

ВЛИЯНИЕ МЕЖИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ И СПЕКТРЫ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО МАГНЕТИКА $S = 1$

О. А. Космачев, А. В. Кривцова, Ю. А. Фридман*

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
295077, Симферополь, Республика Крым, Россия

Поступила в редакцию 4 августа 2015 г.

Исследовано влияние межоионной анизотропии на фазовые состояния негейзенберговского ферромагнетика со спином магнитного иона $S = 1$. Показано, что в зависимости от соотношений констант межоионной анизотропии в системе реализуются одноосные и угловые ферромагнитные и нематические фазы. Изучены динамические свойства системы в окрестностях ориентационных фазовых переходов, а также фазовых переходов по модулю магнитного момента. Показано, что ориентационные фазовые переходы в ферромагнитных и в нематических фазах могут являться переходами как первого, так и второго рода.

DOI: 10.7868/S0044451016020139

1. ВВЕДЕНИЕ

Упорядочение в спиновых системах обычно ассоциируется со стандартным магнитным порядком, для которого средние значения спинов $\langle \mathbf{S}_n \rangle$ на узлах отличны от нуля и образуют различные магнитные структуры (ферромагнетики, антиферромагнетики и др., см. [1–3]). Основным свойством магнитоупорядоченных систем является нарушение симметрии относительно отражения времени, $\langle \mathbf{S}_n \rangle \rightarrow -\langle \mathbf{S}_n \rangle$ при $t \rightarrow -t$. Большинство работ, посвященных линейной и нелинейной динамике магнитного момента, базируется на уравнении Ландау – Лифшица для единичного (нормированного) вектора намагниченности, см. [1, 2]. Справедливость уравнения Ландау – Лифшица можно обосновать для ферромагнетика, описывающегося обменным гамильтонианом Гейзенберга, который включает изотропное билинейное взаимодействие спинов вида $J\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$. Этот гамильтониан содержит только первые степени операторов спина (на данном узле), и для его анализа естественно использовать спиновые когерентные состояния (обобщенные когерентные состояния для группы $SU(2) \sim SO(3)$), см. обзор [4]. При этом получается, что в интересующем нас случае чистых состояний (фактически, при $T \rightarrow 0$) эволюция сис-

темы происходит в рамках этих состояний, в частности, среднее значение вектора спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ (намагниченности) имеет постоянную длину. По сути, это условие совпадает с тем, что имеет место для уравнения Ландау – Лифшица без учета диссипации.

Однако уже достаточно давно было указано на возможность существования состояния спинового немагнетика, для которого средние значения спинов на узлах $\langle \mathbf{S}_n \rangle$ равны нулю, но спонтанное нарушение симметрии спиновой системы связано с анизотропией некоторых высших корреляторов проекций спина [5]. Для этих систем существуют и специфические моды спиновых колебаний, включающие продольную динамику спина. Появление всех этих эффектов связано с негейзенберговскими взаимодействиями, т. е. с наличием высших спиновых инвариантов вида $(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^{2S}$ (S – величина спина магнитного иона) в обменном гамильтониане. При выходе за рамки модели Гейзенберга, например, при учете высших инвариантов изотропного взаимодействия, условие $|\langle \mathbf{S} \rangle| = \text{const}$ не выполняется и описание в рамках когерентных $SU(2)$ -состояний перестает быть применимым. Соответственно, динамику спиновой системы в этом случае невозможно описать с помощью стандартного уравнения Ландау – Лифшица. В этом случае для исследования динамики системы можно использовать когерентные состояния группы $SU(2S+1)$, что для интересующего нас случая спина $S = 1$ соответствует $SU(3)$ [6–12]. Интересно отметить, что получающиеся уравнения для

* E-mail: yuriiifridman@gmail.com

параметров $SU(3)$ -состояний можно рассматривать как обобщение уравнений Ландау – Лифшица [9].

Состояние спинового нематика может возникать из-за корреляции спинов на различных узлах, такой что симметрия относительно отражения времени для всей системы не нарушена [5]. Вероятно, такие состояния обнаружены для низкоразмерного магнетика LiCuVO_4 [13, 14]. Основной спецификой негейзенберговских спиновых систем является квантовая редукция спина, т. е. появление состояний со средним значением $|\langle \mathbf{S} \rangle| < S$. В статических свойствах системы это проявляется в существовании таких состояний, в основном состоянии которых средний спин $\langle \mathbf{S} \rangle$ равен нулю, см. [15–26]. Спонтанное понижение симметрии в этой фазе и отличие спинового нематика от парамагнетика определяются мультипольными средними по компонентам спина (квадрупольными, типа $\langle S_i S_k \rangle$, октупольными, типа $\langle S_i S_j S_k \rangle$ и так далее). В динамике таких магнетиков (как нематических, так и магнитных фаз) возникают специфические моды, связанные с включением мультипольных степеней свободы, см. [28–35]. Для них характерны связанные колебания мультипольных переменных и изменения модуля спина без поворота вектора $\langle \mathbf{S} \rangle$, т. е. продольные спиновые колебания. Исследованию процессов релаксации элементарных возбуждений в нематической фазе магнетика со спином $S = 1$ посвящены работы [9–12, 36, 37].

Наряду с исследованием влияния высших инвариантов на свойства изотропных спиновых систем, представляет интерес исследование моделей с учетом межионной анизотропии. Одна из простых моделей, содержащая в гамильтониане тензорные взаимодействия, — это обобщение изинговской модели с учетом биквадратичного взаимодействия — так называемая модель Блюма – Эмери – Гриффитса [35]. Эта модель была предложена для описания термодинамических свойств смеси ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ в окрестности критической точки. В работах [30, 31] обобщена модель Блюма – Эмери – Гриффитса на негейзенберговские магнетики с $S = 1$. Было показано, что учет анизотропного обменного взаимодействия (типа модели Изинга или XY-модели) оказывает существенное влияние на динамику системы, а также формирование специфических фазовых состояний.

Цель данной работы — изучить влияние анизотропного межионного взаимодействия (более сложного, чем в работах [30, 31]) на фазовые состояния негейзенберговского ферромагнетика со спином магнитного иона $S = 1$, не вдаваясь в природу возникновения анизотропии магнитных взаимодействий. Вполне ожидаемо, что исследование более

сложных систем будет приводить к выявлению новых необычных свойств магнетиков. Рассмотрение дополнительных возможностей симметрии билинейного и биквадратичного обменного взаимодействий, по всей видимости, может приводить к более разнообразной структуре фазовых состояний и динамических свойств системы.

2. МОДЕЛЬ

В качестве модели исследуемой системы рассмотрим негейзенберговский ферромагнетик с межионной анизотропией и спином магнитного иона $S = 1$. Гамильтониан такой системы можно представить в следующем виде:

$$H_{int} = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} \{ J_{nn'} (S_n^z S_{n'}^z + \Delta (S_n^x S_{n'}^x + S_n^y S_{n'}^y)) + K_{nn'} (O_{2n}^0 O_{2n'}^0 / 3 + \Delta_1 (O_{2n}^{zx} O_{2n'}^{zx} + O_{2n}^{yz} O_{2n'}^{yz}) + \Delta_2 (O_{2n}^{xy} O_{2n'}^{xy} + O_{2n}^{yx} O_{2n'}^{yx})) \}, \quad (1)$$

$J_{nn'}$, $K_{nn'}$ — константы билинейного и биквадратичного обменных интегралов в приближении взаимодействия ближайших соседей; $J, K > 0$; $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ — безразмерные параметры межионной (обменной) анизотропии; $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \geq 0$, O_{2n}^t — операторы Стивенса ($t = 0, 2, xy, \dots$) [38]. Если параметры анизотропии равны единице, то гамильтониан (1) становится изотропным. В случае, когда все три параметра анизотропии равны нулю, гамильтониан (1) описывает изингоподобную так называемую модель Блюма – Эмери – Гриффитса [35]:

$$H_{int} = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} [J_{nn'} S_n^z S_{n'}^z + K_{nn'} (S_n^z S_{n'}^z)^2].$$

Кроме того, если равны нулю обратные значения от параметров анизотропии $1/\Delta = 1/\Delta_1 = 1/\Delta_2 = 0$, то гамильтониан (1) описывает XY-модель с учетом биквадратичного обменного взаимодействия [35].

Исследование свойств магнетика будем проводить в области низких температур ($T \ll T_c$, T_c — температура Кюри), поскольку именно в этом случае наиболее ярко проявляются квантовые свойства системы. Исследованию температурной зависимости статистических и динамических свойств анизотропных магнетиков посвящены работы [39–41].

Выбором собственной системы координат относительно кристаллографических осей [21] можно добиться, чтобы параметры порядка характеризующие систему были действительными, т. е. $\langle S^y \rangle = \langle O_2^{yz} \rangle = \langle O_2^{xy} \rangle = 0$. Учет анизотропного обменного

взаимодействия приводит к тому, что в общем случае магнитный момент направлен под углом θ к оси z . Унитарный поворот $U(\theta) = \prod_n \exp(i\theta S_n^y)$ позволяет перейти в собственную систему координат для каждого узла, в которой направление оси z совпадает с направлением среднего спина. В результате преобразований

$$\tilde{H}_{int}(\theta) \rightarrow U(\theta)H_{int}U^\dagger(\theta)$$

гамильтониан (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{int}(\theta) = & -\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} J_{nn'} \left[S_n^x S_{n'}^x (\sin^2 \theta + \Delta \cos^2 \theta) + \right. \\ & + S_n^z S_{n'}^z (\cos^2 \theta + \Delta \sin^2 \theta) + \Delta S_n^y S_{n'}^y + \\ & \left. + \frac{1}{2} (S_n^z S_{n'}^x + S_n^x S_{n'}^z) \sin 2\theta (1 - \Delta) \right] - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} K_{nn'} \left[\frac{O_{2n}^0 O_{2n'}^0}{3} \left(1 - 3n \sin^2 \theta - \frac{3m}{2} \sin^2 2\theta \right) + \right. \\ & + O_{2n}^{zx} O_{2n'}^{zx} (\Delta_1 + 2m \sin^2 2\theta) + \\ & + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 (-2n \sin^2 \theta + m \sin^2 2\theta) + \\ & + O_{2n}^{zx} O_{2n'}^2 (3n \sin 2\theta - m \sin 4\theta) + \\ & + O_{2n}^{zx} O_{2n'}^0 (n \sin 2\theta + m \sin 4\theta) + \\ & + O_{2n}^{zy} O_{2n'}^{zy} (\Delta_1 \cos^2 \theta + \Delta_2 \sin^2 \theta) + \\ & + O_{2n}^{xy} O_{2n'}^{xy} (\Delta_1 \sin^2 \theta + \Delta_2 \cos^2 \theta) + \\ & \left. + \frac{1}{2} (O_{2n}^{xy} O_{2n'}^{zy} + O_{2n}^{zy} O_{2n'}^{xy}) \sin 2\theta (\Delta_1 - \Delta_2) + \right. \\ & \left. + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 \left(\Delta_2 + 3n \sin^2 \theta - \frac{m}{2} \sin^2 2\theta \right) \right], \end{aligned}$$

где $m = (3 + \Delta_2 - 4\Delta_1)/8$, $n = (1 - \Delta_2)/4$.

Выделяя средние поля, связанные с упорядочением магнитного момента, а также квадрупольных моментов, запишем одноузельный гамильтониан в виде

$$H_0(n) = -H_z S_n^z - H_x S_n^x - B_2^0 O_{2n}^0 - B_2^2 O_{2n}^2 - B_2^{zx} O_{2n}^{zx}, \quad (2)$$

где $H_z = J_0 \langle S \rangle (\cos^2 \theta + \Delta \sin^2 \theta)$, $H_x = J_0 \langle S \rangle \times \sin \theta \cos \theta (1 - \Delta)$, коэффициенты B_2^0 , B_2^2 , B_2^{zx} пропорциональны K_0 и являются функциями квадрупольных параметров $q_2^t = \langle O_2^t \rangle$ ($t = 0, 2, zx$); $J_0 = \sum_{n'} J_{nn'}$, $K_0 = \sum_{n'} K_{nn'}$.

Для решения одноузельной задачи воспользуемся методом унитарных преобразований N -уровневой системы для операторов Хаббарда [42]. Операторы Хаббарда строятся на базисе $|i\rangle$ собственных векторов оператора S^z : $X^{ij} \equiv |i\rangle \langle j|$ [43]. Связь спиновых операторов с операторами Хаббарда имеет вид

$$S^+ = \sqrt{2}(X^{10} + X^{0-1}), \quad S^- = (S^+)^+,$$

$$2S^z = [S^+, S^-]_-.$$

Одноузельный гамильтониан (2) в представлении операторов Хаббарда можно записать в виде

$$H_0 = \sum_i \varepsilon_i X^{ii} + \sum_{i \neq j} V_{ij} X^{ij}, \quad V_{ji} = (V_{ij})^*, \quad (3)$$

где ε_i — «затравочный» спектр состояний $|i\rangle$; V_{ij} — амплитуды недиагональных слагаемых гамильтониана. Используя метод обобщенного u - v -преобразования [42], удастся определить базис векторов, в котором гамильтониан (3) становится диагональным:

$$|\psi_1\rangle = \cos \beta (\cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle) + \sin \beta |0\rangle,$$

$$|\psi_0\rangle = -\sin \beta (\cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle) + \cos \beta |0\rangle,$$

$$|\psi_{-1}\rangle = -\sin \alpha |1\rangle + \cos \alpha |-1\rangle.$$

Вид параметров порядка, входящих в одноузельный гамильтониан (2), определяется из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда:

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \cos^2 \beta, \quad q_2^0 = \cos^2 \beta - 2 \sin^2 \beta,$$

$$q_2^2 = \sin 2\alpha \cos^2 \beta, \quad q_2^{zx} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) \sin 2\beta.$$

Кроме приведенных выше параметров, в результате унитарных преобразований, как отмечено в работе [44], возникает еще один параметр,

$$\langle S^x \rangle = (\cos \alpha + \sin \alpha) \sin 2\beta / \sqrt{2},$$

который в собственной системе координат равен нулю. Из условия $\langle S^x \rangle = 0$ следует, что $\beta = 0$, поскольку в случае $\alpha = -\pi/4$ или $\beta = \pi/2$ не только $\langle S^x \rangle = 0$, но и $\langle S^z \rangle = 0$, что приводит к потере решений для ферромагнитно упорядоченных состояний. С учетом этого параметры в собственной системе координат можно представить в виде

$$\langle S \rangle = \cos 2\alpha, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = \sin 2\alpha, \quad q_2^{zx} = 0. \quad (4)$$

Чтобы получить выражения для собственных функций и параметров порядка, в лабораторной системе координат необходимо провести обратное унитарное преобразование $U(-\theta) = \exp(-i\theta S^y)$.

В случае низких температур ($T \rightarrow 0$) при исследовании спиновых конфигураций системы мы можем ограничиться рассмотрением энергии основного состояния E_1 (на один узел), поскольку в этом случае свободная энергия совпадает с энергией основного состояния ($F \approx E_1$). Таким образом, анализ энергии основного состояния

$$E_1 = \frac{1}{2} [J_0(1 - \Delta) \cos^2 2\alpha + K_0(1 - \Delta_1 + (\Delta_1 - \Delta_2) \sin 2\alpha)(1 - \sin 2\alpha)] \sin^2 \theta + \frac{K_0}{8}(4\Delta_1 - 3 - \Delta_2)(1 - \sin 2\alpha)^2 \sin^4 \theta - \frac{1}{2}(J_0 - K_0\Delta_2) \cos^2 2\alpha \quad (5)$$

позволяет определить спиновые состояния, реализуемые в системе при различных соотношениях материальных параметров. Необходимо отметить, что полная фазовая картина исследуемой системы определяется пятью материальными параметрами $J_0, K_0, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$. Следовательно, в пространстве этих параметров невозможно изобразить фазовый портрет системы. Таким образом, фазовую диаграмму исследуемой системы удобно представить в виде сечений в различных плоскостях при определенных соотношениях между обменными интегралами и параметрами обменной анизотропии.

Прежде чем переходить к исследованию энергии (5), рассмотрим полную магнитную энергию системы. Усредним гамильтониан (1) по основному состоянию $|\psi_1\rangle = \cos \alpha|1\rangle + \sin \alpha|-1\rangle$, т. е. $W = \langle \psi_1 | \tilde{H}_{int}(\theta) | \psi_1 \rangle$. Тогда полная магнитная энергия определяется выражением

$$W = (Jm_0^2(1 - \Delta) + 4Km_0^4(1 - \Delta_1)) \sin^2 \theta + Km_0^4(4\Delta_1 - 3 - \Delta_2) \sin^4 \theta,$$

$m_0 = \sum_n \langle S \rangle$ — модуль магнитного момента единицы объема ферромагнетика.

Анализ макроскопической энергии показывает, что в системе при условии $\Delta_2 < 4\Delta_1 - 3$ возможна реализация фазы с ориентацией магнитного момента под углом θ относительно оси z (см. [1]). Таким образом, условие $\Delta_2 < 4\Delta_1 - 3$ является необходимым (но не достаточным) условием реализации угловой фазы, а величина угла θ зависит от соотношения материальных параметров системы.

3. ФЕРРОМАГНИТНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ И ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Вначале рассмотрим случай, когда в системе реализуется ферромагнитное упорядочение. В случае изотропного обменного взаимодействия было показано [20, 23], что ферромагнитная фаза устойчива при $J_0 > K_0$. При учете анизотропии обменного взаимодействия это условие будет скорректировано параметрами обменной анизотропии Δ, Δ_1 и Δ_2 .

Очевидно, что при $K_0 = 0$ величина среднего спина не меняется, $-\langle S \rangle = 1$ (параметр $\alpha = 0$). В зависимости от значения анизотропного параметра Δ изменяется направление вектора намагниченности и реализуются ферромагнитно упорядоченные фазы: легкоосная ферромагнитная фаза (ΦM_{\parallel}) с направлением вектора магнитного момента вдоль оси z , устойчивая при $\Delta < 1$, и легкоплоскостная ферромагнитная фаза (ΦM_{\perp}) фаза с направлением вектора магнитного момента, ортогональным оси z , устойчивая при $\Delta > 1$.

При $K_0 \neq 0$ в легкоплоскостной фазе возникает квантовая редукция спина [9], т. е. модуль магнитного момента $\langle S \rangle$ может меняться от нуля до единицы, в зависимости от соотношения материальных констант

$$\langle S \rangle = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha_{\perp}}, \quad \sin 2\alpha_{\perp} = \frac{K_0(\Delta_2 - 1)}{4J_0\Delta - K_0(3 + \Delta_2)}. \quad (6)$$

Тогда легкоплоскостная фаза ΦM_{\perp} при $K_0 \neq 0$ трансформируется в квадрупольно-ферромагнитную фазу $K\Phi M_{\perp}$, которая характеризуется тем, что в ней дипольный и квадрупольные параметры порядка могут изменяться от максимального до минимального значений, в зависимости от соотношения материальных констант. Так, при $\Delta_2 = 1$ намагниченность достигает насыщения и $\langle S \rangle = 1$.

Кроме того, как следует из формулы (5), при $4\Delta_1 - 3 - \Delta_2 > 0$ возможна реализация угловой квадрупольно-ферромагнитной фазы ($K\Phi M_{\angle}$) с $\langle S \rangle < 1$, а направление вектора магнитного момента не имеет фиксированной ориентации, и в зависимости от соотношения между материальными константами значение угла θ может меняться от 0 до $\pi/2$:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha_{\angle} &= \\ &= K_0 \sin^2 \theta (1 - \Delta_2 + (4\Delta_1 - 3 - \Delta_2) \cos^2 \theta) \times \\ &\quad \times \{K_0(4\Delta_2 + 3(1 - \Delta_2) \sin^2 \theta + \\ &\quad + (4\Delta_1 - 3 - \Delta_2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta) - \\ &\quad - 4J_0(\cos^2 \theta + \Delta \sin^2 \theta)\}^{-1}, \\ \cos 2\theta &= \{K_0(1 - \Delta_2)(1 + 3 \sin 2\alpha_{\angle}) + \\ &\quad + 4J_0(1 - \Delta)(1 + \sin 2\alpha_{\angle})\} \times \\ &\quad \times \{K_0(4\Delta_1 - 3 - \Delta_2)(1 - \sin 2\alpha_{\angle})\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Дополнительную информацию об областях существования соответствующих спиновых состояний и о типах фазовых переходов между ними могут дать исследования динамических свойств системы,

т. е. спектров магнонов. Спектры элементарных возбуждений определяются полюсами функции Грина [45]:

$$G^{\lambda\lambda'}(n, \tau; n', \tau') = -\langle \hat{T} \tilde{X}_n^\lambda(\tau) \tilde{X}_{n'}^{\lambda'}(\tau') \rangle, \quad (8)$$

где $\tilde{X}_n^\lambda(\tau) = \exp(\hat{H}\tau) X_n^\lambda \exp(-\hat{H}\tau)$ — оператор Хаббарда в гейзенберговском представлении, \hat{T} — оператор Вика, λ — корневые векторы, определяющиеся алгеброй операторов Хаббарда [43]. Мы не будем здесь останавливаться на выводе дисперсионного уравнения, поскольку этот вопрос подробно изложен в работах [45, 46]. Дисперсионное уравнение справедливо при произвольном соотношении материальных констант и в широком температурном интервале существования магнитного упорядочения (исключая флуктуационную область). Решения дисперсионного уравнения определяют спектры элементарных возбуждений в различных фазах.

Спектры магнонов в легкоосной фазе ΦM_{\parallel} и легкоплоскостной фазе $K\Phi M_{\perp}$ соответственно имеют вид

$$\varepsilon_1(k) = 2(J_0 - K_k \Delta_2), \quad (9.1)$$

$$\varepsilon_2(k) = J_0 - J_k \Delta + K_0 - K_k \Delta_1, \quad (9.2)$$

$$\varepsilon_1(k) = 2 \{ (J_0 \Delta - K_k \Delta_1) \{ (J_0 - J_k) \Delta + [J_k \Delta - K_k(3 + \Delta_2)/4] (1 - \sin^2 2\alpha_{\perp}) \} \}^{1/2}, \quad (10.1)$$

$$\varepsilon_2(k) = \sqrt{\Omega_1(\Omega_1 + \Omega_2)}, \quad (10.2)$$

$$\Omega_1 = (J_0 - J_k) \Delta (1 - \sin 2\alpha_{\perp}) + (K_0 - K_k) \Delta_2 (1 + \sin 2\alpha_{\perp}),$$

$$\Omega_2 = J_k (\Delta - 1) + K_k (\Delta_2 - \Delta_1) + \sin 2\alpha_{\perp} (K_k (\Delta_2 + \Delta_1) - J_k (\Delta + 1)).$$

Исследуем поведение спектров возбуждения в наиболее интересных случаях. Пусть $\Delta_1 > (3 + \Delta_2)/4$. Фазовые переходы между фазами «легкоосная–угловая» и «легкоплоскостная–угловая» являются ориентационными фазовыми переходами второго рода. При приближении к линии фазового перехода «угловая–легкоосная» модуль магнитного момента стремится к значению насыщения $\langle S \rangle = 1$. На линии фазового перехода $J_0(1 - \Delta) = K_0(\Delta_1 - 1)$ щель в спектре (9.2) обращается в нуль. Как следует из выражений (6) и (7), в легкоплоскостной фазе $K\Phi M_{\perp}$ и угловой фазе $K\Phi M_{\perp}$ $\langle S \rangle \neq 1$. На линии фазового перехода между угловой и легкоплоскостной фазами,

$$J_0 [1 - \Delta + (1 + \Delta) \sin 2\alpha] = K_0 [\Delta_2 - \Delta_1 + \sin 2\alpha_{\perp} (\Delta_2 + \Delta_1)],$$

значения намагниченностей сравниваются, т. е.

$$\sin 2\alpha_{\perp} = \sin 2\alpha_{\angle} \quad \text{при} \quad \theta = \pi/2.$$

На этой же линии обращается в нуль щель в спектре (10.2). В длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$ оба спектра (9.2) и (10.2) на линиях фазовых переходов в угловую фазу имеют квадратичный закон дисперсии. Такое поведение спектров соответствует ориентационным фазовым переходам второго рода.

Теперь рассмотрим случай, когда $\Delta_1 < (3 + \Delta_2)/4$. При таком соотношении параметров анизотропии угловая фаза становится неустойчивой. Фазовый переход из легкоосной фазы происходит непосредственно в легкоплоскостную фазу и не является чисто ориентационным, так как на линии фазового перехода между легкоосной и легкоплоскостной фазами вместе с резким поворотом вектора намагниченности на угол $\pi/2$ скачком изменяется значение модуля вектора намагниченности с $\langle S \rangle = 1$ в легкоосной фазе до $\langle S \rangle < 1$ в легкоплоскостной фазе (см. выражение (6)). Линия фазового перехода определяется из равенства свободных энергий в легкоосной и легкоплоскостной фазах и имеет вид

$$4J_0(1 - \Delta) = K_0(1 - \Delta_2)(1 + \sin 2\alpha_{\perp}).$$

В окрестности линии фазового перехода между легкоосной и легкоплоскостной фазами размягчаются ветви (9.2) и (10.2). Обращение в нуль щелей в спектрах определяет линии потери устойчивости спектров: $J_0(1 - \Delta) = K_0(\Delta_1 - 1)$ и $J_0[1 - \Delta + (1 + \Delta) \sin 2\alpha] = K_0[\Delta_2 - \Delta_1 + \sin 2\alpha_{\perp} (\Delta_2 + \Delta_1)]$. Эти линии определяют границы области сосуществования рассматриваемых здесь фаз. Такое поведение спектров характерно для фазовых переходов первого рода.

4. НЕМАТИЧЕСКОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ И ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Исследования изотропной модели негейзенберговского магнетика с $S = 1$ [17, 22, 25] показали, что в случае большого биквадратичного обменного взаимодействия ($K_0 > J_0$) ферромагнитное упорядочение становится энергетически невыгодным. Дипольный параметр порядка становится равным нулю, и система характеризуется высшими по компонентам

спинового оператора мультипольными параметрами порядка. Как отмечалось выше, такое состояние называют спиновым нематиком. В частности, для исследуемой модели нематические фазы, как следует из формул (4), характеризуются квадрупольными параметрами порядка q_2^0 и q_2^2 , являющимися диагональными компонентами симметричного тензора второго ранга

$$q_2^{ij} = \langle S^i S^j + S^j S^i \rangle / 2.$$

Исследуем статические и динамические свойства нематического состояния для обменно анизотропного негейзенберговского ферромагнетика. Пусть соотношение обменных интегралов и параметров анизотропии таково, что ферромагнитное упорядочение становится невыгодным. Тогда исследование свободной энергии (5) показывает, что в случае $\langle S \rangle = 0$ могут реализоваться следующие фазовые состояния:

нематическая плоскостная фаза N_1 при $\theta = 0$ и $\alpha = -\pi/4$;

нематическая осевая фаза N_2 при $\theta = \pi/2$ и $\alpha = -\pi/4$;

угловая нематическая фаза N_\perp при $\cos 2\theta = (1 - \Delta_2)/(3 + \Delta_2 - 4\Delta_1)$ и $\alpha = -\pi/4$.

Из выражений для параметров порядка (4) следует, что состояние с $\langle S \rangle = 0$ может реализовываться как при $\alpha = \pi/4$, так и при $\alpha = -\pi/4$. Однако анализ плотности свободной энергии (5) показывает, что решение с $\alpha = \pi/4$ является неустойчивым.

Как отмечено выше, нематические состояния характеризуются параметрами порядка, которые являются компонентами симметричного тензора второго ранга; геометрическим образом такого тензора (с положительными компонентами) в трехмерном пространстве является одноосный эллипсоид.

Ориентацию диска можно задать единичным вектором \mathbf{n} , ортогональным плоскости квадрупольного эллипсоида (в данном случае диска), и в этом проявляется аналогия с молекулярным нематиком, в котором ориентация молекул в пространстве характеризуется единичным вектором-директором [47]. Так же, как и в молекулярном нематике, в спиновом нематике направления векторов \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ являются неразличимыми и величина q_2^{ij} является квантовым аналогом параметра порядка Де Жена, который вводится для обычных нематических жидких кристаллов [47]. Из анализа энергии (5) следует, что основное состояние нематических фаз в собственной системе координат, связанное с направлением вектора-директора \mathbf{n} , определяется основной функцией $\psi = (|1\rangle - |-1\rangle)/\sqrt{2}$. В собственной системе координат вектор-директор \mathbf{n}

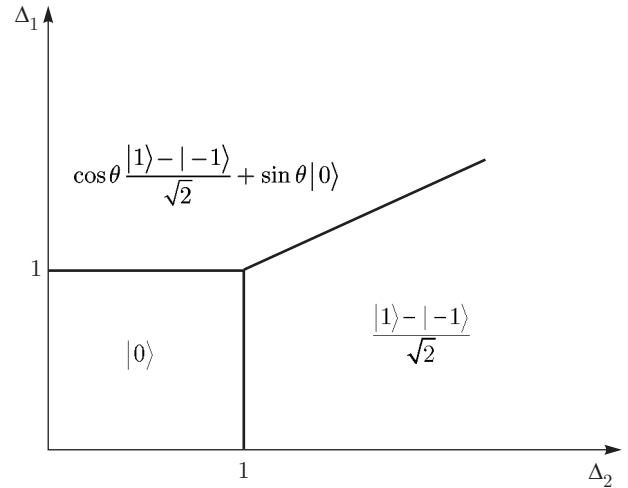


Рис. 1. Фазовая диаграмма негейзенберговского магнетика с межионной анизотропией на плоскости (Δ_1, Δ_2) при $J_0/K_0 < 1$

параллелен оси x , так как «диск» квадрупольного момента имеет отличные от нуля компоненты $\langle (S^y)^2 \rangle = \langle (S^z)^2 \rangle = 1$. Угол θ определяет отклонение вектора \mathbf{n} от оси x лабораторной системы координат. Как отмечено в разд. 2, для определения вида собственных функций в лабораторной системе координат необходимо провести обратное унитарное преобразование $U(-\theta) = \exp(-i\theta S^y)$. Действуя оператором $U(-\theta) = \exp(-i\theta S^y)$ при $\theta = \pi/2$ на функцию $\psi = (|1\rangle - |-1\rangle)/\sqrt{2}$, определяем вид функции основного состояния $\psi = |0\rangle$ нематической фазы N_2 в лабораторной системе координат. Параметры порядка, характеризующие фазу N_2 : $q_2^0 = -2$, $q_2^2 = 0$. В нематической фазе N_1 функция основного состояния $\psi = (|1\rangle - |-1\rangle)/\sqrt{2}$ и параметры порядка $q_2^0 = 1$, $q_2^2 = -1$. Необходимо отметить, что в изотропном случае состояния N_1 и N_2 являются вырожденными, т.е. их энергии совпадают, а соответствующие им волновые функции переходят друг в друга непрерывным преобразованием. Однако для обменно анизотропного магнетика ситуация иная: как следует из формулы (5), различным состояниям соответствует различная свободная энергия и, следовательно, обменная анизотропия снимает вырождение этих спиновых состояний. Кроме того, необходимо отметить, что спиновый нематик N_2 по своим симметричным свойствам напоминает квадрупольное состояние, возникающее в магнетике с большой легкоплоскостной одноионной анизотропией [6].

Одним из самых интересных моментов в изучении данной модели является возникновение угловой

нематической фазы [48]. Функция основного состояния данной фазы в лабораторной системе координат,

$$\psi = \cos \theta (|1\rangle - |-1\rangle) / \sqrt{2} + \sin \theta |0\rangle,$$

представляет суперпозицию двух векторов нематических состояний $(|1\rangle - |-1\rangle) / \sqrt{2}$ и $|0\rangle$. Как видно из фазовой диаграммы в плоскости (Δ_1, Δ_2) , при фиксированных параметрах Δ и $J_0/K_0 < 1$ (рис. 1) нематическая угловая фаза N_\perp переходит при $\Delta_2 < 1$ и $\Delta_1 = 1$ в осевую фазу N_2 , а при $\Delta_2 < 1$ и $\Delta_1 = (1 + \Delta_2)/2$ — в плоскостную нематическую фазу N_1 .

Особо следует подчеркнуть, что необходимое условие устойчивости угловой нематической фазы, возникающее из анализа энергии (5), аналогично условию существования угловой ферромагнитной фазы, а именно, $\Delta_1 > (3 + \Delta_2)/4$. Для понимания особенностей формирования спиновых конфигураций необходимо исследовать динамику спиновых возбуждений. Приведем решения дисперсионного уравнения в нематических фазах.

Спектры элементарных возбуждений в угловой (N_\perp) фазе имеют вид

$$\varepsilon_1(k) = 2 \left\{ \left((K_0 \Delta_1 - J_k \Delta)(K_0 - K_k) \Delta_1 + K_k \frac{4\Delta_1 - 3 - \Delta_2}{4} (1 - \cos^2 2\theta) \right) \right\}^{1/2}, \quad (11.1)$$

$$\varepsilon_2(k) = \sqrt{\tilde{\Omega}_1 (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2)}, \quad (11.2)$$

$$\tilde{\Omega}_1 = (K_0 - K_k) (\Delta_2 + \Delta_1 + \cos 2\theta (\Delta_2 - \Delta_1)),$$

$$\tilde{\Omega}_2 = K_k (\Delta_2 + \Delta_1) - J_k (\Delta + 1) + \cos 2\theta (K_k (\Delta_2 - \Delta_1) + J_k (\Delta - 1)),$$

а в фазе N_1 спектры можно представить в виде

$$\varepsilon_1(k) = 2 \{ (K_0 \Delta_2 - J_k) (K_0 - K_k) \Delta_2 \}^{1/2}, \quad (12.1)$$

$$\varepsilon_2(k) = \{ (K_0 (1 + \Delta_2) - 2J_k \Delta) \times (K_0 (1 + \Delta_2) - 2K_k \Delta_1) \}^{1/2}. \quad (12.2)$$

В фазе N_2 , вследствие вырождения возбужденных одноионных состояний, спектры магнонов совпадают:

$$\varepsilon_1(k) = \varepsilon_2(k) = 2 \{ (K_0 - J_k \Delta) (K_0 - K_k \Delta_1) \}^{1/2}. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что при переходе к изотропному случаю ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 1, \theta = 0$) все три фазы

N_1, N_2 и N_\perp становятся неразличимы, их основное состояние $\psi = (|1\rangle + |-1\rangle) / \sqrt{2}$, а спектры принимают стандартный вид [17, 21, 24]:

$$\varepsilon_1(k) = \varepsilon_2(k) = 2 \{ (K_0 - J_k) (K_0 - K_k) \}^{1/2}.$$

Таким образом, обменная анизотропия снимает «вырождение» нематических состояний, которое наблюдается в изотропном негеизенберговском магнетике.

Фазовые переходы между нематическими фазами являются ориентационными и происходят по параметрам анизотропии биквадратичного обменного взаимодействия (рис. 1). Поскольку в нематических фазах магнитный момент (на узле) равен нулю, понятие «переориентации» связано с поворотом вектора-директора \mathbf{n} . В случае $\Delta_1 > (3 + \Delta_2)/4$ фазовые переходы между фазами $N_1 - N_\perp$ и $N_\perp - N_2$ являются ориентационными фазовыми переходами второго рода. На линии $\Delta_1 = (1 + \Delta_2)/2$ фазового перехода $N_1 - N_\perp$ в длинноволновом пределе щели в спектрах (11.1) и (12.2) обращаются в нуль и на этой линии спектры становятся линейными по волновому вектору \mathbf{k} . Аналогично, на линии фазового перехода $N_2 - N_\perp$ $\Delta_1 = 1$ при $k \rightarrow 0$ щели в ветвях (11.1) и (13) обращаются в нуль, а спектры также становятся линейными по волновому вектору.

В случае $\Delta_1 < (3 + \Delta_2)/4$ на линии $\Delta_2 = 1$ фазовый переход между фазами N_1 и N_2 происходит скачком. Такой фазовый переход является ориентационным переходом первого рода — направление вектора \mathbf{n} меняется скачком. Фазовый переход между фазами N_1 и N_2 не сопровождается размягчением спектров магнонов на линии фазового перехода $\Delta_2 = 1$.

Таким образом, имеется существенное различие в поведении негеизенберговских магнетиков в окрестности ориентационных фазовых переходов, происходящих в отсутствие внешнего поля для изотропного и анизотропного обменных взаимодействий. Как показало исследование модели негеизенберговского магнетика с изотропным обменным взаимодействием [49], ориентационные фазовые переходы между ферромагнитными фазами и между нематическими фазами осуществляются благодаря изменению констант одноионной анизотропии и являются вырожденными переходами первого рода: одновременно на границе фаз скачком меняется симметрия фаз и имеется размягчение спектров элементарных возбуждений. В рассматриваемой модели ориентационные фазовые переходы между ферромагнитными и нематическими фазами происходят при изменении констант анизотропного обменного взаи-

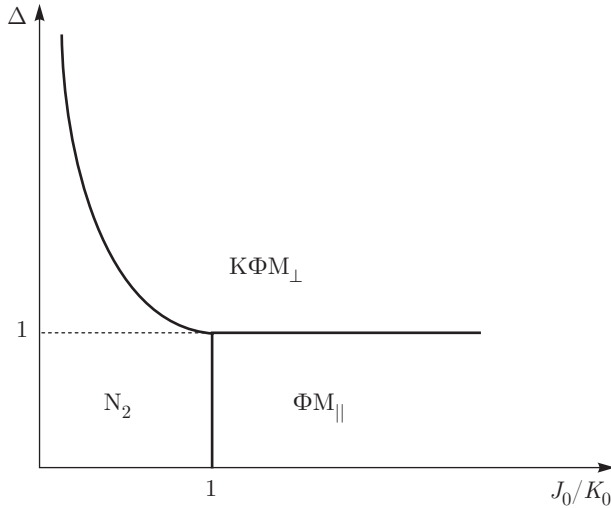


Рис. 2. Фазовая диаграмма негейзенберговского магнетика с межюнной анизотропией на плоскости $(\Delta, J_0/K_0)$ в случае реализации ферромагнитных и нематических фаз при $\Delta_1 < 1, \Delta_2 < 1$

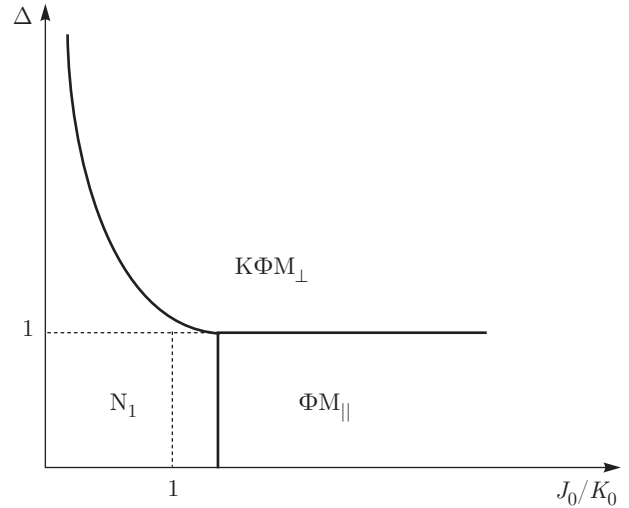


Рис. 3. Фазовая диаграмма негейзенберговского магнетика с межюнной анизотропией на плоскости $(\Delta, J_0/K_0)$ в случае реализации ферромагнитных и нематических фаз при $\Delta_2 > 1, \Delta_1 < (1 + \Delta_2)/2$

модействия, причем переходы могут быть как первого, так и второго рода.

5. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПО МОДУЛЮ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

Рассмотрим поведения системы на границах ферромагнитных и нематических фаз. Фазовые переходы такого типа связаны с обращением намагниченности в нуль на одном узле — так называемый квантовый эффект сокращения спина [21, 44]. В работах [49, 50] показано, что одноионная магнитная анизотропия и обменное биквадратичное взаимодействие усиливают друг друга: биквадратичное обменное взаимодействие и одноионная анизотропия приводят к неэквидистантному расталкиванию уровней энергии магнитного иона. Однако биквадратичный обмен стремится установить нематический порядок в целом с резкой сменой ферромагнитного порядка с $\langle S \rangle = 1$ на нематический $\langle S \rangle = 0$ [20, 23]. При этом рост константы одноионной анизотропии приводит к плавному уменьшению среднего спина на узле и реализации промежуточного квадрупольно-ферромагнитного упорядочения [18, 50]. В данной модели квадрупольно-ферромагнитные фазы реализуются благодаря анизотропному обменному взаимодействию. Представляет интерес рассмотреть поведение системы в окрестности квадрупольно-ферромагнитных-нематических фаз.

Как уже отмечалось ранее, фазовые состояния исследуемой системы зависят от большого числа параметров, что не дает возможности графически отобразить фазовый портрет системы. Но мы можем построить фазовую диаграмму системы на плоскости $(\Delta, J_0/K_0)$ (см. рис. 2, 3).

Сначала рассмотрим случай $\Delta_2 < 1, \Delta_1 < 1$. При таком соотношении параметров биквадратичной анизотропии в зависимости от соотношения между Δ и J_0/K_0 в системе реализуются фазы ФМ_{\parallel} , КФМ_{\perp} и N_2 . Поведение магнетика в окрестности ориентационного фазового перехода ФМ_{\parallel} - КФМ_{\perp} было исследовано выше (см. разд. 3).

Рассмотрим теперь поведение системы в окрестности фазовых переходов ФМ_{\parallel} - N_2 и КФМ_{\perp} - N_2 . Из равенства свободных энергий в фазах ФМ_{\parallel} и N_2 удастся определить линию фазового перехода ФМ_{\parallel} - N_2 : $J_0 = K_0$. При этом, как следует из (9.1) и (13), энергетические щели в спектрах магнонов соответствующих фаз обращаются в нуль не на линии $J_0 = K_0$, а на линиях $J_0 = K_0\Delta_2$ в области $J_0/K_0 < 1$ и на линии $J_0\Delta = K_0$ в области $J_0/K_0 > 1$. Эти линии являются линиями потери устойчивости соответствующих фаз и определяют область сосуществования фаз ФМ_{\parallel} и N_2 . Таким образом, фазовый переход ФМ_{\parallel} - N_2 является фазовым переходом первого рода, в результате которого скачком меняется модуль намагниченности с единицы до нуля.

Линия фазового перехода КФМ_{\perp} - N_2 определяется выражением $J_0\Delta = K_0$. На этой же линии обра-

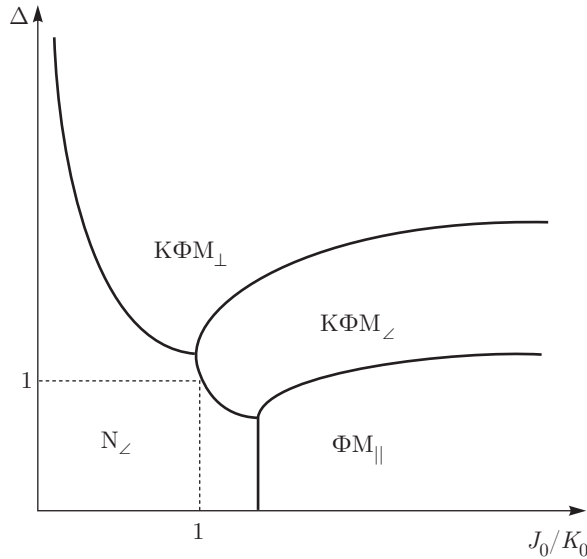


Рис. 4. Фазовая диаграмма негейзенберговского магнетика с межионной анизотропией на плоскости $(\Delta, J_0/K_0)$ в случае реализации ферромагнитных и нематических фаз при $\Delta_1 > 1, \Delta_1 > (3 + \Delta_2)/4$

падают в нуль щели спектров магнонов (10.1) и (13). Данный фазовый переход является фазовым переходом второго рода: при приближении к линии фазового перехода из квадрупольно-ферромагнитной фазы KFM_{\perp} намагниченность непрерывно уменьшается и на линии $J_0\Delta = K_0$ обращается в нуль.

Рассмотрим еще одну ситуацию, когда параметры биквадратичной анизотропии связаны соотношениями $\Delta_2 > 1$ и $\Delta_1 < (1 + \Delta_2)/2$ (рис. 3). В этом случае в системе в зависимости от соотношений Δ и J_0/K_0 реализуются фазы $FM_{\parallel}, KFM_{\perp}$ и N_1 .

Линия фазового перехода $FM_{\parallel}-N_1$ соответствует $J_0 = K_0\Delta_2$ и определяется из равенства свободных энергий. На этой линии обращаются в нуль щели ветвей возбуждения (9.1) и (12.1). Переход между фазами сопровождается скачком намагниченности. Данный фазовый переход является вырожденным фазовым переходом первого рода: симметрия фаз меняется скачком, но, тем не менее, щель в спектрах обращается на линии фазового перехода в нуль. Линия фазового перехода $KFM_{\perp}-N_1$ определяется выражением $2J_0\Delta = K_0(1 + \Delta_2)$. На этой же линии обращаются в нуль щели спектров (10.1) и (12.2). Необходимо отметить следующую особенность: на линии $J_0 = K_0\Delta_2$ в длинноволновом пределе ветви возбуждения (9.1) и (12.1) имеют квадратичный закон дисперсии по волновому вектору; на линии $2J_0\Delta = K_0(1 + \Delta_2)$ спектры (10.1) и (12.2) будут линейны по волновому вектору \mathbf{k} .

В заключение рассмотрим фазовую диаграмму на плоскости $(\Delta, J_0/K_0)$ при $\Delta_1 > 1$ и $\Delta_1 > (3 + \Delta_2)/4$ (рис. 4). При таком соотношении параметров биквадратичной обменной анизотропии в зависимости от соотношений Δ и J_0/K_0 возможна реализация фаз $FM_{\parallel}, KFM_{\perp}, KFM_{\parallel}$ и N_{\perp} . Анализ спектров ферромагнитных фаз в окрестности линий ориентационных фазовых переходов был проведен выше.

Линия фазового перехода $FM_{\parallel}-N_{\perp}$ определяется равенством свободных энергий

$$J_0 = K_0\Delta_1 - \frac{K_0}{4}(1 - \Delta_2)(1 + \cos 2\theta), \quad (14)$$

где $\cos 2\theta = (1 - \Delta_2)/(3 + \Delta_2 - 4\Delta_1)$. В окрестности линии фазового перехода (14) образуется область метастабильности, границы которой определяются обращением щелей в нуль в ветвях возбуждения (9.1), (11.2). Фазовый переход сопровождается скачкообразным изменением намагниченности.

Линия фазового перехода $KFM_{\perp}-N_{\perp}$ определяется выражением $J_0\Delta = K_0\Delta_1$. Приближаясь к этой линии со стороны KFM_{\perp} , намагниченность непрерывным образом стремится к нулю, а со стороны фазы N_{\perp} угол θ стремится к $\pi/2$ и на линии фазового перехода эти намагниченности и угол принимают свои предельные значения. Таким образом, фазовый переход $KFM_{\perp}-N_{\perp}$ является фазовым переходом второго рода и сопровождается непрерывным изменением намагниченности. Кроме того, на линии фазового перехода обращаются в нуль щели спектров (10.1), (11.1). На самой линии спектры при $k \rightarrow 0$ становятся квадратичными по волновому вектору.

Тот же тип имеет фазовый переход $KFM_{\parallel}-N_{\perp}$. При приближении к линии фазового перехода из фазы KFM_{\parallel} намагниченность стремится к нулю. На линии фазового перехода

$$2(J_0 - K_0\Delta_2)(1 - \Delta_1) + (J_0\Delta - K_0\Delta_1)(1 + \Delta_2 - 2\Delta_1) = 0$$

$\alpha = -\pi/4$, соответственно намагниченность равна нулю, а угол θ , как следует из выражений (7), при $\alpha = -\pi/4$ определяется равенством

$$\cos 2\theta|_{\alpha=-\pi/4} = (1 - \Delta_2)/(3 + \Delta_2 - 4\Delta_1)$$

и совпадает с выражением, определяющим угол θ в фазе KFM_{\parallel} . Таким образом, на линии фазового перехода происходит непрерывное изменение модуля намагниченности. Щель в спектре (11.2) обращается в нуль, и спектр становится квадратичным по волновому вектору.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные исследования позволяют выяснить влияние анизотропии обменного взаимодействия на формирование фазовых состояний и динамических свойств негеизенберговского магнетика со спином магнитного иона $S = 1$. Учет анизотропного обменного взаимодействия приводит к снятию вырождения по направлению вектора магнитного момента в ферромагнитной фазе и вектора-директора в нематическом состоянии. Сравнение с работами [30, 31], в которых также рассматривалось анизотропное обменное взаимодействие, показывает, что именно учет анизотропного биквадратичного обменного взаимодействия более сложного вида приводит к реализации угловых ферромагнитной и нематической фаз.

Анализ энергии основного состояния и спектров элементарных возбуждений позволил изучить поведение системы в окрестностях фазовых переходов. Показано, что понятие ориентационного фазового перехода справедливо как для нематических фаз, так и для ферромагнитных фаз. Поскольку в нематических фазах средний векторный параметр порядка на одном узле $\langle S \rangle = 0$, система характеризуется тензорными параметрами порядка. Таким образом, переориентация в нематических фазах связана с поворотом вектора-директора эллипсоида, являющегося геометрическим образом тензора квадрупольного момента.

Показано, что величина магнитного момента на линиях фазовых переходов типа ферромагнитная–нематическая фазы в зависимости от симметрии граничащих фаз может изменяться как непрерывно, так и скачком.

Необходимо отметить, что все описанные выше результаты получены без учета флуктуационных поправок, наличие которых, по всей видимости, может привести к «размытию» областей устойчивости соответствующих фаз. Однако такого рода исследования выходят за рамки нашей задачи.

Авторы выражают признательность Б. А. Иванову за полезную дискуссию. Один из соавторов (А. В. К.) благодарит фонд «Династия» за финансовую поддержку. Работа другого соавтора (О. А. К.) выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и МО Республики Крым (проект 15-42-01007 «р_юг_а»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

2. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
3. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, УФН **130**, 39 (1980).
4. А. М. Переломов, УФН **123**, 23 (1977).
5. А. Ф. Andreev, I. A. Grishchuk, ЖЭТФ **87**, 467 (1984).
6. В. М. Локтев, В. С. Островский, ФНТ **20**, 983 (1994).
7. В. А. Ivanov and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003).
8. В. А. Ivanov, R. S. Khymyn, and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. Lett. **100**, 047203 (2008).
9. V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. B **87**, 224407 (2013).
10. M. Y. Kovalevsky and A. V. Glushchenko, J. Magn. Magn. Mater. **355**, 192 (2014).
11. M. Y. Kovalevsky and A. V. Glushchenko, Ann. Phys. **349**, 55 (2014).
12. М. Ю. Ковалевский, А. В. Глуценко, ФНТ **40**, 560 (2014).
13. L. E. Svistov, T. Fujita, H. Yamaguchi, S. Kimura, K. Omura, A. Prokofiev, A. I. Smirnov, Z. Honda, and M. Hagiwara, Письма в ЖЭТФ **93**, 24 (2011).
14. М. Е. Zhitomirsky and H. Tsunetsugu, Europhys. Lett. **92**, 37001 (2010).
15. С. Л. Гинзбург, ФТТ **12**, 1805 (1970).
16. В. М. Матвеев, ЖЭТФ **65**, 1626 (1973).
17. Ф. П. Онуфриева, ЖЭТФ **80**, 2372 (1981).
18. Ф. П. Онуфриева, ЖЭТФ **89**, 2270 (1988).
19. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, С. Г. Овчинников, ЖЭТФ **88**, 550 (1985).
20. N. Papanicolaou, Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).
21. В. М. Калита, ФТТ **33**, 1940 (1991).
22. Б. А. Иванов, Р. С. Химин, ЖЭТФ **131**, 343 (2007).
23. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, J. Magn. Magn. Mater. **325**, 125 (2013).
24. М. Ю. Ковалевский, А. В. Глуценко, ФНТ **40**, 560 (2014).
25. A. V. Chubukov, J. Phys.: Condens. Matter **2**, 1593 (1990).

26. A. V. Chubukov, K. I. Ivanova, P. Ch. Ivanov, and E. R. Korutcheva, *J. Phys.: Condens. Matter* **3**, 2665 (1991).
27. E. G. Galkina, V. I. Butrim, Yu. A. Fridman, B. A. Ivanov, and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **88**, 144420 (2013).
28. Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов, В. И. Бутрим, ФНТ **40**, 817 (2014).
29. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 097202 (2011).
30. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and P. N. Klevets, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 435 (2008).
31. Ю. А. Фридман, О. А. Космачев, Ф. Н. Клевец, ФНТ **32**, 289 (2006).
32. B. A. Ivanov, A. Yu. Galkin, R. S. Khymyn, and A. Yu. Merkulov, *Phys. Rev.* **77**, 064402 (2008).
33. A. Smerald and N. Shannon, *Phys. Rev. B* **88**, 184430 (2013).
34. О. А. Космачев, Ю. А. Фридман, Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов, ЖЭТФ **147**, 320 (2015).
35. M. Blume, V. J. Emery, and R. B. Griffiths, *Phys. Rev. A* **10**, 1071 (1971).
36. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, А. С. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **92**, 172 (2010).
37. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, А. С. Кузнецов, Р. С. Химин, ФНТ **34**, 1266 (2008).
38. K. Stevens, *Proc. Phys. Soc. London A* **65**, 209 (1952).
39. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, Ю. А. Фридман, ФНТ **38**, 507 (2012).
40. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, О. А. Космачев, Ю. А. Фридман, ФТТ **54**, 1286 (2012).
41. В. И. Бутрим, О. А. Космачев, Ю. А. Фридман, ФНТ **40**, 1243 (2014).
42. В. В. Вальков, ТМФ **76**, 143 (1988).
43. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **68**, 207 (1975).
44. В. М. Калита, И. М. Иванова, В. М. Локтев, ТМФ **173**, 333 (2012).
45. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **70**, 1100 (1976); В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильно коррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
46. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, С. Г. Овчинников, ЖЭТФ **88**, 550 (1985).
47. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
48. I. P. Sharovalov, *Ukr. J. Phys.* **53**, 651 (2008).
49. В. В. Вальков, Г. Н. Мацулева, С. Г. Овчинников, ФТТ **31**, 60 (1989).
50. Ю. А. Фридман, О. А. Космачев, ФНТ **27**, 642 (2001).