

# ТЕОРИЯ МУЛЬТИНЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К СОЛИТОННЫМ ПРОЦЕССАМ В ФЕРРИТ-СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

*М. А. Черкасский<sup>a\*</sup>, А. А. Никитин<sup>a,b</sup>, Б. А. Калиникос<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) 197376, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики 197101, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 сентября 2015 г.

Излагается теория, позволяющая описывать волновые процессы, происходящие в волноведущих средах, обладающих несколькими типами нелинейностей, — мультинелинейных средах. Показано, что для описания единого волнового процесса, происходящего в таких средах, можно использовать нелинейное уравнение Шредингера. Обнаружено, что конкуренция между электрической и магнитной волновыми нелинейностями слоистой феррит-сегнетоэлектрической мультинелинейной структуры приводит к переходу от общей отталкивающей к общей притягивающей нелинейности.

DOI: 10.7868/S004445101604012X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько десятилетий активно изучаются нелинейные волновые эффекты [1–4]. Одним из важных нелинейных эффектов является самовоздействие [1, 4]. По сути, оно заключается в изменении свойств волноведущей среды при распространении в ней волны. В свою очередь, измененные свойства среды влияют на волну. При этом могут возникать устойчивые состояния, т. е. начинаться процессы формирования и распространения солитонов [1, 5].

Солитоны исследуются в различных средах. В последнее время были достигнуты определенные успехи в исследовании солитонов в оптических волокнах [6, 7], оптических микрорезонаторах [8], конденсате Бозе–Эйнштейна [9, 10], ферромагнетиках [11] и мультиферроиках [12–14]. Кроме солитонов в нелинейных средах также могут возникать динамический хаос [3, 15–18], собственная [19–22] и наведенная [23] модуляционная неустойчивости, бистабильность [24] и другие явления.

Различные волноведущие среды обладают различными типами нелинейностей, т. е. характерной

«обратной связью» между амплитудой волны и свойствами среды. Отметим, что ранее преимущественно исследовались среды, обладающие только одним типом нелинейности. Однако очевидно, что как фундаментальной, так и прикладной интерес представляют также среды, в которых могут одновременно проявляться нелинейности нескольких типов. Целесообразно ввести новое название для такого явления — мультинелинейность. Как было показано ранее в работах [13, 14], мультиферроидные среды, включающие ферромагнитную и сегнетоэлектрическую подсистемы, демонстрируют двойную волновую нелинейность, обусловленную совместным действием нелинейностей каждой из подсистем.

Данная работа посвящена изучению мультинелинейности и ее влиянию на солитонные процессы. Отдельное внимание уделяется искусственным мультиферроикам — слоистым феррит-сегнетоэлектрическим структурам, в которых мультинелинейность проявляется как взаимодействие нелинейностей двух слоев структуры.

## 2. ТЕОРИЯ МУЛЬТИНЕЛИНЕЙНОСТИ

Наиболее простой способ создать мультинелинейную среду — это скомбинировать несколько волноведущих сред, обладающих различными типами

\* E-mail: macherkasskii@hotmail.com

нелинейностей. Если в подобной гибридной среде происходит единый волновой процесс, то можно найти его дисперсионную характеристику. Затем мы можем выбрать одну компоненту волны, для удобства назвав ее «основной», а остальные компоненты выразить через нее. Тогда, с помощью варьирования основной компоненты, становится возможным исследовать нелинейное изменение свойств среды, вызванное процессом распространения интенсивных волн. При этом мы можем записать нелинейное дифференциальное уравнение относительной основной компоненты, которое позволит изучать процессы распространения волновых пакетов в мультинелинейной среде. Для этого можно использовать метод огибающих или другие методы [25]. Перейдем к подробному изложению результатов исследований.

Пусть в мультинелинейной среде несколько ее свойств связаны с  $m$  амплитудами волн:

$$\sigma = \mathbf{S}(\mathbf{a}),$$

где  $\sigma$  — вектор свойств среды,  $\mathbf{a}$  — вектор амплитуд волн,  $\mathbf{S}$  — вектор-функция, отражающая нелинейные свойства среды. Также предположим, что между амплитудами волн возможно найти линейную связь. Тогда можно выразить все компоненты вектора амплитуд волн через основную компоненту  $a_1$ :  $a_i = C_i a_1$ , где  $C$  — коэффициент связи, а индекс  $i$  принимает значения от 1 до  $m$ . Очевидно, что  $C_1 = 1$ , а выбор основной компоненты произволен. Таким образом мы можем перейти к соотношению, связывающему амплитуду волны  $a_1$  с вектором свойств  $\sigma$ :

$$\sigma = \mathbf{S}(C_1 a_1, C_2 a_1, \dots, C_m a_1).$$

Ограничиваясь рассмотрением слабо нелинейных сред, которые, тем не менее, широко распространены, мы можем разложить каждое свойство  $\sigma_i$  в ряд Тейлора:

$$\sigma_i = \sigma_{i0} + \frac{\partial S_i}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_i}{\partial a_1^2} \delta a_1^2 + \dots, \quad (1)$$

где член  $\sigma_{i0}$  характеризует линейное свойство среды, а остальные члены соответствуют различным степеням нелинейностей. Подстановка данного разложения в общую дисперсионную характеристику позволит исследовать влияние мультинелинейности.

С другой стороны, используя понятие единого волнового процесса, в котором выделяется одна основная компонента волн, а другие выражаются через нее, можно записать нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию

спектрально-узкого волнового пакета в мультинелинейной среде. В качестве такого уравнения может быть использовано нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) или его обобщенная форма. Отметим, что это уравнение ранее применялось для исследования нелинейной волновой динамики и солитонных процессов в мультиферроиках, ферромагнетиках, оптических волокнах и в других средах [1]. Популярность названного уравнения объясняется тем, что оно выводится исходя из общих физических представлений.

Для того чтобы получить НУШ, необходимо использовать разложение закона дисперсии в ряд Тейлора. Обозначим неявный закон дисперсии с учетом затухания  $\Gamma$  как  $D(\omega_k, \sigma, \mathbf{k}, i\Gamma) = 0$ . При этом мы ограничимся типами нелинейности, в которых играет роль только модуль волны, но не ее фаза; тогда удобно ввести новое обозначение  $|b_i|^2 = a_i$ . Следовательно, разложение закона дисперсии будет иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_k(\sigma, \mathbf{k}) + i\Gamma(\sigma) = & \omega_0 + \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{k}} \delta \mathbf{k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial \mathbf{k}^2} \delta \mathbf{k}^2 + \\ & + \frac{\partial \omega_k}{\partial |b_1|^2} |b_1|^2 + \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial |b_1|^4} |b_1|^4 + \\ & + i \left( \Gamma_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial |b_1|^2} |b_1|^2 + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial |b_1|^4} |b_1|^4 \right) + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что члены, содержащие коэффициенты вида  $\partial^i \omega_k / \partial |b_1|^{2i}$ , описывают нелинейные явления и именно они могут быть использованы для исследования влияния мультинелинейности на волновые процессы.

Подстановка выражения (1) в (2) и использование обратного преобразования Фурье позволяют получить НУШ с учетом различных волновых эффектов. В данной работе мы не будем подробно рассматривать все многообразие эффектов, а сосредоточимся на учете влияния мультинелинейности. Для этого запишем НУШ в системе координат, движущейся вместе с волновым пакетом, следующим образом:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d}{2} \nabla^2 b_1 + \Lambda |b_1|^2 b_1 + \Gamma_0 = 0,$$

где общий мультинелинейный коэффициент обозначен как  $\Lambda = \partial \omega_k / \partial |b_1|^2$ , дисперсионный коэффициент —  $d = \partial^2 \omega_k / \partial \mathbf{k}^2$ , а  $\Gamma_0$  — линейное затухание. Учет мультинелинейности дает следующий вид формулы для расчета коэффициента  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \frac{\partial \omega}{\partial |b_1|^2} = - \frac{1}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} \sum_{i=1}^m C_i \frac{\partial D}{\partial |b_i|^2} = \sum_{i=1}^m C_i n_i,$$

где

$$n_i = -\frac{\partial D / \partial |b_i|^2}{\partial D / \partial \omega}.$$

Из данной формулы видно, что линейная связь между амплитудами волн  $|b_1|^2, |b_2|^2, \dots, |b_m|^2$  приводит к линейной связи между нелинейными коэффициентами  $n_i$ , каждый из которых отражает влияние одной из нелинейностей на волновой процесс.

Забегая вперед, отметим, что для феррит-сегнетоэлектрической слоистой структуры коэффициенты связи  $C_i$  зависят от частоты, волнового вектора, поперечной координаты и параметров среды, что приводит к неравномерному нелинейному изменению дисперсионной характеристики на различных ее участках при увеличении амплитуды волны. Более того, как будет показано ниже, различные типы нелинейностей могут конкурировать между собой и, следовательно, возможен переход от общей отталкивающей нелинейности к притягивающей.

### 3. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ФЕРРИТОВЫХ И СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Перейдем к применению изложенной выше теории для изучения мультинелинейности в двухслойной структуре, состоящей из слоев феррита и сегнетоэлектрика. В процессе изучения было сделано несколько шагов. Вначале был задан вид нелинейности в каждом слое, а затем найдены коэффициенты связи  $C_i$  между волнами в разных слоях, т. е. между переменной намагниченностью в феррите и напряженностью электрического поля в сегнетоэлектрике. Далее, с помощью численного решения НУШ был выполнен анализ влияния мультинелинейности на волновые процессы, при этом особое внимание уделялось процессам формирования и распространения солитонов огибающей.

Хорошо известно, что в феррит-сегнетоэлектрической структуре распространяются гибридные электромагнитно-спиновые волны (ЭСВ), причем оба слоя структуры обладают нелинейными волновыми свойствами. Ферритовому слою присуща магнитная волновая нелинейность, которая проявляется как изменение частоты ЭСВ при увеличении ее амплитуды. Физический механизм этой нелинейности на языке уравнения движения намагниченности Ландау – Лифшица может быть представлен следующим образом. Рост амплитуды волны приводит к изменению статического свойства феррита — намагниченности насыщения, что влечет за собой изменение частоты прецессии, которое и приводит к из-

менению частоты ЭСВ. Обычно при теоретическом анализе учитывается первая степень магнитной волновой нелинейности [26]. Для учета используется разложение (1), причем в законе дисперсии ЭСВ выполняется замена  $\omega_{M_0} = 2\pi|\gamma|M_0$  на

$$\omega_M = 2\pi|\gamma|M_0(1 - |u|^2), \quad (3)$$

где  $M_0$  — намагниченность насыщения,  $|u|^2$  — квадрат нормированной амплитуды волны переменной намагниченности, которая распространяется в ферритовом слое, а  $\gamma$  — гиромагнитное отношение для электрона. При этом

$$|u|^2 = (|m_x|^2 + |m_y|^2) / 2M_0^2,$$

где  $m_x$  и  $m_y$  суть проекции вектора переменной намагниченности

$$\mathbf{m} \propto \exp[i(\omega t - k_x x)].$$

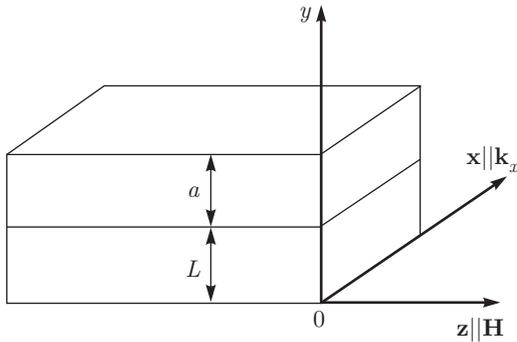
В сегнетоэлектрическом слое изменение частоты волны возникает из-за уменьшения диэлектрической проницаемости при увеличении напряженности электрического поля волны. Подобное явление называется электрической волновой нелинейностью. Оно также учитывается до первой степени разложения (1) с помощью подстановки в соответствующий закон дисперсии выражения [27, 28]:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_L + N_\varepsilon |\mathbf{E}|^2, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_e$  — относительная диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика,  $\varepsilon_L$  — линейная часть относительной диэлектрической проницаемости,  $N_\varepsilon$  — коэффициент диэлектрической нелинейности, а  $E$  — напряженность электрического поля волны, которая распространяется в сегнетоэлектрическом слое. Таким образом, двухслойная феррит-сегнетоэлектрическая слоистая структура обладает мультинелинейностью, которая включает магнитную волновую и электрическую волновую нелинейности каждого слоя. Заметим, что с помощью внешних электрических и магнитных полей смещения возможно управлять как линейными, так и нелинейными волновыми процессами, происходящими в ферритовых и сегнетоэлектрических слоях.

### 4. ВЛИЯНИЕ МУЛЬТИНЕЛИНЕЙНОСТИ НА ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ФЕРРИТ-СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Пусть исследуемая двухслойная феррит-сегнетоэлектрическая структура находится в свободном пространстве и имеет бесконечную протяженность



**Рис. 1.** Двухслойная феррит-сегнетоэлектрическая структура. Через  $a$  обозначена толщина сегнетоэлектрика,  $L$  — толщина феррита,  $\mathbf{H}$  — вектор постоянного магнитного поля,  $\mathbf{k}_x$  — направление распространения ЭСВ

в плоскости  $xz$ . Конфигурация структуры и расположение осей декартовой системы координат показаны на рис. 1. Структура помещена во внешнее постоянное магнитное поле, направленное по касательной к плоскости структуры. При этом ферритовый слой намагничен до насыщения, а сегнетоэлектрический слой находится в параэлектрической фазе. Названные условия соответствуют обычной экспериментальной ситуации, в которой исследуется, например, структура, состоящая из железо-иттриевого граната и титаната бария стронция [29, 30].

В данной конфигурации волноведущей структуры уравнения Максвелла распадаются на две независимые системы уравнений: для ТЕ-мод, содержащих компоненты полей  $E_z, H_x, H_y$ , и для ТМ-мод, имеющих компоненты  $H_z, E_x, E_y$ . В данной работе мы ограничимся рассмотрением ТЕ-мод, так как именно они демонстрируют наиболее сильную гибридизацию между поверхностными спиновыми волнами, распространяющимися в ферритовом слое, и электромагнитными волнами, распространяющимися в сегнетоэлектрическом слое [31].

Задача поиска коэффициента связи между волнами в разных слоях решается исходя из уравнений Максвелла и граничных условий электродинамики. При этом из уравнений Максвелла выводятся уравнения Гельмгольца для каждого слоя и записываются их решения. Поскольку граничные условия позволяют записать связь между коэффициентами в решениях уравнений Гельмгольца для каждого слоя, мы можем найти выражение, связывающее компоненты  $H_x$  и  $H_y$  в ферритовом слое с напряженностью электрического поля  $E_z$  в сегнетоэлектрическом слое. Затем, используя тензор магнитной проницаемости, мы можем выразить амплитуду волны переменной намагниченности через  $H_x$  и  $H_y$  и, в ко-

нечном итоге, получить формулу, связывающую  $E_z$  в сегнетоэлектрике с  $|u|^2$  в феррите:

$$|E_z|^2 = C_2 |u|^2, \tag{5}$$

где коэффициент связи имеет вид

$$C_2 = 2(T_1 + T_2)^2 / \{B_1 \operatorname{ch}^2(\kappa_h y) + B_3 \operatorname{sh}(\kappa_h y) \operatorname{ch}(\kappa_h y) + B_2 \operatorname{sh}^2(\kappa_h y)\}, \tag{6}$$

причем

$$T_1 = \operatorname{ch}(\kappa_h L) \times [A_1 \cos(\kappa_e(L - y)) + A_2 \sin(\kappa_e(L - y))], \tag{7}$$

$$T_2 = \operatorname{sh}(\kappa_h L) \times [A_3 \cos(\kappa_e(L - y)) + A_4 \sin(\kappa_e(L - y))]. \tag{8}$$

В выражениях (6)–(8) использованы следующие обозначения для поперечных волновых чисел соответственно в ферритовом слое, в сегнетоэлектрическом слое и в свободном пространстве:

$$\kappa_h = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_h \mu_0 \omega^2 \mu_\perp}, \quad \kappa_e = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \omega^2 - k_x^2},$$

$$\kappa_s = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}.$$

В последних формулах  $\varepsilon_h$  — относительная диэлектрическая проницаемость феррита,

$$\mu_\perp = (\mu^2 - \mu_a^2) / \mu, \quad \mu = 1 + \omega_H \omega_{M_0} / (\omega_H^2 - \omega^2),$$

$$\mu_a = \omega \omega_{M_0} / (\omega_H^2 - \omega^2), \quad \omega_H = 2\pi |\gamma| H_0.$$

Формулы для расчета  $A_i, B_i$  приведены в Приложении.

Отметим, что в коэффициент связи между  $E_z$  и  $|u|^2$  входят величины  $\omega_{M_0}$  и  $\varepsilon_e$ , поэтому существует возможность включить нелинейность и в  $C_2$ . Однако, рассматривая установившееся состояние, при котором наблюдается равновесие между воздействием волны на среду и обратным воздействием среды на волну, мы будем полагать коэффициент связи линейным.

Из выражения (6) следует, что нелинейный сдвиг волнового числа зависит от поперечной координаты. Строгий учет этой зависимости приводит к задаче, решение которой может быть получено только численными методами, например, с помощью моделирования пространственного распределения полей. Вследствие этого становится оправданным приближение замены зависящего от поперечной координаты коэффициента связи  $C_2$  его средним значением

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{L} \int_0^L C_2(y) dy. \tag{9}$$

Соотношения (3)–(9) связывают два типа волновой нелинейности — электрическую и магнитную.

Благодаря этому становится возможным, варьируя  $|u|^2$ , исследовать влияние амплитуды ЭСВ на закон дисперсии исследуемой структуры. Для вывода нелинейного закона дисперсии воспользуемся линейным законом дисперсии ТЕ-моды ЭСВ и подставим в него выражения (3)–(9), которые описывают нелинейные свойства среды.

Анализ найденного таким образом нелинейного закона дисперсии был выполнен для следующих случаев: для случая учета только электрической нелинейности, для случая учета только магнитной нелинейности и для случая учета мультинелинейности. Параметры, которые были использованы для анализа и построения графиков, соответствовали типичным параметрам пленки железо-иттриевого граната и твердого раствора титаната бария стронция, а именно:  $H_z = 1500$  Э,  $M_0 = 1750$  Гс,  $a = 500$  мкм,  $L = 20$  мкм,  $\varepsilon_e = 865$ ,  $\varepsilon_h = 14$ ,  $N_e = -7.6963 \cdot 10^{-8}$ ,  $\text{tg } \delta = 0.04$  и  $\Delta H = 0.3$  Э.

На рис. 2 изображены дисперсионные характеристики ЭСВ в исследуемой структуре и влияния различных типов нелинейностей на характеристики. Как следует из графиков линейных законов дисперсии, в точке фазового синхронизма ( $k_0 = 25$  рад/см,  $f_0 = 6$  ГГц) происходит гибридизация волн, что приводит к образованию дисперсионной щели. В ходе исследования было установлено, что весь диапазон волновых чисел в области гибридизации можно условно разделить на несколько областей. Область до дисперсионной щели  $k < 23$  рад/см соответствует такому распределению энергии волны, при котором она, в основном, сосредоточена в сегнетоэлектрическом слое. Область после дисперсионной щели  $k > 27$  рад/см соответствует сосредоточению энергии в ферритовом слое. Заметим, что положение границ названных областей не является четким и зависит от параметров структуры.

Нелинейный закон дисперсии, изображенный на рис. 2, для наглядности построен при сравнительно большом значении  $|u|^2 = 10^{-1}$ . На рис. 2а видно, что волновая магнитная нелинейность сдвигает кривые закона дисперсии вниз по частоте. При этом наклон кривых остается постоянным. Рисунок 2б показывает, что волновая электрическая нелинейность приводит к уменьшению диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика, что проявляется как уменьшение наклона дисперсионных кривых. Рисунок 2в демонстрирует, что мультинелинейность проявляется в виде суммарного эффекта — дисперсионные кривые сдвигаются вниз по частоте и одновременно изменяется их наклон.

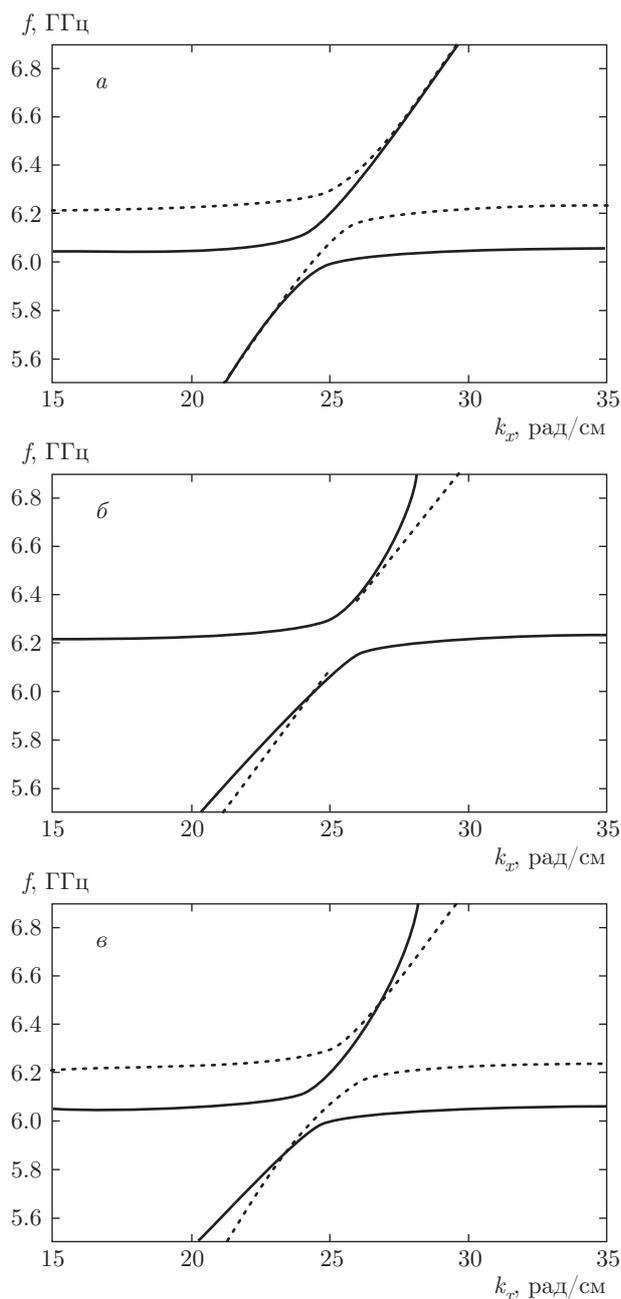
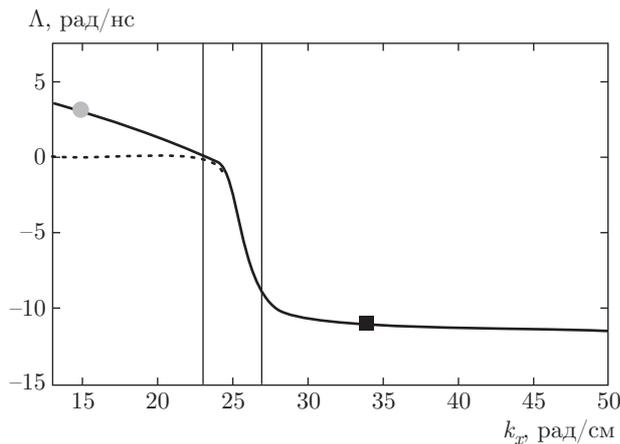


Рис. 2. Дисперсионные характеристики ЭСВ: а — с учетом влияния только магнитной нелинейности, б — только электрической нелинейности, в — мультинелинейности. На всех графиках пунктирными линиями обозначены линейные законы дисперсии, а сплошными линиями — нелинейные законы дисперсии с учетом различных типов нелинейностей

## 5. МУЛЬТИНЕЛИНЕЙНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ НУШ

Как было показано выше, для исследования солитонов огибающей ЭСВ, распространяющихся в



**Рис. 3.** Зависимость мультилинейного коэффициента от волнового числа (сплошная линия) и зависимость магнитного нелинейного коэффициента от волнового числа (пунктирная линия). Вертикальные линии показывают границы дисперсионной щели. Символами показаны те значения  $\Lambda$ , которые были использованы при моделировании солитонных процессов

среде с мультилинейностью, можно использовать нелинейное уравнение Шредингера. Для наглядной демонстрации мультилинейности в данной работе мы использовали одномерное распространение волн, тогда НУШ записывается следующим образом:

$$i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \Gamma_0 u \right) - \frac{d}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Lambda |u|^2 u = 0.$$

Ключевым моментом в данном случае является расчет мультилинейного коэффициента  $\Lambda = n_M + C_2(\omega, k)n_E$ , в котором  $n_M$  и  $n_E$  суть коэффициенты магнитной волновой и электрической волновой нелинейностей. Отметим, что поведение коэффициента  $\Lambda$  определяется не только нелинейными, но и дисперсионными свойствами каждой подсистемы. Так, было установлено, что в различных интервалах волновых чисел степень влияния электрической и магнитной нелинейностей различна. При этом магнитная нелинейность сдвигает дисперсионную кривую ЭСВ вниз по частоте, т. е.  $\Lambda$  делает отрицательной, а электрическая нелинейность, изменяя наклон дисперсионных кривых, действует противоположным образом. Таким образом, волновые магнитная и электрическая нелинейности конкурируют между собой.

С целью анализа влияния различных типов нелинейности на солитонные процессы  $\Lambda$  рассчитывалась для двух случаев: для случая учета только магнитной нелинейности и для случая учета обо-

их типов нелинейности. Результаты расчета  $\Lambda$  показаны на рис. 3. На рисунке видно, что магнитная нелинейность стремится к нулю в области до дисперсионной щели  $k < 23$  рад/см. Этот эффект связан с перераспределением энергии ЭСВ из ферритовой пленки в сегнетоэлектрический слой. В области щели  $23 < k < 27$  рад/см влияние магнитной нелинейности возрастает и она плавно насыщается при  $k > 27$  рад/см. Следует отметить, что при этом значение мультилинейного коэффициента  $\Lambda$  стремится к значению нелинейного коэффициента для ЭСВ, распространяющихся в одиночной ферритовой пленке.

Электрическая нелинейность при выбранном значении  $N_\epsilon$  не способна существенно повлиять на значение мультилинейного коэффициента после дисперсионной щели. Однако в области до щели, когда энергия ЭСВ сосредоточена, в основном, в сегнетоэлектрическом слое, электрическая нелинейность начинает играть существенную роль, что проявляется как возрастание величины  $\Lambda$ .

Следует отметить также, что из-за конкуренции нелинейностей различных подсистем слоистой структуры при переходе через дисперсионную щель происходит смена знака  $\Lambda$ . Поскольку произведение  $\Lambda d$  в данном случае является критерием Лайтхилла, показывающим, какой тип солитонов огибающей возможно возбудить в структуре [25], смена знака означает изменение типа солитонов. Таким образом, мультилинейный эффект в исследуемой структуре приводит к переходу от общей отталкивающей нелинейности к притягивающей.

## 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Перейдем к обсуждению результатов численного исследования процессов формирования солитонов в мультилинейной среде. Согласно критерию Лайтхилла при  $\Lambda d < 0$  могут формироваться светлые солитоны огибающей. Благодаря электрической нелинейности в области до дисперсионной щели при  $k < 23$  рад/см мультилинейный коэффициент является положительным и критерий Лайтхилла для светлых солитонов выполняется. В области после дисперсионной щели при  $k > 27$  рад/см влияние электрической нелинейности уменьшается, а магнитной начинает возрастать, поэтому  $\Lambda$  изменяет знак. Численное моделирование было выполнено для этих двух типичных случаев.

В первом случае использовался входной гауссовский импульс на частоте  $f = 4.435$  ГГц с несущим волновым числом  $k_1 = 14$  рад/см. Огибающая импульса задавалась как

$$u = u_0 \exp(-2(t/\tau_0)^2),$$

где  $\tau_0 = \ln(2)^{-1/2}T_0$ , а  $T_0$  — длительность импульса на половине максимальной амплитуды. Были использованы следующие параметры:  $u_0 = 0.5373$  и  $T_0 = 1.2$  нс. Указанные значения амплитуды и длительности являются пороговыми для формирования солитона первого порядка на выбранной частоте для указанных ранее параметров феррит-сегнетоэлектрической структуры. При этом  $d = -1868$  м<sup>2</sup>/(рад·с),  $\Lambda = 3.08 \cdot 10^9$  рад/с и  $\Gamma_0 = 90$  рад·кГц. Значение мультинелинейного коэффициента показано на рис. 3 кружком. Следует отметить, что вносимые сегнетоэлектриком потери на данном значении несущего волнового числа приводят к высокому значению частоты релаксации и, как следствие, к необходимости использовать сравнительно большое значение  $u_0$  для превышения солитонного порога.

Результаты моделирования представлены на рис. 4а, на котором видно, что при  $t = 7.5$  нс формируется светлый солитон огибающей. О солитонной природе полученного волнового образования говорит постоянство фазы огибающей внутри импульса.

Во втором случае, т. е. в случае отталкивающей нелинейности  $\Lambda d > 0$ , несущее волновое число задавалось в области после дисперсионной щели и было равно  $k_2 = 34$  рад/см, а частота  $f = 6.235$  ГГц. При этом использовался входной сигнал в виде гиперболического тангенса. Коэффициенты НУШ в данном случае равны:  $d = -145$  м<sup>2</sup>/(рад·с),  $\Lambda = -1.09 \times 10^{10}$  рад/с и  $\Gamma_0 = 1.8$  рад·кГц. Значение коэффициента  $\Lambda$  отмечено на рис. 3 квадратом.

Результаты моделирования приведены на рис. 4б. На рисунке видно, что при  $t = 15$  нс формируется черный солитон, имеющий скачок фазы на  $\pi$  в точке минимума амплитуды. Также в процессе распространения наблюдалось формирование боковых серых солитонов.

Таким образом, в результате численных экспериментов было установлено, что в феррит-сегнетоэлектрической структуре могут формироваться как светлые, так и темные солитоны огибающей ЭСВ. При этом тип солитонов зависит от несущей частоты и волнового числа. Частотная зависимость типа солитонов обусловлена тем, что мультинелинейный

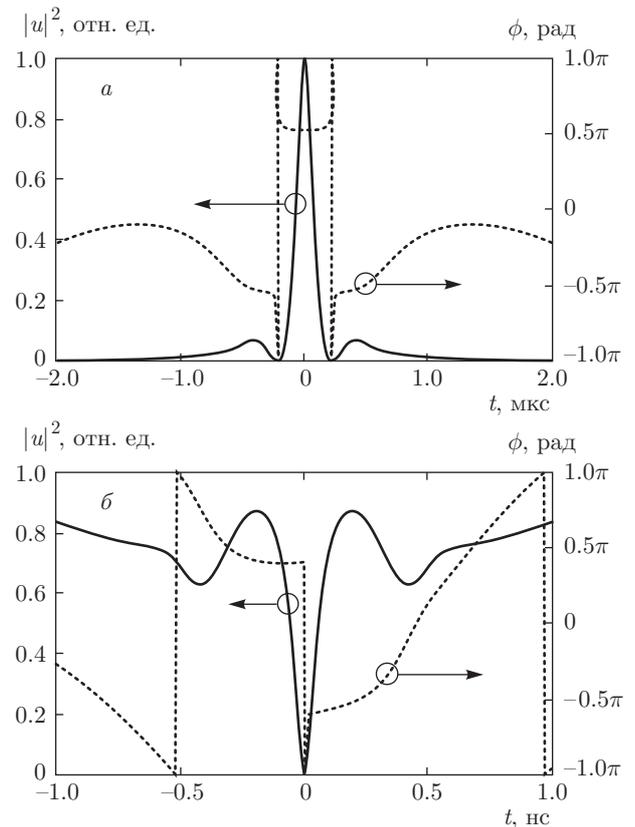


Рис. 4. а) Профиль светлого солитона огибающей ЭСВ при  $t = 7.5$  нс. Левая ось, показывающая квадрат амплитуды, нормирована на  $|u|^2 = 0.431$ ; б) профиль темного солитона при  $t = 15$  нс. Левая ось нормирована на  $|u|^2 = 10^{-4}$ . Сплошными линиями обозначена амплитуда огибающей в квадрате, а пунктиром — фаза огибающей

коэффициент включает в себя коэффициент связи, зависящий от частоты и волнового числа.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный нами подход заключается в «интегральной» оценке сред, обладающих несколькими типами нелинейностей, т. е. мультинелинейных сред. Для исследования волновых процессов, происходящих в подобных средах, предлагается использовать нелинейное уравнение Шредингера, содержащее мультинелинейный коэффициент. Последний, в свою очередь, представляет собой сумму различных нелинейностей, взятых с соответствующими коэффициентами связи. Следует отметить, что коэффициенты связи могут обладать частотной зависимостью, которая приводит к частотной зависимости мультинелинейности.

Продемонстрировано, что в феррит-сегнето-электрической структуре нелинейности могут конкурировать между собой. Причина конкуренции заключается в том, что электрическая волновая и магнитная волновая нелинейности по-разному влияют на закон дисперсии волн, а их коэффициенты связи зависят от частоты. В результате конкуренции в мультинелинейных средах можно наблюдать переход от общей отталкивающей к общей притягивающей нелинейности.

Разработка теоретической модели мультинелинейных сред проводилась при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00496 А, 15-32-20357 мол\_а\_вед) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект «Госзадание» и грант 074-U01). Теоретическое исследование солитонных процессов в феррит-сегнетоэлектрических структурах проводилось при поддержке РНФ (грант № 14-12-01296).

### 8. ПРИЛОЖЕНИЕ

В формулах (6)–(8) использованы следующие обозначения:

$$A_1 = -\mu\mu_0 M_0 \omega (\mu^2 - \mu_a^2) \kappa_e \kappa_h,$$

$$A_2 = \kappa_0 \mu \mu_0 M_0 \omega (\mu^2 - \mu_a^2) \kappa_h,$$

$$A_3 = -\mu_0 M_0 \omega (\mu^2 - \mu_a^2) \kappa_e (\kappa_0 (\mu^2 - \mu_a^2) - \mu_a k_x),$$

$$A_4 = \mu_0 M_0 \omega (\mu^2 \kappa_h^2 - \mu_a k_x (\kappa_0 (\mu_a^2 - \mu^2) + \mu_a k_x)),$$

$$B_1 = (\mu^2 - \mu_a^2)^2 \kappa_e^2 \kappa_h^2 \left( (\kappa_0 (\mu_a^2 - \mu^2 + \mu) + \mu_a k_x)^2 + ((\mu - 1)k_x - \kappa_0 \mu_a)^2 \right),$$

$$B_2 = \kappa_e^2 \left\{ [\kappa_h^2 \mu ((\mu - 1)\mu - \mu_a^2) + \mu_a k_x (\kappa_0 (\mu_a^2 - \mu^2) + \mu_a k_x)]^2 + [\mu_a ((\mu_a^2 - \mu^2 + \mu)k_x^2 - \mu \kappa_h^2) + \kappa_0 k_x ((\mu - 2\mu^2)\mu_a^2 + \mu_a^4 + (\mu - 1)\mu^3)]^2 \right\},$$

$$B_3 = 2(\mu^2 - \mu_a^2) \kappa_e^2 \kappa_h \left\{ [\kappa_0 ((\mu - 1)\mu - \mu_a^2) - \mu_a k_x] \times [\mu ((\mu - 1)\mu - \mu_a^2) \kappa_h^2 + \mu_a k_x (\kappa_0 (\mu_a^2 - \mu^2) + \mu_a k_x)] + ((\mu - 1)k_x - \kappa_0 \mu_a) [\mu_a ((\mu_a^2 - \mu^2 + \mu)k_x^2 - \mu \kappa_h^2) + \kappa_0 ((\mu - 2\mu^2)\mu_a^2 + \mu_a^4 + (\mu - 1)\mu^3) k_x] \right\}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Remoissenet, *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*, Springer Science & Business Media (2013).
2. Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Наука, Москва (2000).
3. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Наука, Москва (2001).
4. A. Scott, *Nonlinear Science*, Oxford Univ. Press (2003).
5. N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons: Nonlinear Pulses and Beams*, Chapman & Hall (1997).
6. Z. G. Chen, M. Segev, and D. N. Christodoulides, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 21 (2012).
7. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press (2003).
8. T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost et al., *Nat. Photon* **8**, 145 (2014).
9. D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical* **43**, 213001 (2010).
10. C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi et al., *Nat. Phys.* **4**, 496 (2008).
11. B. A. Kalinikos and A. B. Ustinov, in: *Solid State Physics*, ed. by A. Hoffmann and M. Wu, Academic Press, Burlington (2013), Vol. **64**, p. 193.
12. C. A. F. Vaz, *J. Phys.: Condensed Matter* **24**, 333201 (2012).
13. М. А. Черкасский, Б. А. Калиникос, *Письма в ЖТФ* **39**, 87 (2013).
14. М. А. Черкасский, Б. А. Калиникос, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 707 (2013).
15. G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford Univ. Press (2008).
16. M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Science & Business Media (2013).
17. С. П. Кузнецов, *УФН* **181**, 121 (2011).
18. Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин, *ЖЭТФ* **127**, 230 (2005).
19. А. А. Балякин, Н. М. Рыскин, *Письма в ЖТФ* **30**, 6 (2004).
20. V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky, *Physica D* **238**, 540 (2009).

21. M. Wu, B. A. Kalinikos, and C. E. Patton, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 157207 (2004).
22. C. S. Tsai, D. Young, and S. A. Nikitov, *J. Appl. Phys.* **84**, 1670 (1998).
23. J. W. Boyle, S. A. Nikitov, A. D. Boardman et al., *J. Magn. Magn. Mat.* **173**, 241 (1997).
24. Ю. Фегисов, А. Маковкин, *ЖТФ* **71**, 86 (2001).
25. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
26. А. К. Звездин, А. Ф. Попков, *ЖЭТФ* **84**, 606 (1983).
27. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, London (1996).
28. *Физика сегнетоэлектрических явлений*, под ред. Г. А. Смоленского, Наука, Ленинград (1985).
29. A. A. Semenov, S. F. Karmanenko, V. E. Demidov et al., *Appl. Phys. Lett.* **88**, 033503 (2006).
30. А. Б. Устинов, П. И. Колков, А. А. Никитин и др., *ЖТФ* **81**, 75 (2011).
31. V. E. Demidov, B. A. Kalinikos, P. Edenhofer, J. *Appl. Phys.* **91**, 10007 (2002).