

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ВОЛНОВЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н. Н. Романова^a, О. Г. Чхетиани^{a,b}, И. Г. Якушкин^a*

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

^b *Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 марта 2015 г.

Рассмотрена задача о развитии сдвиговой неустойчивости в трехслойной среде, моделирующей течение стратифицированной несжимаемой жидкости. Уравнения гидродинамики решаются путем разложения гамильтониана по малому параметру. Получены и численно решены уравнения для трех взаимодействующих волн, одна из которых является неустойчивой. Показано, что трехволновое взаимодействие стабилизирует неустойчивость. При этом возможно возникновение различных режимов динамики системы, включая стохастические, зависящие от значения одного из инвариантов, присутствующих в задаче. Указано, что рассмотренный сценарий развития неустойчивости отличается от рассмотренного ранее сценария другого типа, когда трехволновое взаимодействие не стабилизирует неустойчивость. Кратко рассмотрен вопрос о взаимодействии волновых пакетов.

DOI: 10.7868/S0044451016050138

1. ВВЕДЕНИЕ

Для многих задач гидродинамики, геофизики, физики плазмы, астрономии важное значение имеет изучение развития различного рода волновых неустойчивостей [1–4]. Хотя условия неустойчивости могут быть получены в результате анализа задач линейного приближения, характер режимов, возникающих при росте начальных возмущений волновых полей, как правило, требует учета нелинейных взаимодействий между фоновыми течениями и волнами различных типов. Наиболее известный механизм нелинейной стабилизации развивающейся неустойчивости связан с теорией Гинзбурга–Ландау. Согласно этому механизму, к стабилизации приводит кубическая нелинейность, присутствующая в описании исследуемых явлений. Благодаря кубической нелинейности часть энергии неустойчивой волны передается среднему течению, что выводит систему из неустойчивого состояния. Вместе с тем, такой механизм не является единственным. К стабилизации

может приводить и квадратичная нелинейность, которая при определенном типе дисперсионных соотношений для существующих в системе волн ведет к неустойчивому трехволновому взаимодействию. В этом случае энергия волны передается волнам другого типа, находящимся с ней в условиях трехволнового резонанса. Подобный механизм первоначально был исследован в работах Рабиновича и его соавторов [4, 5]. В этих работах было показано, что учет трехволнового взаимодействия в том случае, если одна из волн является неустойчивой, может приводить к различным режимам, включая стабилизацию и появление хаотических колебаний. Однако в указанных работах неустойчивость и ее стабилизация возникали благодаря достаточно искусственно введению в правые части уравнений для амплитуд трех волн дополнительных членов, описывающих форсинг и диссипацию. Более соответствующая физике постановка задачи была использована в работе [6], где неустойчивая волна описывалась двумя уравнениями для близких по частоте волн. В этой и последовавшей за ней работе [7], на примере взаимодействующих волн Россби (океанических или атмосферных), было показано, что в определенных условиях трехволновые взаимодействия действительно

* E-mail: ochkheti@mx.iki.rssi.ru, ochkheti@gmail.com

приводят к стабилизации неустойчивости и к возникновению периодических колебаний трехволнового типа.

Детальный анализ способов описания трехволновых взаимодействий для задачи о развитии гидродинамической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца был предпринят в работе [8]. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца является известным механизмом, широко используемым для интерпретации различных явлений, связанных с генерацией волн как в природных (атмосфера, океан), так и лабораторных условиях [1, 2]. Нелинейные, в том числе трехволновые взаимодействия при этом приводят к появлению возмущений значительно более крупного масштаба, чем непосредственно связанные с неустойчивостью. В простейшем случае неустойчивые волны возникают на границе двух сред с различными параметрами, если сдвиг по скорости базового течения в этих средах достаточно велик. На основе применения гамильтонова формализма в [8] было показано, что трехволновое взаимодействие неустойчивой и двух устойчивых волн на границе раздела может возникать по двум причинам и приводит к двум различным результатам. Так, на резких границах (типа граница атмосфера–океан) к трехволновому резонансу приводит учет капиллярных волн (поверхностного натяжения). В других случаях сказывается размытость границы и учет конечности размеров переходного сдвигового слоя, что, как правило, характерно для атмосферных задач. Интересным оказался тот факт, что, хотя возникающие в этих двух случаях системы и достаточно похожи (шесть уравнений при трех инвариантах), на самом деле они обладают глубокими различиями, являющимися следствием различной структуры гамильтониана и сказывающимися на окончательной форме уравнений. Если в первом случае неустойчивой является дочерняя волна, то во втором — это волна материнская (распадающаяся на две дочерние). Вследствие этого, если в первом случае амплитуды двух устойчивых волн связаны законом сохранения энергии, то во втором случае — законом сохранения числа «фотонов» (на языке оптики). Тем самым две полученные в указанной работе системы описывают два типа развития неустойчивости в условиях трехволнового взаимодействия. Хотя в работе [8] исследована конкретная физическая модель, полученные результаты имеют универсальный характер и справедливы в ситуациях, когда происходит взаимодействие волн с положительной и отрицательной энергиями (взаимодействие волна–пучок в плазме и т. д.) [1–4]. Более подробный анализ си-

стемы первого типа в работе [9] показал, что в этом случае может возникать хаотический режим, который однако приводит лишь к временной стабилизации неустойчивости. В настоящей работе мы обращаемся к системе второго типа (суммарная энергия двух устойчивых волн не сохраняется), которая, как упоминалось выше, была рассмотрена ранее [6, 7]. Результаты в этих работах, однако, были получены при условии дополнительного фазового синхронизма, когда система четырех уравнений обладает тремя инвариантами, т. е. допускает только простейшие режимы. В более общем случае подобного взаимодействия мы имеем шесть уравнений при трех инвариантах, что в принципе может приводить к разнообразным режимам, включая хаотические (см., например, [10]). Исследование таких режимов, зависящих от сдвига фазы между волнами триплета, является основной целью настоящей работы. Двумерное в плоскости xz течение идеальной несжимаемой стратифицированной в поле силы тяжести жидкости описывается системой уравнений для полей скорости V плотности ρ и давления P :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla P - \rho \mathbf{g} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$u(x, z)$, $w(x, z)$ — компоненты скорости течения. Для стационарного течения $u = U(z)$, $w = 0$, $\rho = \rho(z)$. Вихревой характер течения позволяет для его описания вместо скорости использовать завихренность $\Omega = \text{rot } \mathbf{V} = \Omega \mathbf{e}_y$. Используя приближение Буссинеска, т. е. при $|\rho - \rho_0| \ll \rho_0 = \text{const}$, уравнение для завихренности получаем в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{4}$$

Горизонтальная и вертикальная компоненты скорости выражаются как

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где функция тока Ψ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta \Psi = -\Omega$ и выражается через завихренность, как

$$\Psi = -\iint \Omega(x', z') G(x - x', z - z') dx' dz',$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik(x-x') - |k(z-z')|)}{|k|} dk$$

— функция Грина двумерного оператора Лапласа. При использовании обобщенных функций система интегродифференциальных уравнений (1)–(4) описывает как непрерывные, так и слоистые среды [11]. Далее перейдем к полулагранжевым координатам, после чего уравнения приобретают гамильтонову форму, наиболее удобную для анализа межволновых взаимодействий разного порядка. Определим лагранжеву координату h с помощью уравнения поверхности, на которой

$$z = s(h, x) = h + \eta(h, x).$$

В координатах (h, x) система уравнений для переменных (s, Ω) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) \frac{\partial s}{\partial h} = N^2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = w, \quad (6)$$

где

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial h}$$

— квадрат частоты Брента–Вяйсяля. Вместо уравнения для Ω удобно использовать уравнение для плотности завихренности в полулагранжевых координатах

$$\Omega' = \Omega \frac{\partial s}{\partial h},$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \frac{\partial (u\Omega')}{\partial x} = N^2 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7)$$

Гамильтониан (энергию системы, нормированную на усредненную плотность) представим в виде суммы кинетической и потенциальной составляющих:

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{2} \int \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right) dx dz = \\ &= -\frac{1}{2} \iint \Psi \Delta \Psi dx dz = -\frac{1}{2} \iint \Omega'(x, h) \Omega'(x', h') \times \\ &\quad \times G \left(\begin{matrix} x - x' \\ z - z' \end{matrix} \right) dx dx' dh dh', \quad (8) \end{aligned}$$

$$H_p = \iint g z \frac{\rho}{\rho_0} dx dz = \frac{1}{2} \iint N^2 s^2 dx dh. \quad (9)$$

Вычисление вариационных производных $\delta H / \delta \Omega'$ и $\delta H / \delta s$ (см. [11]) показывает, что система (5)–(7) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta s} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta \Omega'} \right). \quad (11)$$

Переходя к переменным (Φ, η) , непосредственно связанным с известными переменными Клебша:

$$\eta = s - h,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Omega' - v(h),$$

где $v(h) = dV(h)/dh$ — фоновая завихренность, получаем систему уравнений Гамильтона в стандартном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Phi}. \quad (13)$$

Чтобы получить уравнения с учетом квадратичной нелинейности, описывающие трехволновое взаимодействие, необходимо учитывать два первых члена разложения Гамильтониана H_2 и H_3 по переменным (η, Φ) .

В разд. 2 рассматривается задача о нелинейных волнах в трехслойной модели течения стратифицированной жидкости. Такая конкретная физическая модель позволяет наиболее простым образом получить уравнения, описывающие взаимодействия неустойчивой и двух устойчивых волн. В разд. 3 на основе качественного анализа и численного решения системы уравнений для волновых амплитуд рассматриваются основные возможные режимы трехволнового взаимодействия. Далее рассмотрен вопрос о взаимодействии волновых пакетов. В заключении содержится обсуждение результатов.

2. СДВИГОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим обобщенную задачу Кельвина–Гельмгольца, предполагая, что течение стратифицированной жидкости описывается трехслойной моделью [1]. Верхний и нижний слои простираются до бесконечности, а средний слой имеет толщину $2h_0$. В каждом слое плотность имеет постоянные значения: $\rho_0 + \Delta\rho$, ρ_0 , $\rho_0 - \Delta\rho$. В нижнем ($z < h_1$) и верхнем ($z > h_2$) слоях невозмущенное течение

имеет постоянные скорости U_0 и $-U_0$, а в среднем слое меняется по закону $U_0 - U_0(z + h_1)/h_0$. Основные параметры и переменные, входящие в гамильтониан, представимы в форме

$$N^2(h) = \sum_{j=1}^2 N_j^2 \delta(h - h_j), \quad (14)$$

$$\frac{dv}{dh} = \sum_{j=1}^2 v_j \delta(h - h_j), \quad (15)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 \Phi_j \delta(h - h_j), \quad \eta = \sum_{j=1}^2 \eta_j \delta(h - h_j).$$

Индексы $j = 1, 2$ соответствуют границам слоев.

$$N_1^2 = N_2^2 = \frac{g\Delta\rho}{\rho}, \quad v_1 = -v_2 = -v = -\frac{U_0}{h_0}.$$

Используя выражения (14), (15), проводя замену $\partial\Phi/\partial x = \partial\varphi/\partial x - \partial v\eta/\partial h$ и переходя к фурье-представлению, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi_j(k)}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta_j^*(k)} - i\frac{v_j}{k} \frac{\delta H}{\delta\varphi_j^*(k)}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\eta_j(k)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\varphi^*(k)}. \quad (17)$$

Запишем также основные члены разложения гамильтониана по степеням амплитуд волновых возмущений:

$$H_2 = \frac{1}{2} \int \sum_{j=1}^2 \frac{|k|}{2} \varphi_j^*(k) [\varphi_j(k) + s_j(k)] + 2ikV(h_j)\eta_j^*(k)\varphi_j(k) + [N^2 - V(h_j)]\eta_j(k)\eta_j^*(k) dk, \quad (18)$$

$$s_{1,2}(k) = \varphi_{2,1}(k) \exp(-|k(h_1 - h_2)|),$$

$$H_3 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \times \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[-ik_1\varphi_j(k_1) + \frac{1}{2}v_j\eta_j(k_1) \right] \eta_j(k_2)p_j(k_3) - \frac{v}{2} \left[\frac{1}{2}ik_1\varphi_j(k) - \frac{1}{3}v_j\eta_j(k_1) \right] \eta_j(k_2)\eta_j(k_3) \right\} \times \delta(k_1 + k_2 + k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (19)$$

$$p_1 = -iks_1, \quad p_2 = iks_2.$$

В линейном приближении имеем $H = H_2$ и из системы (16), (17) следует дисперсионное уравнение

$$D_1 D_2 - \mu = 0, \quad (20)$$

где

$$D_1 = \frac{[\text{Ri}|k'| - \text{sign}(k')(\omega' - k') - 2(\omega' - k')^2]}{\text{Ri}|k'| - \text{sign}(k')(\omega' - k')},$$

$$D_2 = \frac{[\text{Ri}|k'| + \text{sign}(k')(\omega' + k') - 2(\omega' + k')^2]}{\text{Ri}|k'| + \text{sign}(k')(\omega' + k')},$$

$$\mu = \exp(-4|k'|), \quad \text{Ri} = \frac{N^2 h_0}{U_0^2},$$

$$\omega' = \frac{\omega h}{U_0}, \quad k' = kh_0.$$

Выражения $D_i = 0$ описывают дисперсионные уравнения для колебаний каждой из границ, а коэффициент μ учитывает связь между границами, которая становится существенной при близости корней $D_i(\omega)$; Ri — число Ричардсона, основной физический параметр задачи. Решение биквадратного уравнения, следующего из (20), может быть приведено к виду

$$\omega_{1,2}^2 = A(k) - [A(k)^2 - B(k)]^{1/2}, \quad (21)$$

$$\omega_{4,3}^2 = A(k) + [A(k)^2 - B(k)]^{1/2}. \quad (22)$$

Здесь

$$\omega_1(k) = -\omega_2(k), \quad \omega_3(k) = -\omega_4(k),$$

$$2A(k) = |k|(\text{Ri} - 1) + 2k^2 + \frac{1}{4}(1 - \mu),$$

$$B(k) = \frac{1}{4}k^2(\text{Ri} + 1)^2(1 - \mu) - k^2|k|(\text{Ri} + 1) + k^4.$$

В формуле (20) и ниже штрихи у безразмерной величины k опущены. Частоты $\omega_{3,4}$ соответствуют более высокочастотным колебаниям системы как целого, а частоты $\omega_{1,2}$ более низкочастотным колебаниям, модулирующим толщину слоя. При отрицательных k собственные частоты определяются выражениями $\omega_i(-k) = -\omega(k)$. При значениях k , для которых $B(k) = 0$, на плоскости ω, k в точке $\omega = 0, k = k_0 \sim (1 + \text{Ri})/2$ происходит пересечение кривых, соответствующих двум низкочастотным модам, а при $|k - k_0| < \mu(k_0)/2k_0$ возникает интервал неустойчивости, ширина которого зависит от числа Ричардсона и достаточно мала при его значениях порядка единицы. Когда амплитуда неустойчивой моды растет, на нее начинают оказывать влияние взаимодействия между волнами, удовлетворяющими известным соотношениям синхронизма. Как показывает анализ, взаимодействующие моды связаны с низкочастотными ветвями дисперсионного уравнения.

В рассматриваемом случае основную роль играют триплеты, удовлетворяющие условиям

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \tag{23}$$

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3) = 0. \tag{24}$$

Если точка $k_{02} > 0$ соответствует неустойчивой моде, то точки k_{01} и k_{03} имеют разные знаки и принадлежат разным ветвям дисперсионного уравнения $\omega = \omega_{1,2}(k)$. При этом для дальнейшего анализа удобно будет выбрать

$$k_1 = k_{01} < 0, \quad k_2 = -k_{02} < 0, \quad k_3 = k_{03} > 0.$$

При этом $\omega(k_{01}) > 0, \omega(k_{03}) > 0$. Для удобства при описании нелинейного взаимодействия, следуя [12], представим вектор $\mathbf{d}(k) = \mathbf{d}^*(-k)$ с компонентами $(\varphi_{1,2}, \eta_{1,2})$ как сумму собственных векторов, соответствующих колебаниям с частотами $\omega_{1,2}(k)$:

$$\mathbf{d}(k) = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{Z}_j(k) a_j(k, t) + \mathbf{Z}_j^*(-k) a_j^*(-k, t)), \tag{25}$$

где

$$\mathbf{Z}_j = (\varphi_{01}(\omega_j, k), \eta_{01}(\omega_j, k), \varphi_{02}(\omega_j, k), \eta_{02}(\omega_j, k))$$

— нормализованные собственные вектора, соответствующие собственным значениям частоты ω_j :

$$\varphi_{01}(\omega_j, k) = \left(\frac{D_2}{L}\right)^{1/2}, \quad \eta_{01}(\omega_j, k) = \left(\frac{D_2}{L}\right)^{1/2} Q_1,$$

$$\varphi_{02}(\omega_j, k) = -\left(\frac{D_1}{L}\right)^{1/2},$$

$$\eta_{02}(\omega_j, k) = -\left(\frac{D_1}{L}\right)^{1/2} Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{k(\omega + k)}{\text{Ri } k - (\omega + k)}, \quad Q_2 = \frac{k(\omega - k)}{\text{Ri } k + (\omega - k)},$$

$$L = D_{1\omega} D_2 + D_{2\omega} D_1,$$

где $D_{i\omega} = dD_i/d\omega$ ($i = 1, 2$). Для значений k , лежащих в области неустойчивости, как показано в [8] в силу совпадения двух собственных частот следует использовать собственные вектора задачи с нулевой связью между границами, т.е. при $\mu = 0$. В этой области выражение (25) приобретает вид

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{Z}_1^*(-k) a_1^*(-k, t) + \mathbf{Z}_2(k) a_2(k, t). \tag{26}$$

Записанные через свои компоненты эти вектора имеют вид

$$\mathbf{Z}_j^*(-k) = \frac{1}{D_{1\omega}^{1/2}} \{1, 0, iQ_1\}, \tag{27}$$

$$\mathbf{Z}_2(k) = \frac{1}{D_{2\omega}^{1/2}} \{0, -1, -iQ_2\}. \tag{28}$$

После подстановки выражений (25)–(28) в формулу (18) квадратичный член разложения гамильтониана принимает вид

$$H_2 = \int \left\{ \sum_{j=1}^2 \omega_j a_j a_j^* + [f_1(k) a_1(-k) a_2^*(k) + f_2(k) a_1(k) a_2^*(k)] + \text{c.c.} \right\} dk, \tag{29}$$

где

$$f_1(k) = \frac{\mu(k)|k|}{2(D_{1\omega}(k)D_{2\omega}(-k))^{1/2}},$$

$$f_2(k) = \frac{\mu(k)|k|}{2(D_{1\omega}(k)D_{2\omega}(k))^{1/2}}.$$

Величины $f_i(k)$ определены в области пересечения мод и малы для значений k вблизи границы области неустойчивости. Для переменных a_j , как показано в работе [12], система (4) принимает вид

$$\frac{da_j}{dt} = -i \frac{\delta H}{\delta a_j^*}. \tag{30}$$

Взаимодействие между компонентами триплета описывается кубичным гамильтонианом, который после подстановки (25)–(28) в (19), как показано в [10]:

$$H_3 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \times \int \{ R(k_1, k_2, k_3) a_1(k_1, t) a_2^*(k_2, t) a_2(k_3, t) \times \delta(k_1 - k_2 + k_3) + \text{c.c.} \} dk_1 dk_2 dk_3, \tag{31}$$

где

$$R = \frac{1}{2} M_1 k_2 \mu(k_2) Q_1(\omega_2, k_2) \times \eta_{02}(\omega_1, k_1) \eta_{02}(\omega_2, k_3) \eta_{01}^*(\omega_2, k_2) + \frac{1}{2} M_2 k_3 \mu(k_3) Q_1(\omega_2, k_3) \eta_{02}(\omega_1, k_1) \times \eta_{02}^*(\omega_2, k_2) \eta_{01}(\omega_2, k_3) + \frac{1}{2} M_3 k_1 \mu(k_1) Q_1(\omega_1, k_1) \eta_{01}(\omega_1, k_1) \times \eta_{02}^*(\omega_2, k_2) \eta_{02}(\omega_2, k_3) + M_4 \eta_{02}(\omega_1, k_1) \eta_{02}^*(\omega_2, k_2) \eta_{02}(\omega_2, k_3).$$

$$\begin{aligned} M_1 &= v - ik[Q_2(\omega_1, k_1) + Q_2(\omega_2, k_3)], \\ M_2 &= v - ik[Q_2(\omega_1, k_1) + Q_2(\omega_2, k_3)], \\ M_3 &= v - ik[Q_2(\omega_2, k_3) - Q_2(\omega_2, k_2)], \\ M_4 &= \frac{v}{4} \left(M_1 + M_2 + M_3 + \frac{v}{2} \right). \end{aligned}$$

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И РЕЖИМЫ ТРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Предполагая, что выполняются резонансные соотношения (23), (24), зададим взаимодействующие компоненты волнового поля в виде узких волновых пакетов:

$$a_1(k, t) = A_1(k - k_{01}, t) \exp(-i\omega_1(k_{01})t) + A_4(k - k_{04}, t) \exp(i\omega_1(k_{02})t), \quad k_{04} = -k_{02}, \quad (32)$$

$$a_2(k, t) = A_2(k - k_{02}, t) \exp(-i\omega_2(k_{02})t) + A_3(k - k_{03}, t) \exp(-i\omega_2(k_{03})t), \quad (33)$$

где $|k - k_{0i}| \ll |k_{0i}|$. Уравнения взаимодействия пакетов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(k, t)}{dt} + ikv_1(k_{01})(k - k_{0i})A_1(k, t) &= \\ = -iW^* \int A_2(k + k_3, t)A_3^*(k_3, t) dk_3, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_2(k, t)}{dt} + ikv_2(k_{02})(k - k_{02})A_2(k, t) &= \\ = -isA_4^*(k, t) - iW^* A_1(k - k_3, t)A_3(k_3, t) dk_3, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_3(k, t)}{dt} + iv_2(-k_{03})(k + k_{03})A_3(k, t) &= \\ = -iW A_2(k - k_1, t)A_1^*(k_1) dk_3, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_4(k, t)}{dt} - ikv_1(-k_{04})(k + k_{04})A_4(k, t) &= \\ = -isA_2^*(k, t). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$s = f_1(k_{02}), \quad W = \frac{1}{2\pi} R(k_{01}, k_{02}, k_{03})$$

определены выражениями (29) и (31). Также использовано соотношение

$$\omega_i(k) - \omega_i(k_0) = v_i(k_0)(k - k_0), \quad v(k) = \frac{d\omega}{dk},$$

$$|k - k_0| \ll |k_0|.$$

Рассмотрим сначала взаимодействие волн на резонансных частотах, полагая

$$A_i = B_i \delta(k - k_{0i}), \quad i = 1, 2, 3, \quad A_4 = B_4^* \delta(k - k_{0i}).$$

Перейдем к переменным b_j, t' , которые вводятся формулами

$$B_{2,4} = \frac{b_{2,4}s}{W^*}, \quad B_{1,3} = \frac{b_{1,3}s}{(WW^*)^{1/2}}, \quad t' = ts.$$

Для переменных b_i из системы (16), (17) с учетом гамильтониана в виде (18), (29), и опуская штрих при переменной t , получаем уравнения

$$\frac{db_1(t)}{dt} + ib_2 b_3^* = 0, \quad (38)$$

$$\frac{db_3(t)}{dt} + ib_2 b_1^* = 0, \quad (39)$$

$$\frac{db_2(t)}{dt} + ib_4 + ib_1 b_3 = 0, \quad (40)$$

$$\frac{db_4(t)}{dt} - ib_2 = 0. \quad (41)$$

Эта система обладает следующими инвариантами:

$$I_1 = a^2 = b_1 b_1^* - b_3 b_3^*, \quad (42)$$

$$I_2 = b_2 b_2^* + b_1 b_1^* - b_4 b_4^*, \quad (43)$$

$$I_3 = c = \text{Re}(b_2 [b_1^* b_3^* + b_4^*]). \quad (44)$$

Как видно из (42)–(44), амплитуды двух устойчивых волн $b_{1,3}$ связаны условием типа сохранения числа фотонов, что указывает на то, что они являются «дочерними» по отношению к «материнской» неустойчивой волне, с которой они связаны условием сохранения энергии. Этот факт, как указывалось во Введении, существенно влияет на поведение системы. После перехода к показательной форме записи

$$b_j = r_j \exp(i\psi_j), \quad r_1 = a \text{ch}(\mu), \quad r_3 = a \text{sh}(\mu),$$

$$\theta_1 = \psi_2 - \psi_1 - \psi_3, \quad \theta_2 = \psi_2 - \psi_4$$

получаем систему пяти уравнений

$$\frac{d\mu}{dt} = r_2 \sin \theta_1, \tag{45}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2\mu \sin \theta_1 - r_4 \sin \theta_2, \tag{46}$$

$$\frac{dr_4}{dt} = -r_2 \sin \theta_2, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} = & 2r_2 \operatorname{cth} 2\mu \cos \theta_1 - \\ & - \frac{a^2}{2r_2} \operatorname{sh} 2\mu \cos \theta_1 - \frac{r_4}{r_2} \cos \theta_2, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_2}{dt} = & -\frac{r_2}{r_4} \cos \theta_2 - \\ & - \frac{a^2}{2r_2} \operatorname{sh} 2\mu \cos \theta_1 - \frac{r_4}{r_2} \cos \theta_2, \end{aligned} \tag{49}$$

с двумя инвариантами

$$I_2 = r_2^2 - r_4^2 + \frac{a^2}{2} \operatorname{ch} 2\mu, \tag{50}$$

$$I_3 = c = r_2 \left[\frac{a^2}{2} \operatorname{sh}(2\mu) \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_2 \right]. \tag{51}$$

Используя инвариант I_3 , получаем уравнения для угловых переменных в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{c}{r_2^2}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= 2r_2 \operatorname{cth} 2\mu \cos \theta_1 - \frac{c}{r_2^2}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\frac{r_2}{r_4} \cos \theta_2 - \frac{c}{r_2^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим величины

$$\operatorname{sh} 2\mu \cos \theta_1 = C_1 = \operatorname{sh} 2\mu_0, \tag{52}$$

$$r_4 \cos \theta_2 = C_2 = r_{40}. \tag{53}$$

Из выражения для третьего инварианта следует, что они связаны соотношением

$$\frac{a_2}{2} C_1 + C_2 = \frac{c}{r_2}.$$

Для этих величин имеем уравнения

$$\frac{dC_1}{dt} = \operatorname{sh} 2\mu \sin \theta_1 \frac{c}{r_2^2}, \tag{54}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = r_4 \frac{c}{r_2^2} \sin \theta_2. \tag{55}$$

Как мы видим, при $c = 0$ эти величины сохраняются, по крайней мере, всюду, кроме точки $r_2 = 0$. При малых c их можно рассматривать как квазиинварианты. Еще одним квазиинвариантом является величина

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcch} \left[\frac{\operatorname{ch} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu_0} \right] - (r_4^2 - r_{40}^2)^{1/2} = C_3 = d.$$

Уравнение для C_3 имеет вид

$$\frac{dC_3}{dt} = - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} 2\mu}{(\operatorname{ch} 2\mu_0)^2} C_1 + C_2 \right\} \frac{c}{r_2^2}.$$

Рассмотрим сначала динамику системы при $c = 0$, не предполагая однако полного фазового синхронизма ($C_{1,2} \neq 0$). В этом случае сохраняется начальное значение $\operatorname{Re} [b_2] = 0$. Величины $C_{1,2}$ сохраняются всюду, кроме точек $\operatorname{Im} [b_2] = 0$, где они меняют знак (угол Ψ_2 меняется на π). Динамика системы описывается уравнением

$$\frac{dr_4}{dt} = \frac{r_2}{r_4} (r_4^2 - r_{40}^2)^{1/2} \tag{56}$$

и инвариантом

$$\begin{aligned} I_2 = & r_2^2 - r_{40}^2 - \left(x - \frac{d}{2} \right) + \\ & + \frac{a^2}{2} \operatorname{ch} 2\mu_0 \operatorname{ch} x \left[2d - 2(r_4^2 - r_{40}^2)^{1/2} \right], \end{aligned} \tag{57}$$

где

$$\operatorname{ch} 2\mu = \operatorname{ch} 2\mu_0 \operatorname{ch} x, \quad \left(\frac{x}{2} + d \right)^2 = r_4^2 - r_{40}^2.$$

В (56) учтено сохранение величины C_3 . Кроме того, из выражения для третьего инварианта имеем

$$r_{40} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2\mu_0 = 0.$$

В системе происходят периодические колебания, связанные с обменом энергией между волнами. Период колебаний определяется выражением

$$\begin{aligned} T = \int \left[I_2 + \left(\frac{x}{2} + d \right)^2 + r_{40}^2 - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{2} \operatorname{ch} 2\mu_0 \operatorname{ch} x \right]^{-1/2} dx \end{aligned} \tag{58}$$

и зависит от величин I_2, a^2, d, C_2 , в свою очередь зависящих от начальных условий.

В более общем случае $c \neq 0$ квазиинварианты C_2, d не сохраняются. Динамика системы описывается тремя уравнениями, принадлежащими к системе (45)–(49), например, для переменных r_2, r_4, C_2 (или $\cos(\theta_2)$). Остальные две переменные определяются основными инвариантами. В такой системе изменение квазиинвариантов, как следует из (58), ведет к изменению периода колебаний, и мы имеем основание ожидать многообразие режимов, что и подтверждается вычислениями.

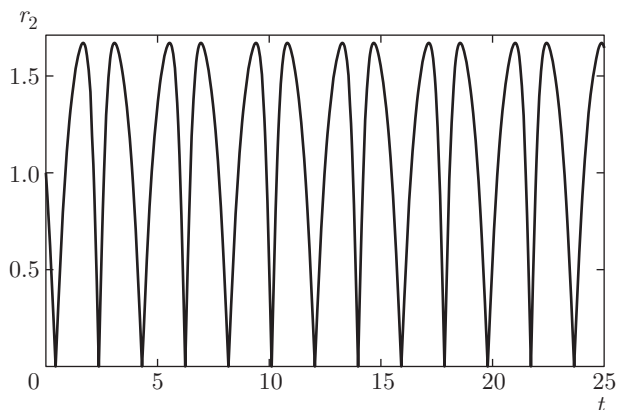


Рис. 1. Временная зависимость $r_2(t)$, $c = 0$

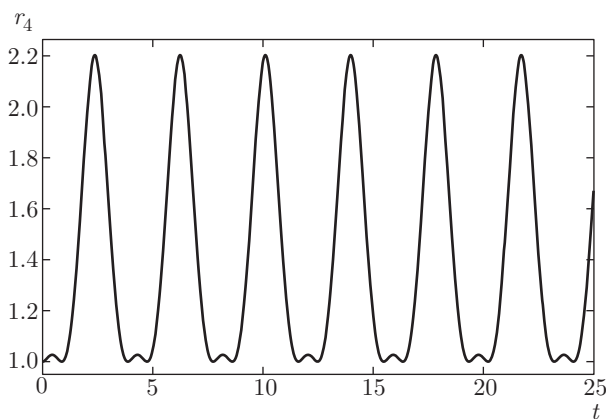


Рис. 2. Временная зависимость $r_4(t)$, $c = 0$

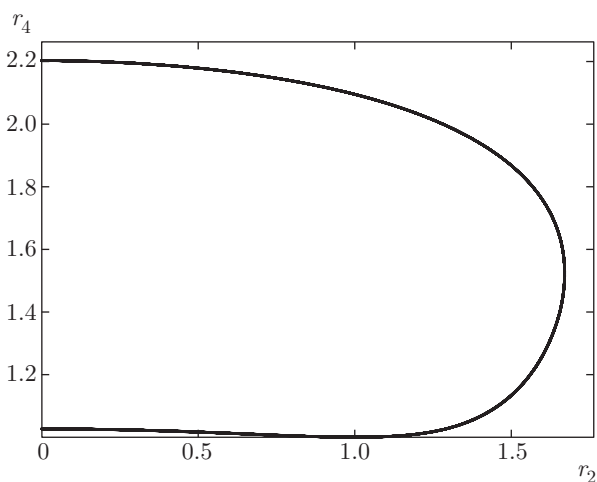


Рис. 3. Фазовый портрет $r_4(r_2)$, $c = 0$

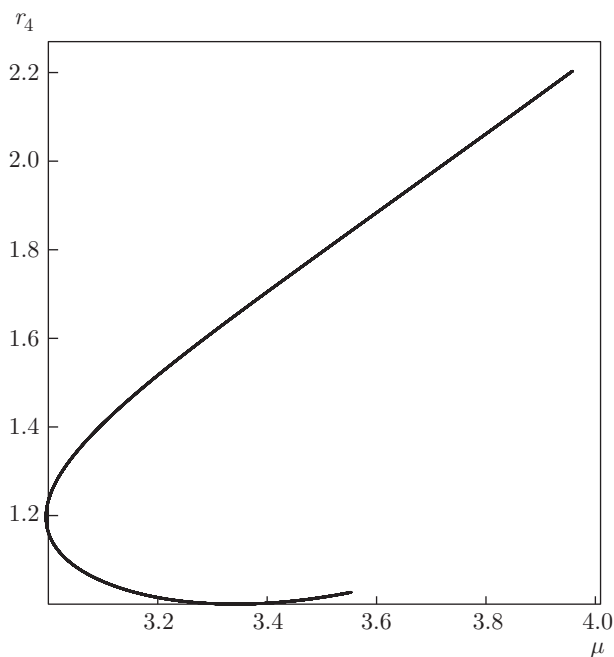


Рис. 4. Фазовый портрет $r_4(\mu)$, $c = 0$

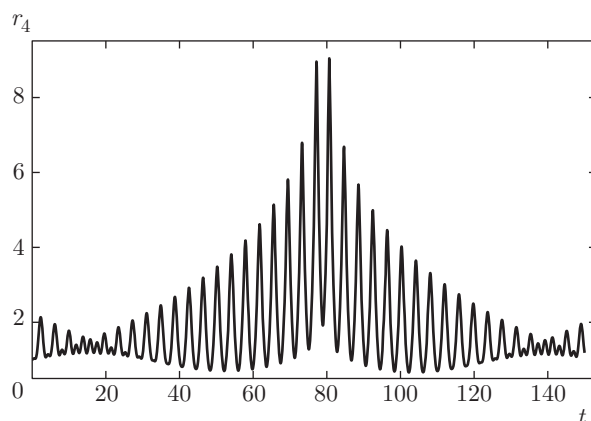


Рис. 5. Временная зависимость $r_4(t)$, $c = 0.1$

Расчеты проводились при $a = 0.1$ для значений $c = 0, 0.1, 0.5$ при следующих начальных значениях: $r_2(0) = r_4(0) = 1$, $\theta_2(0) = 0$. Инвариант I_2 предполагается равным единице, что определяет начальное значение μ как $\mu(0) = 3.34105$. Инвариант $I_3 = c$ в соответствии с (50), (51) определяет начальное значение угла θ_1 как $\theta_1(0) = 2.09584$ (при $c = 0$), $\theta_1(0) = 2.03883$ (при $c = 0.1$), $\theta_1(0) = 1.82412$ (при $c = 0.5$). Результаты вычислений для случая $c = 0$ показаны на рис. 1–4. На рис. 1, 2 приведены временные зависимости переменных $r_2(t)$, $r_4(t)$, демонстрирующие периодический, но достаточно сложный характер движения. Дополни-

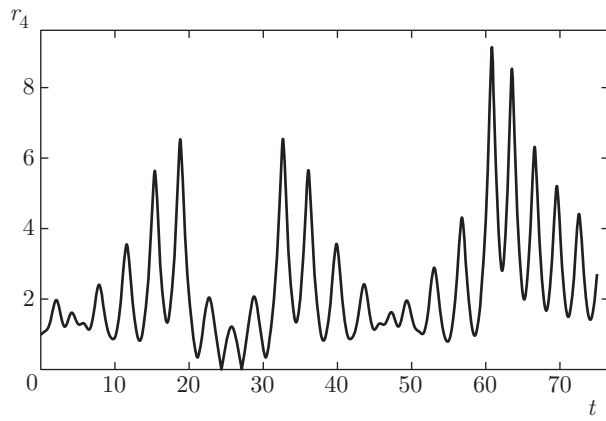


Рис. 6. Временная зависимость $r_4(t)$, $c = 0.5$

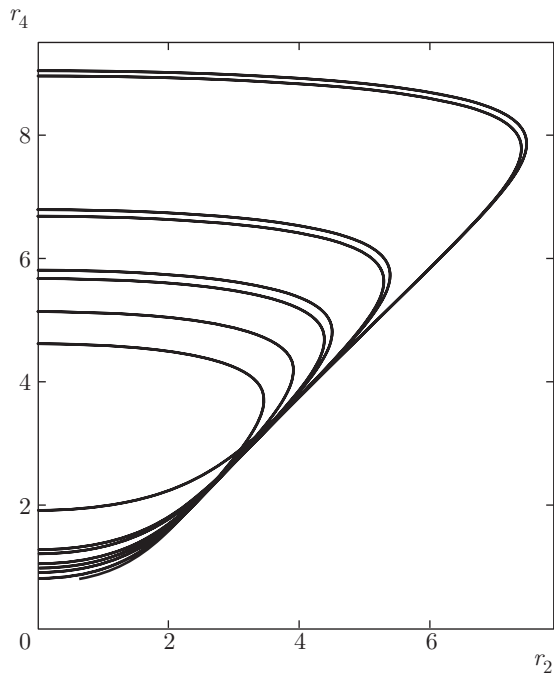


Рис. 7. Фазовый портрет $r_4(r_2)$, $c = 0.1$

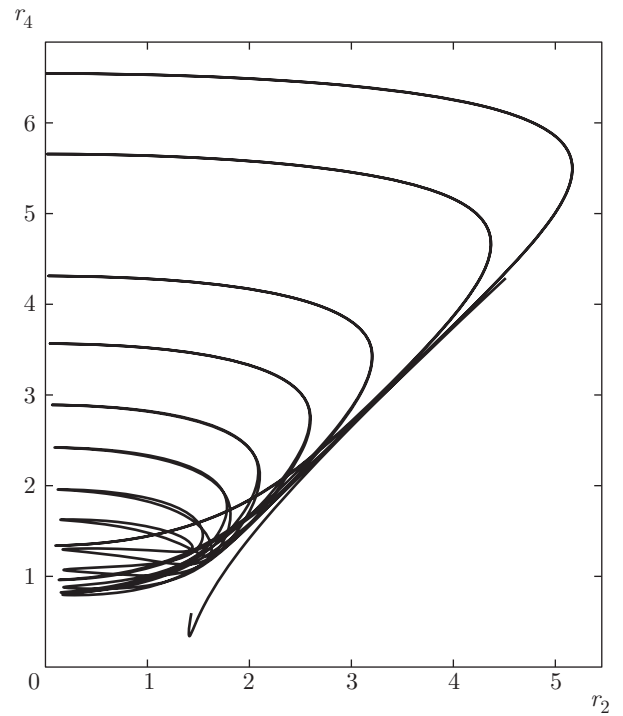


Рис. 8. Фазовый портрет $r_4(r_2)$, $c = 0.5$

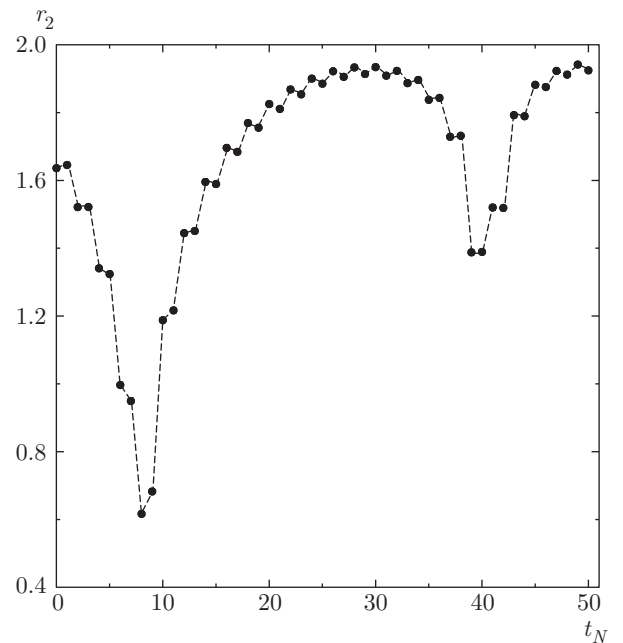


Рис. 9. Сечение Пуанкаре $r_2(t_N)$, $c = 0.1$, $r_4(t_N) = 1.5$

тельную информацию позволяют получить фазовые портреты движения, построенные в различных сечениях (рис. 3, 4). Наиболее показательным является фазовый портрет в плоскости (r_2, r_4) . Как следует из вычислений, периодическое движение системы распадается на два временных интервала. Сначала идет экспоненциальное нарастание коротковолновой компоненты $(r_{2,4})$, а затем быстро нарастают длинноволновые колебания (рис. 4), что приводит к стабилизации. Характер циклического движения, как следует из выражения (57), кроме основных инвариантов, зависит от сохраняющихся величин r_{40} , d , определяемых, в свою очередь, начальными услови-

ями. Эти величины отвечают максимальным и минимальным значениям волновых амплитуд и периоду колебаний. В более общем случае $c \neq 0$ также наблюдается стабилизация неустойчивости, как

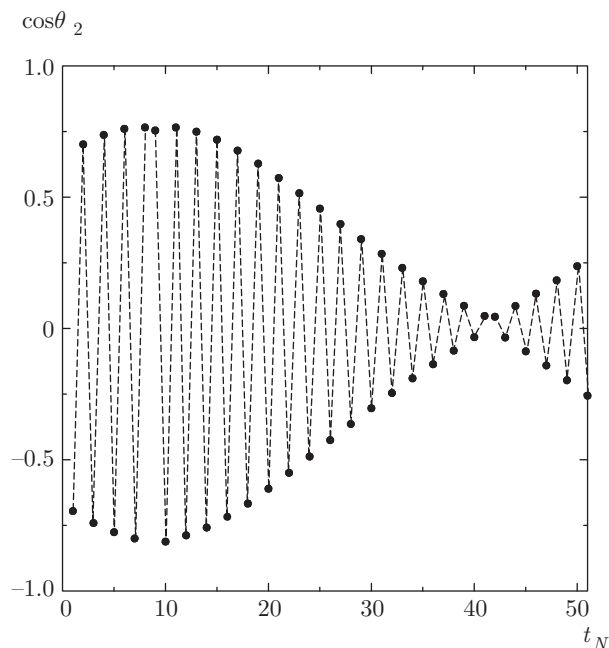


Рис. 10. Сечение Пуанкаре $\cos(\theta_2(t_N))$, $c = 0.1$, $r_4(t_N) = 1.5$

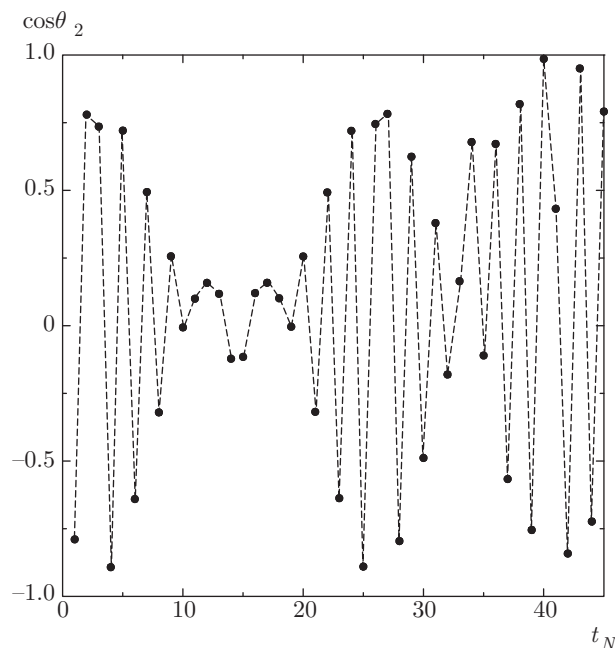


Рис. 12. Сечение Пуанкаре $\cos(\theta_2(t_N))$, $c = 0.5$, $r_4(t_N) = 1.5$

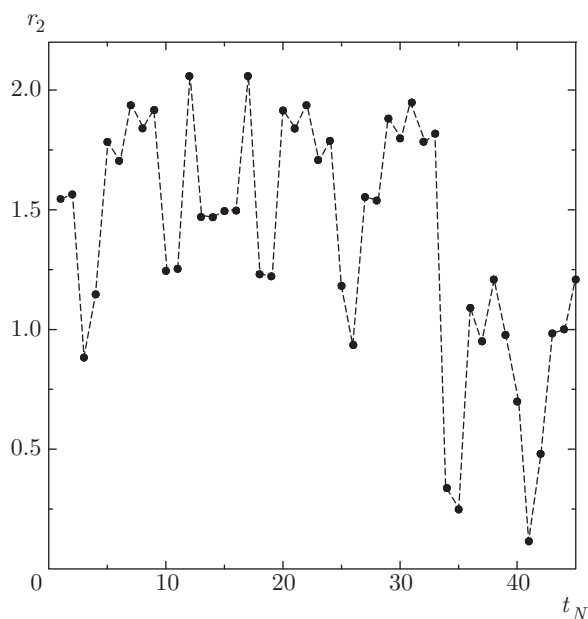


Рис. 11. Сечение Пуанкаре $r_2(t_N)$, $c = 0.5$, $r_4(t_N) = 1.5$

это видно на рис. 5, 6, но периодический характер движения нарушается. При малых значениях c проявляется медленная модуляция колебаний (рис. 5), а при больших значениях c колебания приобретают хаотический характер (рис. 6). Величины C_{1-3} перестают сохраняться и становятся квазиинвариан-

тами. Хотя они сильно меняются вблизи минимумов r_2 , но при максимальном r_2 возвращаются к значению близкому к прежнему. Как следует из фазовых портретов (рис. 7, 8), движение имеет характер последовательности циклов при определенных значениях квазиинвариантов, которые меняются вблизи точки r_{4min} . Можно говорить о том, что происходит блуждание системы по циклам, характеризующимся определенными значениями квазиинвариантов. Этот факт, естественный для системы трех уравнений, можно связать с медленным изменением угловых переменных. На нескольких периодах углы меняются на величину близкую к 2π , что приводит к появлению медленного цикла. Чем больше сдвиг угла на быстром цикле, тем сильнее проявление хаотичности. На рис. 9–12 это продемонстрировано с помощью отображения Пуанкаре, показывающего изменение переменных r_2 , θ_2 при пересечении траекторией движения плоскости $r_4 = \text{const}$. На протяжении цикла такое пересечение происходит дважды, вследствие чего мы наблюдаем две серии точек. Для наглядности зависимость координат точки отображения от номера пересечения показана на разных рисунках. Таким образом, в системе могут наблюдаться различные режимы колебаний волновых амплитуд — периодический, с квазипериодической модуляцией и хаотический (квазислучайный). Эти режимы зависят от одного из инвариан-

тов движения, указывающего на степень фазового синхронизма в начальном состоянии.

4. РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Если взаимодействующие компоненты гидродинамических полей имеют вид волновых пакетов, то эволюция неустойчивой компоненты приобретает новые черты вследствие появления еще одного временного масштаба. Обратимся к системе (34)–(37), предполагая, что

$$A_i(\Delta k_i, t) = B_i(\Delta k_i, t) \exp(-iv_i(k_{0i})\Delta k_i t), \quad (59)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$A_4^*(-\Delta k_2, t) = B_4(\Delta k_2, t) \exp(-iv_i(k_{02})\Delta k_2 t), \quad (60)$$

$$\Delta k_i = k - k_{0i}. \quad (61)$$

Система приобретает вид

$$\frac{dB_1(\Delta k_1, t)}{dt} = -iW^* \int B_2(\Delta k_2, t) B_3^*(\Delta k_2 - \Delta k_1) \times \exp(-i(q_{31}\Delta k_1 + q_{23}\Delta k_2)t) d\Delta k_2, \quad (62)$$

$$\frac{dB_2(\Delta k_2, t)}{dt} = -isB_4^*(\Delta k_2, t) \exp(-i(q_{42}\Delta k_2)t) - iW^* \int B_1(\Delta k_2 - \Delta k_3) B_3(\Delta k_3) \times \exp(-i(q_{12}\Delta k_2 + q_{31}\Delta k_3)t) d\Delta k_3, \quad (63)$$

$$\frac{dB_3(\Delta k_3, t)}{dt} = -iW^* \int B_2(\Delta k_2) B_1^*(\Delta k_2 - \Delta k_3) \times \exp(-i(q_{21}\Delta k_2 + q_{13}\Delta k_3)t) d\Delta k_2, \quad (64)$$

$$\frac{dB_4(\Delta k_1, t)}{dt} = isB_2^*(\Delta k_4) \exp(-i(q_{42}\Delta k_4)t), \quad (65)$$

где

$$q_{23} = v_2(k_{02}) - v_2(k_{03}),$$

$$q_{31} = -q_{13} = v_2(k_{03}) - v_1(k_{01}),$$

$$q_{12} = -q_{21} = v_1(k_{01}) - v_2(k_{02}),$$

$$q_{42} = -v_2(k_{02}) + v_1(k_{02}).$$

Система (62)–(65) описывает два новых по сравнению с предшествующим случаем явления — движение пакетов относительно друг друга и деформацию пакетов. Временные масштабы, определяющие процессы в системе, зависят как от скоростей

относительного движения пакетов q , так и от их начальных пространственных масштабов l_i . Время взаимодействия двух пакетов определяется их относительными скоростями и наибольшим из масштабов. Предположим, что $l_3 \sim l_1 < l_2 \sim l_4$. В этом случае основным временем, определяющим трехволновое взаимодействие, оказывается время $T_{13} \sim l_1/q_{13}$. Другое важное время, характеризующее развитие неустойчивости, $T_{24} \sim l_2/q_{24}$. Степень проявления обмена энергией между компонентами зависит от соотношения между временем T_{13} и временем T , которое определяется выражением (58). Более детальный анализ процесса обмена между пакетами должен основываться на решении системы относительно амплитуд и формы пакетов. Зададим взаимодействующие пакеты в форме

$$B_i(\Delta k, t) = B_i(t) f_i(k' = l_i \Delta k),$$

$$B_i(t) = \int B_i(\Delta k, t) d\Delta k.$$

Поскольку нас интересует эволюция наиболее неустойчивой моды, можно не учитывать ширину спектра компонент $B_{2,4}$, а спектры компонент $B_{1,3}$ будем считать одинаковыми по исходной ширине l . В соответствии с этим зададим

$$B_{2,4}(\Delta k, t) = B_{2,4}(t) \delta(\Delta k),$$

$$B_{1,3}(\Delta k, t = 0) = B_{1,3}(0) \exp(-k^2 l_0^2 / 2).$$

В результате после подстановки

$$B_{2,4}(\Delta k, t) = b_{2,4}(t') \frac{s}{W^*},$$

$$B_1(-\Delta k, t) = b_1(k', t') \left(\frac{s}{WW^*} \right)^{1/2},$$

$$B_3(\Delta k, t) = b_3(k', t') \left(\frac{s}{WW^*} \right)^{1/2},$$

$$t' = st, \quad l_0 = 1,$$

получим систему, аналогичную (38)–(41):

$$\frac{db_1(k', t')}{dt} + ib_2(t') b_3^*(k', t) \times \exp\left(-\frac{ik't'}{T_{13}}\right) = 0, \quad (66)$$

$$\frac{db_2(t')}{dt} + ib_4(t') + i \int b_1(k', t) b_3(k', t) \times \exp\left(\frac{ik't'}{T_{13}}\right) dk' = 0, \quad (67)$$

$$\frac{db_3(k', t')}{dt} + ib_2(t') b_1^*(k', t') \times \exp\left(-\frac{ik't'}{T_{13}}\right) = 0, \quad (68)$$

$$\frac{db_4(t')}{dt} - ib_2(t') = 0. \quad (69)$$

Как и ранее, перейдем в уравнениях (66)–(69) к показательной форме, учитывая инвариантность величин

$$b_1(k', t') b_1^*(k', t') - b_3(k', t') b_3^*(k', t') = a^2(k).$$

Опуская штрихи у независимых переменных, получим

$$b_j = r_j \exp[i\psi_j], \quad r_1 = a(k) \operatorname{ch} \mu(k), \\ r_3 = a \operatorname{sh}(\mu),$$

где

$$\theta_1 = \psi_2 - \psi_1 - \psi_3, \quad \theta_2 = \psi_2 - \psi_4, \\ a(k) = \exp(-k^2/2).$$

После подстановки в (66)–(69) получаем систему аналогичную (38)–(41):

$$\frac{d\mu^k}{dt} = r_2 \sin\left(\theta_1^k - \frac{kt}{T_{13}}\right), \quad (70)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2\mu^0 |Q| \sin(\theta_1^0 - \arg Q) - r_4 \sin \theta_2, \quad (71)$$

$$\frac{dr_4}{dt} = -r_2 \sin \theta_2, \quad (72)$$

$$\frac{d\theta_1^k}{dt} = 2r_2 \operatorname{cth}(2\mu^k) \cos\left(\theta_1^k - \frac{kt}{T_{13}}\right) - \frac{a^2}{2r_2} \operatorname{sh}(2\mu^0) |Q| \cos(\theta_1^0 - \arg Q) - \frac{r_4}{r_2} \cos \theta_2, \quad (73)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{r_2}{r_4} \cos \theta_2 - \frac{a^2}{2r_2} \operatorname{sh} 2\mu^0 |Q| \cos(\theta_1^0 - \arg Q) - \frac{r_4}{r_2} \cos \theta_2. \quad (74)$$

Индекс 0 соответствует значению $k = 0$. Величина Q определяется как

$$Q(t) = \frac{\int b_1(k, t) b_3(k, t) \exp(ikt/T_{13}) dk}{b_1(0, t) b_3(0, t)} = \int \exp(-k^2 + \ln U^k)^{1/2} \exp\left(\frac{ikt}{T_{13}}\right) dk, \quad (75)$$

где

$$U^k = \frac{\operatorname{sh} 2\mu^0}{\operatorname{sh} 2\mu^1} \exp[i(\theta_1^k - \theta_1^0)]. \quad (76)$$

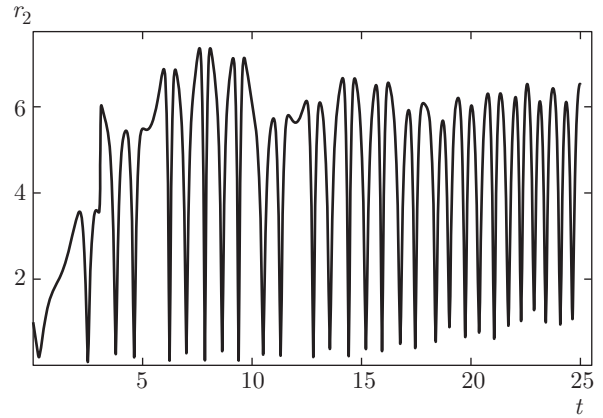


Рис. 13. Временная зависимость $r_2(t)$, $c = 0$, $T_{13} = 2$, $s = 1/10$

При моделировании процесса взаимодействия пакетов на основе системы (70)–(74) приходится ограничиваться некоторым конечным числом уравнений для переменных μ^k и θ^k при фиксированных значениях k . В настоящей работе используются по три уравнения для каждой из этих переменных при значениях $k = 0, k_1, -k_1$. Для описания меняющихся во времени форм пакетов устойчивых волн, входящих в (75), зададим выражение, зависящее от двух параметров:

$$k^2 - \ln U = \frac{k^2}{2} (l_1^2(t) + l_3^2(t)) + ik \frac{t_0}{T_{13}}.$$

Тогда

$$Q(t) = \int \exp\left(-\frac{k^2}{2} (l_1^2(t) + l_3^2(t)) + ik \frac{t-t_0}{T_{13}}\right) dk = \left(\frac{2\pi}{l_1^2(t) + l_3^2(t)}\right)^{1/2} \times \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2T_{13}^2 (l_1^2(t) + l_3^2(t))}\right). \quad (77)$$

Оба коэффициента, $l_1^2(t) + l_3^2(t)$ и $t_0(t)$, комплексны и определяются через параметры компонент с волновыми числами $k = 0, k_1, k_{-1}$ как

$$k_1^2 (l_1^2(t) + l_3^2(t) - 2) = \ln(U^{k_1}) + \ln(U^{-k_1}), \quad (78)$$

$$ik_1 \frac{t_0}{T_{13}} = \frac{1}{2} (\ln(U^{k_1}) - \ln(U^{-k_1})). \quad (79)$$

Подобное моделирование влияния пакетов устойчивых волн на развитие неустойчивости на основе систем является приближенным, но тем не менее оно описывает основные явления — разбегание пакетов и их пространственное расширение (сужение

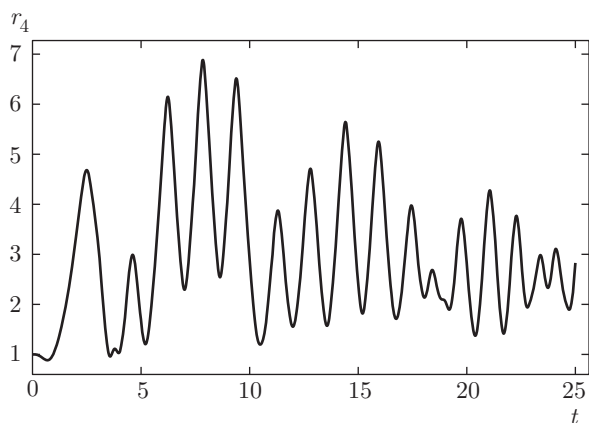


Рис. 14. Временная зависимость $r_4(t)$, $c = 0$, $T_{13} = 2$, $s = 1/10$

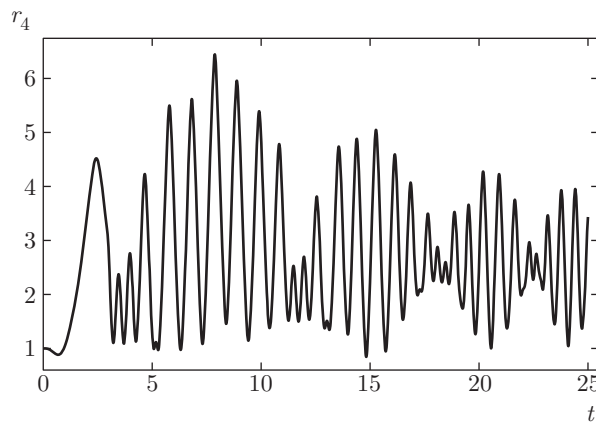


Рис. 17. Временная зависимость $r_4(t)$, $c = 0$, $T_{13} = 4$, $s = 1/20$

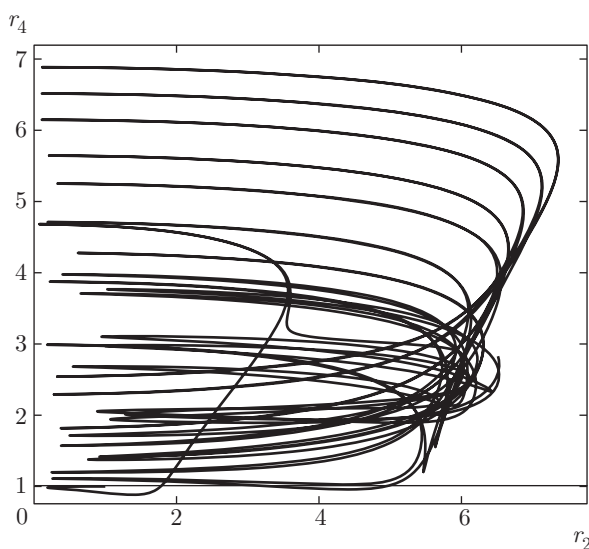


Рис. 15. Фазовый портрет $r_4(r_2)$, $c = 0$, $T_{13} = 2$, $s = 1/10$

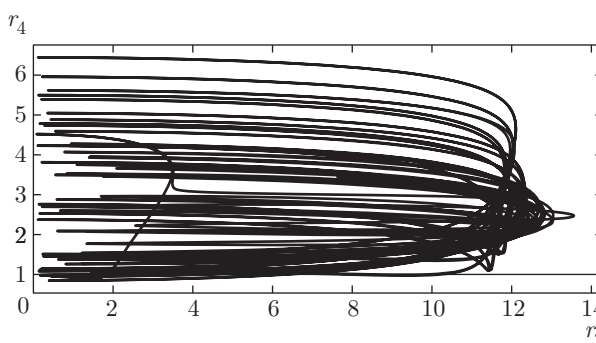


Рис. 18. Фазовый портрет $r_4(r_2)$, $c = 0$, $T_{13} = 4$, $s = 1/20$

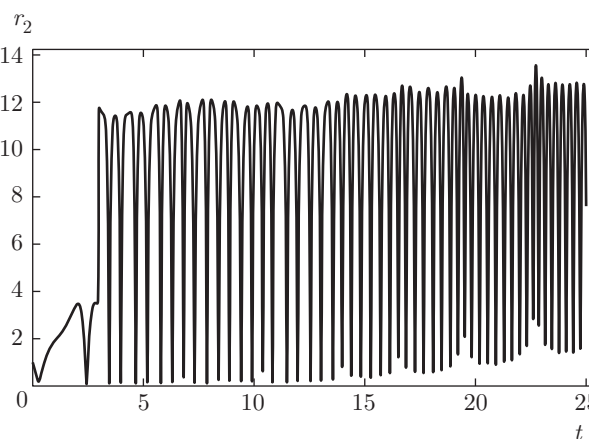


Рис. 16. Временная зависимость $r_2(t)$, $c = 0$, $T_{13} = 4$, $s = 1/20$

пространственного спектра). В простейшем случае мы вместо пяти, как в разд. 3, рассматриваем девять уравнений для μ^{k_1} , μ^0 , μ^{-k_1} , r_2 , r_4 , $\theta^{k_1}\theta^0$, θ^{-k_1} , θ_2 . Главный вопрос, возникающий при таком моделировании, выбор k_1 . В работе задавалось $k_1 = sT_{13}$ и проводились расчеты для нескольких значений $s < 1$. Слабая зависимость результатов от s свидетельствует об их достоверности.

Для оценки влияния конечных размеров пакета при разных значениях характерного времени разбега T_{13} были взяты начальные данные, соответствующие случаю, изображенному на рис. 1–4. Результаты вычислений для $T_{13} = 2$, $s = 1/10$ и $T_{13} = 4$, $s = 1/20$ показаны на рис. 13–18 (поведение во времени переменных r_2 , r_4 и фазовая плоскость r_2, r_4). Вариация параметра s не приводит к существенным изменениям. Как мы видим на рисунках, на ограниченных временах, для которых проводились вычисления, процесс взаимодействия пакетов проходит две стадии. На первой стадии разбегание пакетов приводит к развитию неустойчивости, так что амплитуда неустойчивой волны достигает боль-

ших значений. На второй стадии достаточно быстро (на временах, соизмеримых с T_{13}) рост амплитуд прекращается, что указывает на стабилизацию процесса. Это происходит за счет роста масштаба пакетов устойчивых волн и изменения скорости их общего движения. Вместе с тем наблюдается стохастическая модуляция колебаний, как и в случае взаимодействия волн при отсутствии фазового синхронизма.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа следует, что если в рассматриваемой задаче неустойчивой оказывается «материнская» волна, распадающаяся на две «дочерние», трехволновое взаимодействие может приводить к значительному разнообразию режимов в том числе и стохастических. При этом, однако, всегда происходит стабилизация неустойчивости. Этим подобный случай отличается от случая, когда неустойчивой является «дочерняя» волна, и где стабилизация носит лишь временный характер [9]. Более сложными оказываются процессы стабилизации неустойчивости и обмена энергией между волновыми пакетами [16, 17]. Этот вопрос, рассмотренный в настоящей работе с помощью приближенной модели, заслуживает более детального исследования. Для геофизических приложений существен также вопрос об эволюции неустойчивой моды на фоне волнового хаоса (турбулентности). Описанные в работе ситуации характерны как для гидродинамики, так и для теории плазмы, где существенными являются вопросы, связанные с взаимодействием волн высокой и низкой частоты (ленгмюровских и ионно-звуковых) [13]. Полученные результаты позволяют объяснить появление квазипериодических структур, наблюдаемых в атмосфере [14, 15].

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-27-00134).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Craik, *Wave Interactions and Fluid Flows*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (1985).
2. P. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (2002).
3. Х. Вильгельмсон, Я. Вейланд, *Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме*, Энергоиздат, Москва (1981).
4. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. ВУЗов, радиопизика **19**(5-6), 721 (1976).
5. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ **71**, 8 (1976).
6. A. Loesch, J. Atmos. Sci. **31**, 1177 (1974).
7. Pedlosky, J. Phys. Oceanogr. **5**, 608 (1975).
8. N. Romanova and S. Annenkov, J. Fluid Mech. **539**, 57 (2005).
9. S. Kostykin, N. Romanova, and I. Yakushkin, Chaos **21**(4), 043117 (2011).
10. D. Vainshtein, A. Vasiliev, and A. Neishtadt, Chaos **6**, 67 (1996).
11. Н. Н. Романова, И. Г. Якушкин, Докл. РАН **380**(5), 630 (2001).
12. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
13. Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев, *Физика плазмы для физиков*, Атомиздат, Москва (1989).
14. А. С. Гурвич, И. Г. Якушкин, Изв. РАН, сер. ФАО **40**, 737 (2004).
15. X. Dou et al., J. Atmos. Sol. Terr. Phys. **72**, 457 (2010).
16. C. Staquet and J. Sommeria, Ann. Rev. Fluid Mech. **34**, 559 (2002).
17. K. M. Huang et al., Ann. Geophys. **32**, 263 (2014).