ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 6 (12), стр. 1059–1068

МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ НАСЕЛЕННОСТИ КУБИТА В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ

М. В. Денисенко[*], *А. М. Сатанин*

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603095, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.

Изучаются флуктуации населенности джозефсоновского кубита в переменном поле, которое представляет собой суперпозицию электромагнитных импульсов большой амплитуды. Показано, что относительная фаза импульсов ответственна за темп переходов Ландау–Зинера и, соответственно, за частоту переходов между адиабатическими состояниями. Длительности импульсов, поступающих на кубит, контролируются с точностью до периода поля, что приводит к сильным мезоскопическим флуктуациям населенности кубита. При этом относительная фаза импульсов подобно магнитному полю в мезоскопике может разрушать интерференционную картину населенности кубита. Изучено влияние длительности импульса и шума на обнаруженные флуктуационные эффекты.

DOI: 10.7868/S0044451016120014

1. ВВЕДЕНИЕ

Слабая локализация и мезоскопические флуктуации полной проводимости (кондактанса) наблюдаются в проводниках, размеры которых малы по сравнению с характерной длиной неупругого рассеяния [1, 2]. Указанные эффекты обусловлены фазовой когерентностью при прохождении электронных волн через образцы. Новая возможность проявления интерференционных явлений открывается в связи с изучением временной динамики тока в сверхпроводниковых рамках микронных размеров с встроенными в них джозефсоновскими переходами (слабыми связями), которые при учете только пары уровней ведут себя как кубиты [3]. Интересные эффекты в поведении населенностей возникают при действии на кубит двух сдвинутых по фазе импульсов большой амплитуды [4–7]. В частности, в работе [6] изучены флуктуации населенности кубита в зависимости от фазы и смещения уровней, а также указано на аналогию между мезоскопическими флуктуациями кондактанса и населенностью кубита. При этом основное предположение состояло в том, что эти эффекты обусловлены нерегулярными колебаниями магнитного потока сквозь петлю при неизменной последовательности управляющих импульсов, поступающих на кубит по волноводному тракту. Экспериментальные данные были обработаны в работе [6] на основе выражения для населенностей, полученного путем разложения по туннельной константе кубита [8].

В данной работе путем решения уравнения Шредингера и уравнения для матрицы плотности изучается динамика переходов между уровнями кубита в сильном переменном поле, которое формируется сложением сдвинутых по фазе электромагнитных импульсов основной и удвоенной частот. В отличие от работы [6], мы не предполагаем малость туннельной константы связи. Показано, что воздействие бигармонического поля на систему позволяет осуществить хаотическую динамику вероятностей перехода между уровнями кубита, которая оказывается во многом аналогичной мезоскопическим флуктуациям в проводниках. Если в многоуровневых квантовых системах на основе принципа соответствия классике природа квантового хаоса установлена, то в ультраквантовом случае детальная картина возникновения хаотического движения ранее не изучалась [9]. Будет показано, что в сильном переменном поле населенности уровней кубита в основном эволюционируют адиабатически в соответствии с двумя возможными состояниями системы. Медленная динамика прерывается в те моменты времени, когда происходит сближение уровней, индуцирующее туннелирование между ними — квантово-когерентные

[*] E-mail: mar.denisenko@gmail.com

переходы Ландау – Зинера [10, 11] (см. обзор [12]). В сильном поле время перехода оказывается много меньше периода внешнего поля. При воздействии сложного сигнала переходы Ландау – Зинера аналогичны хаотическим процессам рассеяния на примесных центрах, количество актов рассеяния соответствует числу квазипересечений на периоде внешнего поля, а зависимости населенностей кубита от времени могут сильно различаться в повторяющихся актах измерений из-за потерь в коаксиальных линиях передач, которые обусловливают случайный сбой фазы сигнала как целого. При этом относительная фаза смешиваемых сигналов влияет на фазу волновой функции кубита в процессе эволюции, а также приводит к нарушению симметрии относительно обращения времени [4–7]. В свою очередь, населенность кубита как функция длительности импульса флуктуирует подобно проводимости проволоки в зависимости от ее длины, а влияние относительной фазы двух импульсов подобно магнитному полю в проводниках, нарушающему симметрию относительно обращения времени. При этом форма импульсов ответственна за изменение темпа переходов Ландау – Зинера на периоде внешнего поля. Вместе с тем, наличие развитых флуктуаций не приводит к андерсоновской локализации во временной задаче при больших длительностях импульса. Мы также изучаем влияние шумов, вызванных взаимодействием кубита с окружающей средой, на населенности уровней и мезоскопические эффекты.

2. ДИНАМИКА КУБИТА

Будем рассматривать систему близкую к той, которая реализована в экспериментах [4, 6, 8, 13]. В отсутствие внешних полей в контуре могут циркулировать незатухающие сверхтоки по и против часовой стрелке $\pm I_p$, т. е. кубит может находиться в двух диабатических состояниях $|0\rangle = (0,1)^T$ и $|1\rangle = (1,0)^T$ (собственные векторы матрицы Паули σ_z). Положения уровней кубита зависят от стационарного магнитного потока Φ, туннельного расщепления Δ и определяются выражением $E_\pm = \pm K/2$, где $K = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2}$, $\varepsilon_0 = 2I_p(\Phi/\Phi_0 - 1/2)$, $\Phi_0 = h/2e$ — квант магнитного потока [3]. Для манипулирования переходами между состояниями кубита по коаксиальным линиям подается переменное высокочастотное поле большой амплитуды (см., например, экспериментальную работу [6]), которое создает дополнительный переменный магнитный поток через контур петли $\Phi_\sim(t)$.

Динамика изолированной системы подчиняется уравнению Шредингера ($\hbar = 1$)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, H(t) = = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_\sim(t)$ — функция, описывающая суммарное приложенное поле ($\varepsilon_\sim(t) = 2I_p\Phi_\sim(t)/\Phi_0$). В качестве примера будем рассматривать импульс конечной длительности, имеющий вид

$$\varepsilon_\sim(t) = A\left(\cos(\omega t + \theta) - \gamma\cos(2\omega t)\right), \quad (2)$$

где A — амплитуда внешнего переменного поля, γ и θ — относительные амплитуда и фаза смешиваемых сигналов. В условиях эксперимента [6] импульсы, подаваемые с генератора, могут испытать при прохождении коаксиальных линий потери и сдвиги фаз, что несомненно будет отражаться на времени прихода импульса на кубит. Для учета этого эффекта введем случайное время прихода импульса на кубит t_0 или соответствующую случайную фазу $\varphi = t_0\omega$.

Решение временного уравнения Шредингера (1) представляется выражением

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle,$$

где пропагатор

$$U(t,0) = \hat{T}\exp\left\{-i\int_0^t H(t')dt'\right\}$$

($\hat{T}$ — оператор хронологического упорядочения) удовлетворяет соотношению $U^+U = I$. Если функция $\varepsilon(t)$ определена на последовательности временных интервалов $\{t_n, t_{n+1}\}$, то пропагатор можно факторизовать:

$$U(t,0) = U(t_N, t_{N-1})\times \times U(t_{N-1}, t_{N-2} \times \ldots U(t_2,t_1) \times U(t_1,0)).$$

Указанное свойство позволяет представить пропагатор для импульса, характеризуемого начальным временным интервалом «включения» — U_{on}; пропагатором, описывающим эволюцию системы под действием последовательности N периодов длительности T, — U_p, а завершение действия импульса («выключение») описывается пропагатором U_{off}. Таким образом, полная эволюция описывается выражением вида

$$U = U_{off}U_p^N U_{on},$$

где U_p представляет периодическое воздействие на систему, а U_{on} и U_{off} — случайное. Чтобы не загромождать рассуждения деталями, далее мы считаем, что выключение происходит по той же схеме, что и включение, и зависит только от фазы φ.

Протокол измерения, используемый в работах [4, 6, 8, 13], позволяет различать вероятности нахождения кубита в состояниях с определенным значением тока, в частности, выделить состояние с $+I_p$, которое соответствует возбужденному диабатическому уровню кубита. Учитывая сказанное, мы будем интересоваться вероятностью перехода $P_{\alpha\to\beta}(t)$ кубита из основного состояния с энергией E_-

$$|\alpha\rangle = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (K-\varepsilon_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{K-\varepsilon_0}{\Delta} \end{pmatrix} \tag{3}$$

в возбужденное (диабатическое) состояние

$$|\beta\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Такой способ проектирования обусловлен тем, что неразрушающие измерения конечных состояний кубита выполняются с использованием магнитометра (СКВИДа), осуществляющего проектирование на состояния с заданным направлением тока (собственное состояние σ_z) [8, 13].

3. ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИКА РАБИ И ФАЗОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

В данном разделе будет показано, что для чистого состояния основной причиной хаотического поведения населенности является чувствительность населенности к флуктуациям общей и относительной фаз бигармонического сигнала.

Как и в работе [6], нас будет интересовать поведение населенности при большой амплитуде поля $A \gg K$, однако для начала полезно кратко обсудить особенности поведения системы в слабом поле (в приближении Раби). В случае монохроматического сигнала ($\gamma = 0$) и пределе слабого поля, когда $A \ll K$, вероятность перехода между уровнями кубита осциллирует на обобщенной частоте Раби [14]. При этом фаза φ входит в аргумент квадрата синуса, а усреднение вероятности приводит к тому, что населенности верхнего и нижнего уровней кубита в среднем равны.

В случае сильного поля, когда A и γA сравнимы или больше расстояния между уровнями в кубите K, можно использовать переход во вращающуюся систему координат (rotating wave approximation) [14]. Эффективный гамильтониан системы для управляющего поля в форме (2), можно записать в виде

$$H_{eff}(t) = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{n,m} e^{i\phi(t)} \\ \Delta^*_{n,m} e^{-i\phi(t)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\phi(t) = \varepsilon_0 t + (n-2m)\omega t,$$

$$\Delta_{nm} = \Delta J_n\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right) J_m\left(\frac{\gamma A}{2\hbar\omega}\right) \times \\ \times \exp\left\{in(\theta+\varphi) - 2im\varphi\right\} \times \\ \times \exp\left\{-i\frac{A}{\omega}\sin(\theta+\varphi) + i\frac{\gamma A}{2\omega}\sin(2\varphi)\right\},$$

$J_n(x)$ — функция Бесселя первого типа порядка n.

В отсутствие внешнего воздействия, когда $\varepsilon_0 = 0$ и $A = 0$, гамильтониан (5) отражает резонансную динамику системы с частотой Раби $\Omega = \Delta$. В присутствии только постоянного смещения ($A = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$) также имеют место осцилляции Раби, а ε_0 будет играет роль отстройки от резонанса. При увеличении параметра ε_0 собственные функции системы стремятся к диабатическим состояниям кубита $|0\rangle, |1\rangle$, однако осцилляции между ними подавлены из-за отсутствия резонанса, и в случае $\varepsilon_0 \gg \Delta$ максимальная населенность пропорциональна $(\Delta/\varepsilon_0)^2$ [15].

В резонансном приближении в (5) можно пренебречь быстро осциллирующими слагаемыми за исключением тех, для которых выполняется условие

$$\varepsilon_0 + (n-2m)\omega = 0. \tag{6}$$

При этом осцилляции между уровнями характеризуется обобщенной частотой Раби

$$\Omega = \left| {\sum_{n,m}}' \Delta_{nm} \right|,$$

где штрих означает, что сумма берется при условии (6). Необходимо отметить, что для применимости резонансного приближения необходимо выполнение условия $|\varepsilon_0 + (n-2m)\omega| \gg \Delta$ для всех n и m кроме тех, которые удовлетворяют условию резонанса (6), т. е. условия $\omega \gg \Delta$.

Вычисляя вероятность перехода с учетом (6), получим

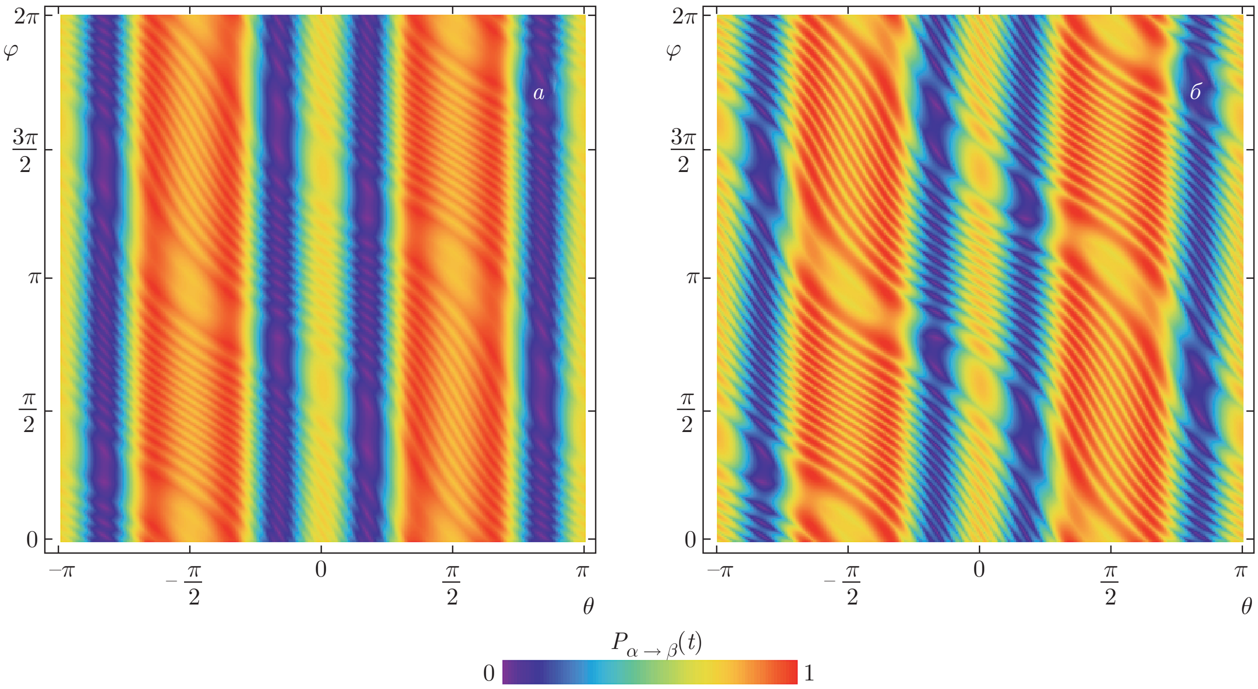

Рис. 1. Зависимость населенности $P_{\alpha\to\beta}(\tau)$ от относительной фазы θ и общей фазы φ, рассчитанная в резонансном приближении (*а*) и путем численного решения временного уравнения Шредингера (*б*). Параметры системы: $\Delta/\omega = 0.5$, $A/\omega = 22$, $\varepsilon_0/\omega = 2$, $\gamma = 0.25$, $\tau = 10T$

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = \frac{\Delta(K-\varepsilon_0)}{\Delta^2 + (K-\varepsilon_0)^2}\left[\frac{K-\varepsilon_0}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta^2 - (K-\varepsilon_0)^2}{\Delta(E-\varepsilon_0)}\cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \sin(\Omega t)\sin\chi\right], \quad (7)$$

где

$$\chi = \operatorname{Arg}\left[\sum_{n,m}{}' \Delta_{nm}\right].$$

Выражение (7) показывает, что вероятность перехода для отдельной реализации зависит от времени запаздывания импульсов (общей фазы φ) и относительной фазы θ составляющих компонент бигармонического импульса (2), которые входят в выражение для аргумента комплексного параметра Δ_{nm}.

На рис. 1 для сравнения изображены интерференционные картины вероятности перехода кубита из основного состояния на верхний уровень $P_{\alpha\to\beta}(t)$ в зависимости от фаз импульсов. Они получены по приближенной формуле (7) (рис. 1*а*) и путем численного решения уравнения (1) (рис. 1*б*), фазы рассчитаны на момент прекращения действия подаваемого импульса, т. е. в момент времени $t = 10T$ (T — период сигнала). Значение вероятности перехода выделено тоном: светлые области означают резонансные пики, где $P_{\alpha\to\beta} \approx 1$; темные означают «провалы», где населенность падает до нуля, $P_{\alpha\to\beta} \approx 0$. Заметим, что резонансная теория (рис. 1*а*) дает хорошее согласие с прямым численным расчетом уравнения (1) (рис. 1*б*), что позволяет качественно объяснить формирование интерференционной картины при различных значениях импульса. Положение резонансных пиков определяется условием (6) (при $\omega \gg \Delta$). Как отмечалось выше, при малых амплитудах ($A \ll \varepsilon_0, \omega, \Delta$) управляющего импульса имеет место обычная раби-динамика системы и вероятность перехода не чувствительна к относительной фазе и запаздыванию импульса. Однако при увеличении амплитуд импульса обобщенная частота Раби Ω, пропорциональная сумме произведений функций Бесселя $J_n(A/\omega)$ и $J_m(\gamma A/2\omega)$, взятых с разными фазами, $\exp\{-i[(A/\omega)\sin(\theta+\varphi) - n(\theta+\varphi)]\}$ и $\exp\{i[(\gamma A/2\omega)\sin(2\varphi) - 2m\varphi]\}$, оказывается чувствительной к значению относительной разности фаз θ. В то же время, частота Раби Ω не зависит от общей фазы φ импульса, так как учитывается запаздывание импульса как целого на время $t_0 = \varphi/\omega$, что продемонстрировано на рис. 1*а*.

4. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

В сильном поле введем адиабатические состояния $|\chi_\pm(t)\rangle$, подчиняющиеся уравнению

$$H(t)|\chi_\pm(t)\rangle = E_\pm(t)|\chi_\pm(t)\rangle, \qquad (8)$$

в которых кубит может находиться с энергиями

$$E_\pm(t) = \pm 0.5\sqrt{\varepsilon^2(t) + \Delta^2}.$$

Раскладывая волновую функцию по полному набору адиабатических состояний («мгновенных» собственных функций) $H(t) = a_+(t)|\chi_+(t)\rangle + a_-(t) \times |\chi_-(t)\rangle$, получим

$$i\frac{\partial}{\partial t}|A(t)\rangle = H_A(t)|A(t)\rangle, \quad |A(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$H_A(t) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2(t) + \Delta^2}\sigma_z \pm \frac{\Delta}{\varepsilon^2(t) + \Delta^2} \times \frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t}\sigma_y\right) \qquad (10)$$

— гамильтониан системы в адиабатическом представлении (знак в выражении (10) выбирается в зависимости от начальных условий на функции $|\chi_\pm\rangle$ [16]). Если неадибатические слагаемые малы, то вторым слагаемым в уравнении для волновой функции (10) можно пренебречь и решения ведут себя как

$$\sim \exp\left\{\pm\frac{i}{2}\int E_\pm(t)\,dt\right\},$$

т. е. фазы волн целиком определяются адиабатическими уровнями, которые сильно меняются при изменении поля.

Следовательно, на отрезках времени, когда выполнены условия адиабатичности, эволюция системы представляется диагональной матрицей (определяемой первым слагаемым в выражении (10)):

$$U_a = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\int\sqrt{\varepsilon^2(t)+\Delta^2}\,dt} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\int\sqrt{\varepsilon^2(t)+\Delta^2}\,dt} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Адиабатическое приближение нарушается в те моменты времени, когда происходят сближения энергетических уровней $E_+(t)$ и $E_-(t)$. В этом случае становится существенным второе слагаемое в формуле (10) и имеют место переходы Ландау–Зинера, темп которых контролируется видом управляющего поля. В моменты сближения уровней t_0 на коротких промежутках времени $t - t_0$, которые при линейном сближении $\varepsilon(t) = v(t - t_0)$ уровней оценивается как $t - t_0 \sim \Delta/v$. При этом, согласно [11], элементы матрицы эволюции U_{LZ} выражаются через функции параболического цилиндра. В случае нелинейного сближения

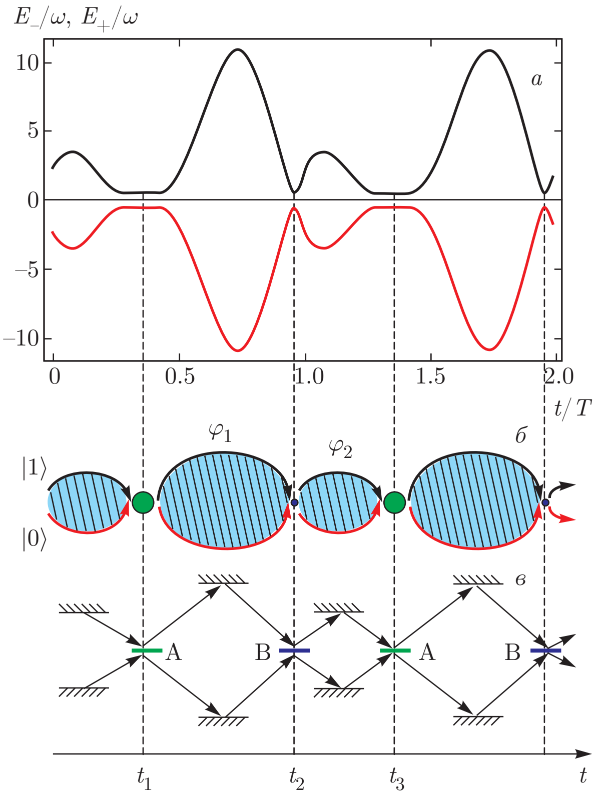

Рис. 2. Адиабатические уровни энергии кубита $E_\pm(t)$ (*а*); схема траекторий адиабатических волновых функций кубита (*б*); схема двухзеркального интерферометра Маха–Цендера (*в*)

$\varepsilon(t) = \alpha(t - t_0)^n$, которое возможно для сложных сигналов с несколькими частотами, появляется второе время: $t - t_0 \sim (\Delta/\alpha)^{1/n}$. Для этого случая эволюционная матрица U_n (оператор эволюции в области сближения уровней) находится только численными методами. В общем случае, когда на периоде есть сближения двух типов, эволюция системы описывается произведением матриц: $U_p = U_aU_nU_aU_{LZ}U_a$. Поскольку фазы волновых функций в моменты сближений сильно меняются, это может вызывать сильные флуктуации населенности кубита. Как показали расчеты, в случае бигармонического импульса разброс фаз приводит к квазислучайной динамике населенности кубита.

Таким образом, для сложного многочастотного сигнала путем варьирования параметров можно сформировать различные типы сближения адиабатических уровней $E_\pm$, которые определяются нулями функции $\varepsilon(t)$ и ее производных. Например, для бигармонического сигнала (2) на одном периоде поля возможны два типа квазипересечения адиабатических уровней: «затянутое» (эффективно в момент времени t_1 на рис. 2*а*) и линейное сближение (в момент t_2 на рис. 2*а*). Соответственно эффективно формируются две сильно различающиеся характерные площади (заштрихованные области на рис. 2*б*), где происходит набег фаз

$$\varphi_1 = \frac{1}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} E_\pm(t)\,dt$$

и, соответственно,

$$\varphi_2 = \frac{1}{\hbar}\int_{t_2}^{t_3} E_\pm(t)\,dt.$$

В моменты квазипересечений уровней происходит сильная интерференция состояний, определяемая фазами волновых функций. Можно сказать, что система эволюционирует по двум альтернативным путям, соответствующим собственным состояниям адиабатического гамильтониана (10), что соответствует распространению «лучей» в интерферометре Маха–Цендера [17], а переходы Ландау–Зинера между состояниями кубита подобны прохождению лучей через полупрозрачные зеркала (см. рис. 2*в*). Принципиальное отличие от монохроматического сигнала состоит в том, что в таком интерферометре необходимо использовать два типа зеркал (A и B, как показано на рис. 2*в*), положение которых зависит от нулей импульсной функции поля $\varepsilon(t)$. При этом количество участков сближения траекторий и величины фаз волновых функций сильно зависят от относительной фазы θ и амплитуды γ смешиваемых компонент импульсов.

5. МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ

Как следует из качественного анализа, проведенного выше на основе приближения вращающейся волны (обобщенной теории Раби) и адиабатического приближения, населенность кубита в случае воздействия на него импульса сложной формы чувствительна как к относительной, так и к абсолютной фазам смешиваемых импульсов, поскольку изменение фаз меняет темп переходов Ландау–Зинера, а следовательно, населенность кубита.

В реальных условиях эксперимента необходимо учитывать влияние шумов, которые обусловлены взаимодействием кубита с резервуаром. Если выбрать бозонную модель резервуара, то уравнение для оператора матрицы плотности ρ кубита (в борн-марковском приближении [14]) записывается в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -i\,[H(t),\rho] + \frac{\Gamma_\phi}{2}\,(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho) + \\ + \frac{\Gamma_e}{2}\,(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-)\,, \quad (12)$$

где скорость Γ_ϕ характеризует процесс затухания фазы (дефазировка, dephasing), а Γ_e отвечает за темп потери энергии [14]. Отметим, что при анализе уравнения (12) может быть использован переход во вращающуюся систему координат, как это сделано при получении выражения (5). Такое преобразование будет соответствовать переопределению времен релаксаций, для монохроматического поля подобный анализ проделан в работах [21, 22].

Для численных расчетов матрицу плотности удобно представить в виде $\rho = (I + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{R})/2$, где I — единичная матрица, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ — матрицы Паули ($\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$). Уравнение (12) эквивалентно системе уравнений для компонент вектора $\mathbf{R} = \mathtt{Tr}(\boldsymbol{\sigma}\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_x}{\partial t} &= \varepsilon(t)R_y - 2\Gamma_\phi R_x - \frac{\Gamma_e}{2}R_x, \\ \frac{\partial R_y}{\partial t} &= -\varepsilon(t)R_x + \Delta R_z - 2\Gamma_\phi R_y - \frac{\Gamma_e}{2}R_y, \\ \frac{\partial R_z}{\partial t} &= -\Delta R_y - \Gamma_e R_z - \Gamma_e. \end{aligned} \quad (13)$$

Начальное состояние (3) запишется в виде

$$\mathbf{R}(0) = \left\{ \frac{2\Delta(K-\varepsilon_0)}{\Delta^2 + (K-\varepsilon_0)^2}, 0, -1 + \right. \\ \left. + \frac{2\Delta^2}{\Delta^2 + (K-\varepsilon_0)^2} \right\}, \quad (14)$$

а вероятность перехода в состояние $|\beta\rangle$, определенное выражением (4), будет записываться в виде $P_{\alpha\to\beta}(t) = (1 - R_z(t))/2$.

Как мы уже отмечали, самые короткие времена в системе связаны с переходами Ландау–Зинера, которые обычно существенно короче периода T. Время фазовой релаксации $T_\phi = 1/\Gamma_\phi$ может быть больше или порядка периода поля, тогда как время энергетической релаксации $T_e = 1/\Gamma_e$ обычно может превышать T_ϕ на несколько порядков [4, 6, 8, 13]. В то же время длительность управляющего импульса $\tau = NT$ (в численных расчетах N = 10–100) может быть как меньше, так и больше T_ϕ. Импульсы, длительность которых превышает T_ϕ и T_e, не представляют интереса с точки зрения мезоскопики, поскольку на таких временах происходит «самоусреднение» населенности кубита, которая слабо флуктуирует. Мезоскопические эффекты будут особенно заметны, когда выполнено неравенство $T \ll \tau \ll T_\phi$.

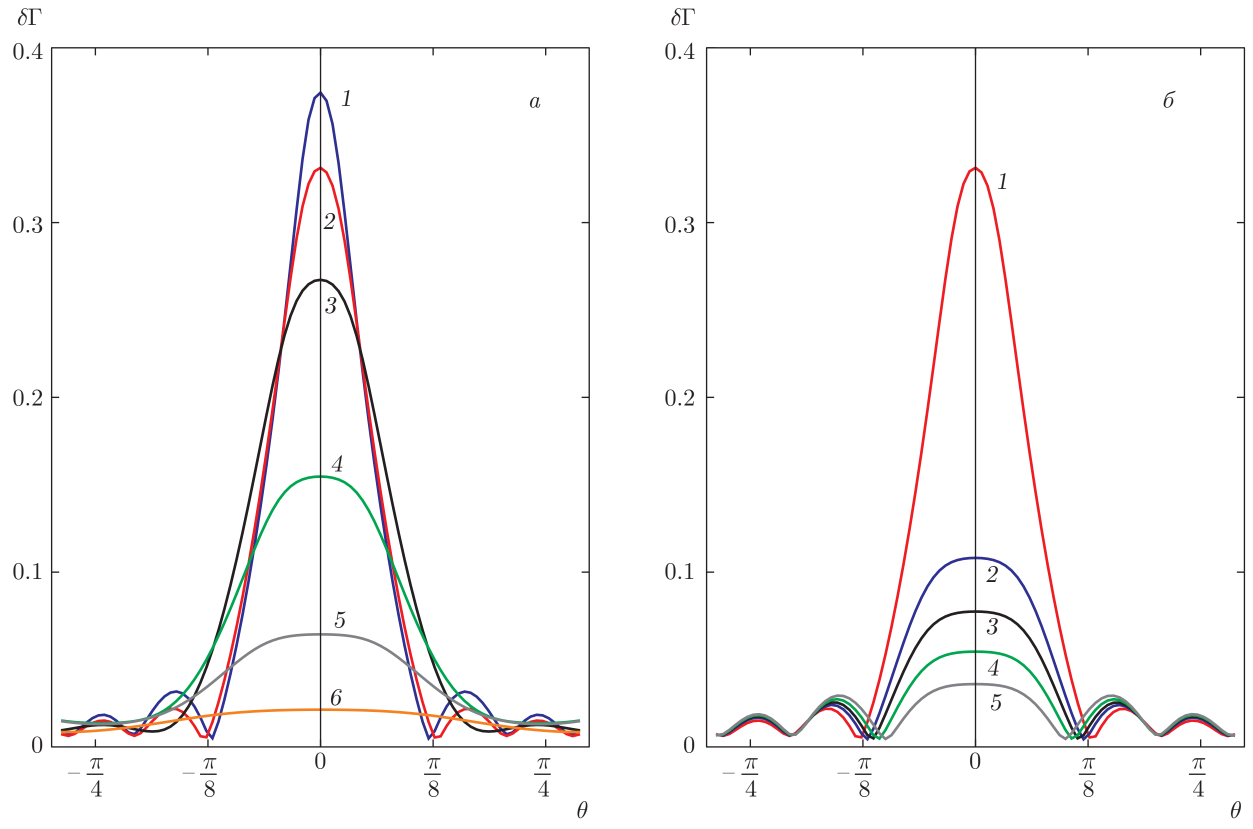

Рис. 3. *а*) Зависимости $\delta\Gamma$ от относительной фазы импульсов θ для $\Gamma_e/\omega = 0.001$ и при различных параметрах фазового шума: кривая *1* — $\Gamma_\phi/\omega = 0.001$, *2* — 0.005, *3* — 0.025, *4* — 0.075, *5* — 0.1, *6* — 0.5. *б*) Влияние энергетического шума на флуктуации для $\Gamma_\phi/\omega = 0.005$: кривая *1* — $\Gamma_e/\omega = 0.001$, *2* — 0.002, *3* — 0.003, *4* — 0.004, *5* — 0.005. Параметры системы: $\Delta/\omega = 0.5$, $A/\omega = 29.83$, $\varepsilon_0/\omega = 5$, $\gamma = 0.25$, $\tau = 10T$

Приведем результаты численного моделирования, подтверждающие проведенные выше аргументы относительно мезоскопических флуктуаций. Прежде всего, путем численного решения уравнений (13) для матрицы плотности исследуем логарифм скорости межуровневых переходов

$$\Gamma(\tau) = -\ln\left[P_{\alpha\to\beta}(\tau)\right]/\tau \tag{15}$$

в зависимости от относительной фазы θ составляющих компонент импульсов (2) и длительности импульса τ, а также от параметров, ответственных за фазовую Γ_ϕ и энергетическую Γ_e релаксации. Случайный ансамбль формировался путем генерирования систем с различным временем прихода импульса (равновероятным на периоде импульса). Количественная мера флуктуаций физической величины (15) характеризовалась стандартным отклонением $\delta\Gamma = \sqrt{\langle\Gamma^2\rangle - \langle\Gamma\rangle^2}$, где $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по всем возможным временам прихода импульса.

На рис. 3 приведены зависимости $\delta\Gamma$ от относительной фазы импульсов, длительность которых равна $\tau = 10T$. Как следует из (1) и (2), при $\theta \neq 0$ гамильтониан неинвариантен относительно преобразования $t \to -t$. Это означает, что фазы волновой функции, описывающей волны вперед и назад по времени, могут сильно различаться, поэтому фазовая когерентность будет подавлена. Следовательно, вблизи $\theta = 0$ флуктуации величины Γ максимальны, что видно на рис. 3*а*. На рис. 3*а* также продемонстрировано, что если время T_ϕ уменьшается и приближается к длительности импульса, то размах флуктуаций уменьшается. Аналогично, уменьшение характерного времени энергетической релаксации T_e приводит к резкому уменьшению амплитуды флуктуаций (рис. 3*б*). Следует отметить, что значение максимума стандартного отклонения $\delta\Gamma$ при увеличении потерь энергии уменьшается быстрее, чем при процессах сбоя фаз. Данные различия обусловлены тем, что дефазировка приводит к изменению только недиагональных элементов матрицы плотности, отвечающих за когерентность, в отличие от энергетического шума, который влия-

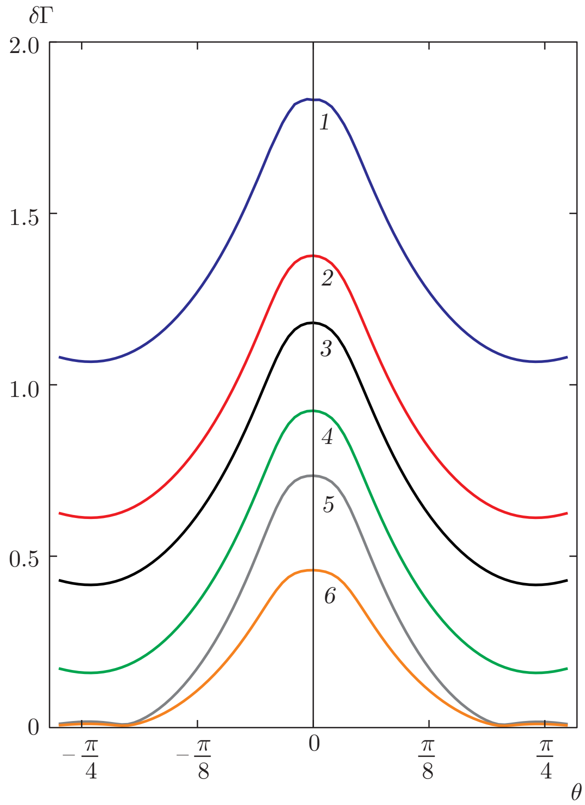

Рис. 4. Влияние параметра туннельного расщепления кубита Δ на зависимости флуктуаций $\delta\Gamma$ населенности при изменении относительной фазы θ составляющих компонент импульса: кривая *1* — $\Delta/\omega = 0.1$, *2* — 0.2, *3* — 0.3, *4* — 0.4, *5* — 0.5, *6* — 0.75. Остальные параметры системы и шума аналогичны тем, что представлены на рис. 3*а* для кривой *2*

ет и на диагональные элементы, описывающие населенности энергетических уровней. Соответственно, скорость релаксации компонентов, отвечающих за когерентность в системе (недиагональных элементов), вдвое ниже, к тому же, во время пересечения энергетических уровней (переходов Ландау–Зинера) наблюдается частичное восстановление когерентности, следовательно, амплитуда максимума стандартного отклонения при увеличении параметра фазового шума Γ_ϕ (рис. 3*а*) убывает медленнее, чем для случая вариации энергетического шума Γ_e (рис. 3*б*). Можно сказать, что параметр T_ϕ аналогичен обратной длине упругого рассеяния, а параметр T_e играет роль, аналогичную длине неупругой релаксации. Отметим, что подобные зависимости наблюдались в недавнем эксперименте с джозефсоновским кубитом [6].

Исследуем влияние туннельного расщепления на характер мезоскопических флуктуаций $\delta\Gamma$. Как видно на рис. 4, флуктуации падают при увеличении туннельной прозрачности. Это связано с влиянием параметра Δ на времена туннелирования (см. оценки, приведенные выше) и амплитуду перехода. Отметим, что указанный эффект не может быть получен в рамках теории возмущений [8] и не исследован экспериментально в работе [6].

Проведенные выше расчеты соответствуют проективному измерению состояний с заданным направлением тока (4). При выборе конечного возбужденного состояния населенность кубита будет зависеть от параметра Δ. Расчеты показали, что для параметра $\Delta/\varepsilon_0 = 0.1$ различие в поведении населенностей составляет несколько процентов.

Изменение стандартного отклонения $\delta\Gamma$ от длительности импульса τ демонстрирует рис. 5*а*. Как видно на графике, сильные мезоскопические флуктуации наблюдаются на временах меньших времени сбоя фаз ($\tau < T_\phi$), тогда как на больших временах ($\tau > T_\phi$) зависимость от относительной фазы сигнала θ полностью подавлена (см., например, кривую *5* на рис. 5*а* для $\tau = T_\phi = 200T$). Это связано с тем, что на временах больших длин когерентности наблюдается размешивание по фазам волновой функции кубита и нельзя уже различить состояния в зависимости от запаздывания импульсов.

Численные эксперименты показали, что недиагональные элементы матрицы плотности убывают, как правило, экспоненциально, т. е. максимум стандартного отклонения убывает по следующему закону: $\delta\Gamma_{max} \sim e^{-\Gamma_\phi t}$, следовательно, логарифм данной величины является линейной функцией длительности сигнала, как и показано на рис. 5*б*. Видно, что полученные численно значения $\delta\Gamma_{max}$ (точки на рис. 5*б*) на основе решения уравнения (12) хорошо «ложатся» на штриховые линии. Данный факт позволяет говорить об аналогии с мезоскопикой, состоящую в том, что зависимость флуктуаций $\delta\Gamma$ населенности кубита от длительности импульса подобна поведению флуктуаций проводимости проволоки с изменением ее длины.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию численным результатам. На временах меньших времени фазовой релаксации рассмотрим эволюцию чистого состояния. Пропагатор кубита U обладает групповыми свойствами и принадлежит группе $SU(2)$. Согласно [18], такой оператор можно «параметризовать» тремя действительными параметрами:

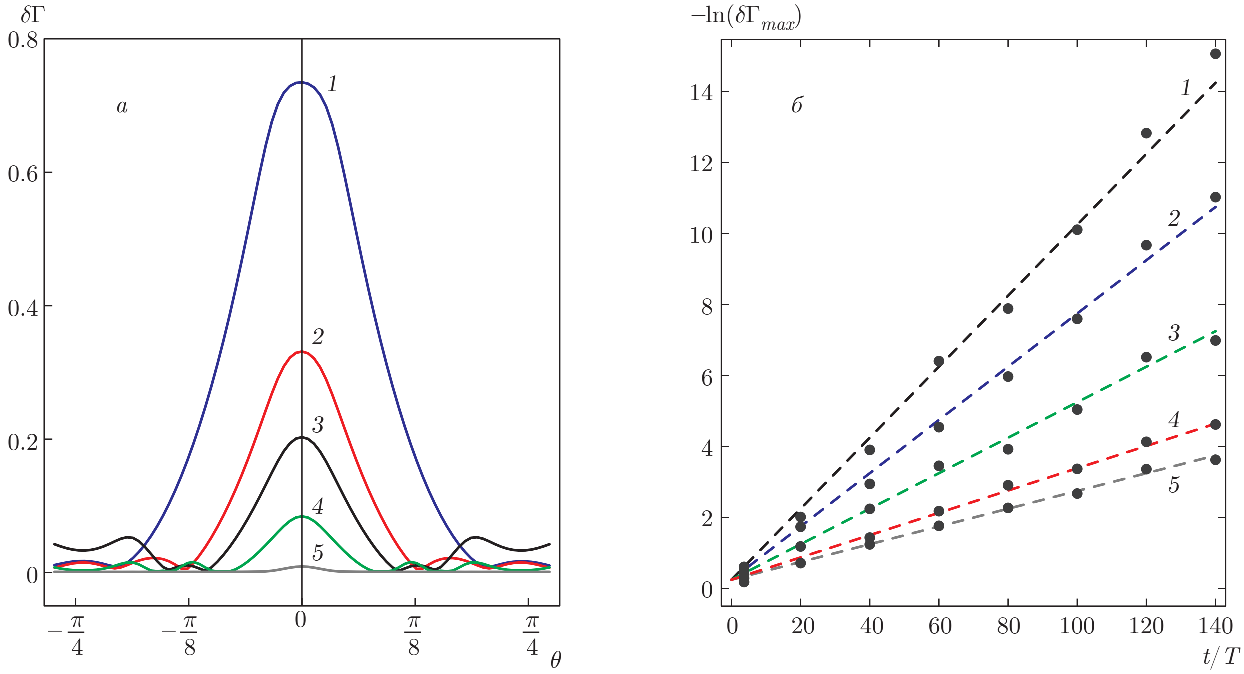

Рис. 5. *а*) Зависимости флуктуациий $\delta\Gamma$ от относительной фазы импульса θ при $\Gamma_\phi/\omega = 0.005$: кривая *1* — $\tau = 5T$, *2* — $10T$, *3* — $50T$, *4* — $100T$, *5* — $200T$. *б*) Влияние на высоту пика нормального отклонения $\delta\Gamma$ времени действия импульса. Точки — численно рассчитанные значения, а штриховые линии — качественный закон убывания: кривая *1* — $\Gamma_\phi/\omega = 0.1$, *2* — 0.075, *3* — 0.05, *4* — 0.025, *5* — 0.005. Параметры системы аналогичны тем, что представлены на рис. 2*а*

$$U = \\ = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left\{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}\right\} & i\sin\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left\{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}\right\} \\ i\sin\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left\{\frac{i(\beta-\alpha)}{2}\right\} & \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left\{\frac{-i(\alpha+\beta)}{2}\right\} \end{pmatrix} \tag{16}$$

— углами Эйлера, которые зависят от времени. Для чистого состояния можно ввести вектор Блоха:

$$\mathbf{R}(t) = \langle\psi(t)|\boldsymbol{\sigma}|\psi(t)\rangle, \quad \mathbf{R}^2 = 1.$$

Например, если смещение велико $\Delta \ll \varepsilon_0$, то начальное положение $\mathbf{R}(0) = \{0, 0, -1\}$ соответствует южному полюсу сферы Блоха $\mathbf{R}^2 = 1$. При малой диссипации в процессе эволюции углы α и β определяются значением пропагатора U в текущий момент времени, а вектор

$$\mathbf{R}(t) = \{\sin(\chi(t))\cos(\alpha(t)), \\ \sin(\beta(t))\sin(\alpha(t)), \cos(\chi(t))\}$$

вращается по сфере Блоха. Вероятность перехода, измеряемая в эксперименте, получается путем повторения огромного числа измерений. Поэтому вероятность перехода должна быть усреднена по ансамблю реализаций случайных фаз (в нашем случае по случайной фазе φ). Поскольку мы рассматриваем динамику системы на временах $\tau < T_\phi$, уходы по углам $\chi(t)$, $\alpha(t)$ и β малы и определяются диффузией вблизи полюса сферы. В то же время, проводимость проволоки конечной длины также описывается двумя углами, но в отличие от населенности кубита, изображающая состояние системы точка лежит на гиперболоиде [19, 20]. Следовательно, в задаче Андерсона фазовое пространство системы представляет собой некомпактное пространство — гиперболоид. Иными словами, в модели Андерсона оператор эволюции системы U (функция длины) принадлежит некомпактной группе $SU(1,1)$ [18]. Можно показать, что когда длина проводника превышает длину свободного пробега, из-за неустойчивости движения по гиперболоиду сопротивление экспоненциально возрастает. При небольших длинах проволоки гиперболические функции можно разложить в ряд, считая угол χ малым. Это означает, что в «малом» для коротких проволок или малых длин импульса флуктуации сопротивления подобны флуктуациям населенности во временной задаче. Для длинных же проволок и импульсов большой длительности поведение проводимости и населенности кардинально различаются.

6. ВЫВОДЫ

Таким образом, на временах, меньших времени фазовой T_ϕ и энергетической T_e релаксаций динамика населенности кубита демонстрирует поведение, которое аналогично поведению кондактанса проволоки в зависимости от ее длины. В случае кубита управляющее переменное поле создает квазислучайный потенциал, а нарушающая обратимость по времени фаза смешиваемых сигналов действует подобно магнитному полю. При этом переходы Ландау – Зинера между состояниями кубита имитируют процессы, аналогичные процессам рассеяния электрона на примесных центрах. Изменение параметров сигнала приводит к сильным мезоскопическим флуктуациям населенности кубита. Следует отметить, что «реализация» импульса заранее заданной формы, а также смену реализации поля легко осуществить путем программирования импульсного генератора [4], поэтому во временной области проще наблюдать различные локализационные и мезоскопические эффекты, связанные с изменением формы управляющей функции. Например, в двухчастотном поле с несоизмеримыми периодами легко исследовать динамику в квазипериодическом поле путем моделирования временного потенциала.

Один из авторов (А. М. С.) весьма признателен Ю. К. Лозовику за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-57-51045 НИФ-а, 16-07-01012а) и в рамках проекта № 2696 госзадания Министерства образования и науки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Гантмахер, *Электроны в неупорядоченных средах*, Физматлит, Москва (2013).

2. P. A. Lee, A. D. Stone, and H. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1986).

3. J. Q. You and F. Nori, Phys. Today **58**, 42 (2005); Nature **474**, 589 (2011).

4. J. Bylander, M. S. Rudner, A. V. Shytov, S. O. Valenzuela, D. M. Berns, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and W. D. Oliver, Phys. Rev. B **80**, 220506 (2009).

5. М. В. Денисенко, А. М. Сатанин, Известия РАН, серия физич. **75**, 700 (2011).

6. S. Gustavsson, J. Bylander, and W. D. Oliver, Phys. Rev. Lett. **110**, 016603 (2013).

7. A. M. Satanin, M. V. Denisenko, A. I. Gelman, and F. Nori, Phys. Rev. B **90**, 104516 (2014).

8. D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, A. V. Shytov, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett. **97**, 150502 (2006).

9. Х.-Ю. Штокман, *Квантовый хаос*: *введение*, Физматлит, Москва (2004).

10. L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).

11. C. Zener, Proc. R. Soc. A **137**, 696 (1932).

12. S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Phys. Rep. **492**, 1 (2010).

13. D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Nature **455**, 51 (2008).

14. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).

15. S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin, and F. Nori, Phys. Rev. A **75**, 063414 (2007).

16. J. P. Devis and P. Pechukas, J. Chem. Phys. **64**, 3129 (1976).

17. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).

18. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представления групп*, Наука, Москва (1965).

19. F. Peres, M. Revzen, and A. Ron, Phys. Rev. B **24**, 7463 (1981).

20. S. Yu. Potapenko and A. M. Satanin, Phys. Stat. Sol. (b) **129**, 805 (1985).

21. J. Hauss, A. Fedorov, S. Andre, V. Brosco, C. Hutter, R. Kothari, S. Yeshwanth, A. Shnirman, and Gerd Schõn, New J. Phys. **10**, 095018 (2008).

22. J. P. Pecola, V. Brosco, M. Mottonen, P. Solinas, and A. Shnirman, Phys. Rev. Lett. **105**, 030401 (2010).