

РАДИАЦИОННАЯ И НЕРАДИАЦИОННАЯ СКОРОСТИ СПОНТАННОГО РАСПАДА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КВАДРУПОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

*Д. В. Гузатов**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы
230023, Гродно, Белоруссия*

Поступила в редакцию 31 августа 2015 г.

В рамках классической электродинамики получены и исследованы аналитические выражения для радиационной и нерадиационной скоростей спонтанного распада электрического квадрупольного источника (атома, молекулы), расположенного вблизи сферической частицы (диэлектрик, металл). Показано, что наибольшее увеличение скоростей распада возникает в квазистатическом случае, когда длина волны рассматриваемого перехода значительно больше характерного размера системы из частицы и квадруполь. Для этого случая получены асимптотические выражения для скоростей распада.

DOI: 10.7868/S0044451016040027

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, вблизи материальных тел скорость спонтанного распада атомов и молекул может изменяться (эффект Перселла) [1]. Изменение скорости спонтанного распада, как правило, обусловлено электрическими дипольными переходами [2]. Однако атомы и молекулы могут являться источниками магнитного дипольного, электрического квадрупольного и других типов мультипольных излучений. Можно показать, что модификация спонтанного излучения атомов и молекул вблизи материальных тел может происходить за счет переходов любых мультипольностей [3–7]. Следует заметить, что вероятность такого излучения сильно уменьшается при увеличении порядка мультипольности. Например, отношение интенсивностей квадрупольного и дипольного излучений примерно равно $(a_0/\lambda)^2 \sim 10^{-6}–10^{-8}$, где a_0 — линейный размер излучающей системы зарядов, λ — длина волны излучения [8]. Это очень малая величина, поэтому исследование квадрупольных переходов сильно затруднено [9–11]. Тем не менее, в случае, если квадрупольный источник расположен вблизи тела, создающего большую неоднородность электромагнит-

ного поля, то скорость спонтанного распада квадрупольного источника может вырасти из-за большого градиента поля [12, 13]. Заметим также, что в лазерных пучках также можно создать условия для усиления эффектов взаимодействия с квадруполем [14–16].

К настоящему времени теоретически исследовано спонтанное излучение электрического квадрупольного источника вблизи диэлектрической сферической частицы [4–6], вблизи идеально проводящего цилиндра [5], вблизи плоской границы раздела сред «вакуум–металл (диэлектрик)» и в плоском зазоре между двумя металлическими (диэлектрическими) средами [17], а также вблизи периодической структуры в виде металлических нанополосок на диэлектрической подложке [18]. Целью настоящей работы является теоретическое исследование в рамках классической электродинамики спонтанного излучения электрического квадрупольного источника (атома, молекулы) вблизи сферической частицы, имеющей комплексную диэлектрическую проницаемость (диэлектрик, металл). При этом в работе будут рассмотрены как радиационная, так и нерадиационная скорости спонтанного распада, что дополняет результаты работ [4–6], где нерадиационная скорость не рассматривалась.

Необходимо заметить, что использование классической и квантовой теорий для расчетов скоростей спонтанного распада квадрупольного источника

* E-mail: dm_guzatov@mail.ru

вблизи материального тела, строго говоря, приводит к разным результатам. В работе [17] была показана эквивалентность классического и квантового подходов лишь при описании полной скорости спонтанного распада квадрупольного вблизи материального тела в случае слабого взаимодействия, когда спонтанный распад может быть описан скоростью распада и одной частотой перехода. В том случае, если взаимодействие между атомом (молекулой) и телом сильное, возникают сложные эффекты [19, 20], для описания которых требуется квантовая теория. Кроме того, нет точной эквивалентности в рамках квантового и классического подходов при расчетах нерadiационной скорости спонтанного распада источника вблизи поглощающего тела. Ситуация осложняется еще и тем, что в рамках квантовой теории для этого часто необходимо прибегать к использованию нестандартной схемы квантования [21–24]. В то же время расчеты нерadiационной скорости в рамках классической электродинамики (используемой в настоящей работе) существенно проще.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 рассмотрено электромагнитное поле электрического квадрупольного в присутствии сферической частицы. В разд. 3 приводятся выражения для радиационной и нерadiационной скоростей спонтанного распада квадрупольного, расположенного вблизи частицы. В разд. 4 представлены графические иллюстрации полученных результатов и их обсуждение. В разд. 5 приведены основные результаты работы. Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1.

2. ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КВАДРУПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Как известно [25], напряженности электрического и магнитного полей электрического квадрупольного (атома, молекулы) в вакууме могут быть записаны в следующем виде (множитель $e^{-i\omega t}$, характеризующий зависимости полей от времени, далее опущен):

$$\mathbf{E}_0 = ik_0 \mathbf{A} - \text{grad } \phi, \quad \mathbf{H}_0 = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1)$$

Здесь $k_0 = \omega/c$ — волновое число, в котором ω — частота, c — скорость света (в вакууме); потенциалы \mathbf{A} и ϕ имеют вид ($\alpha = x, y, z$)

$$A_\alpha = \frac{ik_0}{6} \sum_{\beta=x,y,z} D_{\alpha\beta} \nabla_\beta \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (2)$$

$$\phi = \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta=x,y,z} D_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|},$$

где ∇_α — декартова компонента оператора градиента; \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения; \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки положения квадрупольного;

$$D_{\alpha\beta} = \int_V dV \rho(\mathbf{r})(3r_\alpha r_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$$

— тензор электрического квадрупольного момента, в котором $\rho(\mathbf{r})$ — плотность электрического заряда, r_α — декартова компонента радиус-вектора, $\delta_{\alpha\beta}$ — дельта-символ Кронекера, $r = |\mathbf{r}|$, а интегрирование проводится по объему распределенного заряда V . Из определения квадрупольного момента получим соотношение симметрии $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$ и соотношение $\sum_{\alpha=x,y,z} D_{\alpha\alpha} = 0$, которые будут использоваться для упрощения получаемых ниже выражений.

Для решения задачи о поле электрического квадрупольного в присутствии сферической частицы удобно представить (1) в виде разложений по векторным сферическим гармоникам, т. е. в следующем виде:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{i}{k_0} \text{rot } \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mn}^{(0)} \mathbf{M}\psi_{mn} + B_{mn}^{(0)} \mathbf{N}\psi_{mn}), & r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (C_{mn}^{(0)} \mathbf{M}\zeta_{mn} + D_{mn}^{(0)} \mathbf{N}\zeta_{mn}), & r > r_0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $A_{mn}^{(0)}, B_{mn}^{(0)}, C_{mn}^{(0)}$ и $D_{mn}^{(0)}$ — коэффициенты разложения, которые надо найти; $r_0 = |\mathbf{r}_0|$, векторные сферические гармоники можно записать в виде (см., например, [26])

$$\begin{cases} \mathbf{M}\psi_{mn} \\ \mathbf{M}\zeta_{mn} \end{cases} = \text{rot} \begin{cases} \mathbf{r}\Psi_{mn}(r, \theta, \varphi) \\ \mathbf{r}Z_{mn}(r, \theta, \varphi) \end{cases}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}\psi_{mn} \\ \mathbf{N}\zeta_{mn} \end{cases} = \frac{1}{k_0} \text{rot} \begin{cases} \mathbf{M}\psi_{mn} \\ \mathbf{M}\zeta_{mn} \end{cases},$$

где $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ — сферические координаты;

$$\begin{cases} \Psi_{mn}(r, \theta, \varphi) \\ Z_{mn}(r, \theta, \varphi) \end{cases} = \frac{1}{k_0 r} \begin{cases} \psi_n(k_0 r) \\ \zeta_n(k_0 r) \end{cases} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

$\psi_n(k_0r) = k_0rj_n(k_0r)$ и $\zeta_n(k_0r) = k_0rh_n^{(1)}(k_0r)$ — функции Риккати–Бесселя [27], $j_n(k_0r)$ и $h_n^{(1)}(k_0r)$ — соответственно сферическая функция Бесселя и сферическая функция Ханкеля первого рода [27], $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра [27]. Из определения (4) следует, что операция дивергенции от векторных сферических гармоник равна нулю, что позволяет использовать их для разложения поперечных электромагнитных волн [26]. Полнота и ортогональность векторных сферических гармоник рассмотрены в работе [26].

Поскольку в литературе отсутствуют явные выражения для коэффициентов $A_{mn}^{(0)}$, $B_{mn}^{(0)}$, $C_{mn}^{(0)}$ и $D_{mn}^{(0)}$ из (3), ниже кратко приведен способ вывода этих коэффициентов. Для нахождения коэффициентов $B_{mn}^{(0)}$ и $D_{mn}^{(0)}$ умножим скалярно вектор напряженности магнитного поля (1) на радиус-вектор \mathbf{r} , получим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0 = -\frac{k_0}{6} \times \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} \hat{L}'_{\alpha} \nabla'_{\beta} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}, \quad (6)$$

$$\frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \begin{cases} ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) b_{mn}^{<}(r', \theta', \varphi') \Psi_{mn}(r, \theta, \varphi), & r < r', \\ ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) b_{mn}^{>}(r', \theta', \varphi') Z_{mn}(r, \theta, \varphi), & r > r', \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{cases} b_{mn}^{<}(r', \theta', \varphi') \\ b_{mn}^{>}(r', \theta', \varphi') \end{cases} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{k_0 r'} \times \begin{cases} \zeta_n(k_0 r') \\ \psi_n(k_0 r') \end{cases} P_n^m(\cos\theta') \exp(-im\varphi'), \quad (10)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0 = \frac{1}{ik_0} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) B_{mn}^{(0)} \Psi_{mn}(r, \theta, \varphi), & r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) D_{mn}^{(0)} Z_{mn}(r, \theta, \varphi), & r > r_0. \end{cases} \quad (11)$$

Сравнивая (8) с (11) и учитывая (9), найдем для искомым коэффициентов $B_{mn}^{(0)}$ и $D_{mn}^{(0)}$ следующие выражения:

где \hat{L}'_{α} — декартова компонента оператора $\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r} \times \nabla]$, совпадающего с оператором орбитального момента количества движения в квантовой механике. Далее, пользуясь соотношением

$$\hat{L}'_{\alpha} \nabla'_{\beta} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla'_{\beta} \hat{L}'_{\alpha} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (7)$$

где ∇'_{β} — компонента оператора градиента по координатам, задаваемым радиус-вектором \mathbf{r}' , а \hat{L}'_{α} — декартова компонента оператора $\hat{\mathbf{L}}' = -i[\mathbf{r}' \times \nabla']$, запишем формулу (6) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0 &= \\ &= -\frac{k_0}{6} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} \nabla'_{\beta} \hat{L}'_{\alpha} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} = \\ &= -\frac{k_0}{6} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} \hat{L}'_{\alpha} \nabla'_{\beta} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь было учтено соотношение $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$. Далее следует воспользоваться разложением [28]

r', θ', φ' — сферические координаты точки, задаваемой радиус-вектором \mathbf{r}' . Подставляя (9) в (8), запишем скалярное произведение $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0$ в виде ряда по функциям $\Psi_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r < r'$) или по функциям $Z_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r > r'$). С другой стороны, умножая скалярно вектор напряженности магнитного поля (3) на \mathbf{r} и пользуясь тем, что $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}\psi_{mn} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{M}\zeta_{mn} = 0$, получим

$$\begin{aligned} \begin{cases} B_{mn}^{(0)} \\ D_{mn}^{(0)} \end{cases} &= k_0^3 \frac{2n+1}{6n(n+1)} \times \\ &\times \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} \hat{L}'_{\alpha} \nabla'_{\beta} \begin{cases} b_{mn}^{<}(r', \theta', \varphi') \\ b_{mn}^{>}(r', \theta', \varphi') \end{cases} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для квадруполь, расположенного на положительной части декартовой оси z в точке $z = r_0$, коэффициенты (12) даны в явном виде в Приложении.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{mn}^{(0)}$ и $C_{mn}^{(0)}$ умножим скалярно ротор вектора напряженности магнитного поля (1) на \mathbf{r} , в результате получим

$$\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0 = -\frac{ik_0}{6} \times \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} \hat{K}_\alpha \nabla_\beta \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}, \quad (13)$$

где \hat{K}_α — декартова компонента оператора $\hat{\mathbf{K}} = -i[\hat{\mathbf{L}} \times \nabla]$. Пользуясь соотношением

$$\hat{K}_\alpha \nabla_\beta \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \left(-\hat{K}'_\alpha \nabla'_\beta + 3\nabla'_\alpha \nabla'_\beta + \delta_{\alpha\beta} k_0^2 \right) \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (14)$$

в котором \hat{K}'_α — декартова компонента оператора $\hat{\mathbf{K}}' = -i[\hat{\mathbf{L}}' \times \nabla']$, запишем (13) в виде

$$\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0 = -\frac{ik_0}{6} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} (3\nabla'_\alpha - \hat{K}'_\alpha) \times \nabla'_\beta \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}, \quad (15)$$

где было учтено соотношение $\sum_{\alpha=x, y, z} D_{\alpha\alpha} = 0$. Подставляя в (15) разложение (9), представим $\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0$ в виде ряда по функциям $\Psi_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r < r'$) или по функциям $Z_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r > r'$). С другой стороны, если умножить скалярно ротор напряженности магнитного поля (3) на \mathbf{r} , а затем воспользоваться определением $\mathbf{N}\psi_{mn}$ и $\mathbf{N}\zeta_{mn}$ из (4), соотношениями $\text{rot } \mathbf{N}\psi_{mn} = k_0 \mathbf{M}\psi_{mn}$ и $\text{rot } \mathbf{N}\zeta_{mn} = k_0 \mathbf{M}\zeta_{mn}$, а также свойством $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}\psi_{mn} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{M}\zeta_{mn} = 0$, можно записать $\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0$ в виде ряда по функциям $\Psi_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r < r_0$) или по функциям $Z_{mn}(r, \theta, \varphi)$ (для $r > r_0$). Явный вид этого ряда можно получить из (11) заменой $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0 \rightarrow \mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0$, $B_{mn}^{(0)} \rightarrow k_0 A_{mn}^{(0)}$ и $D_{mn}^{(0)} \rightarrow k_0 C_{mn}^{(0)}$. Сравнивая его с разложением, получаемым из (15) при использовании (9), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{mn}^{(0)} \\ C_{mn}^{(0)} \end{array} \right\} = ik_0^2 \frac{2n+1}{6n(n+1)} \times \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} D_{\alpha\beta} (3\nabla'_\alpha - \hat{K}'_\alpha) \times \nabla'_\beta \left\{ \begin{array}{l} b_{mn}^<(r', \theta', \varphi') \\ b_{mn}^>(r', \theta', \varphi') \end{array} \right\} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}. \quad (16)$$

Для квадруполь, расположенного на положительной части декартовой оси z в точке $z = r_0$, коэффициенты (16) даны в Приложении.

Напряженности электрического и магнитного полей, индуцированных снаружи сферической частицы (т. е. отраженные поля), можно записать в виде

$$\mathbf{E}_1 = \frac{i}{k_0} \text{rot } \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_1 = -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(C_{mn}^{(1)} \mathbf{M}\zeta_{mn} + D_{mn}^{(1)} \mathbf{N}\zeta_{mn} \right). \quad (17)$$

Напряженности электрического и магнитного полей, индуцированных внутри сферической частицы (т. е. прошедшие поля), можно записать в виде

$$\mathbf{E}_2 = \frac{iZ}{k} \text{rot } \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{iZ} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{mn}^{(2)} \mathbf{M}\psi_{mn}^p + B_{mn}^{(2)} \mathbf{N}\psi_{mn}^p \right), \quad (18)$$

где $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — импеданс частицы, ε и μ — соответственно ее диэлектрическая и магнитная проницаемости, $k = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$, векторные сферические гармоники $\mathbf{M}\psi_{mn}$ и $\mathbf{N}\psi_{mn}$ получим из гармоник $\mathbf{M}\psi_{mn}$ и $\mathbf{N}\psi_{mn}$ соответственно с помощью замены $k_0 \rightarrow k$ (см. (4) и (5)). Входящие в (17) и (18) коэффициенты $C_{mn}^{(1)}$, $D_{mn}^{(1)}$, $A_{mn}^{(2)}$ и $B_{mn}^{(2)}$ найдем с помощью граничных условий непрерывности тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности сферической частицы. В результате, для коэффициентов $C_{mn}^{(1)}$ и $D_{mn}^{(1)}$ можно получить

$$C_{mn}^{(1)} = -a_n A_{mn}^{(0)}, \quad D_{mn}^{(1)} = -b_n B_{mn}^{(0)}, \quad (19)$$

где

$$a_n = \frac{\psi_n(ka)\psi'_n(k_0a) - Z\psi'_n(ka)\psi_n(k_0a)}{\psi_n(ka)\zeta'_n(k_0a) - Z\psi'_n(ka)\zeta_n(k_0a)}, \quad b_n = \frac{Z\psi_n(ka)\psi'_n(k_0a) - \psi'_n(ka)\psi_n(k_0a)}{Z\psi_n(ka)\zeta'_n(k_0a) - \psi'_n(ka)\zeta_n(k_0a)} \quad (20)$$

— коэффициенты Ми [26], в которых a — радиус частицы, штрих возле функции означает ее производную. Коэффициенты $A_{mn}^{(2)}$ и $B_{mn}^{(2)}$ могут быть найдены аналогично.

3. СКОРОСТИ СПОНТАННОГО РАСПАДА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КВАДРУПОЛЯ ВБЛИЗИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Пусть для определенности квадрупольный источник (атом, молекула) расположен на положи-

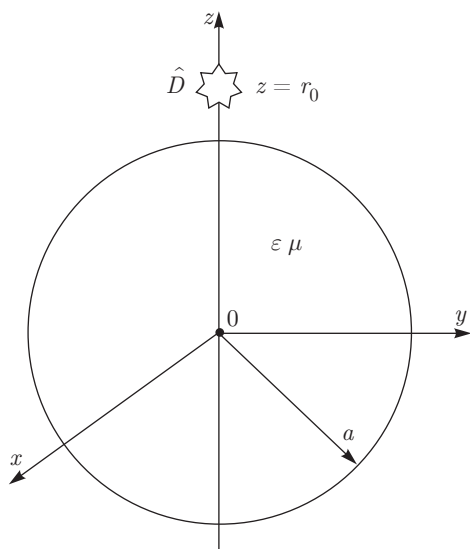


Рис. 1. Геометрия задачи об электрическом квадрупольном источнике (атоме, молекуле) вблизи сферической частицы

тельной части декартовой оси z в точке $z = r_0$ вблизи сферической частицы радиусом a , изготовленной из вещества с комплексной диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Частица и квадруполь помещены в среду с единичными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, т. е. в вакууме. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Относительную скорость спонтанного распада электрического квадрупольного источника, связанную с полным временем жизни возбужденного состояния, расположенного вблизи материального тела, можно вычислить как отношение мощности потерь источника на поддержание электромагнитного поля вблизи тела и аналогичной мощности в отсутствии тела [29]. Мощность потерь (P_l) электрического квадрупольного, расположенного в вакууме вблизи материального тела, может быть вычислена по формуле [30]

$$P_l = \frac{1}{2} \int_V dV \operatorname{Re} (\mathbf{j}^*(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}))), \quad (21)$$

где интегрирование проводится по объему V , занятому источником, звездочка означает комплексное сопряжение. Плотность стороннего тока в рассматриваемом случае имеет вид ($\alpha = x, y, z$) [17]

$$j_\alpha = \frac{ick_0}{6} \sum_{\beta=x,y,z} D_{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (22)$$

где $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. Мощность, теряемая источником при отсутствии

материального тела, равна мощности излучения источника (P_0) с обратным знаком:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V dV (\mathbf{j}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) = -P_0, \quad (23)$$

где [28]

$$P_0 = \frac{c}{8\pi} \int_S dS \operatorname{Re} ([\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] \cdot \mathbf{n}) = \frac{ck_0^6}{360} \sum_{\alpha,\beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2, \quad (24)$$

S — замкнутая поверхность, охватывающая квадруполь, \mathbf{n} — внешняя нормаль к этой поверхности. Далее, подставляя ток (22) в мощность (21) и пользуясь (23), получим для скорости γ_t следующее выражение (для сравнения см., например, [4]):

$$\frac{\gamma_t}{\gamma_0} = -\frac{P_l}{P_0} = 1 + \frac{ck_0}{12P_0} \times \operatorname{Im} \left[\sum_{\alpha,\beta=x,y,z} D_{\alpha\beta}^* \nabla_\beta E_{1\alpha}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \right], \quad (25)$$

где $\gamma_0 = 4P_0/\hbar\omega$ — скорость спонтанного распада квадрупольного при отсутствии материального тела [17]; отраженное поле в (25) вычисляется в точке положения квадрупольного \mathbf{r}_0 . Как следует из (25), скорость спонтанного распада электрического квадрупольного пропорциональна градиенту отраженного электрического поля и возрастает в сильно неоднородных электрических полях, где имеется большой градиент. Для случая квадрупольного, расположенного на положительной части оси z в точке $z = r_0$, явное выражение для скорости распада (25) дано в Приложении.

Следует отметить, что выражение (25) соответствует случаю двухуровневого квадрупольного источника (одноканальный спонтанный распад). При этом $D_{\alpha\beta} = (D_{\alpha\beta})_{fi}$ должен рассматриваться как электрический квадрупольный момент перехода $i \rightarrow f$ с частотой $\omega_{fi} \approx \omega$ [17]. Для учета возможности перехода в несколько состояний надо лишь просуммировать соответствующие парциальные скорости распадов по конечным состояниям f .

Полученное выражение (25) описывает полную скорость спонтанного распада, являющуюся суммой радиационной и нерадиационной скоростей. Относительную радиационную скорость спонтанного распада (скорость спонтанного излучения) электрического квадрупольного источника вблизи материаль-

ного тела можно вычислить как отношение мощности излучения рассматриваемой системы из источника и тела (P_r) к мощности излучения источника в отсутствие тела (P_0) [31]. Мощность P_r вычисляется по формуле [26]

$$P_r = \frac{c}{8\pi} \int_S dS \operatorname{Re} [(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \times (\mathbf{H}_0^* + \mathbf{H}_1^*) \cdot \mathbf{n}], \quad (26)$$

где интегрирование проводится по замкнутой поверхности S , охватывающей квадруполь и тело, \mathbf{n} — внешняя нормаль к этой поверхности. В качестве поверхности S в случае сферической частицы удобно взять сферу бесконечно большого радиуса с центром, совпадающим с центром частицы. После интегрирования можно получить для радиационной скорости γ_r следующее выражение:

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_0} = \frac{P_r}{P_0} = \frac{c}{2k_0^2 P_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \times \\ \times \left(\left| C_{mn}^{(0)} + C_{mn}^{(1)} \right|^2 + \left| D_{mn}^{(0)} + D_{mn}^{(1)} \right|^2 \right). \quad (27)$$

Можно, показать, что в случае электрического квадрупольного, расположенного вблизи диэлектрической частицы без потерь ($\operatorname{Im} \varepsilon = \operatorname{Im} \mu = 0$), скорости распадов (25) и (27) совпадают.

Причиной, приводящей к нерадиационному (безызлучательному) каналу спонтанного распада электрического квадрупольного источника вблизи частицы с потерями ($\operatorname{Im} \varepsilon, \operatorname{Im} \mu \neq 0$), является поглощение излучения частицей. Поэтому относительную нерадиационную скорость спонтанного распада можно вычислить как отношение мощности поглощения частицей (P_a) к мощности излучения источника при отсутствии частицы (P_0) [31]. Пользуясь выражением для мощности потерь [30], для нерадиационной скорости γ_{nr} можно записать

$$\frac{\gamma_{nr}}{\gamma_0} = \frac{P_a}{P_0} = \frac{ck_0}{8\pi P_0} \times \\ \times \int_V dV (\operatorname{Im} \varepsilon |\mathbf{E}_2(\mathbf{r})|^2 + \operatorname{Im} \mu |\mathbf{H}_2(\mathbf{r})|^2), \quad (28)$$

где интегрирование проводится по объему частицы. Заметим, что нерадиационная скорость также может быть найдена из соотношения

$$\gamma_{nr} = \gamma_t - \gamma_r. \quad (29)$$

Вычисления показывают, что значения нерадиационной скорости, получаемые с помощью формул

(28) и (29), совпадают. Поэтому далее будем пользоваться формулой (29).

Следует отметить, что, помимо скоростей распадов, еще одной характеристикой спонтанного излучения квадруполь вблизи сферической частицы является смещение частоты излучения. Исследование этого эффекта может быть сделано в рамках классической электродинамики [4]. В настоящей работе смещение частоты не рассматривается.

В квазистатическом режиме, т.е. в том случае, когда размер рассматриваемой системы значительно меньше длины волны ($k_0 r_0 \ll 1$), выражения (27) и (25) могут быть разложены в ряд по малому параметру $k_0 r_0$. В результате, для радиационной скорости спонтанного распада квадруполь, расположенного на положительной части декартовой оси z , можно получить следующее асимптотическое выражение (при учете первых двух членов разложения):

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_0} = \frac{30}{(k_0 r_0)^2} \frac{9|D_{zz}|^2 + 4|D_{xz}|^2 + 4|D_{yz}|^2}{\sum_{\alpha,\beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ \times \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^6 + \frac{3}{2} \frac{|D_{zz}|^2}{\sum_{\alpha,\beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ \times \left| 1 - 12 \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 3} \left(\frac{a}{r_0} \right)^5 \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{|D_{xx} - D_{yy}|^2 + 4|D_{xy}|^2}{\sum_{\alpha,\beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ \times \left| 1 - 2 \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 3} \left(\frac{a}{r_0} \right)^5 \right|^2 + 2 \frac{|D_{xz}|^2 + |D_{yz}|^2}{\sum_{\alpha,\beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ \times \left[\left| 1 + 8 \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 3} \left(\frac{a}{r_0} \right)^5 \right|^2 + \right. \\ \left. + 15 \left| \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \right|^2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^6 \right] + \dots \quad (30)$$

Оставляя в (30) лишь первый член разложения ($\propto 1/(k_0 r_0)^2$), в частных случаях радиально ориентированного квадруполь с $D_{xx} = D_{yy}$ и $D_{xy} = D_{xz} = D_{yz} = 0$, а также тангенциально ориентированного квадруполь с $D_{xx} = D_{zz}$ (или $D_{yy} = D_{zz}$) и $D_{xy} = D_{xz} = D_{yz} = 0$, расположенного на поверхности ($r_0 = a$) непоглощающей диэлектрической наночастицы, получим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_r}{\gamma_0} \Big|_{rad} &\approx \frac{180}{(k_0 a)^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2, \\ \frac{\gamma_r}{\gamma_0} \Big|_{tan} &\approx \frac{45}{(k_0 a)^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2, \end{aligned} \quad (31)$$

которые совпадают с выражениями, найденными в работе [4] для квадрупольей соответствующих ориентаций. Это подтверждает корректность полученных выше выражений.

Для нерадиационной скорости спонтанного распада электрического квадруполья, расположенного на положительной части декартовой оси z , можно получить следующее квазистатическое выражение (оставляем первый исчезающий член разложения):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{nr}}{\gamma_0} &= \frac{45}{4(k_0 r_0)^5} \frac{|D_{zz}|^2}{\sum_{\alpha, \beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (n+2)^2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{2n+1} \frac{\text{Im } \alpha_n}{a^{2n+1}} + \\ &+ \frac{10}{(k_0 r_0)^5} \frac{|D_{xz}|^2 + |D_{yz}|^2}{\sum_{\alpha, \beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)^2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{2n+1} \frac{\text{Im } \alpha_n}{a^{2n+1}} + \\ &+ \frac{5}{8(k_0 r_0)^5} \frac{|D_{xx} - D_{yy}|^2 + 4|D_{xy}|^2}{\sum_{\alpha, \beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ &\times \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n(n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r_0} \right)^{2n+1} \times \\ &\times \frac{\text{Im } \alpha_n}{a^{2n+1}} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\alpha_n = a^{2n+1} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + (n+1)/n} \quad (33)$$

— мультипольная поляризуемость наносферы [32]. В случае очень малых расстояний от квадруполья до поверхности наночастицы, т. е. в случае $(r_0 - a)/r_0 \ll 1$, ряды в (32) могут быть просуммированы, если в знаменателе поляризуемости (33) положить $(n+1)/n \approx 1$. После суммирования получим следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{nr}}{\gamma_0} &\approx \frac{15}{32} \times \\ &\times \frac{18|D_{zz}|^2 + 16|D_{xz}|^2 + 16|D_{yz}|^2 + |D_{xx} - D_{yy}|^2 + 4|D_{xy}|^2}{[k_0(r_0 - a)]^5 \sum_{\alpha, \beta=x,y,z} |D_{\alpha\beta}|^2} \times \\ &\times \text{Im} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (34) следует, что на малых расстояниях от квадруполья до поверхности наносферы нерадиационная скорость возрастает пропорционально $1/[k_0(r_0 - a)]^5$ [17], что превосходит соответствующее увеличение нерадиационной скорости для электрического диполья, для которого закон возрастания имеет вид $1/[k_0(r_0 - a)]^3$ [32]. Например, для zz -квадруполья, у которого отличны от нуля лишь компоненты квадрупольного момента $D_{zz} = -D_{xx} - D_{yy}$ и $D_{xx} = D_{yy}$, а также для xy -квадруполья, имеющего не равные нулю компоненты $D_{xy} = D_{yx}$, из (34) получаются выражения

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{nr}}{\gamma_0} \Big|_{zz} &\approx \frac{45}{8[k_0(r_0 - a)]^5} \text{Im} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \\ \frac{\gamma_{nr}}{\gamma_0} \Big|_{xy} &\approx \frac{15}{16[k_0(r_0 - a)]^5} \text{Im} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \end{aligned} \quad (35)$$

которые совпадают с аналогичными выражениями для квадруполья вблизи плоской границы раздела сред в квазистатическом режиме [17]. Это снова подтверждает корректность найденных в работе выражений.

4. ГРАФИЧЕСКИЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для иллюстрации полученных в предыдущем разделе результатов рассмотрим несколько частных случаев для электрического квадрупольного источника (атома, молекулы) вблизи сферической частицы. Следует заметить, что экспериментально трудно создать ситуацию с фиксированной ориентацией квадрупольного момента. Однако рассмотрение источников с усредненной ориентацией квадрупольного момента приводит к заметному снижению всех эффектов. Поэтому в дальнейшем будут рассмотрены случаи квадрупольей с фиксированными ориентациями моментов. При этом ограничимся рассмотрением zz - и xy -квадрупольей (см. выше), а также xz -квадруполья (для которого не равны нулю только $D_{xz} = D_{zx}$). Другие случаи квадрупольей, с другими значениями квадрупольных моментов, в том числе с усредненными, могут быть рассмотрены аналогично.

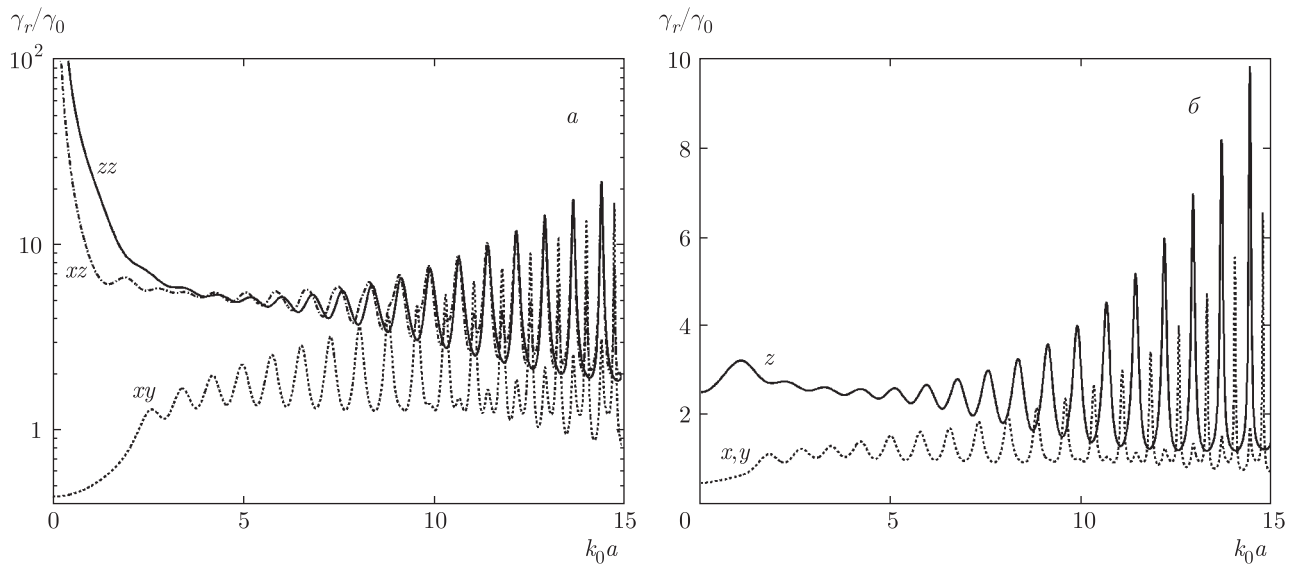


Рис. 2. Относительные радиационные скорости спонтанного распада: *a* — *zz*-, *xz*- и *xy*-электрических квадрупольных источников; *б* — *z*- и *x*-, *y*-ориентированных электрических дипольных источников как функции k_0a . Источники расположены на поверхности ($r_0 = a$) диэлектрической сферической частицы с $\epsilon = 2.25$ и $\mu = 1$ (стекло)

но с помощью найденных выражений. Пусть квадруполь расположен на положительной части оси z .

На рис. 2*a* показана относительная радиационная скорость спонтанного распада квадруполь, расположенного на поверхности диэлектрической сферической частицы, как функция нормированного радиуса k_0a . Как следует из рис. 2*a*, при стремлении нормированного радиуса частицы к нулю относительная радиационная скорость спонтанного распада zz - и xz -квадруполь возрастает. В то же время, радиационная скорость для xy -квадруполь при $k_0a \rightarrow 0$ стремится к конечному значению. Это согласуется с полученной асимптотической функцией (30). Из рис. 2*a* также следует, что относительная радиационная скорость спонтанного распада принимает наибольшие значения для zz -квадруполь. При увеличении радиуса сферической частицы зависимость радиационной скорости спонтанного распада квадруполь от k_0a принимает более сложный вид. Как хорошо видно на рис. 2*a*, возникает осциллирующая зависимость с большим числом максимумов, соответствующих тем или иным модам шепчущей галереи, которые возбуждаются квадрупольем в диэлектрической частице.

Для более полного понимания особенностей спонтанного излучения электрического квадруполь на рис. 2*б* приведена относительная радиационная скорость спонтанного распада электрического диполь, расположенного на положительной части

декартовой оси z на поверхности сферической частицы и имеющего дипольный момент, ориентированный вдоль осей x , y (тангенциально к поверхности) или z (перпендикулярно к поверхности), как функции k_0a . Радиационная скорость вычислялась с помощью формул из работы [33]. Как следует из сравнения рис. 2*a* и рис. 2*б*, наибольшее различие рассматриваемых зависимостей для диполь и квадруполь связано с их поведением в области малых радиусов ($k_0a \ll 1$). Как видно, радиационная скорость диполь стремится к конечному значению при $k_0a \rightarrow 0$ (см., например, [33]). В то же время радиационная скорость для квадруполь при $k_0a \rightarrow 0$ возрастает.

Для исследования различий между радиационной и нерадиационной скоростями далее рассмотрим квадруполь вблизи сферической частицы из серебра. Данные по зависимости диэлектрической проницаемости серебра от длины волны взяты из работы [34]. Случаи квадруполь вблизи частиц из других веществ могут быть рассмотрены аналогично с помощью полученных в работе выражений.

На рис. 3 показаны относительные радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада zz -квадруполь, расположенного вблизи поверхности серебряной сферической частицы, как функции длины волны перехода. Как следует из рис. 3, радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада zz -квадруполь вблизи серебряной сфе-

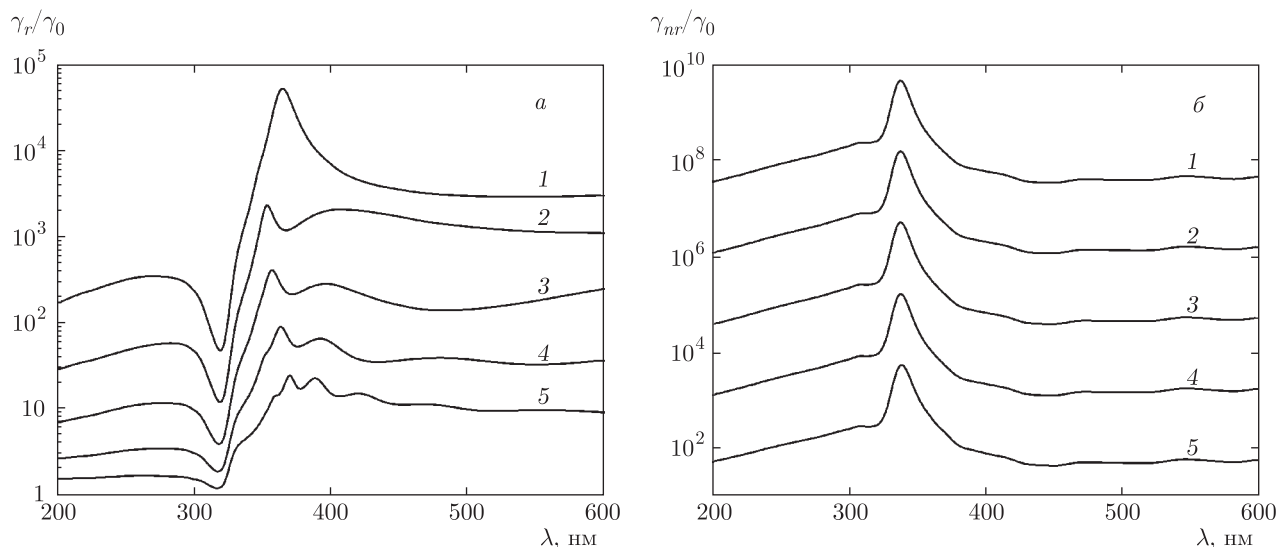


Рис. 3. Относительные радиационная (а) и нерадиационная (б) скорости спонтанного распада zz -электрического квадрупольного источника вблизи серебряной сферической частицы ($r_0 = 1.05a$) как функции длины волны рассматриваемого перехода для разных радиусов частицы a . Зависимость диэлектрической проницаемости серебра ϵ от длины волны взята из работы [34]. Магнитная проницаемость $\mu = 1$. Зависимости для сфер радиусами 25 (1), 50 (2), 100 (3), 200 (4), 400 (5) нм

рической частицы сложным образом зависят от длины волны перехода, что определяется соответствующей зависимостью диэлектрической проницаемости серебра [34]. На рис. 3а хорошо видно, что в представленном диапазоне длин волн радиационная скорость может иметь как минимумы, так и максимумы. При этом число максимумов (соответствующих возбуждению плазмонов) возрастает при увеличении радиуса частицы, поскольку при увеличении радиуса возбуждаются плазмоны все более высокой мультипольности [35]. Однако при этом относительная радиационная скорость для zz -квадруполь в целом уменьшается. Максимально возможное значение радиационной скорости ($\gamma_r/\gamma_0 \approx 10^5$) возникает для частицы с наименьшим значением радиуса ($a = 25$ нм). Последнее следует также из анализа асимптотической функции (30), когда отношение r_0/a зафиксировано, что выполняется на рис. 3а.

Следует заметить, что для электрического квадруполь, находящегося в зазоре между двумя близко расположенными металлическими наночастицами, относительная радиационная скорость спонтанного распада, возможно, принимает даже большие значения, чем вблизи одиночной металлической наночастицы [36]. Задача для квадруполь в зазоре между двумя близко расположенными сферами может быть рассмотрена с помощью найденного в настоящей работе решения для одной сферы и при исполь-

зовании теоремы сложения для сферических гармоник [37]. Тем не менее, такая задача выходит за рамки настоящей работы и требует отдельного рассмотрения.

Нерадиационная скорость спонтанного распада zz -квадруполь вблизи серебряной частицы имеет один ярко выраженный максимум для частиц разных радиусов, как это видно на рис. 3б. Заметим, что, как и для радиационной скорости (см. рис. 3а), при увеличении радиуса частицы нерадиационная скорость в целом уменьшается. Наибольшего значения ($\gamma_{nr}/\gamma_0 \approx 10^{10}$) нерадиационная скорость принимает для частицы наименьшего радиуса ($a = 25$ нм). Аналогичный вывод следует из анализа асимптотики (32) при фиксированном отношении r_0/a (что имеет место на рис. 3б).

Весьма важно сравнить результаты для электрического квадруполь вблизи металлической частицы с аналогичными результатами для электрического диполь. На рис. 4 показаны относительные радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада электрического диполь, расположенного вблизи поверхности серебряной сферической частицы, как функции длины волны перехода. Диполь расположен на положительной части оси z и ориентирован вдоль этой оси, т. е. перпендикулярно к поверхности частицы. Скорости спонтанного распада вычислены в соответствии с [33]. Параметры на рис. 4

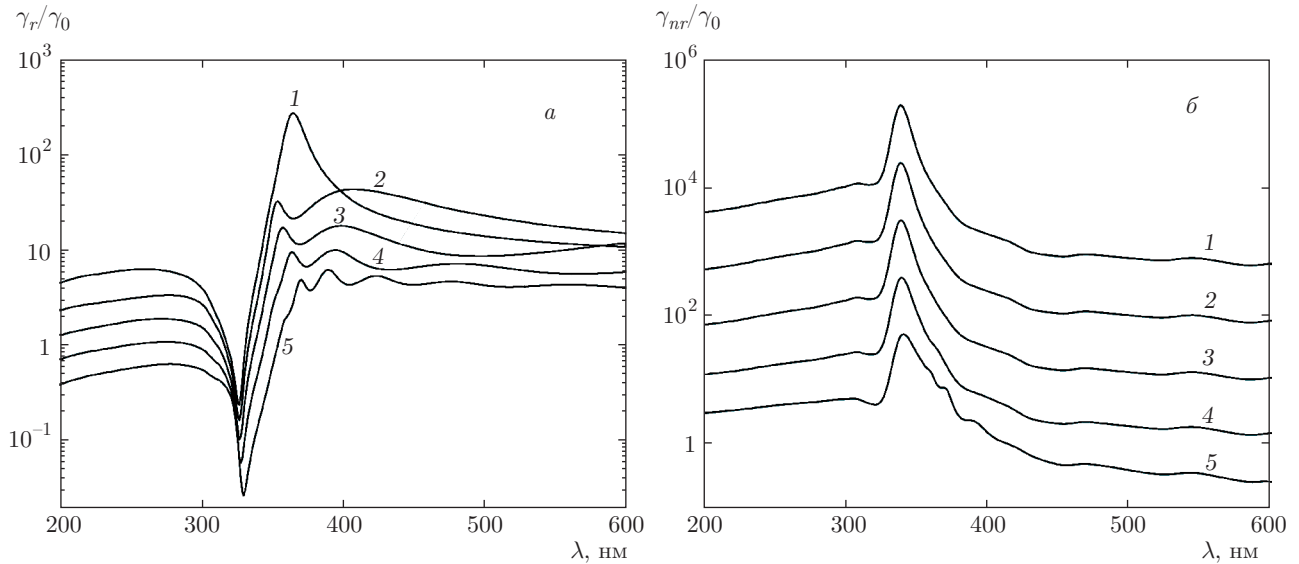


Рис. 4. Относительные радиационная (а) и нерадиационная (б) скорости спонтанного распада электрического дипольного источника вблизи серебряной сферической частицы ($r_0 = 1.05a$) как функции длины волны рассматриваемого перехода для разных радиусов частицы a . Диполь ориентирован перпендикулярно к поверхности сферы. Зависимость диэлектрической проницаемости серебра ϵ от длины волны взята из работы [34]. Магнитная проницаемость $\mu = 1$. Зависимости для сфер радиусами 25 (1), 50 (2), 100 (3), 200 (4), 400 (5) нм

аналогичны параметрам на рис. 3. Как следует из сравнения рис. 3 и рис. 4, относительные радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада z -ориентированного диполя и zz -квадруполя вблизи серебряной сферической частицы в целом похожим образом зависят от длины волны. Как видно из сравнения рис. 3а и рис. 4а, и в случае диполя, и в случае квадруполя радиационная скорость имеет максимум вблизи 370 нм для частицы малого размера по сравнению с длиной волны (наночастицы). По мере увеличения радиуса этот максимум переходит в несколько максимумов, соответствующих плазмонам различной мультипольности. Нерадиационная скорость спонтанного распада диполя, как и в случае квадруполя, имеет один главный максимум (ср. рис. 3б и рис. 4б). При этом нерадиационная скорость в целом увеличивается при уменьшении радиуса частицы. Наиболее существенное различие рис. 3 и рис. 4 связано с их максимальными значениями. Из сравнения рис. 3 и рис. 4 видно, что относительные радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада квадруполя вблизи серебряной сферической частицы могут значительно превосходить относительные скорости для диполя вблизи такой же частицы. Помимо этого, следует заметить, что если радиационная скорость zz -квадруполя, расположенного на поверхности частицы, возрастает при $k_0a \rightarrow 0$ (см., например, (31)), то

в случае диполя она стремится к конечному значению (см., например, [33]). Это означает, что при уменьшении радиуса частицы относительная радиационная скорость спонтанного распада квадруполя, расположенного на поверхности частицы, будет еще больше превосходить относительную радиационную скорость для диполя.

Заметим, что важной практической задачей является подбор таких условий, при которых $\gamma_r > \gamma_{nr}$ и $\gamma_r > \gamma_0$, что соответствует преобладанию радиационных распадов источника и их усилению вблизи частицы. Для электрического квадруполя вблизи металлической частицы условие $\gamma_r > \gamma_{nr}$ может быть недостижимо, особенно на малых расстояниях от поверхности наночастицы (см. рис. 3). Тем не менее, эта проблема может быть решена в квазистатическом режиме взаимодействия в том случае, если квадруполь расположен вблизи частицы малого по сравнению с длиной волны перехода размера (наночастицы) из материала с очень малой мнимой частью диэлектрической проницаемости. Например, рассматривая сферическую наночастицу радиусом $k_0a = 0.3$ с проницаемостями $\epsilon = 5.8 + i \cdot 10^{-3}$ и $\mu = 1$, найдем, что для zz -квадруполя радиационная скорость начинает преобладать над нерадиационной на расстояниях $r_0/a > 1.23$, а в точке $r_0/a = 1.3$ выполняются соотношения $\gamma_r/\gamma_0 \approx 107$ и $\gamma_{nr}/\gamma_0 \approx 39$. Для обеспечения лучших экспериментальных усло-

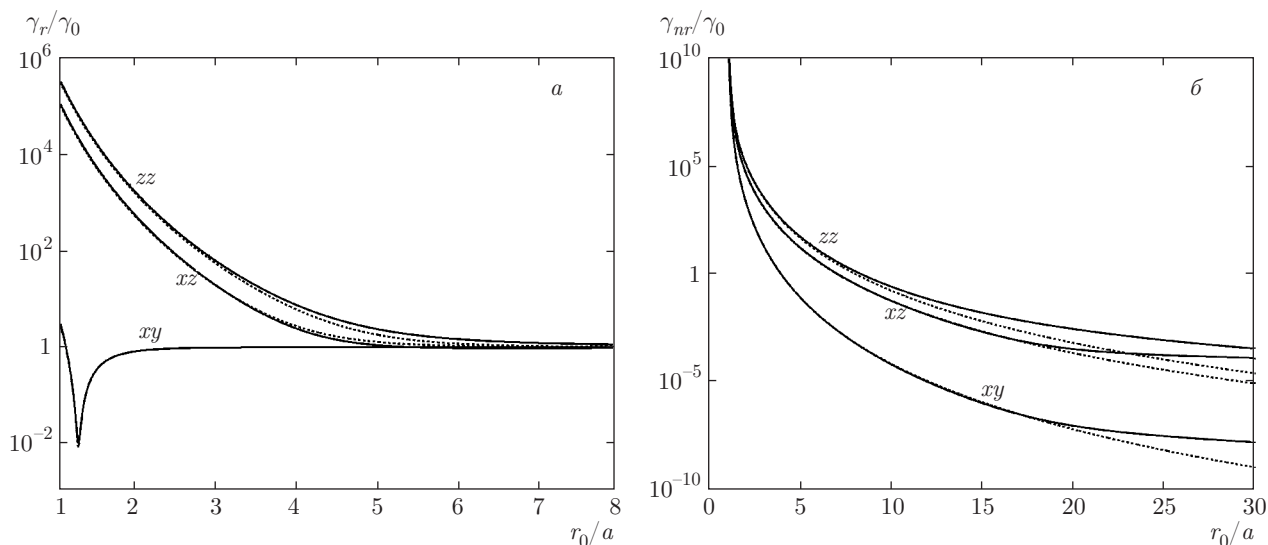


Рис. 5. Относительные радиационная (а) и нерадиационная (б) скорости спонтанного распада zz -, xz - и xy -электрических квадрупольных источников вблизи серебряной сферической наночастицы ($k_0a = 0.1$) с $\varepsilon = -2.9 + i \cdot 0.2$ (длина волны перехода 370 нм [34]) и $\mu = 1$ как функции r_0/a . Пунктирные линии на рис. а — асимптотика (30), а на рис. б — асимптотика (32). На рис. а точная и асимптотическая зависимости для xy -квадруполь почти совпадают

вий следует подобрать параметры наночастицы с помощью полученных в настоящей работе выражений.

На рис. 5 показаны относительные радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада квадруполь, расположенного вблизи серебряной сферической наночастицы (квазистатический режим), как функции расстояния от квадруполь до частицы. Как следует из рис. 5, асимптотические функции (30) и (32) хорошо согласуются с точными зависимостями в достаточно широком диапазоне параметров. Это позволяет использовать (30) и (32) для быстрых расчетов в наиболее важном квазистатическом режиме, когда возникает наибольшее увеличение скоростей спонтанного распада электрического квадруполь вблизи сферической частицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе в рамках классической электродинамики рассмотрены аналитические выражения для радиационной и нерадиационной скоростей спонтанного распада электрического квадрупольного источника (атома, молекулы), расположенного вблизи сферической частицы произвольного вещественного состава (диэлектрик, металл), имеющей радиус произвольной величины (наночастица, микрочастица). Данные выражения исследованы для различных типов квадруполь, рас-

положенных вблизи диэлектрических и металлических микро- и наночастиц.

Показано, что наибольшие значения радиационная и нерадиационная скорости спонтанного распада квадруполь вблизи сферической частицы могут принимать в квазистатическом случае, когда длина волны рассматриваемого перехода значительно больше характерного размера системы из частицы и квадруполь. Для этого случая получены асимптотические формулы для радиационной и нерадиационной скоростей распада.

Полученные результаты могут быть использованы для расчетов скоростей спонтанного распада электрического квадруполь, расположенного вблизи сферической частицы, и для разработки экспериментальных исследований в этой области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00290, 15-52-52006).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Явные выражения для коэффициентов (12) и (16), а также для скорости в случае квадруполь, расположенного на положительной части декартовой оси z

Для коэффициентов (12) и (16) можно получить следующие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{mn}^{(0)} \\ C_{mn}^{(0)} \end{array} \right\} = ik_0^4 \frac{2n+1}{6n(n+1)} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2k_0r_0} - \frac{n(n+1)}{(k_0r_0)^3} \right) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n(k_0r_0) \\ \psi_n(k_0r_0) \end{array} \right\} + \frac{1}{(k_0r_0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \zeta'_n(k_0r_0) \\ \psi'_n(k_0r_0) \end{array} \right\} \right] \times \right. \\ \times [\delta_{m1}(D_{xz} - iD_{yz}) - n(n+1)\delta_{m,-1}(D_{xz} + iD_{yz})] + \frac{1}{4(k_0r_0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \zeta'_n(k_0r_0) \\ \psi'_n(k_0r_0) \end{array} \right\} (1 - \delta_{n1}) \times \\ \times [\delta_{m2}(D_{xx} - D_{yy} - 2iD_{xy}) + (n-1)n(n+1)(n+2)\delta_{m,-2}(D_{xx} - D_{yy} + 2iD_{xy})] - \\ \left. - 3n(n+1) \left[\frac{1}{(k_0r_0)^3} \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n(k_0r_0) \\ \psi_n(k_0r_0) \end{array} \right\} - \frac{1}{2(k_0r_0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \zeta'_n(k_0r_0) \\ \psi'_n(k_0r_0) \end{array} \right\} \right] \delta_{m0} D_{zz} \right\}, \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{mn}^{(0)} \\ D_{mn}^{(0)} \end{array} \right\} = k_0^4 \frac{2n+1}{6n(n+1)} \left\{ \left[\frac{1}{(k_0r_0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n(k_0r_0) \\ \psi_n(k_0r_0) \end{array} \right\} - \frac{1}{2k_0r_0} \left\{ \begin{array}{l} \zeta'_n(k_0r_0) \\ \psi'_n(k_0r_0) \end{array} \right\} \right] \times \right. \\ \times [\delta_{m1}(D_{xz} - iD_{yz}) + n(n+1)\delta_{m,-1}(D_{xz} + iD_{yz})] + \frac{1}{4(k_0r_0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n(k_0r_0) \\ \psi_n(k_0r_0) \end{array} \right\} (1 - \delta_{n1}) \times \\ \left. \times [\delta_{m2}(D_{xx} - D_{yy} - 2iD_{xy}) - (n-1)n(n+1)(n+2) \delta_{m,-2}(D_{xx} - D_{yy} + 2iD_{xy})] \right\}. \quad (37)$$

Для скорости спонтанного распада (25) можно получить

$$\frac{\gamma_t}{\gamma_0} = 1 - \frac{ck_0^2}{4P_0} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} D_{zz}^* n(n+1) C_{0n}^{(1)} \left[\frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^3} - \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{2(k_0r_0)^2} \right] - \frac{ck_0^2}{12P_0} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} (D_{xz}^* + iD_{yz}^*) n(n+1) \times \\ \times \left\{ C_{1n}^{(1)} \left[n(n+1) \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^3} - \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} - \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{2k_0r_0} \right] - iD_{1n}^{(1)} \left[\frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} - \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{2k_0r_0} \right] \right\} + \\ + \frac{ck_0^2}{12P_0} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} (D_{xz}^* - iD_{yz}^*) \left\{ C_{-1,n}^{(1)} \left[n(n+1) \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^3} - \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} - \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{2k_0r_0} \right] + \right. \\ \left. + iD_{-1,n}^{(1)} \left[\frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} - \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{2k_0r_0} \right] \right\} + \frac{ck_0^2}{48P_0} \text{Im} \sum_{n=2}^{\infty} (D_{xx}^* - D_{yy}^* + 2iD_{xy}^*) (n-1) \times \\ \times n(n+1)(n+2) \left[C_{2n}^{(1)} \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} + iD_{2n}^{(1)} \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} \right] + \frac{ck_0^2}{48P_0} \text{Im} \sum_{n=2}^{\infty} (D_{xx}^* - D_{yy}^* - 2iD_{xy}^*) \times \\ \times \left[C_{-2,n}^{(1)} \frac{\zeta'_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} - iD_{-2,n}^{(1)} \frac{\zeta_n(k_0r_0)}{(k_0r_0)^2} \right], \quad (38)$$

где коэффициенты $C_{mn}^{(1)}$ и $D_{mn}^{(1)}$ даны в (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
2. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. вузов. Радиофизика **2**, 181 (1959).
3. V. V. Klimov and V. S. Letokhov, Opt. Comm. **122**, 155 (1996).
4. V. V. Klimov and V. S. Letokhov, Phys. Rev. A **54**, 4408 (1996).
5. V. V. Klimov and M. Ducloy, Phys. Rev. A **62**, 043818 (2000).
6. V. V. Klimov and V. S. Letokhov, Comm. Mod. Phys. **2**(1), D15 (2000).
7. J. A. Crosse and S. Scheel, Phys. Rev. A **79**, 062902 (2009).
8. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Физматлит, Москва (1963).
9. D. D. Dietrich, G. A. Chandler, R. J. Fortner, C. J. Hailey, and R. E. Stewart, Phys. Rev. Lett. **54**, 1008 (1985).

10. J.-C. Gauthier, J.-P. Geindre, P. Monier, E. Luc-Koenig, and J.-F. Wyart, *J. Phys. B: Atom. Mol. Phys.* **19**, L385 (1986).
11. S. K. Sekatskii, G. T. Shubeita, and G. Dietler, *Opt. Comm.* **188**, 41 (2001).
12. S. Tojo, M. Hasuo, and T. Fujimoto, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 053001 (2004).
13. S. Tojo and M. Hasuo, *Phys. Rev. A* **71**, 012508 (2005).
14. V. V. Klimov, D. Bloch, M. Ducloy, and J. R. Rios Leite, *Opt. Express* **17**, 9718 (2009).
15. V. V. Klimov, D. Bloch, M. Ducloy, and J. R. Rios Leite, *Phys. Rev. A* **85**, 053834 (2012).
16. V. E. Lembessis and M. Babiker, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 083002 (2013).
17. V. V. Klimov and M. Ducloy, *Phys. Rev. A* **72**, 043809 (2005).
18. K. Deguchi, M. Okuda, A. Iwamae, H. Nakamura, K. Sawada, and M. Hasuo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **78**, 024301 (2009).
19. V. V. Klimov, M. Ducloy, and V. S. Letokhov, *Phys. Rev. A* **59**, 2996 (1999).
20. V. V. Klimov, V. S. Letokhov, and M. Ducloy, *Laser Phys.* **17**, 912 (2007).
21. S. Scheel, L. Knoll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **58**, 700 (1998).
22. S. Scheel, L. Knoll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **60**, 4094 (1999).
23. H. T. Dung, L. Knoll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **62**, 053804 (2000).
24. H. T. Dung, L. Knoll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **64**, 013804 (2001).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
26. Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, Гостехиздат, Москва (1948).
27. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица, Наука, Москва (1979).
28. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1966).
29. Д. В. Гузатов, В. В. Климов, Н. С. Попрукайло, *ЖЭТФ* **143**, 611 (2013).
30. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и связь*, Москва (1989).
31. V. V. Klimov and M. Ducloy, *Phys. Rev. A* **69**, 013812 (2004).
32. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, Москва (2009).
33. V. V. Klimov and V. S. Letokhov, *Laser Phys.* **15**, 61 (2005).
34. P. B. Johnson and R. W. Christy, *Phys. Rev. B* **6**, 4370 (1972).
35. K. Kolwas and A. Derkachova, *Opto-Electron. Rev.* **18**, 429 (2010).
36. R. Filter, S. Muhlig, T. Eichelkraut, C. Rockstuhl, and F. Lederer, *Phys. Rev. B* **86**, 035404 (2012).
37. S. Stein, *Quart. Appl. Math.* **19**, 15 (1961).