

# МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЦИКЛОН-АНТИЦИКЛОННОЙ ВИХРЕВОЙ АСИММЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЕ ЭКМАНОВСКОЕ ТРЕНИЕ

С. Г. Шефранов\*

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук  
119017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 сентября 2015 г.

Установлено, что учет линейного экмановского трения обеспечивает пороговую по частоте вращения реализацию линейной диссипативно-центробежной неустойчивости и связанное с ней нарушение киральной симметрии в динамике лагранжевых частиц, приводящее к циклон-антициклонной вихревой асимметрии. Показано, что условием осуществления такой неустойчивости является превышение скоростью  $\omega_0$  вращения среды некоторого порогового значения, определяемого собственной частотой  $\omega$  данной среды (т. е.  $\omega_0 > \omega$ ). Получено новое обобщение решения задачи Кармана об определении установившегося поля скорости в вязкой несжимаемой среде над вращающимся твердым диском большого радиуса, в котором дополнительно учтено линейное экмановское трение. Показано соответствие этого решения и условий реализации диссипативно-центробежной неустойчивости кирально-симметричного вихревого состояния и соответствующей циклон-антициклонной вихревой асимметрии. При этом для случая, когда собственная частота вращения жидкости вдали от диска,  $\omega$ , отличается от частоты  $\omega_0$  вращения диска, установлено обобщение известного спирального распределения скоростей в «слое Экмана» вблизи твердой поверхности.

DOI: 10.7868/S0044451016040167

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемое в природных и лабораторных условиях явление циклон-антициклонной вихревой асимметрии состоит в реализации относительно более долгоживущего и интенсивного режима вращения с антициклоническим направлением циркуляции (противоположным направлению вращения среды как целого) по сравнению с противоположно направленным циклоническим вихревым режимом вращения. До настоящего времени, однако, отсутствует понимание того, имеется ли какой-либо мягкий (линейный по амплитуде) механизм возникновения такой асимметрии. Нет пока и доказательств существования лишь альтернативного жесткого (порогового по амплитуде возмущений) нарушения киральной вихревой симметрии во вращающейся среде.

В атмосферах быстро вращающихся планет (Юпитер, Сатурн, Земля) и в океане, а также в лабораторных экспериментах с вращающейся жидкостью наблюдается так называемая циклон-антициклонная вихревая асимметрия, проявляющаяся в явном преобладании более интенсивных, устойчивых и долгоживущих вихрей именно с антициклоническим направлением циркуляции, которое противоположно направлению вращения среды, как целого [1–9]. Так, например, Большое красное пятно Юпитера существует уже несколько сотен лет и представляет собой именно антициклонический вихрь, одна из первых нелинейных моделей которого развита в работе [4]. Аналогичные проявления нарушения киральной вихревой симметрии характерны и для наблюдаемых антициклонических вихревых линз в океане [1, 9] и для вихрей, создаваемых во вращающихся сосудах с жидкостью в лабораторных экспериментах [2, 3, 7, 8]. В частности, в работах [7, 8] отмечается, что кирально-симметричное состояние вихревой динамики (когда в системе возбуждаются одинаковые по интенсивности вихри с разными направлениями

\* E-mail: schefranov@mail.ru

вращения), существующее до начала вращения сосуда, заметно нарушается при осуществлении достаточно быстрого вращения сосуда, которое при этом не должно быть и слишком быстрым. Нарушение циклон-антициклонной вихревой симметрии в таком вращающемся сосуде наблюдается в виде дополнительного увеличения скорости вращения антициклонических вихрей и замедления скорости вращения циклонических вихрей, которые при этом занимают все большую площадь и имеют тенденцию к объединению [7, 8].

Несмотря на разнообразие известных фактов наблюдаемого нарушения вихревой киральной симметрии, до настоящего времени отсутствует ясность в понимании общего для них механизма, обеспечивающего зарождение и реализацию такого нарушения симметрии и соответствующей циклон-антициклонной асимметрии [6]. В частности, в работе [6] отмечается неудача известных предпринятых попыток получить из линейной теории устойчивости [10–12] универсальный вывод об относительно большей неустойчивости вихрей с циклоническим направлением циркуляции по сравнению с антициклоническими вихрями. С другой стороны, ни один из рассматриваемых ранее различных специфических нелинейных механизмов реализации указанной вихревой асимметрии во вращающейся среде не может быть признан как необходимый для осуществления этого фундаментального явления. Например, для механизма, связанного с нелинейным бетта-эффектом (когда удается получить решение типа солитона только для антициклонических структур [4]), это стало ясно после обнаружения доминирования антициклонического типа циркуляции даже в приближении  $f$ -плоскости [13] (см. также [6]).

Отметим особо предлагаемый в работах [7, 8] (см. также ссылки в [8]) нелинейный механизм возникновения вихревой асимметрии, связанный с эффектами нелинейного экмановского трения. Как и для линейного экмановского трения, эти эффекты с необходимостью учитывают наличие циркуляции в вертикальной плоскости (т. е. так называемые эффекты двумерной сжимаемости [13]). В частности, было показано [7, 8], что по мере приближения к поверхности жидкости стационарная установившаяся циклоническая компонента поля вихря затухает быстрее и вносит в наблюдаемое поверхностное течение меньший вклад, чем антициклоническая компонента. В теории [7, 8], однако, проявление асимметрии выражено слабо (так как сам факт экспоненциального затухания при приближении к поверхности жидкости реализуется как для циклонических, так и для

антициклонических вихревых полей) и вообще исчезает в пределе линейного экмановского трения. Эта слабость проявления вихревой асимметрии аналогична отмечаемой в работе [6] для существующей в этой связи линейной теории устойчивости [12]. Действительно, в работе [12] отмечается, что неустойчивыми являются как циклонические, так и антициклонические вихревые структуры, но последние при этом имеют относительно меньшие величины экспоненциальных показателей роста соответствующих возмущений. В теории [7, 8] отсутствует и возможность определения условий, приводящих к начальной линейной нестационарной стадии в формировании циклон-антициклонной вихревой асимметрии. Это может быть установлено только в рамках линейной теории устойчивости киральной симметрии вихревых состояний.

В то же время рассмотрение сочетания вращения жидкости и соответствующего этому вращению экмановского трения (как линейного, так и нелинейного), сопряженного с наличием циркуляции в вертикальной плоскости, уже само по себе может иметь универсальное значение для понимания механизма возникновения и развития наблюдаемого только во вращающейся среде явления циклон-антициклонной вихревой асимметрии. В работе [7] сопоставляются выводы теории нелинейного экмановского трения с данными проведенных авторами экспериментальных наблюдений. При этом неплохое согласие имеется лишь в области относительно больших частот вращения жидкости (см. ниже рисунок, где кривые 1 соответствуют теории [7], а кривая 2 следует из теории, предложенной в настоящей работе на основе учета только линейного экмановского трения).

В настоящей работе получено гидродинамическое обобщение вывода работы [5] о механизме нарушения киральной симметрии, реализуемом при линейной диссипативно-центробежной неустойчивости (ДЦН) нулевого состояния равновесия двумерного осциллятора с линейным по скорости трением во вращающейся с частотой  $\omega_0$  системе координат при надпороговой частоте  $\omega_0 > \omega$ , где  $\omega$  — собственная частота колебаний осциллятора. Реализация линейной ДЦН оказывается возможной только при ненулевой величине силы трения, когда показатель экспоненциального роста во времени для амплитуды возмущения имеет максимум при некотором конечном коэффициенте линейного трения. При условии реализации ДЦН осуществляется (в пределе достаточно больших времен) именно антициклоническое направление движения траектории возмущения вне

зависимости от начальных условий. Если, например, в начальный момент времени возмущенное направление движения имело циклонический характер (т.е. совпадало с направлением вращения системы), то все равно именно антициклоническое результирующее направление вращения устанавливается во времени в пределе больших времен при условии реализации ДЦН. Ранее [5] этот вывод о ДЦН для линейного осциллятора применяется для описания движения лагранжевых жидких частиц при твердотельном вращении жидкости с частотой  $\omega$  во вращающейся с частотой  $\omega_0$  системе координат при учете линейного экмановского трения, соответствующего линейному трению осциллятора.

В настоящей работе показано, что такое гидродинамическое обобщение выводов в работе [5] является обоснованным и непосредственно следует из решения задачи Кармана, модифицированной за счет явного учета внешнего линейного (экмановского) трения. Установлен линейный механизм ДЦН кирально-симметричного вихревого состояния, приводящей к наблюдаемому явлению циклон-антициклонной вихревой асимметрии. Такой механизм, как показано впервые, непосредственно связан именно с эффектом линейного экмановского трения и может осуществляться лишь для надпороговой величины частоты вращения жидкости. При этом получено (см. ниже разд. 2) соответствие с данными экспериментов [7] о вихревой асимметрии именно в области относительно низких частот, что дополняет выводы работы [7], полученные на основе учета эффектов нелинейного экмановского трения во вращающейся жидкости.

## 2. МОДИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ КАРМАНА И ДЦН

1. Рассмотрим уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости для описания течения над вращающимся с частотой  $\omega_0$  твердым плоским диском достаточно большого радиуса  $R \gg \sqrt{\nu/\omega_0}$  ( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости), когда влияние края диска можно считать малым [14]. Во вращающейся с частотой  $\omega_0$  системе координат, связанной с диском, эти уравнения имеют вид (в цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$ ) [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{(V_\varphi + r\omega_0)^2}{r} &= \\ = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) - 2\alpha V_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} + 2V_r \omega_0 &= \\ = \nu \left( \Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} \right) - 2\alpha V_\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta V_z - g_0,$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} = 0.$$

Система (1) для компонент скорости  $V_z, V_r, V_\varphi$  и давления  $p$  записана в предположении об аксиальной симметрии всех рассматриваемых гидродинамических полей. При этом для всех полей в (1) отсутствует зависимость от угловой координаты  $\varphi$  и равны нулю производные по этой координате. В (1)  $\rho_0$  — постоянная плотность жидкости, а ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости диска и совпадает с направлением оси вращения и направлением действия силы гравитации с постоянным ускорением силы тяжести  $g_0$ . В первых двух уравнениях системы (1) также дополнительно учтены линейные по горизонтальным компонентам скорости силы внешнего (экмановского) трения [15, 16] о поверхность диска с коэффициентом  $\alpha = \sqrt{\nu\omega_0}/h$ , зависящим от частоты вращения диска и характерного масштаба  $h$  по вертикали.

Для рассматриваемой постановки задачи наиболее естественным представляется выбрать в качестве характерного вертикального масштаба толщину придонного пограничного слоя, когда  $h = \sqrt{\nu/\omega_0}$  [15, 16] (она использована ниже в выражении (4) для перехода к безразмерной вертикальной координате и определяет показатель экспоненты в решении (10)). В результате получаем для коэффициента трения выражение  $\alpha = \omega_0$ . Оно оказывается не зависящим от коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  и, например, остается конечным даже в пределе исчезающе малой вязкости  $\nu \rightarrow 0$ . Это может иметь значение, в частности, для новой интерпретации данных экспериментов, в которых твердый плоский диск совершает колебательные или вращательные движения относительно сверхтекучего жидкого гелия [17].

Однако в общем случае величина коэффициента придонного трения не обязательно должна точно совпадать с частотой вращения системы. При этом полученные ниже результаты дают в основном качественное понимание механизмов рассматриваемых процессов. Для количественной оценки, когда такая

потребность возникает, наиболее подходит именно отмеченный частный случай, когда  $\alpha = \omega_0$ .

В обычно рассматриваемой постановке задачи Кармана ищется стационарное решение системы (1) при  $\alpha = 0$  [14].

Будем рассматривать модифицированную задачу Кармана, в которой явно будем учитывать эффект линейного внешнего трения с ненулевым положительным коэффициентом  $\alpha > 0$ . Пусть решение системы (1) имеет вид [14]

$$V_r = rF(z, t), \quad V_\varphi = rG(z, t), \quad V_z = H(z, t). \quad (2)$$

При этом из третьего уравнения системы (1) после интегрирования по  $z$  получается следующее уравнение для определения поля давления:

$$\frac{p}{\rho_0} = -g_0 z + \nu \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{H^2}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \int dz H(z, t) + \Phi(r, t), \quad (3)$$

где  $\Phi$  — произвольная функция интегрирования, не зависящая от  $z$ . Далее ее вид будем (как и в [14]) предполагать соответствующим наличию равномерного вращения жидкости с постоянной частотой вдали от диска, когда  $\Phi = \omega^2 r^2 / 2$ .

Как и в работе [14], введем безразмерные функции и переменные, используя соотношения

$$\begin{aligned} F &= \omega_0 f(\xi, \tau), & G &= \omega_0 g(\xi, \tau), \\ H &= \sqrt{\nu \omega_0} h(\xi, \tau), & \xi &= z \sqrt{\omega_0 / \nu}, \quad \tau = t \omega_0. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (2), (4) в (1) имеем (с учетом того, что из последнего уравнения системы (1) получается соотношение  $f = -(1/2) \partial h / \partial \xi$ ) из первых двух уравнений системы (1) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - (1 + g)^2 = \\ = -\omega_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + \alpha_1 \frac{\partial h}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial h}{\partial \xi} (1 + g) + h \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - 2\alpha_1 g, \quad (6)$$

где введены безразмерные параметры  $\alpha_1 = \alpha / \omega_0$ ,  $\omega_1 = \omega / \omega_0$ . При этом параметр  $\omega_1$  по своему физическому смыслу соответствует числу Россби (т. е. отношению некоторой характерной частоты процесса к частоте вращения системы координат).

Система (5), (6) при параметре  $\alpha_1 = 0$  в точности совпадает с рассмотренной в работе [8] в связи с проблемой циклон-антициклонной вихревой асимметрии. При этом, в отличие от [8], здесь при  $\alpha_1 > 0$

явно учитываются именно эффекты линейного экмановского трения при определении условий возникновения такой асимметрии.

**2.** Будем искать стационарное решение (в пределе больших времен, когда членами с производными по времени можно пренебречь) системы (5), (6) для двух неизвестных функций  $h, g$  при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} g(\xi = 0) = h(\xi = 0) = \frac{dh(\xi = 0)}{d\xi} = 0, \\ g(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow g_1 = \text{const}, \\ \frac{dh(\xi \rightarrow \infty)}{d\xi} \rightarrow h_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти граничные условия на поверхности диска в точности соответствуют рассматриваемым граничным условиям при постановке задачи Кармана [14]. Для второго граничного условия на бесконечности в модификации этой задачи с  $\Phi > 0$  величина  $g_1 = \omega_1 - 1$  [14] (здесь, в отличие от [14], эта величина приведена во вращающейся с частотой  $\omega_0$  системе координат), а  $h_1 = 0$ , что имеет место и в (7), но только при условии  $\alpha = 0$ . При конечных величинах коэффициента внешнего (экмановского) трения константы в правых частях граничного условия (7) на бесконечности уже оказываются зависящими от величин  $\alpha_1$ .

Как и в [14], рассмотрим получение приближенного линейаризованного по амплитудам  $g, h$  стационарного решения системы (5), (6) при граничных условиях (7) в предположении, что  $|\omega_1^2 - 1| \ll 1$ . При этом (с учетом соотношения  $dh/d\xi = -d^2g/d\xi^2 + 2\alpha_1 g$ ) линейаризованная система (5), (6) сводится к одному уравнению:

$$\frac{d^4 g}{d\xi^4} - 4\alpha_1 \frac{d^2 g}{d\xi^2} + 4g(1 + \alpha_1^2) = 2(\omega_1^2 - 1). \quad (8)$$

Уравнение (8) нужно решить при граничном условии, следующем из (7) при учете отмеченного выше линейного соотношения между функциями  $h$  и  $g$ , когда в (7) постоянные коэффициенты имеют вид

$$g_1 = \frac{\omega_1^2 - 1}{2(1 + \alpha_1^2)} \approx \frac{|\omega_1| - 1}{1 + \alpha_1^2}, \quad (9)$$

$$h_1 = \frac{\alpha_1(\omega_1^2 - 1)}{1 + \alpha_1^2} \approx \frac{2\alpha_1(|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2}.$$

В результате решения уравнения (8) при граничных условиях (7), (9) получаем следующее представление для компонент поля скорости установившегося течения над вращающимся диском во вращающейся системе координат, связанной с ним:

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= r\omega_0 g = \frac{r\omega_0(|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2} \times \\
 &\quad \times [1 - (\alpha_1 \sin \xi \lambda_2 + \cos \xi \lambda_2) \exp(-\xi \lambda_1)], \\
 V_r &= r\omega_0 f = -\frac{r\omega_0(|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2} \times \\
 &\quad \times [\alpha_1 - (\alpha_1 \cos \xi \lambda_2 - \sin \xi \lambda_2) \exp(-\xi \lambda_1)], \\
 V_z &= \sqrt{\nu\omega_0} h = \frac{\sqrt{\nu\omega_0}(|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2} \left[ A_0 + 2\xi\alpha_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\alpha_1\lambda_1 - \lambda_2) \cos \xi \lambda_2 - (\alpha_1\lambda_2 + \lambda_1) \sin \xi \lambda_2}{2\alpha_1^2 + 1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp(-\xi \lambda_1) \right],
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \sqrt{\sqrt{\alpha_1^2 + 1} + \alpha_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\alpha_1^2 + 1} - \alpha_1}, \\
 A_0 &= \frac{1 - \alpha_1^2 - \alpha_1(2\alpha_1^2 + 1)}{(2\alpha_1^2 + 1)(\sqrt{\alpha_1^2 + 1} + \alpha_1)}.
 \end{aligned}$$

**3.** При нулевом коэффициенте внешнего экмановского трения ( $\alpha_1 = 0$ ) решение (10) точно совпадает с известным решением задачи Кармана [14]. При конечных значениях этого коэффициента решение (10) в пределе  $\xi \gg 1$  совпадает с полученным ранее [18] точным стационарным решением уравнений гидродинамики (1). Это решение соответствует вращению жидкости, как целого, с конечной величиной спиральности (что обобщает твердотельные асимптотики вихря Бюргерса и вихря Салливана на основе учета линейного внешнего трения) и рассматривается в работе [18] в связи с использованием линейного механизма ДЦН для моделирования начальной стадии развития тропических циклонов. При этом в [18] решение получено для произвольных величин  $\omega_1$  (которые, в отличие от условия  $|\omega_1^2 - 1| \ll 1$  получения выражений (10), не обязательно должны мало отличаться от единицы), когда вместо (2) используется аналогичное представление решения системы (1), но при условии

$$\begin{aligned}
 F &= F_0 = \text{const}, \quad G = G_0 = \text{const}, \\
 H &= -2F_0 z.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Можно показать, что движение лагранжевых частиц, соответствующих полю скорости (2) при условии (11) описывается точно так же, как и двумерный осциллятор во вращающейся системе координат при наличии линейного по скорости трения (см. также [18]). Это и приводит к соответствию асимптотики решения (10) полученному в работах

[5, 18] условию реализации ДЦН кирально-симметричного состояния и возникновению циклон-антициклонной вихревой асимметрии, которое, согласно (10), имеет вид

$$|\omega_1| < 1. \tag{12}$$

Действительно, из (10) в пределе больших расстояний от диска ( $\xi \gg 1$ ) получаем выражения для поля скорости, определяющего соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения для динамики лагранжевых жидких частиц:

$$\begin{aligned}
 V_r &= \frac{dr}{dt} = -r \frac{\alpha_1 \omega_0 (|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2}, \\
 V_\varphi &= r \frac{d\varphi}{dt} = r \frac{\omega_0 (|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2}, \\
 V_z &= \frac{dz}{dt} = 2z \frac{\alpha_1 \omega_0 (|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При этом из первого уравнения в (13) следует, что положение равновесия жидкой частицы, находящееся на оси  $z$  при  $r = 0$ , является экспоненциально неустойчивым только при конечной положительной величине коэффициента линейного экмановского трения  $\alpha_1 > 0$  и при выполнении условия (12), являющегося тем самым условием именно ДЦН. Из второго уравнения в (13) в случае реализации условия ДЦН (12) следует, что траектория неустойчивого движения лагранжевой частицы соответствует вращению с постоянной отрицательной (при положительной частоте вращения диска  $\omega_0 > 0$ ) угловой скоростью

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0 (|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2} < 0,$$

т. е. имеет именно антициклоническое направление. Таким образом, из обобщения решения задачи Кармана при явном учете эффектов линейного экмановского трения получено подтверждение вывода работ [5, 18] о реализации неустойчивости (по механизму ДЦН) кирально-симметричного вихревого состояния и о возникновении циклон-антициклонной асимметрии при условии (12).

**4.** Покажем, что при рассмотрении решения системы (1) в виде (2), (11) может быть получено условие ДЦН в том же виде (12), но уже без предположения, что имеет место неравенство  $\omega_1 - 1 \ll 1$ . При подстановке (2), (11) в первые два уравнения системы (1) получаем для двух неизвестных коэффициентов  $F_0, G_0$  два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned}
 F_0^2 - (G_0 + \omega_0)^2 &= -\omega^2 - 2\alpha F_0, \\
 2F_0(G_0 + \omega_0) &= -2\alpha G_0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

откуда следует решение

$$F_0 = -\frac{\alpha G_0}{G_0 + \omega_0}, \tag{15}$$

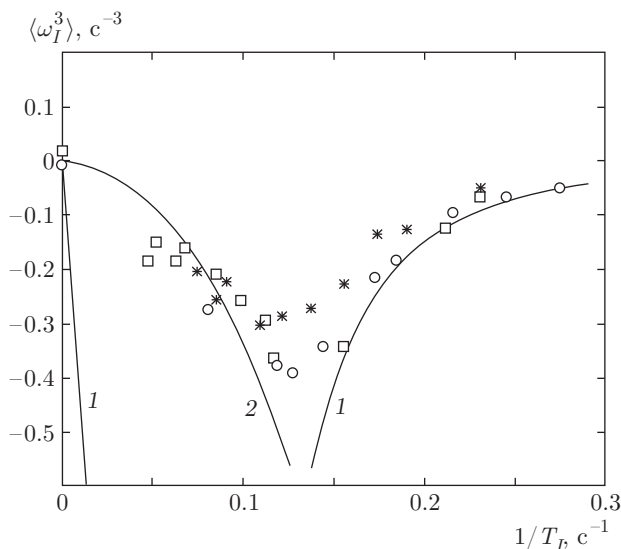
$$x \equiv \frac{G_0}{\omega_0} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[ \omega_1^2 - \alpha_1^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\alpha_1^2} \right]^{1/2}. \tag{16}$$

Условием линейной (экспоненциальной) неустойчивости состояния с  $r = 0$  является условие положительности правой части уравнения (15). Это имеет место при условиях  $x < 0$  и  $x+1 > 0$ . При этом в (16) надо рассматривать только решение, соответствующее положительному знаку перед квадратной скобкой. Очевидно, что перед знаком квадратного корня внутри квадратных скобок тоже надо выбрать знак «плюс», чтобы исключить комплексность величины  $x$  в (16). Из условия  $x < 0$  непосредственно получается критерий ДЦН (12).

Итак, при условии (12) радиальное движение лагранжевых частиц, определяемое полем скорости (2) с коэффициентами (11), (15), (16), соответствует экспоненциальному росту радиальной координаты только при одновременном вращении этой частицы в антициклоническом направлении, противоположном направлению вращения диска. Наоборот, при реализации циклонического направления вращения лагранжевых частиц (при нарушении неравенства (12)) положение равновесия при  $r = 0$  уже является экспоненциально устойчивым, что и определяет взаимосвязь условия ДЦН (12) и механизма возникновения наблюдаемого явления циклон-антициклонной вихревой асимметрии.

### 3. СРАВНЕНИЕ С ЛАБОРАТОРНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ [7]

Проведем сопоставление полученного выше решения (13) с данными эксперимента, представленными в работе [7] (см. в ней рис. 1а). В [7] приведены результаты лабораторного исследования квазидвумерных вихревых потоков, которые наблюдались в проводящей жидкости (при пропускании через нее электрического тока и под действием постоянных магнитов), находящейся в прямоугольном сосуде, помещенном на вращающуюся платформу. На рисунке показаны результаты экспериментов, которые соответствуют различным величинам тока  $I = 30$  мА (кружки),  $I = 40$  мА (звездочки) и  $I = 50$  мА (квадраты). При этом для представления



Экспериментальные и теоретические результаты, определяющие зависимость средней величины куба завихренности от частоты вращения системы. Величина отклонения от нуля и направление отклонения на графиках определяют степень нарушения киральной вихревой симметрии, проявляемой в виде циклон-антициклонной вихревой асимметрии. Кривая 2 соответствует формуле (17) настоящей работы, а две кривые 1 — результаты нелинейной теории [7]. Квадратики, кружки и звездочки соответствуют различным токовым режимам, используемым в эксперименте [7]. Остальные обозначения приведены в тексте

на одном рисунке результатов всех трех серий экспериментов при различных токах, пропускаемых через жидкость, использовались следующие обозначения для модификации (получаемой умножением на  $\gamma = (I_0/I)^{2/3}$ , где  $I_0 = 50$  мА) вертикальной компоненты завихренности  $\omega_I = \gamma\omega_z = (\gamma/r)\partial r V_\varphi/\partial r$  и частоты вращения платформы  $1/T_I = \gamma/T$ . Результатам теории нелинейного экмановского трения, полученным в [7], соответствуют две кривые 1.

Для сравнения на рисунок, взятый из работы [7], нанесена кривая 2, которая соответствует представлению (13) для тангенциальной компоненты поля скорости. Действительно, из (13) можно получить следующее выражение для вертикальной компоненты поля вихря:

$$\omega_z = -\frac{2\omega_0(1 - \omega_1)}{1 + \alpha_1^2}. \tag{17}$$

Это выражение использовано для построения на рисунке кривой 2. При этом проводится сопоставление только с теми результатами эксперимента [7], которые получены именно при токовом режиме с  $\gamma = 1$ , когда на рисунке имеем

$$\frac{1}{T_I} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \langle \omega_I^3 \rangle = \omega_z^3.$$

Для построения кривой 2 на рисунке использовалось значение параметра  $\alpha_1 = 1$  в выражении (17). Кроме того, делается дополнительное предположение, что в выражении (17) величина  $\omega_1 \ll 1$  и не оказывает существенного влияния на вид кривой 2 в той части, которая соответствует приведенным на рисунке экспериментальным данным. При этом, согласно работе [7], считается, что экспериментально достоверно установлена циклон-антициклонная асимметрия лишь в случаях достижения достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значений  $\langle \omega_I^3 \rangle < -0.25 \text{ с}^{-3}$  (см. рисунок). Это имеет место только в достаточно узком диапазоне частот вращения сосуда с жидкостью при

$$\omega < 1/T_I < 2\omega, \quad (18)$$

где, согласно экспериментальным данным, приведенным на рисунке величина  $\omega \approx 0.08 \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом, указанное ограничение на частоту вращения сверху и снизу выявляет соотношение между величиной нижней и верхней границ частотного интервала, в котором наблюдается нарушение киральной вихревой симметрии и проявляется циклон-антициклонная вихревая асимметрия. При этом оказывается, что значение нижней границы частотного интервала в два раза меньше, чем значение верхней границы. Отметим, что такое соотношение между граничными частотами соответствует условию генерации вихревой спиральности за счет эффектов вязкой диссипации с учетом вращения (см. в [19] неравенство (14) и следующее из него ограничение на частоту вращения системы, как целого). В экспериментах [20] (см. обсуждение этого вопроса в [19]) определены верхняя и нижняя границы частоты вращения сосуда, внутри которых наиболее эффективно происходит генерация локализованных вихрей. Соотношение между этими границами близко к неравенству (18).

Случай киральной симметрии вихревых состояний соответствует нулевому среднему значению величины куба завихренности. Этот случай реализуется, например, при нулевой частоте вращения (см. рисунок). Представленные на рисунке теоретические и экспериментальные данные для случая вращения сосуда с конечной скоростью приводят именно к отрицательным значениям для среднего значения куба завихренности, что соответствует преобладанию антициклонической завихренности, особенно в отмеченном выше узком диапазоне частот вращения сосуда с жидкостью.

Теория [7], основанная на представлении о нелинейном экмановском трении, приводит к удовлетворительному соответствию с данными экспериментальных наблюдений только в области достаточно больших частот вращения  $1/T_I \geq 0.14 \text{ с}^{-1}$ .

В области относительно низких частот  $1/T_I \leq 0.12 \text{ с}^{-1}$  хорошее соответствие данным наблюдений получается для теории ДЦН, развиваемой в настоящей работе и представленной на рисунке кривой 2. Отметим, что эта кривая на самом деле не подходит к оси ординат сколь угодно близко, а начинается лишь при частотах вращения выше некоторой пороговой частоты, определяемой условием ДЦН (12), когда (см. рисунок) должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{T_I} > \frac{1}{T_{I(th)}} = \frac{\omega}{2\pi},$$

где величина собственной частоты  $\omega$  связана с вращением жидкости, устанавливающимся на ее поверхности вдали от дна сосуда. В эксперименте [7] не были рассмотрены частоты вращения сосуда меньшие, чем  $1/T_I = 0.05 \text{ с}^{-1}$ , и, соответственно, не была установлена пороговая частота  $1/T_{I(th)}$ , определяющая начало надпороговых процессов образования первичных антициклонических вихрей, предсказываемых развиваемой в настоящей работе теорией ДЦН.

Представляет интерес проведение экспериментов, аналогичных [7], но уже охватывающих область существенно более низких, чем в [7], частот вращения сосуда с жидкостью. Только при этом может быть установлена предсказываемая в теории ДЦН пороговая частота вращения сосуда с жидкостью, определяющая начало нарушения киральной вихревой симметрии и рождение первичных вихрей с антициклоническим направлением циркуляции. В этом случае при построении на рисунке теоретической кривой 2 на основе выражения (17) важную роль уже будет играть именно рассмотрение конечной величины параметра  $\omega_1$ , который теперь может быть близок к единице.

#### 4. СЛОЙ ЭКМАНА НА ГРАНИЦЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ И ДЦН

1. В [14] отмечено совпадение между полученным приближенным решением задачи Кармана (тоже в виде (10), но в случае  $\alpha_1 = 0$ ) и спиральным распределением скорости в слое Экмана вблизи твердой границы, над которой происходит течение во вращающейся жидкости. Проведем обобщение представленного в [14] спирального решения в

слое Экмана (см. формулы (4.4.15), (4.4.16) в [14]) при учете в уравнениях гидродинамики членов с линейным внешним (экмановским) трением и сопоставим (см. ниже) с полученным выше решением (10), где  $\alpha_1 > 0$ .

Рассмотрим, как и в [14], установившееся движение жидкости в пограничном слое, когда дополнительно учитываются не только силы объемной вязкости (как в [14]), но еще и сила линейного по скорости внешнего трения с положительным коэффициентом  $\alpha$  в уравнении баланса сил Кориолиса и градиента давления. При этом для установившихся величин горизонтальных компонент поля скорости внутри пограничного слоя имеем уравнения

$$\begin{aligned} -2V_y\omega_0 &= \frac{G_x}{\rho_0} - 2\alpha V_x + \nu \frac{d^2 V_x}{dz^2}, \\ 2V_x\omega_0 &= \frac{G_y}{\rho_0} - 2\alpha V_y + \nu \frac{d^2 V_y}{dz^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\omega_0$  — вертикальная компонента угловой скорости вращения жидкости, а установившийся градиент давления, обуславливающий течение жидкости, является постоянной величиной с компонентами  $(-G_x, -G_y)$ . Эти компоненты градиента давления выражаются через установившиеся значения горизонтальных компонент поля скорости  $(U_x, U_y)$  в области над пограничным слоем (где становятся несущественными последние члены в правых частях уравнений (19)) в виде соотношений

$$\begin{aligned} G_x/\rho_0 &= 2(\alpha U_x - \omega_0 U_y), \\ G_y/\rho_0 &= 2(\alpha U_y + \omega_0 U_x). \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) уже несущественны эффекты действия сил объемной вязкости, но важными остаются проявления сил внешнего трения. Соотношения (19), (20) при  $\alpha = 0$ ,  $U_y = 0$  точно совпадают с рассмотренными в [14] исходными уравнениями для описания жидкости, покоящейся относительно равномерно вращающихся осей координат и приведенной в движение действием однородного горизонтального градиента модифицированного давления, который компенсируется силой Кориолиса.

При рассмотрении нулевых граничных условий (на твердой плоскости  $z = 0$  и при предельно большом удалении от нее) решение системы (19) при условии (20) имеет вид

$$\begin{aligned} V_x &= U_x [1 - \cos(\xi\lambda_2) \exp(-\xi\lambda_1)] - \\ &\quad - U_y \sin(\xi\lambda_2) \exp(-\xi\lambda_1), \\ V_y &= U_y [1 - \cos(\xi\lambda_2) \exp(-\xi\lambda_1)] + \\ &\quad + U_x \sin(\xi\lambda_2) \exp(-\xi\lambda_1), \end{aligned} \quad (21)$$

где величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и переменная  $\xi$  точно совпадают с определенными выше значениями одноименных величин, используемых в связи с решением (10).

При  $\alpha = 0$ ,  $U_y = 0$  решения (21) точно совпадают с решением, полученным в [14, формулы (4.4.15), (4.4.16)]. В [14] отмечается применимость этого решения для описания течения вблизи земной поверхности. Это течение характеризуется закруткой в виде спирали Экмана. При этом горизонтальные градиенты давления можно считать однородными на расстояниях многих километров. Их возникновение может быть обусловлено в атмосфере крупномасштабными циклонами и антициклонами или изменениями температуры в горизонтальном направлении, происходящими вследствие неравномерного нагрева атмосферы [14]. Характерный вертикальный масштаб, который характеризует толщину пограничного слоя (когда  $\xi \approx \pi$ ) для молекулярного коэффициента кинематической вязкости воздуха равен всего 14 м на полюсах, в то время как его наблюдаемая в атмосфере величина оказывается намного большей (от 500 до 1000 м). Это означает необходимость рассматривать в уравнениях (19) параметр  $\nu$  как некоторый эффективный коэффициент турбулентной вязкости при мелкомасштабном турбулентном перемешивании горизонтальных слоев жидкости [14]. Согласно [14], величина этого коэффициента может быть получена из данных наблюдений спиральной структуры поля скорости в пограничном слое при сопоставлении с соответствующим теоретическим распределением.

Действительно, распределение (21) для изменения скорости ветра с высотой в экмановском пограничном слое в точности совпадает со спиральным распределением, полученным в работе [21] (с помощью теории спиральной турбулентности), если имеет место следующее соотношение между используемыми в (21) параметрами и полуэмпирическими коэффициентами  $k$ ,  $k_h$  [21] турбулентной вязкости:

$$\alpha = \frac{k_h \omega_0}{k}, \quad \nu = \frac{k^2 + k_h^2}{k}.$$

При этом более наглядным делается понимание физического смысла введенных в работе [21] коэффициентов турбулентной вязкости.

**2.** При конечной величине коэффициента внешнего трения в уравнениях (21) из них может быть



получено обобщение известного вывода о повороте по часовой стрелке на  $45^\circ$  направления ветра с изменением высоты при подъеме от земной поверхности до верхней границы экмановского пограничного слоя.

Из (21) следует, что между направлениями движения лагранжевых жидких частиц вблизи земной поверхности (при  $\xi \rightarrow 0$ ) и на верхней границе пограничного слоя (т. е. в пределе  $\xi \rightarrow \infty$ ) имеется соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_\infty + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_\infty}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\infty = \frac{U_y}{U_x}. \quad (22)$$

Выражения для величин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  приведены после формул (10). Соотношение (22) обобщает отмеченный выше вывод о повороте направления ветра с высотой, поскольку при  $\alpha_1 = \alpha/\omega_0 = 0$  (когда в (22)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ) и  $U_y = 0$  из (22) получаем известный результат  $\operatorname{tg} \varphi_0 = 1$  и, соответственно, угол  $\varphi_0 = 45^\circ$ , который не зависит от частоты вращения  $\omega_0$  жидкости как целого [14]. Если выбрать (как и в [14]) направления осей координат так, чтобы над пограничным слоем направление ветра совпадало с направлением оси  $x$ , то из (22) уже следует появление зависимости для угла  $\varphi_0$  от частоты вращения  $\omega_0$  при учете конечной величины коэффициента линейного внешнего (экмановского) трения  $\alpha_1 = \alpha/\omega_0$ . Хотя при этом предельный (на верхней границе пограничного слоя) угол поворота направления ветра с высотой уже отличается от  $45^\circ$ , само направление поворота именно по часовой стрелке (т. е. в антициклоническом направлении вращения стрелки) сохраняется.

**3.** Имеет место, как отмечалось выше, соответствие решений (21) и (10) в рассматриваемом здесь случае, когда проведен учет эффектов линейного внешнего трения. Действительно, выражения для радиальной и тангенциальной компонент скорости в (10) имеют такую же структуру, как и решение (21). При этом выражение для тангенциальной компоненты поля скорости в (10) точно совпадает с  $x$ -компонентой поля скорости в (21), а радиальной компоненты поля скорости в (10) — с  $y$ -компонентой поля скорости в (21), но взятой с противоположным знаком (на необходимость рассмотрения именно противоположного знака указывается и в [14]). Однако такое структурное соответствие между решениями (21) и (10) имеет место не всегда, а только в случае, когда имеют место соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_\infty = \frac{U_y}{U_x} = \alpha_1, \quad U_x = \frac{r\omega_0(|\omega_1| - 1)}{1 + \alpha_1^2}. \quad (23)$$

Появление зависимости от радиальной координаты для компонент скорости  $U_x$ ,  $U_y$  не противоречит уравнениям (19)–(21), где предполагается только независимость этих компонент скорости от вертикальной координаты.

Выполнение первого равенства в (23) с необходимостью приводит к модификации соотношения (22). При этом в (22) предельная величина угла поворота направления ветра при подъеме от земной поверхности уже оказывается зависящей только от одного параметра  $\alpha_1 = \alpha/\omega_0$ . Например, в пределе  $\alpha_1 \ll 1$  из соотношений (22) и (23) следует, что

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_1}{2} + O(\alpha_1^2).$$

В противоположном пределе  $\alpha_1 \gg 1$  из (22), (23) получаем

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha_1} + O(1/\alpha_1^2).$$

Для случая  $\alpha_1 = 1$  из (22) при  $\operatorname{tg} \varphi_\infty = 0$  получаем угол поворота  $\varphi_0 = 22.5^\circ$ , а в случае, соответствующем (23) (когда при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi_\infty = 1$ ), — угол поворота  $\varphi_0 = 67.5^\circ$ .

Для случая, когда  $\alpha_1 = 0$ , второе из равенств в (23), необходимых для установления точного соответствия между (10) и (21), совпадает также с равенством в [14].

Первое равенство в (23) приводит к важному выводу о том, что при учете линейного внешнего трения  $y$ -компонента поля скорости вне пограничного слоя уже не может быть выбранной независимо от  $x$ -компоненты и исключенной подходящим поворотом системы координат. Это соотношение между компонентами поля скорости в (23) можно использовать для определения величины коэффициента линейного внешнего трения  $\alpha$  на основе измерения угла  $\varphi_\infty$  по аналогии с отмеченным выше (и в [14]) способом экспериментального определения величины эффективного коэффициента кинематической вязкости.

Действительно, при выполнении первого равенства в (23) из соотношений (20) получаем, что рассматриваемое движение жидкости формируется именно градиентом давления с нулевой компонентой вдоль оси  $x$  (когда в (20)  $G_x = 0$ ). При этом из (20) следует, что

$$U_x = \frac{G_y}{2\omega_0(1 + \alpha_1^2)\rho_0}. \quad (24)$$

Можно, наоборот, рассматривать  $G_x = 0$ , когда из уравнений гидродинамики, приводящих к балансу сил в виде (20), следует однозначная связь между

компонентами скорости  $U_x$  и  $U_y$ , совпадающая с первым равенством в (23), т.е.  $U_y = \alpha_1 U_x$ . Из (24) и второго равенства в (23) следует взаимосвязь параметров, определяющих решения (10) и (21) в виде (при  $\omega > 0$ )

$$G_y/\rho_0 = (\omega^2 - \omega_0^2)r \approx 2r\omega_0(\omega - \omega_0). \quad (25)$$

Здесь уже отсутствует зависимость от величины линейного внешнего трения и само соотношение (25) точно соответствует обсуждаемой в [14] связи между модифицированным градиентом давления, определяющим движение в слое Экмана, и управляющими параметрами в задаче Кармана. При этом условию ДЦН  $\omega_0 > \omega$ , при котором возникает циклон-антициклонная вихревая асимметрия, соответствует условие отрицательности величины градиента давления в (25).

### 5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РОЖДЕНИЯ ВИХРЕЙ

Рассмотрим связь между условием ДЦН и условием отрицательности энергии возмущений во вращающейся системе координат при достаточно большой надкритической угловой скорости вращения.

Действительно, известно следующее представление энергии во вращающейся (вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_0$ ) системе координат  $E = E_0 - M_{0z}\omega_0$  через энергию и момент количества движения в инерциальной системе координат (здесь они имеют обозначение с индексом «0»). При этом отрицательность энергии  $E < 0$  возможна при достаточно большой скорости вращения  $\omega_0 > \omega_{0th} = E_0/M_{0z}$  [22, 23]. В [23] такое условие на частоту вращения рассматривается в связи с определением порога образования сингулярных вихревых нитей во вращающемся сосуде с жидким гелием, находящемся в сверхтекучем состоянии.

Аналогично для точного решения системы уравнений гидродинамики (1) в виде (2) при выполнении равенств (11), (15) и (16) выражение для кинетической энергии соответствующего течения, рассматриваемого во вращающейся системе координат, имеет вид [18]

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_0}{2} [V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2 - r^2\omega_0^2] = \\ &= \frac{\rho_0\omega_0^2}{2} [r^2a + 4z^2b^2], \\ a &= b^2 + x^2 - 1, \quad b^2 = \alpha_1^2 x^2 / (1+x)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где величина  $x$  определена в (16). В (26), как это сделано в [18], можно использовать инвариантность

величины  $\Psi = r^2z = \Psi_0 = \text{const}$ , являющейся функцией тока для рассматриваемого точного решения уравнений гидродинамики (1). При этом в (26) можно использовать равенство  $z = \Psi_0/r^2$ , когда стоящее в квадратных скобках выражение является функцией только радиальной координаты; при этом

$$2E/\rho_0\omega_0^2 = r^2a + 4b^2\Psi_0^2/r^4.$$

Отсюда следует, что необходимым условием отрицательности энергии  $E$  является выполнение неравенства  $x^2 < 1$ , которое обеспечивает реализацию ДЦН, наряду с условием  $x < 0$ , приводящим к неравенству (12). Очевидно, однако, что это условие не является достаточным для выполнения  $E < 0$  в (26). Таким достаточным условием является выполнение неравенства  $a < 0$  (при условии рассмотрения течения в плоскости  $z = 0$ ):

$$\alpha_1^2 x^2 < (1+x)^3(1-x). \quad (27)$$

Из (27) в пределе  $\alpha_1^2 \ll 1$  следует, что дополнительно к условию  $x < 0$  (приводящему к неравенству  $\omega_1 < 1$  в (12)) имеется теперь неравенство

$$x > -1 + (\alpha_1^2/2)^{1/3},$$

приводящее, наряду с (12), к условию отрицательности энергии в виде

$$1 > \omega_1 > 2(\alpha_1^2/2)^{1/3}. \quad (28)$$

В свою очередь, из (28) следует наличие ограничения на частоту вращения как снизу, так и сверху,

$$\omega < \omega_0 < \omega/2(\alpha_1^2/2)^{1/3},$$

подобно тому, как это имеет место в (18).

В случае, когда  $\alpha_1 = 1$ , неравенство (27) уже выполняется при  $-0.4685 < x < 0$ , что не приводит к каким-либо новым ограничениям на величину параметра  $\omega_1$ , совместимым с условием (12) (из (27) при этом следует, что  $-2.257 < \omega_1^2 < 1.565$ ). В результате для этого случая только условие (12) обеспечивает реализацию ДЦН и циклон-антициклонную вихревую асимметрию.

Отметим, что условие (27), например в случае  $\alpha_1 = 1$ , может выполняться и для  $x > 0$ , когда условие ДЦН не выполнено, но условие  $E < 0$ , определяемое из (27), удовлетворяется, если  $\omega_1 > 1.98$  или  $\omega > 1.98\omega_0$ . При этом, согласно (13), реализуются вихри, имеющие уже циклоническое направление

циркуляции. Это означает, что выводы энергетической теории могут как охватывать область реализации ДЦН, так и описывать возможность энергетически выгодного рождения циклонических вихрей уже при надкритических частотах (вращения жидкости вдали от диска)  $\omega$  при фиксированной частоте вращения (диска)  $\omega_0$ .

Как следует из результатов прямого численного эксперимента [24], а также из выражений (18), (28), циклон-антициклонная вихревая асимметрия реализуется именно в ограниченном сверху и снизу интервале частот вращения системы. При этом, однако, в отличие от результатов эксперимента [7] (см. рисунок) средняя величина куба завихренности в указанном интервале частот оказывается положительной, что указывает на доминирование циклонического, а не антициклонического типа циркуляции.

## 6. ВЫВОДЫ

Итак, в настоящей работе на основе решения модифицированной задачи Кармана (10) и энергетической теории получены условия (12) и (28) нарушения киральной вихревой симметрии и возникновения циклон-антициклонной асимметрии. Показано соответствие выводов развиваемой теории с данными эксперимента [7], что иллюстрируется на рисунке. Полученные в настоящей работе выводы могут быть использованы в связи с решением задачи установления относительного вклада циклонической и антициклонической вихревых активностей в формировании спектра глобальных климатических возмущений [25, 26]. При этом условие ДЦН (12) на параметр  $\omega_1$ , соответствующий числу Россби, вполне коррелируют с обычно рассматриваемыми числами Россби для крупномасштабных циклонических и антициклонических вихрей в атмосфере и в океане.

Получено при этом и обобщение (22) известного вывода о спиральном (типа спирали Экмана) изменении направления скорости ветра с высотой. В соотношении (22) в явном виде учитывается придонное (приземное) внешнее экмановское трение. В результате величина угла поворота ветра уже может отличаться от известной величины  $45^\circ$  в обе стороны в зависимости от величины безразмерного параметра  $\alpha_1 = \alpha/\omega_0$ , связанного с величиной коэффициента внешнего трения  $\alpha$  и частотой вращения системы  $\omega_0$ .

Отметим, что сам по себе факт возможности существования ДЦН, обусловленной линейной

неустойчивостью при учете эффектов трения, для вращающихся систем был известен уже давно — задолго до его независимого описания в работе [5]. На него было указано еще в 1907 г. Ламбом [27, 28] в связи с рассмотрением «вековой» неустойчивости. Однако, при этом в [27, 28] и последующих работах [29–31] не было обращено внимание на то, что при условиях реализации ДЦН имеет место спонтанное нарушение киральной симметрии, приводящее к наблюдаемому явлению циклон-антициклонной вихревой асимметрии, которое составляет предмет рассмотрения настоящей работы и является ее основным результатом.

Выражаю признательность И. И. Мохову, О. Г. Чхетиани и И. Г. Якушкину за внимание к работе и обсуждения, И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за информацию о работе [24], а также Ф. А. Погарскому и А. Г. Чефранову за помощь в подготовке рисунка.

Работа выполнена в рамках проекта РНФ 14-17-00806.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры*, Наука, Москва (1990).
2. Б. М. Бубнов, Х. Дж. Фернандо, *Изв. АН СССР, сер. ФАО* **35**, 487 (1999).
3. В. Ф. Тарасов, В. Г. Макаренко, *ДАН СССР* **305**, 297 (1989).
4. В. И. Петвиашвили, *Письма в ЖЭТФ* **32**, 632 (1980).
5. С. Г. Чефранов, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 312 (2001).
6. L. P. Graves, J. C. McWilliams, and M. T. Montgomery, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **100**, 151 (2006).
7. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, *Доклады РАН* **425**, 821 (2009).
8. С. В. Кострыкин, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, *ЖЭТФ* **139**, 395 (2011).
9. G. Haller, F. J. Beron-Vera, arXiv:1308.2352v1 [physics.ao-ph].
10. B. J. Hoskins, *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **100**, 480 (1974).
11. M. J. Molemaker, J. C. McWilliams, and I. Yavneh, *J. Phys. Ocean.* **35**, 3720 (2004).

12. A. Stegner and D. G. Dritschel, *J. Phys. Ocean.* **30**, 2562 (2000).
13. L. M. Polvani, J. C. McWilliams, M. A. Spall, and R. Ford, *Chaos* **4**, 177 (1994).
14. Дж. Бетчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
15. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, *УФН* **160**, 7 (1990).
16. Ф. В. Должанский, *Лекции по геофизической гидродинамике*, Москва (2006).
17. S. G. Chefranov, arXiv:1406.0988v1 [physics.flu-dyn].
18. В. Н. Блажко, С. Г. Чефранов, *Изв. РАН, сер. ФАО* **41**, 593 (2005).
19. С. Г. Чефранов, *ЖЭТФ* **126**, 1133 (2004).
20. В. М. Boubnov and P. B. Rhines, in *Turbulent Mixing in Geophysical Flows*, ed. by P. F. Linden and J. M. Redondo, CIMNE, Barcelona (2001), p. 35.
21. О. Г. Чхегиани, *Изв. РАН, сер. ФАО* **37**, 614 (2001).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
23. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
24. E. Deusebio, G. Boffetta, E. Lindborg, and Mussacchio, *Phys. Rev. E* **90**, 023005 (2014).
25. И. И. Мохов, О. И. Мохов, В. К. Петухов, Р. Р. Хайрулин, *Изв. РАН, сер. ФАО* **28**, 7 (1992).
26. М. А. Акперов, М. Ю. Бардин, Е. М. Володин и др., *Изв. РАН, сер. ФАО* **43**, 1 (2007).
27. H. Lamb, *Proc. Roy. Soc. London A* **LXXX**, 165 (1907).
28. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ-Гостехиздат, Москва–Ленинград, (1947), с. 714.
29. Р. А. Литтлтон, *Устойчивость вращающихся масс жидкости*, Иж.: НИЦ, Ижевск (2001), сс. 46–57.
30. O. N. Kirillov and F. Verhulst, *Z. Angew. Math. Mech.* **90**, 462 (2010).
31. O. N. Kirillov, *Fortschr. Phys.* **61**, 205 (2013).