

# ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ГАЗ–КРИСТАЛЛ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ ДИПОЛЯРНЫХ ЭКСИТОНОВ

*Р. А. Сурис\**

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук  
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 6 декабря 2015 г.

Рассмотрена система диполярных экситонов при температурах, превышающих ожидаемую температуру конденсации Бозе–Эйнштейна. Показано, что при таких температурах возможен переход первого рода с образованием фазы, близкой к кристаллу из таких экситонов. Построена фазовая диаграмма в области низких концентраций и температур. Дан анализ влияния этого перехода на спектр люминесценции системы.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. В. Келдыша*

DOI: 10.7868/S0044451016030196

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В начале 60-х годов прошлого века была высказана идея о возможности бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в объемных полупроводниках [1, 2]. Теоретическому анализу свойств экситонного конденсата были посвящены работы Келдыша и Козлова [3, 4] и Гергеля, Казаринова и Суриса [5–7]. В частности, в работе [5] был дан теоретический анализ оптических свойств экситонного конденсата и продемонстрирована возможность лазерной генерации в полупроводнике с экситонным конденсатом со слабым отталкиванием между экситонами. Однако экспериментальных подтверждений существования экситонного конденсата получить в то время не удалось. Одно из важных обстоятельств, препятствующих бозе-эйнштейновской конденсации экситонов, состоит в том, что между экситонами существует притяжение. Именно это не позволяет возникнуть экситонному конденсату, описываемому моделью слабонеидеального газа бозе-частиц с отталкиванием между ними, которая была создана Боголюбовым [8] и развита Беляевым [9].

Отмечу, что анализ свойств полупроводников с достаточно высокой концентрацией электрон-дырочных пар привел Л. В. Келдыша к замечательному выводу о том, что в такой системе возмож-

но возникновение электрон-дырочной жидкости, похожей на расплавленный металл. Этот вывод был высказан им в заключительном выступлении, подводящем итог IX Международной конференции по физике полупроводников в 1968 г. в Москве [10]. Предсказание это очень быстро нашло блестящее экспериментальное подтверждение в пионерских работах [11–14]. С историей открытия и свойствами электрон-дырочной жидкости в полупроводниках можно ознакомиться в подробном обзоре Тиходева [15].

Бозе-эйнштейновская конденсация (БЭК) атомов в ловушках при ультранизких температурах была продемонстрирована в работах Э. А. Корнелла, В. Кеттерле и К. Е. Вимана, удостоенных Нобелевской премии по физике 2001 г.

Возможность создания гетероструктур с квантовыми ямами вдохнула новую жизнь в усилия по поискам экситонного конденсата в полупроводниках. Тому есть по крайней мере две причины. Первая состоит в том, что двумерные экситоны обладают большей энергией связи, чем трехмерные. Вторая — в том, что в структурах с квантовыми ямами можно пространственно разделить электроны и дырки таким образом, чтобы экситоны представляли собой диполи с одинаково направленными дипольными моментами, что приводит, естественно, к их отталкиванию друг от друга.

Несколько слов о диполярных экситонах. Это связанные электрон-дырочные пары в гетерострук-

\* E-mail: suris@theory.ioffe.ru

турах с квантовыми ямами, причем электроны и дырки пространственно разделены, либо находясь в соседних квантовых ямах, либо разделенные в пределах одной ямы электрическим полем, направленным по нормали к ее поверхности (см., например, работы [16–18]).

Зависимости энергии связи основного состояния диполярного экситона, а также положительно и отрицательно заряженных трионов и биэкситонов от расстояния между слоями рассматривались в работах [19–22].

В предлагаемой статье я хочу обратить внимание на еще одну возможность коллективного поведения таких экситонов при температурах, превышающих ожидаемые температуры БЭК. Речь пойдет об образовании из таких диполярных экситонов кристаллической структуры или, точнее, структуры, близкой к кристаллической. В дальнейшем для краткости будем называть эту фазу кристаллом.

Найдем условия равновесия между разреженным газом таких экситонов с парной корреляционной функцией, соответствующей их взаимному отталкиванию, и двумерным кристаллом. И в заключение обсудим одно из проявлений возникновения двух фаз в спектре люминесценции экситонов.

## 2. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Будем рассматривать достаточно высокие температуры, когда дебройлевская длина волны экситона меньше среднего расстояния между экситонами и систему можно рассматривать как классическую. В отсутствие взаимодействия концентрация  $n$  двумерного бозе-газа связана с химическим потенциалом  $\mu$  соотношением

$$n = \int_0^{\infty} dE \frac{D(E)}{\exp[(E - \mu)/T] - 1},$$

где плотность состояний

$$D(E) = \begin{cases} gM/2\pi, & E > 0, \\ 0, & E < 0. \end{cases}$$

Здесь  $M$  — эффективная масса, описывающая свободное движение экситона в плоскости структуры и равная сумме эффективных масс электрона и дырки,  $g$  — степень вырождения,  $T$  — температура. Энергия  $E$  отсчитывается от энергии основного состояния поперечного движения экситона. Отметим, что здесь и ниже постоянная Планка, равно как и постоянная Больцмана положены равными единице.

Таким образом, связь между химическим потенциалом и концентрацией задается соотношением

$$\mu = T \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{n}{N_T} \right) \right], \quad (1)$$

где  $N_T$  — двумерная эффективная плотность частиц, соответствующая ситуации, в которой среднее расстояние между ними близко к их дебройлевской длине волны, и можно ожидать эффекты, связанные с конденсацией,

$$N_T = g \frac{M}{2\pi} T. \quad (2)$$

Таким образом, выражение для плотности свободной энергии невзаимодействующих экситонов как функции их концентрации имеет вид

$$f(n) = \int_0^n dn' \mu(n') = TN_T \int_0^{n/N_T} du \ln(1 - e^{-u}).$$

Для газа низкой плотности, когда  $n \ll N_T$  (именно этот случай мы и будем рассматривать),

$$f_{id}(n, T) \approx Tn \left[ \ln \left( \frac{n}{N_T} \right) - 1 \right]. \quad (3)$$

Это выражение, как и должно быть, соответствует свободной энергии идеального классического газа.

Теперь обратимся к взаимодействию между диполярными экситонами. В приближении низкой плотности будем учитывать только кулоновское отталкивание между экситонами с разностью координат  $\mathbf{r}_{1,2}$  в плоскости системы и расстоянием  $H$  между разделенными электроном и дыркой:

$$V(\mathbf{r}_{1,2}) = \frac{2e^2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_{1,2}|} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_{1,2}^2 + H^2}} \right) \quad (4)$$

( $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $e$  — заряд электрона). Добавка к свободной энергии из-за взаимного отталкивания экситонов в приближении низкой плотности имеет вид

$$E_{Coul,G}(n) = \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r}) [\langle n(0)n(\mathbf{r}) \rangle - n(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})] d\mathbf{r}.$$

Опять-таки в приближении низкой плотности входящая в это выражение двухчастичная корреляционная функция равна

$$\langle n(0)n(\mathbf{r}) \rangle - n(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}) = n^2 \exp[-V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/T]. \quad (5)$$

При температурах  $T \gg e^2/\varepsilon H$  температурно-зависящая экспонента в корреляционной функции становится равной единице и кулоновская энергия оказывается равной энергии плоского конденсатора:

$$E_{Coul,G}(n) = \frac{2\pi H}{\varepsilon} (en)^2. \quad (6)$$

Заметим, что в этих условиях экситоны оказываются ионизованными, но результат оказывается таким же.

В противоположном пределе  $T \ll e^2/\varepsilon H$  имеем

$$E_{Coul,G}(n) = \frac{2\pi H}{\varepsilon} \left( \frac{T}{e^2/\varepsilon H} \right)^{1/3} (en)^2. \quad (7)$$

Таким образом, кулоновская энергия в этой ситуации оказывается существенно меньше энергии плоского конденсатора в меру малости отношения температуры  $T$  к кулоновской энергии  $e^2/\varepsilon H$  из-за взаимного отталкивания экситонов.

Поскольку нас интересуют низкие температуры, удельная свободная энергия разреженного газа экситонов с учетом выражений (3) и (7) приобретает вид

$$f_G(n, T) = Tn \left[ \ln \left( \frac{n}{N_T} \right) - 1 \right] + \frac{2\pi H}{\varepsilon} \left( \frac{T}{e^2/\varepsilon H} \right)^{1/3} (en)^2. \quad (8)$$

Обратимся теперь к вычислению свободной энергии кристаллической фазы. Предполагаем, что экситоны упорядочиваются в треугольную решетку, так как именно такая конфигурация реализует минимальную энергию кулоновского отталкивания. Далее, чтобы не загромождать изложение, не будем учитывать вклад в свободную энергию термодинамически неизбежных вакансий в узлах такой решетки, что возможно при температурах, меньших характерной энергии взаимодействия между экситонами. Роль колебаний решетки, разрушающих, вообще говоря, дальний порядок, обсудим позже.

Плотность энергии такого кристалла имеет вид

$$f_{Cr}(n, T) = \frac{1}{H^2} \frac{e^2}{\varepsilon H} (nH^2)^{3/2} K(nH^2) - Tn \left[ \ln(g) + (g-1) \ln \frac{g}{g-1} \right]. \quad (9)$$

Первое слагаемое есть кулоновская энергия, причем фигурирующая в нем безразмерная решеточная сумма, зависящая от безразмерного параметра  $nH^2$ , есть

$$K(nH^2) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sum_{s,p} \left( \frac{1}{\sqrt{(s+p/2)^2 + 3p^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{(s+p/2)^2 + 3p^2/4 + \sqrt{3}nH^2/2}} \right).$$

Она описывает суммарную энергию взаимодействия экситонов, находящихся в разных узлах треугольной решетки. Естественно, из суммы исключены слагаемые с  $s = 0$  и  $p = 0$ .

Последнее слагаемое в выражении (9) учитывает энтропию, связанную с разными способами распределения по одному экситону в каждом узле решетки, если степень вырождения экситонов есть  $g$ . Как и должно быть, это слагаемое обращается в нуль, если  $g = 1$ .

Поскольку нас интересуют малые значения концентрации, выражение под знаком суммы можно разложить в ряд по малому параметру  $nH^2$ . Проведя численное суммирование, получим

$$f_{Cr}(n, T) = \frac{2.48}{H^2} \frac{e^2}{\varepsilon H} (nH^2)^{5/2} - Tn \left[ \ln(g) + (g-1) \ln \frac{g}{g-1} \right]. \quad (10)$$

Из этого выражения и выражения для свободной энергии газа видно, что естественно выбрать безразмерные переменные для концентрации

$$\nu = nH^2,$$

температуры

$$\theta = \frac{T}{e^2/\varepsilon H}$$

и плотности свободной энергии

$$\phi_{G,Cr}(\nu, \theta) = H^2 f_{G,Cr}(n, T) \frac{\varepsilon H}{e^2}. \quad (11)$$

В этих переменных выражения для плотностей свободной энергии газовой и кристаллической фаз приобретают простой вид:

$$\phi_G(\nu, \theta) = \theta \nu \left[ \ln \left( \frac{\nu}{\bar{N}_\theta} \right) - 1 \right] + 2\pi \theta^{1/3} \nu^2, \quad (12)$$

$$\phi_{Cr}(\nu, \theta) = 2.48 \nu^{5/2} - \theta \nu \left[ \ln(g) + (g-1) \ln \frac{g}{g-1} \right]. \quad (13)$$

В выражении (12) в безразмерной плотности энергии газа фигурирует безразмерная плотность

$$\bar{N}_\theta = g \frac{M e^2 \varepsilon H}{2\pi} \theta = g \frac{M}{2\pi m_{red}} \frac{H}{a_B} \theta. \quad (14)$$

Здесь  $a_B = \epsilon/e^2 m_{red}$  — боровский радиус экситона,  $m_{red}$  — редуцированная масса электрона и дырки. Напомним, что  $M$  — их суммарная масса.

### 3. РАВНОВЕСИЕ ФАЗ

Теперь у нас есть все необходимое для построения диаграммы равновесия фаз. Фазы находятся в равновесии, коль скоро равны их давления и химические потенциалы [23]. Это означает, что свободные энергии двух разных фаз как функции концентрации должны иметь общую касательную [23], точки соприкосновения с которой и дают равновесные значения концентраций в сосуществующих фазах. На рис. 1 приведен пример зависимостей безразмерных свободных энергий газа и кристалла и общей к ним касательной при безразмерной температуре  $\theta = 0.1$ . При этом фактор вырождения  $g$  был принят равным 2.

В результате мы приходим к диаграмме равновесия двух фаз — двумерных газа и кристалла дипольных экситонов, представленной на рис. 2. На той же диаграмме представлена зависимость от безразмерной концентрации безразмерной температуры, ниже которой должны возникать эффекты накопления экситонов в состоянии с нулевым импульсом их движения в плоскости структуры — «бозе-эйнштейновская конденсация». Эта температура (штриховая линия) меньше температур, при которых происходит переход газ–кристалл. Из выражения для  $\bar{N}_\theta$  видно, что при фиксированной безразмерной кон-

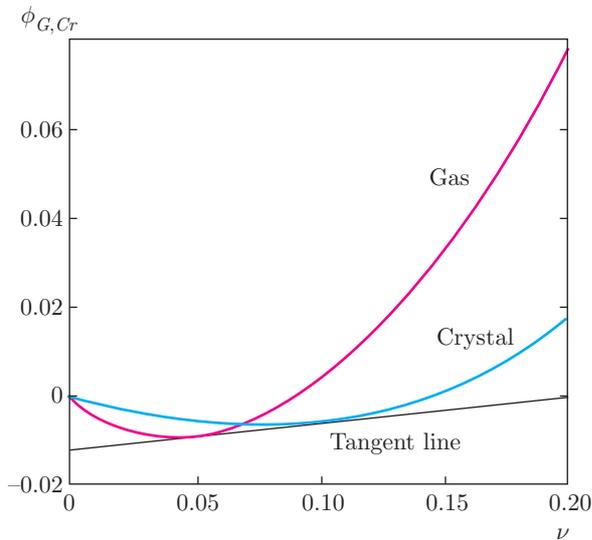


Рис. 1. Иллюстрация построения кривых фазового равновесия

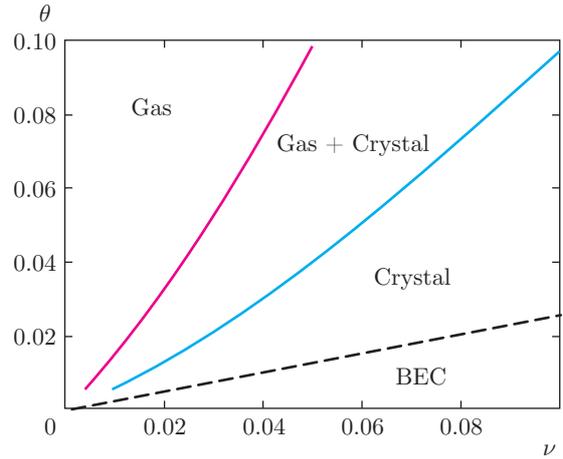


Рис. 2. Фазовая диаграмма «газ–кристалл» дипольных экситонов

центрации эта температура мала параметрически в меру малости параметра

$$\frac{2\pi m_{red} a_B}{g M H},$$

который «буквенно» мал из-за того, что полная масса экситона превосходит массу редуцированную,  $M/m_{red} > 1$ , расстояние между слоями, в которых локализованы электрон и дырка, превосходит боровский радиус экситона,  $H/a_B > 1$ , и фактор вырождения  $g$  также больше единицы. Для построения диаграммы на рис. 2 мы выбрали этот параметр равным 0.25, что соответствует  $M/m_{red} = 6$ ,  $g = 2$  и  $H/a_B = 2$ .

Следует обсудить еще одно ограничение нашего рассмотрения. Мы предполагаем экситоны не ионизованными. Простой анализ показывает, что степень ионизации экситонов при низких температурах есть

$$\zeta = \sqrt{\frac{N_{T,red}}{gn}} \exp\left(-\frac{I}{2T}\right),$$

где  $I = e^2/\epsilon H$  есть энергия связи экситона, а выражение для  $N_{T,red}$  получается из (2) заменой  $M$  на  $m_{red}$ . Тогда выражение для степени ионизации в безразмерных величинах приобретает вид

$$\zeta = \sqrt{\frac{N_{T,red}}{gn}} \exp\left(-\frac{I}{2T}\right) = \left(\frac{\theta}{2\pi g \nu}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\right).$$

Таким образом, требование пренебрежения ионизацией ограничивает применимость нашего рассмотрения со стороны низких концентраций экситонов:

$$\nu \gg \frac{\theta}{2\pi g} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\right).$$

При тех актуальных значениях температуры, которые представлены на рис. 2, это условие выполняется с очень большим запасом.

До сих пор мы не учитывали колебания дипольных экситонов, образующих треугольную решетку, относительно их положений равновесия. Между тем ясно, что акустические колебания двумерной решетки приводят к разрушению дальнего порядка. Чтобы понять, насколько это существенно, мы нашли частоты поперечных и продольных колебаний такой решетки. При этом речь идет о колебаниях со смещениями в плоскости.

Простая оценка, использующая выражение (13) для плотности свободной энергии кристалла и точные вычисления дают следующее характерное значение частоты на границе зоны Бриллюэна в единицах энергии  $e^2/\epsilon H$ :

$$\nu^{5/4} \sqrt{\frac{m_{red}}{M} \frac{a_B}{H}}.$$

Используя закон дисперсии фононов, можно вычислить зависимости двухчастичной корреляционной функции  $\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \rangle$  от расстояния  $\mathbf{R}$  между экситонами в решетке и убедиться в том, что эта функция убывает, как  $|\mathbf{R}|^{-\alpha}$ , в отличие от трехмерной решетки, где корреляционная функция, убывая, асимптотически приближается к конечному пределу, что и является проявлением дальнего порядка. В двумерной решетке дальнего порядка нет, но в наших условиях показатель  $\alpha$  мал. Расчет дает

$$\alpha = \frac{1}{15\pi} \frac{\theta}{\nu^{3/2}} \sqrt{\frac{m_{red}}{M} \frac{a_B}{H}}.$$

С используемыми выше значениями параметров получаем, что величина этого показателя составляет несколько сотых.

Таким образом, мы имеем дело не с двумерным кристаллом, а, скорее, с жидкостью, обладающей выраженным ближним порядком.

#### 4. ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ

Посмотрим теперь, как возможность образования двухфазной системы проявляется в спектре люминесценции системы. Следует иметь в виду, что процесс излучательной рекомбинации электрона и дырки в экситоне быстрый, не адиабатический, и система взаимодействующих экситонов не успевает перестроиться. Поэтому сдвиг частоты люминесценции из-за взаимодействия равен изменению только

кулоновской энергии при уменьшении числа экситонов на единицу, а не изменению свободной энергии при уменьшении числа экситонов на единицу (последнее есть просто химический потенциал). Этот сдвиг различен для двух разных фаз — газа и кристалла. И это отличает такие сдвиги от химических потенциалов, одинаковых для сосуществующих фаз.

Итак, дифференцируя кулоновские энергии газовой и кристаллической фаз по числу частиц, получаем в безразмерных единицах кулоновские сдвиги частот люминесценции дипольных экситонов в газовой и «кристаллической» фазах:

$$\Delta\omega_G(\nu) = 4\pi\nu\theta^{1/3}, \quad \Delta\omega_{Cr}(\nu) = 6.2\nu^{3/2}. \quad (15)$$

При фиксированной температуре и малых концентрациях центральная частота линии люминесценции линейно растет с ростом концентрации. Затем, по достижении границы двухфазной области, появляется линия люминесценции из «кристаллической» фазы, и ее интенсивность растет с одновременным уменьшением интенсивности линии газовой фазы. С дальнейшим ростом концентрации система покидает двухфазную область, остается лишь одна линия, сдвиг частоты которой описывается вторым выражением из (15). Рисунок 3 иллюстрирует такое поведение. Здесь схематически представлены (с постоянным шагом) линии равной интенсивности люминесценции. По вертикальной оси отложена частота  $\omega$ , а по горизонтальной — концентрация  $\nu$ , и то и другое в условных единицах. Рисунки 3а и 3б различаются значениями безразмерной температуры  $\theta$ : чем выше температура, тем больше энергия кулоновского отталкивания экситонов в газовой фазе (см. выражение (12)) в отличие от такой энергии в кристалле, где она не зависит от температуры (см. (13)). Поэтому в двухфазной области кулоновский сдвиг частоты в газе при высокой температуре больше, чем в кристалле.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в слое дипольных экситонов возможен фазовый переход первого рода с возникновением кристаллической фазы, имеющей треугольную ячейку. Анализ роли колебаний экситонов в такой решетке приводит к заключению, что здесь мы имеем дело не с кристаллом, характеризующимся дальним порядком, а, скорее, с жидкой фазой с медленно спадающей корреляционной функцией частиц. Проведен анализ кулоновского сдвига энергии фотона, возникающего в процессе излуча-

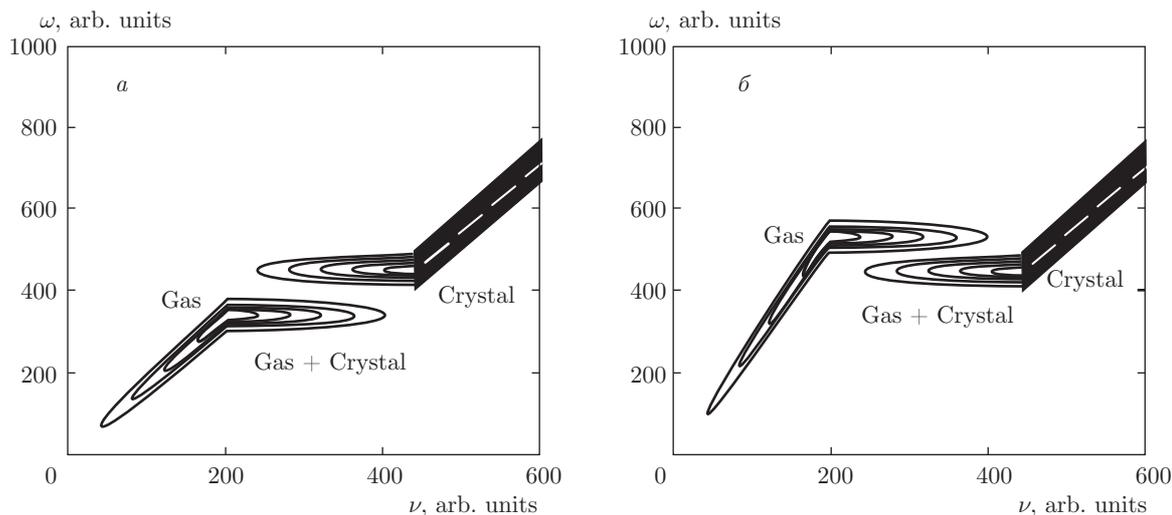


Рис. 3. Изменение спектра люминесценции в зависимости от концентрации для двух различных безразмерных температур:  $a - \theta = 0.02$ ;  $b - \theta = 0.08$

тельной рекомбинации электрона и дырки, образующих экситон, и показано, что в области концентраций, где сосуществуют две фазы, линия люминесценции расщепляется на две. Различие центральных частот этих линий определяется различием кулоновских энергий в газовой и кристаллической (с приведенной выше оговоркой) фазах.

Начало этой работы было положено в 2007 г., и первые результаты были представлены автором в совместном с Р. А. Сергеевым постере на конференции по низкоразмерным структурам в Генуе. Затем мои израильские коллеги М. Стерн, В. Уманский и И. Бар-Джозеф обнаружили экспериментально возникновение двух фаз в двумерной системе дипольных экситонов и стимулировали меня к продолжению работы в этом направлении, за что я им весьма признателен. Описание полученных ими результатов есть в работе [24]. Эти результаты, однако, намного сложнее описанных выше и требуют дополнительного анализа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Москаленко, ФТТ **4**, 276 (1962) [Sov. Phys.-Solid State **4**, 199 (1962)].
2. J. M. Blatt, K. W. Boer, and W. Brandt, Phys. Rev. **126**, 1691 (1962).
3. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, Письма в ЖЭТФ **5**, 238 (1967) [JETP Lett. **5**, 190 (1967)].
4. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968) [Sov. Phys.-JETP **27**, 521 (1968)].
5. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **53**, 544 (1967) [Sov. Phys.-JETP **26**, 354 (1968)].
6. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **54**, 298 (1968) [Sov. Phys.-JETP **27**, 159 (1968)].
7. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **58**, 686 (1970) [Sov. Phys.-JETP **31**, 367 (1970)].
8. Н. Н. Боголюбов, Изв АН СССР, сер. физ., **11**, 77 (1947); N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
9. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417 (1958) [Sov. Phys.-JETP **7**, 289 (1958)].
10. Л. В. Келдыш, в сб. Труды IX Междунар. конф. по физике полупроводников (23–29 июля 1968 г., Москва), Наука, Ленинград (1969), с. 1307.
11. Я. Е. Покровский, К. И. Свистунова, Письма в ЖЭТФ **9**, 435 (1969) [JETP Lett. **9**, 261 (1969)].
12. В. М. Асин, А. А. Рогачев, Письма в ЖЭТФ **9**, 415 (1969) [JETP Lett. **9**, 248 (1969)].
13. В. С. Вавилов, В. А. Заяц, В. Н. Мурзин, Письма в ЖЭТФ **10**, 304 (1969) [JETP Lett. **10**, 192 (1969)].
14. В. С. Багаев, Т. И. Галкина, О. В. Гоголин, Л. В. Келдыш, Письма в ЖЭТФ **10**, 309 (1969) [JETP Lett. **10**, 195 (1969)].

15. С. Г. Тиходеев, УФН **145**, 3 (1985).
16. L. V. Butov and A. I. Filin, Phys. Rev. B **58**, 1980 (1998); L. V. Butov, A. C. Gossard, and D. S. Chemla, Nature **418**, 751 (2002).
17. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, УФН **176**, 651 (2006); А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Д. А. Демин, Письма в ЖЭТФ **94**, 877 (2011) [JETP Lett. **94**, 800 (2011)].
18. M. Stern, V. Garmider, V. Umansky, and I. Bar-Joseph, Phys. Rev. Lett. **100**, 256402 (2008).
19. Р. А. Сергеев, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, ФТИ им. А. Ф. Иоффе, Санкт-Петербург (2004).
20. Р. А. Сергеев, Р. А. Сурис, ФТП **37**, 1225 (2003). Semiconductors **37**, 1205 (2003).
21. R. A. Sergeev and R. A. Suris, in *Optical Properties of 2D Systems with Interacting Electrons*, ed. by W. Os-sau and R. Suris, NATO Sci. Ser., Kluwer Acad. Publ. (2003), p. 279.
22. М. А. Семина, Р. А. Сурис, Письма в ЖЭТФ **94**, 614 (2011) [JETP Lett. **94**, 574 (2011)].
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматгиз, Москва (2003).
24. M. Stern, V. Umansky, and I. Bar-Joseph, Science **343**, 55 (2014).