}\right)_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}^2}.$$

Для улучшения контраста использовалась логарифмическая цветовая шкала, отвечающая величине

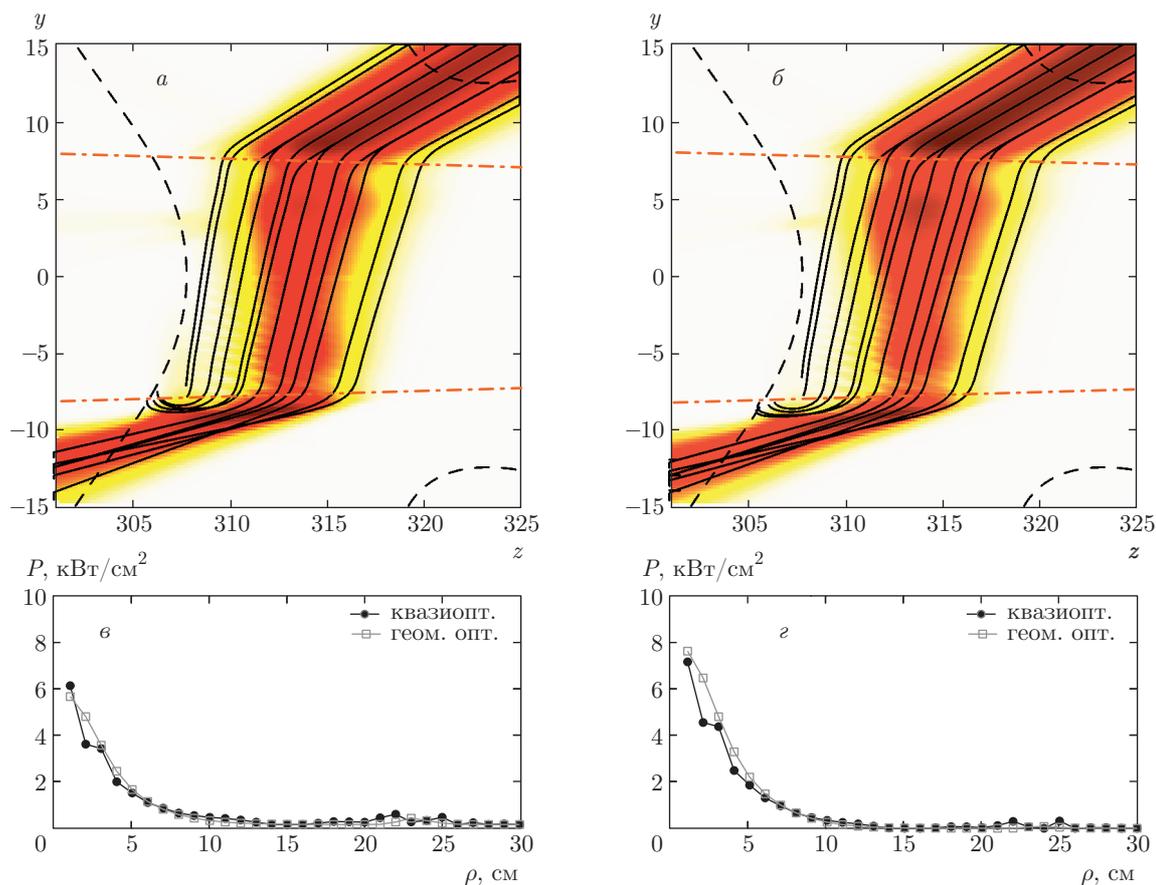


Рис. 10. (В цвете онлайн) Распределения интенсивности поля в пучке (a, b) и профилей поглощаемой мощности (v, z) в режиме с «широким профилем энерговклада» в состоянии до (a, v) и после (b, z) нагрева. Сплошными линиями на рис. a, b показаны геометрооптические лучи, штриховыми и штрихпунктирными — соответственно область ЭЦ-резонанса и граница плазмы. Квазиоптические расчеты дают эффективность поглощения более 80 %

in J , что позволило отобразить решения с каустиками. Распределение поглощаемой мощности рассчитывалось по формуле (12), примененной в центральном сечении установки, проходящем через минимум магнитного поля.

На рис. 9 приведены результаты расчетов распределения интенсивности поля в пучке и профилей поглощаемой мощности в «режиме с узким профилем энерговклада». В экспериментах в этом режиме наблюдались рекордные для открытых магнитных систем температуры электронов порядка 1 кэВ. Левые и правые графики отвечают состояниям соответственно до и после ЭЦ-нагрева. Для сравнения также приведены результаты геометрооптического моделирования. В данном случае профили поглощаемой мощности достаточно хорошо совпадают. Некоторое расхождение наблюдается на периферии плазменного шнура, отвечающей поглощению излучения после внутреннего отражения в окрестности

каустической поверхности, где геометрическая оптика нарушается. Заметим, что ход геометрооптических лучей удовлетворительно воспроизводит квазиоптический пучок как до, так и внутри области каустики.

На рис. 10 те же графики приведены для «режима с широким профилем энерговклада». В экспериментах в этом режиме наблюдалось заметное увеличение энергосодержания плазмы, связанное с улучшенным удержанием горячих ионов. В этом режиме наблюдается лучшее согласие квазиоптического и геометрооптического профилей поглощаемой мощности, поскольку доля поглощенной мощности в окрестности каустики в режиме с широким профилем энерговклада меньше. Как и расчеты в рамках геометрической оптики, квазиоптическое моделирование предсказывает неполное поглощение СВЧ-мощности в этом режиме.

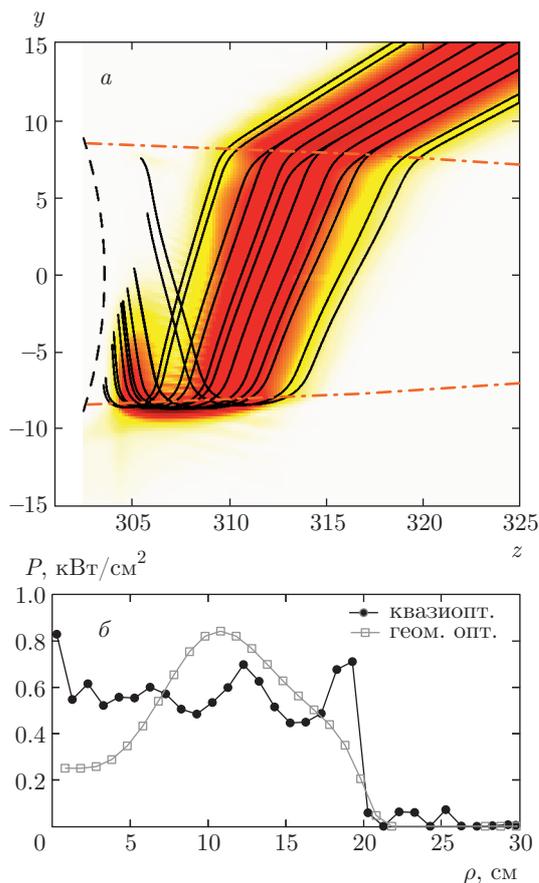


Рис. 11. (В цвете онлайн) Распределение интенсивности поля в пучке (а) и профиль поглощаемой мощности (б) в режиме с «улучшенным широким профилем энерговклада» в состоянии до нагрева. Сплошными линиями на рис. а показаны геометрооптические лучи, штриховой и штрихпунктирными — соответственно область ЭЦ-резонанса и граница плазмы. Эффективность поглощения почти 100 %

На рис. 11 мы привели результаты расчета для «режима с улучшенным широким профилем энерговклада». Этот режим еще не был продемонстрирован в эксперименте, для его реализации в настоящее время проводится модернизация пробочной катушки магнитной системы ГДЛ. Графики приведены только для стадии до СВЧ-нагрева, поскольку экспериментальные данные о профилях плазмы после нагрева отсутствуют (профили до нагрева брались такими же, как для режима с широким профилем энерговклада). В этом режиме формируется протяженная область каустики, а доля поглощенной за каустикой мощности выше, чем в предыдущих рассмотренных режимах. Поэтому профили поглощенной мощности, рассчитанные в рамках квазиоптического и геометрооптического подходов, различаются достаточно сильно. Квазиоптическое модели-

рование предсказывает более равномерное распределение поглощаемой мощности, что в целом лучше отвечает конечной цели, ради которой планируется реализовать данный режим. По мнению авторов квазиоптический метод дает более адекватное описание, однако подтверждение этого утверждения требует дополнительных исследований и экспериментов.

В целом можно заключить, что для используемых на установке ГДЛ режимов геометрооптическое моделирование дает неплохое согласие с более точным квазиоптическим расчетом. Однако этот вывод не исключает возможного влияния эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации и потерь за счет дифракции излучения в окрестности каустик на эффективность нагрева в более оптимизированных сценариях.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитая ранее квазиоптическая теория распространения волновых пучков в высокотемпературной плазме, удерживаемой в тороидальных магнитных ловушках, обобщена на случай открытых магнитных систем. Специфика СВЧ-нагрева в современных прямых ловушках потребовала существенной модификации квазиоптической теории, связанной с более аккуратным описанием эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации волн. В результате разработан универсальный квазиоптический код для моделирования электронно-циклотронного нагрева плазмы, позволяющий учесть все основные волновые эффекты (дифракцию, дисперсию и абберации) при распространении и поглощении электромагнитного волновых пучков в открытых ловушках.

Новый код был использован для верификации результатов оптимизации эффективности ЭЦР-нагрева в открытой магнитной ловушке ГДЛ, полученных ранее с помощью геометрооптического моделирования. Показана возможность управления радиальным распределением поглощаемой СВЧ-мощности за счет локальной модификации магнитной конфигурации в области ЭЦР и, в частности, возможность эффективного нагрева плазмы в приосевой области установки. Продemonстрировано влияние каустик на локализацию области СВЧ-нагрева.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-01007).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Zhiltsov et al., *Plasma Phys. Rep.* **20**, 242 (1994).
2. S. V. Golubev, S. V. Razin, A. V. Vodopyanov, and V. G. Zorin, *Trans. Fusion Technol.* **35**(1T), 288 (1999).
3. A. V. Vodopyanov, S. V. Golubev, V. G. Zorin, A. Yu. Kryachko, A. Ya. Lopatin, V. I. Luchin, S. V. Razin, and A. N. Smirnov, *Tech. Phys. Lett.* **26**, 1075 (2000).
4. S. V. Golubev, S. V. Razin, V. E. Semenov, A. N. Smirnov, A. V. Vodopyanov, and V. G. Zorin, *Rev. Sci. Instr.* **71**, 669 (2000).
5. T. Thuillier, T. Lamy, P. Sortais, P. Suominen, O. Tarvainen, and H. Koivisto, *Rev. Sci. Instr.* **77**, 03A323 (2006).
6. L. Latrasse, M. Marie-Jeanne, T. Lamy, T. Thuillier, J. Giraud, C. Fourel, C. Trophime, F. Debray, P. Sala, and J. Dumas, *Rev. Sci. Instr.* **81**, 02A324 (2010).
7. T. Cho, V. P. Pastukhov, W. Horton, T. Numakura, M. Hirata, J. Kohagura, N. V. Chudin, and J. Pratt, *Phys. Plasmas* **15**, 056120 (2008).
8. T. Tamano, *Phys. Plasmas* **2**, 2321 (1995).
9. T. Saito, K. Ishii, A. Itakura et al., *J. Plasma Fusion Res.* **81**(4), 288 (2005).
10. T. C. Simonen and R. Horton, *Nucl. Fusion* **29**, 1373 (1989).
11. P. A. Bagryansky, A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov et al., *Phys. Rev. Lett.* **114**, 205001 (2015).
12. P. A. Bagryansky, Yu. V. Kovalenko, V. Ya. Savkin, A. L. Solomakhin, and D. V. Yakovlev, *Nucl. Fusion* **54**, 082001 (2014).
13. P. A. Bagryansky, A. V. Anikeev, G. G. Denisov, E. D. Gospodchikov et al., *Nucl. Fusion* **55**, 053009 (2015).
14. P. A. Bagryansky, E. D. Gospodchikov, Yu. V. Kovalenko, A. A. Lizunov et al., *Fusion Sci. Technol.* **68**, 87 (2015).
15. T. C. Simonen, *J. Fusion Energy* **35**, 63 (2016).
16. A. Shalashov, E. Gospodchikov, O. Smolyakova, P. Bagryansky, V. Malygin, and M. Thumm, *Phys. Plasmas* **19**, 052503 (2012).
17. A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov, O. B. Smolyakova, P. A. Bagryansky, V. I. Malygin, and M. Thumm, *Probl. Atom. Sci. Technol., Ser.: Plasma Physics*, № 6, 49 (2012).
18. P. A. Bagryansky, S. P. Demin, E. D. Gospodchikov, Yu. V. Kovalenko, V. I. Malygin, S. V. Murakhtin, V. Ya. Savkin, A. G. Shalashov, O. B. Smolyakov, A. L. Solomakhin, M. Thumm, and D. V. Yakovlev, *Fusion Sci. Technol.* **63**(1T), 40 (2013).
19. А. А. Балакин, *Радиофизика* **55**, 594 (2012).
20. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. И. Смирнов, Г. В. Пермитин, *Физика плазмы* **33**, 337 (2007).
21. А. А. Балакин, М. А. Балакина, and E. Westerhof, *Nucl. Fusion* **48**, 065003 (2008).
22. N. Bertelli, A. A. Balakin, E. Westerhof, and M. N. Buyanova, *Nucl. Fusion* **50**, 115008 (2010).
23. D. V. Yakovlev, A. G. Shalashov, P. A. Bagryansky, E. D. Gospodchikov, V. Ya. Savkin, and A. L. Solomakhin, arXiv:1607.01051 [physics.plasm-ph] (submitted to *Nucl. Fusion*, 2016).
24. B. W. Stallard, Y. Matsuda, and W. M. Nevins, *Nucl. Fusion* **23**, 213 (1983).
25. E. D. Gospodchikov and E. V. Suvorov, *Radiophys. Quant. Electron.* **48**, 641 (2005).
26. А. А. Балакин, *Радиофизика* **55**, 521 (2012).
27. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. И. Смирнов, and G. V. Permitin, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **40**, 4285 (2007).
28. А. А. Балакин, *Радиофизика* **55**, 651 (2012).
29. O. Maj, A. A. Balakin, and E. Poli, *Plasma Phys. Control. Fusion* **52**, 085006 (2010).
30. G. V. Pereverzev, *Rev. Plasma Phys.* **19**, ed. by B. B. Kadomtsev, Consultants Bureau, New York (1996), p. 1.
31. G. V. Pereverzev, *Phys. Plasmas* **5**, 3529 (1998).
32. А. А. Балакин and E. D. Gospodchikov, *J. Phys. B: Atom., Mol. Opt. Phys.* **48**, 215701 (2015).
33. G. M. Fraiman, E. M. Sher, A. D. Yunakovsky, and W. Laedke, *Physica D* **87**, 325 (1995).
34. А. А. Самарский, *Введение в численные методы*, Лань, Санкт-Петербург (2009).
35. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. И. Смирнов, Г. В. Пермитин, *Физика плазмы* **34**, 533 (2008).
36. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. Г. Шалашов, *Физика плазмы* **33**, 724 (2007).