

РАССЕЯНИЕ СВЕТА КАПЛЕЙ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА: ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕНТЦЕЛЯ – КРАМЕРСА – БРИЛЛЮЭНА

*В. А. Лойко**, *А. В. Конколович*, *А. А. Мискевич*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 1 июля 2015 г.

В приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) рассмотрено рассеяние света оптически анизотропной жидкокristаллической (ЖК) каплей нематика в изотропной полимерной матрице. Получены общие соотношения для элементов амплитудной матрицы рассеяния света каплей произвольных формы и структуры поля директора. Для сферических ЖК-капель с однородно ориентированной структурой локальных оптических осей найдены аналитические выражения для амплитудных матриц при рассеянии строго вперед и строго назад. Проведен анализ фактора эффективности ослабления и фактора эффективности обратного рассеяния сферической непоглощающей каплей ЖК в зависимости от оптической анизотропии жидкого кристалла, показателя преломления полимера, условий освещения и ориентации оптической оси капли. Проведена верификация полученных решений.

DOI: 10.7868/S004445101601020X

1. ВВЕДЕНИЕ

Жидкие кристаллы (ЖК) широко используются для создания устройств отображения информации, телекоммуникаций, оптоэлектроники и фотоники. В основе их функционирования лежат эффекты Фредерикса, связанные с изменением ориентации молекул ЖК во внешнем поле [1–6]. Одним из перспективных материалов для создания таких устройств являются капсулированные полимером жидкие кристаллы (КПЖК). Это полимерные пленки с диспергированными в них каплями жидкого кристалла [7–10]. Они обладают механической прочностью, гибкостью, анизотропией свойств и высокой чувствительностью к внешним воздействиям. Оптические свойства пленок зависят от ориентационной структуры ЖК в каплях. Модуляция прошедшего и отраженного излучения реализуется путем изменения конфигурации молекул ЖК в каплях под действием внешнего управляющего электрического поля. КПЖК-пленки с крупными (по

сравнению с длиной волны падающего излучения) каплями способны сильно изменять количество рассеянного ими излучения под действием управляющего электрического поля [7, 8]. Такие пленки используются, в основном, для модуляции интенсивности прошедшего и отраженного излучения. Пленки с наноразмерными каплями жидкого кристалла обладают малым рассеянием и большим коэффициентом направленного пропускания. Они позволяют управлять разностью фаз между необыкновенной и обыкновенной волнами, обеспечивать электроуправляемый фазовый набег и благодаря этому изменять поляризацию прошедшего излучения. Такие пленки используются для создания поляроидов, линз, дифракционных решеток [8, 10]. КПЖК-пленки на основе киральных жидких кристаллов перспективны для создания гибких электрооптических устройств, в частности, гибких дисплеев [11]. Недавно реализован метод создания КПЖК, основанный на управляемой модификации сцепления на межфазной границе раздела капля–полимер [12, 13]. Преимущество таких пленок, основанных на локальном эффекте Фредерикса [6], в том, что напряженность управляющего электрического поля на порядки меньше, чем в пленках, основанных на классическом эффекте Фредерикса [5].

* E-mail: loiko@dragon.bas-net.by

Для описания электрооптического отклика КПЖК-пленок необходим детальный анализ процессов рассеяния света отдельной каплей ЖК и ансамблем капель в целом. Рассеяние на отдельной капле определяется оптической анизотропией жидкого кристалла, формой капли и структурой ее поля директора. Последняя зависит от свойств жидкого кристалла, полимера, межфазных граничных условий, управляющего поля и других параметров. Ослабление и рассеяние КПЖК-пленкой зависит от характеристик рассеяния капель, их концентрации и толщины пленки [7–10]. Существуют условия, когда в первоначально однородном слое жидких кристаллов возникают неоднородности [1, 3, 14, 15]. Описание процессов рассеяния на них подобно описанию рассеяния на капле ЖК в полимере.

Нахождение общего решения задачи рассеяния на частице произвольной формы и структуры — это сложная проблема. Поэтому рассматривают, как правило, конкретные типы частиц, различаемые по размеру, форме, структуре и другим признакам, позволяющим упростить решения [16–23]. Капли жидкого кристалла обычно имеют показатели преломления, не сильно отличающиеся от показателя преломления полимера. Они являются оптически «мягкими» [22].

Для решения прямых и обратных задач рассеяния такими каплями [7–10] и доменными структурами [1–3, 14, 15], формирующимися в ЖК при определенных условиях, целесообразно использовать приближенные методы: приближение Рэлея (дипольное приближение) [21–24], приближение Рэлея–Ганса (РГ) [21–28], аномальной дифракции (АД) [29–32], Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [24, 33, 34], дискретных диполей [35, 36], метод T -матрицы [16, 37, 38] и другие методы [16–19]. Они позволяют выявить основные закономерности рассеяния света отдельной ЖК-каплей в зависимости от ее формы и структуры поля директора. Ряд конкретных результатов получен в работах [25–45].

В настоящее время в подавляющем большинстве случаев при анализе рассеяния на капле жидкого кристалла используются приближения Рэлея–Ганса и аномальной дифракции. Используется также [33] приближение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна [46–49]. Оно позволяет рассматривать более широкий диапазон изменения размеров и факторов эффективности ослабления по сравнению с приближением Рэлея–Ганса.

В отличие от аномальной дифракции, ВКБ-приближение позволяет находить угловое распределе-

ние интенсивности света, рассеянного не только в переднюю, но и заднюю полусферы. Отметим, что в приближении аномальной дифракции можно анализировать структуру излучения только при малых углах рассеяния [21]. Оно в принципе не позволяет анализировать рассеяние в заднюю полусферу.

В данной работе приближение ВКБ развито для описания рассеяния света анизотропной каплей одноосного нематического ЖК произвольных формы и структуры поля директора (локальных оптических осей). Решение задачи основано на использовании интегрального представления векторной амплитудной функции рассеяния [24] и данных о распределении локальных оптических осей в объеме ЖК-капли, которые находятся из уравнения Франка для объемной плотности свободной энергии [1–3, 50–52] и зависят от характеристик ЖК, граничных условий на поверхности капли и приложенного поля.

Рассмотрена амплитудная матрица рассеяния (разд. 2) как наиболее полная характеристика, на основе которой находятся факторы эффективности ослабления, рассеяния, поглощения, дифференциальное сечение и индикатриса рассеяния, параметры Стокса и другие характеристики, определяющие взаимодействие падающего излучения с частицей [21, 22]. Как частные случаи, рассмотрены элементы амплитудной матрицы рассеяния в приближениях Рэлея и Рэлея–Ганса. Первое применимо для малых частиц, когда параметр дифракции частицы $ka \ll 1$ (здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, а a — характерный размер частицы), второе — для частиц, у которых мал фазовый сдвиг: $2ka|m - 1| \ll 1$.

Найдены аналитические решения и проведен анализ элементов амплитудной матрицы рассеяния света в направлениях строго вперед и строго назад для сферической непоглощающей капли нематического ЖК с однородно ориентированной внутренней структурой локальных оптических осей (разд. 3).

В условиях, при которых разработанные в работе векторные приближения ВКБ и РГ для оптически анизотропной ЖК-капли переходят к скалярным, проведен сравнительный анализ результатов с решением Ми [21–23] для изотропной однородной сферической частицы (разд. 4). Проведен анализ факторов эффективности ослабления и обратного рассеяния сферической непоглощающей капли в зависимости от оптической анизотропии ЖК, показателя преломления полимера, условий освещения и ориентации оптической оси капли (разд. 4).

**2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ВЕКТОРНОЙ АМПЛИТУДНОЙ ФУНКЦИИ
РАССЕЯНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ АМПЛИТУДНОЙ
МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В
ПРИБЛИЖЕНИЯХ
ВЕНТЦЕЛЯ – КРАМЕРСА – БРИЛЛЮЭНА,
РЭЛЕЯ И РЭЛЕЯ – ГАНСА**

Для описания рассеяния света оптически анизотропной ЖК-каплей введем лабораторную систему координат xyz (рис. 1). Пусть капля освещается вдоль оси x линейно поляризованной плоской волной с электрическим вектором поляризации \mathbf{E}_i . На рис. 1а \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_s — единичные векторы, определяющие направления распространения падающей и рассеянной волн, θ_s и φ_s — полярный и азимутальный углы рассеяния, $\mathbf{e}_s = (\cos \theta_s, \sin \theta_s \cos \varphi_s, \sin \theta_s \sin \varphi_s)$, $\mathbf{e}_{\parallel}^{i,s}$, $\mathbf{e}_{\perp}^{i,s}$ — единичные векторы, задающие параллельные (\parallel) и ортогональные (\perp) плоскости рассеяния $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_s$ компоненты электронных векторов падающей (i) и рассеянной (s) волн, \mathbf{e}_{vv} и \mathbf{e}_{vh} — единичные векторы поляризации vv - и vh -компонент рассеянной волны, ориентированные, соответственно, параллельно и перпендикулярно плоскости поляризации $\mathbf{e}_i \mathbf{E}_i$ падающей волны, α — угол поляризации падающей волны относительно оси y лабораторной системы координат.

Рассмотрим интегральное представление векторной амплитудной функции рассеяния $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s)$ [24, 25]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = \frac{ik^3}{4\pi E_i} \times \int_V \left\{ \mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \left(\frac{\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})}{\varepsilon_p} - \hat{1} \right) \mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \right] \right\} \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (1)$$

Здесь интегрирование ведется по объему V капли, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ — тензор диэлектрической проницаемости в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (см. рис. 1а), ε_p — диэлектрическая проницаемость полимера, $\hat{1}$ — единичная матрица 3×3 , E_i — амплитуда электрического поля падающей волны, $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$ — вектор электрического поля волны внутри капли в точке с радиус-вектором \mathbf{r} при освещении капли в направлении вектора \mathbf{e}_i , $k = 2\pi n_p / \lambda$ — волновое число в окружающем каплю полимере, λ — длина волны падающего света в вакууме, n_p — показатель преломления полимера. Компоненты тензора $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ зависят от распределения молекул ЖК в капле. Выражение (1) показывает, что полное рассеянное поле является суперпозицией волн, создаваемых отдельными

элементарными объемами капли. Оно вытекает из уравнений Максвелла и является строгим представлением векторной амплитудной функции рассеяния $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s)$ в дальней зоне через электрическое поле волны $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$ внутри ЖК-капли. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s)$ является безразмерной. Электрическое поле $\mathbf{E}_s(R)$ рассеянной волны в дальней зоне на расстоянии R от ЖК-капли является поперечной сферической волной и имеет вид

$$\mathbf{E}_s(R) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) E_i \frac{i \exp(ikR)}{kR}. \quad (2)$$

Внутреннее поле в капле можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) = \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{E}_i. \quad (3)$$

Здесь $\hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$ — комплексная матрица 3×3 , характеризующая локальные преобразования вектора поляризации падающей волны \mathbf{E}_i внутри объема капли. В общем случае она содержит девять ненулевых элементов. Для векторной амплитудной функции рассеяния при единичной амплитуде падающей волны запишем:

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = \frac{ik^3}{4\pi} \int_V \left\{ \mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_i \right] \right\} \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (4)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор поляризации падающей волны, а тензор $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) / \varepsilon_p - \hat{1}. \quad (5)$$

Чтобы найти элементы амплитудной матрицы рассеяния \hat{S} [21, 22], разложим единичный вектор поляризации \mathbf{e} и функцию рассеяния \mathbf{f} по параллельным и ортогональным плоскости рассеяния $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_s$ компонентам:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_{\parallel}^i \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}^i + (\mathbf{e}_{\perp}^i \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}_{\perp}^i, \quad (6)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{e}_{\parallel}^s \cdot \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}^s + (\mathbf{e}_{\perp}^s \cdot \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_{\perp}^s. \quad (7)$$

Тогда на основе выражений (2), (4) для параллельной E_{\parallel}^s и ортогональной E_{\perp}^s плоскости рассеяния компонент поля рассеянной волны запишем

$$E_{\parallel}^s = \mathbf{e}_{\parallel}^s \cdot \mathbf{f} \frac{i \exp(ikR)}{kR} = \frac{i \exp(ikR)}{kR} \frac{ik^3}{4\pi} \times \int_V \mathbf{e}_{\parallel}^s \left\{ \mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \left(E_{\parallel}^i \mathbf{e}_{\parallel}^i + E_{\perp}^i \mathbf{e}_{\perp}^i \right) \right] \right\} \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (8)$$

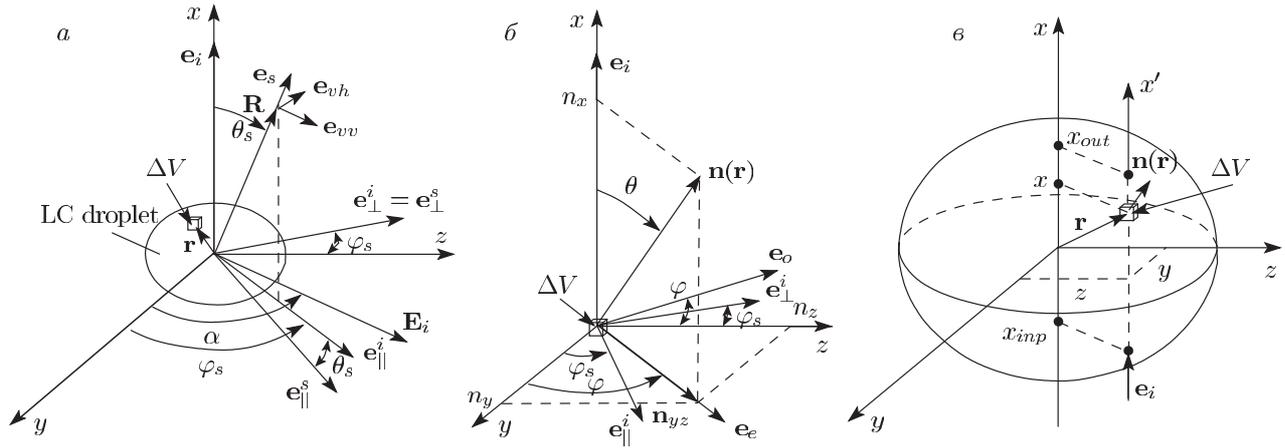


Рис. 1. а) Геометрия рассеяния света каплей ЖК; б) локальная система координат, связанная с элементарным объемом ΔV ; в) геометрия, поясняющая метод определения внутреннего поля в рамках ВКБ-приближения; $x y z$ — оси лабораторной системы координат; \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_s — единичные векторы в направлении падения и рассеяния света; \mathbf{E}_i и α — вектор и угол поляризации падающей волны; θ_s и φ_s — полярный и азимутальный углы рассеяния; \mathbf{e}_{\parallel}^i и \mathbf{e}_{\perp}^i — единичные векторы падающей (i) и рассеянной (s) волн, параллельные (\parallel) и ортогональные (\perp) плоскости рассеяния $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_s$; \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения в дальней волновой зоне; \mathbf{e}_{vv} и \mathbf{e}_{vh} — единичные векторы поляризации рассеянной волны, направленные параллельно и перпендикулярно плоскости поляризации \mathbf{e}_i ; $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — локальный директор элементарного объема ΔV , положение которого задается радиус-вектором \mathbf{r} ; n_x, n_y, n_z — декартовы координаты локального директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$; θ и φ — полярный и азимутальный углы ориентации $\mathbf{n}(\mathbf{r})$; \mathbf{n}_{yz} — составляющая директора \mathbf{n} в плоскости yz ; \mathbf{e}_e и \mathbf{e}_o — единичные векторы поляризации необыкновенной и обыкновенной волн в элементарном объеме ΔV ; x' — вспомогательная ось, параллельная оси x ; x_{inp} и x_{out} — входная и выходная координаты на поверхности капли

$$E_{\perp}^s = \mathbf{e}_{\perp}^s \cdot \mathbf{f} \frac{i \exp(ikR)}{kR} = \frac{i \exp(ikR)}{kR} \frac{ik^3}{4\pi} \times \int_V \mathbf{e}_{\perp}^s \left[\mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \left(E_{\parallel}^i \mathbf{e}_{\parallel}^i + E_{\perp}^i \mathbf{e}_{\perp}^i \right) \right] \right] \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (9)$$

где E_{\parallel}^i и E_{\perp}^i — параллельная и ортогональная плоскости рассеяния компоненты электрического вектора \mathbf{E}_i падающей волны. Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^s \\ E_{\perp}^s \end{pmatrix} = \mathbf{f} \frac{i \exp(ikR)}{kR} = \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ G_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix} \frac{i \exp(ikR)}{kR}, \quad (10)$$

где S_1, S_2, S_3, S_4 — элементы амплитудной 2×2 -матрицы рассеяния \hat{S} [22]:

$$S_2 = \frac{ik^3}{4\pi} \int_V \mathbf{e}_{\parallel}^s \left[\mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\parallel}^i \right] \right] \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (11)$$

$$S_3 = \frac{ik^3}{4\pi} = \int_V \mathbf{e}_{\parallel}^s \left[\mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\perp}^i \right] \right] \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (12)$$

$$S_4 = \frac{ik^3}{4\pi} = \int_V \mathbf{e}_{\perp}^s \left[\mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\parallel}^i \right] \right] \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (13)$$

$$S_1 = \frac{ik^3}{4\pi} = \int_V \mathbf{e}_{\perp}^s \left[\mathbf{e}_s \times \left[\mathbf{e}_s \times \hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\perp}^i \right] \right] \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (14)$$

Раскрыв двойные векторные произведения в (11)–(14), получим

$$S_2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \mathbf{e}_{\parallel}^s \left(\hat{\hat{\epsilon}}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\parallel}^i \right) \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (15)$$

$$S_3(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \mathbf{e}_{\parallel}^s \left(\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\perp}^i \right) \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (16)$$

$$S_4(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \mathbf{e}_{\perp}^s \left(\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\parallel}^i \right) \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (17)$$

$$S_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \mathbf{e}_{\perp}^s \left(\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\perp}^i \right) \times \exp(-ik\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (18)$$

В соотношениях (15)–(18) компоненты локального тензора $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ матрицы $\hat{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$, описывающей внутреннее поле, и координаты векторов $\mathbf{e}_{\parallel}^{i,s}$, $\mathbf{e}_{\perp}^{i,s}$ должны быть найдены в одной и той же ортогональной системе координат. Здесь мы используем систему координат \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_{\parallel}^i , \mathbf{e}_{\perp}^i , определяемую направлением падающей волны \mathbf{e}_i и плоскостью рассеяния \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_s .

Локальный тензор диэлектрической проницаемости одноосного жидкого кристалла $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ (см. формулы (1), (5)) зависит от распределения локальных оптических осей [1–3, 50–52] (локальных директоров) $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в объеме ЖК-капли и определяется следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\perp} \hat{1} + \Delta\varepsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad (19)$$

где $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ — диэлектрическая анизотропия ЖК, ε_{\parallel} и ε_{\perp} — значения диэлектрических проницаемостей соответственно вдоль и перпендикулярно вектору \mathbf{n} , символ \otimes означает диадное произведение векторов.

Элементарный объем капли ΔV и связанная с ним локальная система координат показаны на рис. 1б. Под элементарным объемом мы понимаем физически малый объем капли, в пределах которого ориентация локального директора постоянна и определяется только молекулярным параметром порядка жидкого кристалла [1–3]. Его положение в лабораторной системе координат $x y z$ определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (рис. 1а). На рис. 1б n_x, n_y, n_z — декартовы координаты локального директора \mathbf{n} в лабораторной системе координат $x y z$, $|\mathbf{n}| = 1$, θ и φ — полярный и азимутальный углы его ориентации, \mathbf{e}_o и \mathbf{e}_e — единичные векторы поляризации обыкновенной и необыкновенной волн в элементарном объеме. Необыкновенная волна (e) поляризована параллельно, а обыкновенная (o) — ортогонально локальной главной плоскости $\mathbf{e}_i \mathbf{n}$. Отметим,

что направления $+\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ физически эквивалентны [1–3]. Распределение локального директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ (его декартовы координаты $n_{x,y,z} \equiv n_{x,y,z}(x, y, z)$), как отмечено во Введении, рассчитываются на основе решения задачи минимизации объемной плотности свободной энергии [50–52].

Для определения компонент тензора $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ в базисе \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_{\parallel}^i , \mathbf{e}_{\perp}^i запишем выражение (19) в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \varepsilon_{\perp} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \Delta\varepsilon \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$, $n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}^i$, $n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\perp}^i$. В выражении (20) и ниже индекс «1» означает компоненту локального директора вдоль направления падения света \mathbf{e}_i , индекс «2» — вдоль вектора \mathbf{e}_{\parallel}^i , индекс «3» — вдоль \mathbf{e}_{\perp}^i . Тензор $\hat{\varepsilon}$ является диагонально симметричным и содержит шесть различных компонент.

Рассмотрим задачу нахождения амплитудной матрицы рассеяния в рамках приближения ВКБ (квазиклассического приближения). Оно описывает распространение световых волн в рамках геометрической оптики и включает волновые эффекты как малые поправки. Такое описание возможно, если показатель преломления среды слабо меняется на длине волны. В рамках ВКБ-приближения, основанного на предположении об «оптической мягкости» [22] ЖК-капли, внутреннее поле $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$ в каждом элементарном объеме ΔV с радиус-вектором \mathbf{r} аппроксимируется локально плоской волной, распространяющейся в том же направлении, что и падающая волна. Тогда матрица \hat{t} (см. выражение (3)) имеет следующую структуру:

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

На основе соотношений (5), (15)–(18), (20), (21) найдем выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния:

$$S_2(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \{D_{22} \cos \theta_s - D_{12} \sin \theta_s\}, \quad (22)$$

$$S_3(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \{D_{23} \cos \theta_s - D_{13} \sin \theta_s\}, \quad (23)$$

$$S_4(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3V}{4\pi} D_{32}, \quad (24)$$

$$S_1(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3V}{4\pi} D_{33}, \quad (25)$$

где

$$D_{22} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{22} t_{22} + \tilde{\varepsilon}_{23} t_{32} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz, \quad (26)$$

$$D_{12} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{12} t_{22} + \tilde{\varepsilon}_{13} t_{32} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz, \quad (27)$$

$$D_{23} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{22} t_{23} + \tilde{\varepsilon}_{23} t_{33} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz, \quad (28)$$

$$D_{13} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{12} t_{23} + \tilde{\varepsilon}_{13} t_{33} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz, \quad (29)$$

$$D_{32} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{23} t_{22} + \tilde{\varepsilon}_{33} t_{32} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz, \quad (30)$$

$$D_{33} = \frac{1}{V} \iiint_V \{ \tilde{\varepsilon}_{23} t_{23} + \tilde{\varepsilon}_{33} t_{33} \} \times \\ \times \exp(-ik(x \cos \theta_x + y \sin \theta_s \cos \varphi_s + z \sin \theta_s \sin \varphi_s)) \times \\ \times dx dy dz. \quad (31)$$

При выводе (22)–(25) учтено, что единичные векторы \mathbf{e}_\perp^i , \mathbf{e}_\perp^s , \mathbf{e}_\parallel^i и \mathbf{e}_\parallel^s в базисе \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_\parallel^i , \mathbf{e}_\perp^i имеют вид: $\mathbf{e}_\perp^i = \mathbf{e}_\perp^s = (0, 0, 1)^T$, $\mathbf{e}_\parallel^i = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_\parallel^s = (-\sin \theta_s, \cos \theta_s, 0)^T$.

В соотношениях (26)–(31) величины $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) являются компонентами локального тензора $\hat{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{r})$, которые для геометрии, представленной на рис. 1б, определяются следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_1 n_2 = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_x (n_y \cos \varphi_s + n_z \sin \varphi_s), \quad (32)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_1 n_3 = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_x (n_z \cos \varphi_s - n_y \sin \varphi_s), \quad (33)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_p} - 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_2^2 = \\ = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_p} - 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} (n_y \cos \varphi_s + n_z \sin \varphi_s)^2, \quad (34)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_2 n_3 = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} \times \\ \times (n_y \cos \varphi_s + n_z \sin \varphi_s) (n_z \cos \varphi_s - n_y \sin \varphi_s), \quad (35)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_p} - 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} n_3^2 = \\ = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_p} - 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} (n_z \cos \varphi_s - n_y \sin \varphi_s)^2. \quad (36)$$

Используя выражения (22)–(36), можно анализировать полную диаграмму рассеяния света ($0 \leq \theta_s \leq \pi$, $0 \leq \varphi_s < 2\pi$) ЖК-каплей на основе распределения поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Для этого необходимо определить элементы матрицы \hat{t} (формула (21)), т. е. найти входящую в выражение (21) 2×2 -матрицу Джонса, которую обозначим через \hat{T} :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Для ее нахождения воспользуемся формализмом матричных преобразований [53] по тракту локальных базисов (связанных с элементарным объемом ΔV) вдоль оси x' , параллельной оси x лабораторной системы координат, от входной координаты на поверхности капли $x_{inp} = x_{inp}(y, z)$ до текущей координаты $x = x(y, z)$ внутри капли (рис. 1б). Тогда, пренебрегая преломлением и отражением на поверхности и локальных границах внутри капли, запишем:

$$\hat{T}(x) = \hat{G}(x) \hat{G}(x - \Delta x) \dots \hat{G}(x_{inp} + \Delta x) \hat{G}(x_{inp}), \quad (38)$$

$$x_{inp} \leq x \leq x_{out},$$

$$\hat{G}(x_{inp}) = \begin{pmatrix} \exp(ikx_{inp}) & 0 \\ 0 & \exp(ikx_{inp}) \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\hat{G}(x) = \hat{R}^{-1}(x)\hat{P}(x)\hat{R}(x). \quad (40)$$

Здесь $\hat{G}(x)$ — матрица локальных фазовых набегов на элементарном объеме ΔV в рассматриваемой системе координат $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_\parallel^i \mathbf{e}_\perp^i$, ikx_{inp} — начальная фаза для обыкновенной и необыкновенной волн на поверхности капли, $\hat{R}(x)$ — матрица перехода (правовращающая матрица поворота относительно \mathbf{e}_i (против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{e}_i)) от рассматриваемой системы координат $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_\parallel^i \mathbf{e}_\perp^i$ к локальному базису $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_e \mathbf{e}_o$ в точке с координатой x , $\hat{R}^{-1}(x)$ — обратная к ней матрица, Δx — шаг по координате x , $x_{out} = x_{out}(y, z)$ — выходная координата на поверхности капли, $\hat{P}(x)$ — диагональная матрица фазовых набегов в локальной системе координат $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_e \mathbf{e}_o$,

$$\hat{R}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(x) - \varphi_s) & \sin(\varphi(x) - \varphi_s) \\ -\sin(\varphi(x) - \varphi_s) & \cos(\varphi(x) - \varphi_s) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\hat{R}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(x) - \varphi_s) & -\sin(\varphi(x) - \varphi_s) \\ \sin(\varphi(x) - \varphi_s) & \cos(\varphi(x) - \varphi_s) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\hat{P}(x) = \begin{pmatrix} \exp(ik(n_e(x)/n_p))\Delta x & 0 \\ 0 & \exp(ik(n_o/n_p))\Delta x \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Локальный показатель преломления для необыкновенной волны в выражении (43) зависит от поля директора в капле $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y, n_z)$ и имеет вид

$$n_e(x) = \frac{n_\parallel n_\perp}{\sqrt{n_\parallel^2 n_x^2 + n_\perp^2 (1 - n_x^2)}}, \quad (44)$$

где n_\perp и n_\parallel — обыкновенный и необыкновенный показатели преломления жидкого кристалла. Локальный показатель преломления для обыкновенной волны n_o не зависит от внутренней структуры капли и равен обыкновенному показателю преломления n_\perp жидкого кристалла:

$$n_o = n_\perp. \quad (45)$$

Отметим, что для матрицы Джонса $\hat{T}(x)$ при определении внутреннего поля в объеме ЖК-капли имеет место рекуррентное соотношение

$$\hat{T}(x) = \hat{G}(x)\hat{T}(x - \Delta x), \quad \hat{T}(x_{inp}) = \hat{G}(x_{inp}), \quad (46)$$

$$x_{inp} + \Delta x \leq x \leq x_{out}.$$

Значения косинусов и синусов разности углов между азимутом $\varphi(x)$ ориентации локальной главной плоскости и азимутом рассеяния φ_s в выражениях (41), (42) определяются через декартовы координаты $n_x n_y n_z$ локального директора в лабораторной системе координат следующим образом:

$$\cos(\varphi(x) - \varphi_s) = (n_y \cos \varphi_s + n_z \sin \varphi_s) / \sqrt{1 - n_x^2}, \quad (47)$$

$$\sin(\varphi(x) - \varphi_s) = (n_z \cos \varphi_s - n_y \sin \varphi_s) / \sqrt{1 - n_x^2}. \quad (48)$$

В описанном ВКБ-приближении электрическое поле волны в ЖК-капле определяется как результат пространственной модуляции фазы и поляризации волнового фронта при прохождении капли с учетом состояния поляризации, двулучепреломления и фазы волны на входной поверхности.

Рассмотрим кратко векторные приближения Рэлея и Рэлея–Ганса на основе интегрального представления амплитудной функции рассеяния (1).

Для перехода к приближению Рэлея или дипольному приближению (dipole approximation (DA)) [22, 24] используем соотношения (15)–(18) при $k\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r} \rightarrow 0$ и запишем элементы матрицы \hat{t} (формула (21)) в виде

$$t_{22} = t_{33} = 1, \quad (49)$$

$$t_{23} = t_{32} = 0. \quad (50)$$

Тогда для элементов амплитудной матрицы рассеяния S_2^{DA} , S_3^{DA} , S_4^{DA} , S_1^{DA} в дипольном приближении, получим

$$S_2^{DA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \{ \tilde{\epsilon}_{22} \cos \theta_s - \tilde{\epsilon}_{12} \sin \theta_s \}, \quad (51)$$

$$S_3^{DA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \{ \tilde{\epsilon}_{23} \cos \theta_s - \tilde{\epsilon}_{13} \sin \theta_s \}, \quad (52)$$

$$S_4^{DA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \tilde{\epsilon}_{32}, \quad (53)$$

$$S_1^{DA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3 V}{4\pi} \tilde{\epsilon}_{33}. \quad (54)$$

В выражениях (51)–(54) компоненты $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) определяются с помощью соотношений (32)–(36), в которых

$$n_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) = \cos \theta, \quad (55)$$

$$n_2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\parallel^i) = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_s), \quad (56)$$

$$n_3 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\perp^i) = \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_s). \quad (57)$$

Здесь θ и φ — полярный и азимутальный углы ориентации диполя в лабораторной системе координат xyz .

Теперь рассмотрим приближение Рэлея–Ганса (Rayleigh–Gans approximation (RGA)). В этом случае внутреннее поле в капле аппроксимируется полем падающей волны [21, 22] и элементы матрицы \hat{t} (формула (21)) имеют вид

$$t_{22} = t_{33} = \exp(ik\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}), \quad (58)$$

$$t_{23} = t_{32} = 0. \quad (59)$$

В результате для элементов амплитудной матрицы рассеяния S_2^{RGA} , S_3^{RGA} , S_4^{RGA} , S_1^{RGA} получим

$$S_2^{RGA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \{\tilde{\varepsilon}_{22} \cos \theta_s - \tilde{\varepsilon}_{12} \sin \theta_s\} \times \\ \times \exp(-ik(\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (60)$$

$$S_3^{RGA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \int_V \{\tilde{\varepsilon}_{23} \cos \theta_s - \tilde{\varepsilon}_{13} \sin \theta_s\} \times \\ \times \exp(-ik(\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (61)$$

$$S_4^{RGA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \times \\ \times \int_V \tilde{\varepsilon}_{32} \exp(-ik(\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (62)$$

$$S_1^{RGA}(\theta_s, \varphi_s) = -\frac{ik^3}{4\pi} \times \\ \times \int_V \tilde{\varepsilon}_{33} \exp(-ik(\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (63)$$

В заключение этого раздела запишем формулы для параллельной f_{vv} и ортогональной f_{vh} относительно плоскости поляризации \mathbf{e}_i е падающей волны компонент векторной амплитудной функции рассеяния:

$$f_{vv}(\theta_s, \varphi_s) = \mathbf{e}_{vv} \hat{S} \mathbf{e}_{vv} = \\ = S_2(\theta_s, \varphi_s) \cos^2(\alpha - \varphi_s) + S_1(\theta_s, \varphi_s) \sin^2(\alpha - \varphi_s) + \\ + \frac{1}{2} (S_3(\theta_s, \varphi_s) + S_4(\theta_s, \varphi_s)) \sin 2(\alpha - \varphi_s), \quad (64)$$

$$f_{vh}(\theta_s, \varphi_s) = \mathbf{e}_{vh} \hat{S} \mathbf{e}_{vv} = \\ = S_4(\theta_s, \varphi_s) \cos^2(\alpha - \varphi_s) - S_3(\theta_s, \varphi_s) \sin^2(\alpha - \varphi_s) + \\ + \frac{1}{2} (S_1(\theta_s, \varphi_s) - S_2(\theta_s, \varphi_s)) \sin 2(\alpha - \varphi_s). \quad (65)$$

Здесь единичные векторы \mathbf{e}_{vv} и \mathbf{e}_{vh} задают направления vv - и vh -поляризации так, чтобы тройка векторов \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{vv} \mathbf{e}_{vh} была правой (рис. 1а). Представление (64), (65) удобно в решении многих задач поляризационной оптики. Мы будем использовать его ниже.

Подчеркнем, что в данном разделе мы не конкретизировали форму ЖК-капли, полагая, что она, как и структура поля локального директора, может быть произвольной. В следующем разделе рассмотрим сферическую каплю с однородно ориентированной внутренней структурой. Для такой капли можно получить ряд простых аналитических формул для решения задачи рассеяния в направлениях строго вперед и строго назад.

3. СФЕРИЧЕСКАЯ ЖК-КАПЛЯ С ОДНОРОДНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ЛОКАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ОСЕЙ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДНОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим характеристики рассеяния оптически анизотропной сферической ЖК-капли радиуса a с однородно ориентированной (монокристаллической) внутренней структурой: локальные директора \mathbf{n} ориентированы в одном направлении во всем объеме V капли вдоль ее оптической оси \mathbf{N} под углом θ относительно оси x лабораторной системы координат (рис. 2). На рис. 2 представлена геометрия рассеяния при $\varphi = 0$ и $\varphi_s = 0$. В этом случае

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta, \quad n_z = 0. \quad (66)$$

Для компонент тензора $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ (соотношение (5)) на основе выражений (32)–(36), с учетом соотношения (66), найдем

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} \cos \theta \sin \theta, \quad (67)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \tilde{\varepsilon}_{23} = 0, \quad (68)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_p} - 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_p} \sin^2 \theta, \quad (69)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_p} - 1. \quad (70)$$

Элементы матрицы Джонса \hat{T} найдем из соотношений (38)–(45). Она является диагональной ($t_{23} = t_{32} = 0$). Ее диагональные элементы определяются следующими образом:

$$t_{22} = \exp(ik(n_e(\theta)/n_p)(x - x_{inp}) + ikx_{inp}), \quad (71)$$

$$t_{33} = \exp(ik(n_{\perp}/n_p)(x - x_{inp}) + ikx_{inp}). \quad (72)$$

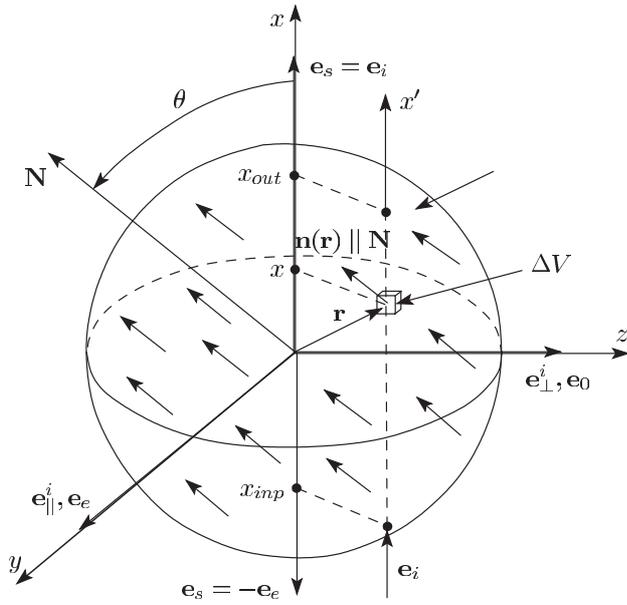


Рис. 2. Схематическое представление рассеяния света на капле с однородно ориентированной внутренней структурой: локальные директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ параллельны оптической оси капли \mathbf{N} . Направление $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_i$ соответствует рассеянию строго вперед, направление $\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_i$ соответствует рассеянию строго назад. Плоскость рассеяния и главная плоскость совпадают с плоскостью yx лабораторной системы координат xyz : $\mathbf{e}_{\parallel}^i = \mathbf{e}_e$, $\mathbf{e}_{\perp}^i = \mathbf{e}_o$; значение азимутального угла рассеяния φ_s и угла ориентации φ оптической оси капли \mathbf{N} равны нулю (см. рис. 1а и рис. 1б)

Здесь $n_e(\theta)$ — показатель преломления для необыкновенной волны, который зависит от угла ориентации θ оптической оси \mathbf{N} капли,

$$n_e(\theta) = \frac{n_{\parallel} n_{\perp}}{\sqrt{n_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + n_{\perp}^2 \sin^2 \theta}}, \quad (73)$$

$x_{inp} = -a\sqrt{1 - (r/a)^2}$ — входная координата на поверхности капли, x изменяется от x_{inp} до выходной координаты $x_{out} = +a\sqrt{1 - (r/a)^2}$, $0 \leq r = \sqrt{y^2 + z^2} \leq a$. Ниже, для упрощения записи формул, мы используем обозначение n_e вместо $n_e(\theta)$, подразумевая, что величина n_e зависит от угла ориентации θ оптической оси капли.

Рассмотрим рассеяние света в направлениях строго вперед ($\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_i$) и строго назад ($\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_i$). Будем использовать для обозначения этих направлений индексы «0» и « π » (см. рис. 2).

Из соотношений (22)–(31) с учетом (67)–(72) следует, что при $\varphi_s = 0$ амплитудные матрицы рассеяния вперед и назад $\hat{S}^{0,\pi}$ являются диагональными:

$$\hat{S}^{0,\pi} = \begin{pmatrix} S_2^{0,\pi} & 0 \\ 0 & S_1^{0,\pi} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Элементы $S_{2,1}^{0,\pi}$ имеют вид

$$S_2^0 = -\frac{ik^3 V}{4\pi} D_{22}^0, \quad (75)$$

$$S_2^{\pi} = \frac{ik^3 V}{4\pi} D_{22}^{\pi}, \quad (76)$$

$$S_1^{0,\pi} = -\frac{ik^3 V}{4\pi} D_{33}^{0,\pi}, \quad (77)$$

где

$$D_{22,33}^{0,\pi} = \frac{2\pi}{V} \tilde{\varepsilon}_{22,33} \times \int_0^a r dr \left\{ \exp\left(-ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1\right)x_{inp}\right) \times \int_{x_{inp}=-a\sqrt{1-(r/a)^2}}^{x_{out}=+a\sqrt{1-(r/a)^2}} \exp\left(ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} \mp 1\right)x\right) dx \right\}. \quad (78)$$

В выражении (78) верхний знак «-» соответствует рассеянию вперед ($\theta_s = 0$), нижний знак «+» — рассеянию назад ($\theta_s = \pi$); величины $\tilde{\varepsilon}_{22,33}$ определяются в соответствии с выражениями (69), (70) и вынесены за знак интеграла, поскольку они не зависят от пространственных координат для капли с однородно ориентированной структурой директора.

Интегрируя (78) по координате x , для $\theta_s = 0$ и $\theta_s = \pi$ получим, соответственно

$$\exp\left(-ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1\right)x_{inp}\right) \times \int_{x_{inp}=-a\sqrt{1-(r/a)^2}}^{x_{out}=+a\sqrt{1-(r/a)^2}} \exp\left(ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} \mp 1\right)x\right) dx = \frac{ia}{\Delta_{22,33}^0} \left(1 - \exp\left(i2\Delta_{22,33}^0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}\right)\right) \quad (79)$$

и

$$\begin{aligned} & \exp\left(-ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1\right)x_{inp}\right) \times \\ & \times \int_{x_{inp}=-a\sqrt{1-(r/a)^2}}^{x_{out}=+a\sqrt{1-(r/a)^2}} \exp\left(ik\left(\frac{n_{e,o}}{n_p} + 1\right)x\right) dx = \\ & = \frac{ia}{\Delta_{22,33}^\pi} \left(\exp\left(-i2ka\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(-i2ka\left(\frac{n_{e,o}}{n_p}\right)\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь

$$\Delta_{22,33}^0 = k_a \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1 \right), \quad (81)$$

$$\Delta_{22,33}^\pi = k_a \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} + 1 \right). \quad (82)$$

Интегрируя (78) по радиальной координате r , с учетом (79), (80), найдем

$$D_{22,33}^0 = \frac{i2\pi a^3}{V} \frac{\tilde{\varepsilon}_{22,33}}{\Delta_{22,33}^0} K_2(2\Delta_{22,33}^0), \quad (83)$$

$$\begin{aligned} D_{22,33}^\pi &= \frac{i2\pi a^3}{V} \frac{\tilde{\varepsilon}_{22,33}}{\Delta_{22,33}^\pi} \times \\ & \times \left(K_2\left(\frac{2kan_{e,o}}{n_p}\right) - K_1(2ka) \right), \end{aligned} \quad (84)$$

где функции $K_{1,2}(\Delta)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K_{1,2}(\Delta) &= \int_0^1 \left(1 - \exp(\mp i\Delta\sqrt{1-\xi^2}) \right) \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\exp(\mp i\Delta)}{i\Delta} + \frac{\exp(\mp i\Delta) - 1}{(i\Delta)^2}. \end{aligned} \quad (85)$$

В выражении (85) верхний знак в обозначениях « \pm » и « \mp » соответствует функции K_1 , а нижний — K_2 . Действительные части K_1 и K_2 совпадают, а мнимые различаются знаками:

$$\operatorname{Re} K_1(\Delta) = \operatorname{Re} K_2(\Delta) = \frac{1}{2} - \frac{\sin \Delta}{\Delta} + \frac{1 - \cos \Delta}{\Delta^2}, \quad (86)$$

$$\operatorname{Im} K_2(\Delta) = -\operatorname{Im} K_1(\Delta), \quad (87)$$

$$\operatorname{Im} K_1(\Delta) = \frac{\sin \Delta}{\Delta^2} - \frac{\cos \Delta}{\Delta}. \quad (88)$$

Отметим, что функция вида K_1 [21] называется функцией Хюлста [29].

На основе (75)–(77), (81)–(84), учитывая, что в оптической области спектра можно записать

$$\tilde{\varepsilon}_{22,33} = \left(\frac{n_{e,o}^2}{n_p^2} - 1 \right) = \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1 \right) = \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} + 1 \right), \quad (89)$$

для $S_{2,1}^{0,\pi}$ получим

$$S_{2,1}^0 = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{n_{e,p}}{n_p} + 1 \right) K_2 \left(2\rho \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1 \right) \right), \quad (90)$$

$$S_2^\pi = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{n_{e,p}}{n_p} - 1 \right) \left\{ K_1(2\rho) - K_2 \left(\frac{2\rho n_e}{n_p} \right) \right\}, \quad (91)$$

$$S_1^\pi = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{n_{e,p}}{n_p} - 1 \right) \left\{ K_2 \left(\frac{2\rho n_e}{n_p} \right) - K_1(2\rho) \right\}. \quad (92)$$

Здесь $\rho = ka = 2\pi a n_p / \lambda$ — параметр дифракции капли.

Элементы $S_{2,1}^{0,\pi}$ (выражения (90), (91)) и $S_1^{0,\pi}$ (выражения (90), (92)) при $\varphi = \varphi_s = 0$ описывают рассеяние соответственно необыкновенной и обыкновенной волн. При $\varphi \neq \varphi_s \neq 0$ амплитудные матрицы рассеяния, как можно показать из (22), (25), (34), (36), (60), (61), (75)–(77), могут быть найдены путем преобразований поворота с помощью выражения

$$\begin{aligned} \hat{S}^{0,\pi}(\varphi \neq \varphi_s \neq 0) &= \\ &= \hat{R}^{-1}(\varphi - \varphi_s) \hat{S}^{0,\pi}(\varphi - \varphi_s = 0) \hat{R}(\varphi - \varphi_s), \end{aligned} \quad (93)$$

где матрица поворота

$$\hat{R}(\varphi - \varphi_s) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \varphi_s) & \sin(\varphi - \varphi_s) \\ -\sin(\varphi - \varphi_s) & \cos(\varphi - \varphi_s) \end{pmatrix}, \quad (94)$$

а обратная ей матрица $\hat{R}^{-1}(\varphi - \varphi_s)$ является транспонированной в силу ортогональности преобразования.

Если при определении компонент тензора $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ использовать условие оптической мягкости частиц, то вместо (89) можно записать

$$\tilde{\varepsilon}_{22,33} = \left(\frac{n_{e,o}^2}{n_p^2} - 1 \right) \approx 2 \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1 \right). \quad (95)$$

В этом случае из соотношений (75)–(77), (81)–(84) следует, что выражения для элементов $S_{2,1}^0$ (формула (90)) матрицы рассеяния, найденные в рамках ВКБ-приближения (обозначим их как $S_{2,1}^{0(WKB)}$), совпадают с элементами (которые мы обозначим как $S_{2,1}^{0(ADA)}$) матрицы рассеяния, полученными в рамках приближения аномальной дифракции [29]:

$$S_{2,1}^{0(WKB)} \equiv S_{2,1}^{0(ADA)} = \rho^2 K_2 \left(2\rho \left(\frac{n_{e,o}}{n_p} - 1 \right) \right). \quad (96)$$

Найдем элементы амплитудной матрицы обратного рассеяния $S_{2,1}^\pi$ в приближении Рэлея–Ганса, которые обозначим как $S_{2,1}^{\pi(RGA)}$, и сравним их с элементами, полученными в рамках ВКБ-приближения. Элементы $S_{2,1}^{\pi(RGA)}$ определяются с помощью соотношений (76), (77), где соответствующие интегралы имеют вид

$$D_{22,33}^{\pi(RGA)} = \frac{2\pi}{V} \tilde{\varepsilon}_{22,33} \times \int_0^a r dr \left\{ \int_{x_{inp}=-a\sqrt{1-(r/a)^2}}^{x_{out}=+a\sqrt{1-(r/a)^2}} \exp(i2kx) dx \right\}. \quad (97)$$

Интегрируя выражение (97), получим

$$D_{22,33}^{\pi(RGA)} = \frac{2\pi}{V} \tilde{\varepsilon}_{22,33} \frac{2}{3} a^3 F(\pi). \quad (98)$$

Здесь

$$F(\pi) = \frac{3}{8\rho^2} (\sin 2\rho - 2\rho \cos 2\rho) \quad (99)$$

— формфактор [22, 24]. С учетом (98), (99) из (76), (77) имеем

$$S_{2,1}^{\pi(RGA)} = \pm \frac{i\rho^3}{3} \tilde{\varepsilon}_{22,33} F(\pi), \quad (100)$$

где знак «+» соответствует $S_2^{\pi(RGA)}$, знак «−» — $S_1^{\pi(RGA)}$.

В заключение данного раздела кратко опишем области применимости приближений Рэлея–Ганса, аномальной дифракции и ВКБ-приближения для капель ЖК в полимере. Приближение Рэлея–Ганса позволяет анализировать полную диаграмму рассеяния света [21, 22] ($0 \leq \theta_s \leq \pi$, $0 \leq \varphi_s < 2\pi$) ЖК-каплями, фактор эффективности ослабления которых мал. Приближение аномальной дифракции позволяет проводить анализ рассеяния в малых углах ($2\rho \sin^2 \theta_s / 2 < 0.5$ [49]) для ЖК-капель, параметр дифракции которых $\rho \gg 1$. ВКБ-приближение является более общим решением задачи рассеяния [47–49] по сравнению с указанными приближениями. Оно справедливо для оптически мягких частиц ($|m-1| \ll 1$, [24]), позволяет находить характеристики рассеяния и ослабления капель в большом диапазоне размеров и анализировать полную диаграмму рассеяния.

Численные результаты и количественное сравнение рассматриваемого в работе векторного ВКБ-приближения с решением Ми для ряда частных случаев представлены в следующем разделе.

4. АНАЛИЗ ФАКТОРОВ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОСЛАБЛЕНИЯ И ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В данном разделе проведен сравнительный анализ результатов, полученных в рамках разработанных векторных приближений ВКБ и РГ, описывающих рассеяние на частицах из анизотропного вещества, и строгой теории Ми для изотропных сферических частиц [21, 22]. Для этого найдены условия, при которых решения задач рассеяния в рамках приближений ВКБ и РГ для оптически анизотропной сферической ЖК-капли эквивалентны решению задачи рассеяния на изотропной однородной сферической частице. В рамках векторного ВКБ-приближения проведен анализ фактора эффективности ослабления и фактора эффективности обратного рассеяния в зависимости от параметров ЖК, полимера, условий освещения и ориентации оптической оси ЖК-капли.

Условия, при которых полученные в разд. 3 выражения описывают рассеяние изотропной сферической частицей, можно найти из соотношений (73), (89)–(92), (100). Они имеют место при: 1) освещении вдоль оптической оси капли ($\theta = 0$), когда отсутствует двулучепреломление; 2) равенстве показателя преломления n_p окружающего полимера обыкновенному показателю преломления ЖК, $n_p = n_\perp$, что означает отсутствие рассеяния обыкновенной волны. Угол ориентации θ оптической оси капли для случая 2) может быть произвольным в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Ниже проведено сравнение результатов, полученных в рамках приближений ВКБ и Рэлея–Ганса, с решением Ми при $n_p = n_\perp$ и $\theta = \pi/2$. Относительный показатель преломления m для однородной изотропной сферы при расчетах в рамках теории Ми определялся соотношением $m = n_\parallel / n_\perp$.

Для нахождения фактора эффективности ослабления мы использовали оптическую теорему [21, 22]. При освещении ЖК-капли линейно поляризованной плоской волной выражение для фактора эффективности ослабления Q_p имеет вид

$$Q_p = \frac{4}{\rho^2} \operatorname{Re} f_{vv}^0, \quad (101)$$

где f_{vv}^0 — vv -компонента векторной амплитудной функции рассеяния (выражение (64)) в направлении строго вперед ($\theta_s = 0$), индекс p означает, что падающая волна линейно поляризована. Фактор эффективности обратного рассеяния Q_p^π при освещении поляризованным светом определялся соотношением [22]

$$Q_p^\pi = \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_i)|^2}{k^2\sigma} = \frac{|f_{vv}^\pi|^2 + |f_{vh}^\pi|^2}{\pi\rho^2}. \quad (102)$$

Здесь $\sigma = \pi a^2$ — площадь поперечного сечения ЖК-капли, f_{vv}^π и f_{vh}^π — vv - и vh -компоненты векторной амплитудной функции рассеяния при $\theta_s = \pi$.

Для ЖК-капли с монодоменной структурой (рис. 2) при $\varphi = \varphi_s = 0$ (разд. 3), компоненты векторной амплитудной функции рассеяния $f_{vv,vh}^{0,\pi}$ определяются через диагональные элементы амплитудной матрицы рассеяния $S_2^{0,\pi}$ и $S_1^{0,\pi}$ (выражения (90)–(92)), как следует из (64), (65), следующим образом:

$$f_{vv}^{0,\pi} = S_2^{0,\pi} \cos^2 \alpha + S_1^{0,\pi} \sin^2 \alpha, \quad (103)$$

$$f_{vh}^{0,\pi} = (S_2^{0,\pi} - S_1^{0,\pi}) \cos \alpha \sin \alpha. \quad (104)$$

Обратим внимание, что при $\varphi \neq \varphi_s \neq 0$ компоненты $f_{vv,vh}^{0,\pi}$ находятся аналогично выражениям (103), (104). В этом случае в них вместо угла поляризации α войдет разность углов $\alpha - \varphi$.

Факторы эффективности ослабления Q_{np} и эффективности обратного рассеяния Q_{np}^π неполяризованного излучения для капли, освещаемой неполяризованным светом, находятся путем усреднения по углу поляризации α :

$$Q_{np} = \frac{2}{\rho^2} \text{Re}(S_2^0 + S_1^0), \quad (105)$$

$$Q_{np}^\pi = \frac{2}{\rho^2} (|S_2^\pi|^2 + |S_1^\pi|^2). \quad (106)$$

Результаты расчетов в рамках приближений ВКБ и РГ и теории Ми представлены на рис. 3, 4. Расчеты выполнены по формулам (105), (106) с использованием выражений (90)–(92), (100) при $n_\perp = n_p$ и $\theta = \pi/2$. В этих условиях, как отмечено выше, можно использовать результаты, полученные для скалярных приближений. Выбранное для расчетов по формулам Ми значение относительного показателя преломления $m = n_\parallel/n_\perp = 1.0584$ изотропной сферы соответствует нематическому жидкому кристаллу MLC-9200-000 с обыкновенным $n_\perp = 1.4752$ и необыкновенным $n_\parallel = 1.5613$ показателями преломления на длине волны $\lambda = 656$ нм; значение $m = 1.1215$ соответствует ЖК 5СВ ($n_\perp = 1.531$, $n_\parallel = 1.717$ при $\lambda = 658$ нм). На рис. 4а представлены также данные для $m = 1.01$. Такие и более близкие к единице значения m реализуются, в частности, при рассеянии света на каплях ЖК [7–9] и переходных доменах [14, 15].

На рис. 3 видно хорошее совпадение результатов, полученных в рамках приближения ВКБ со

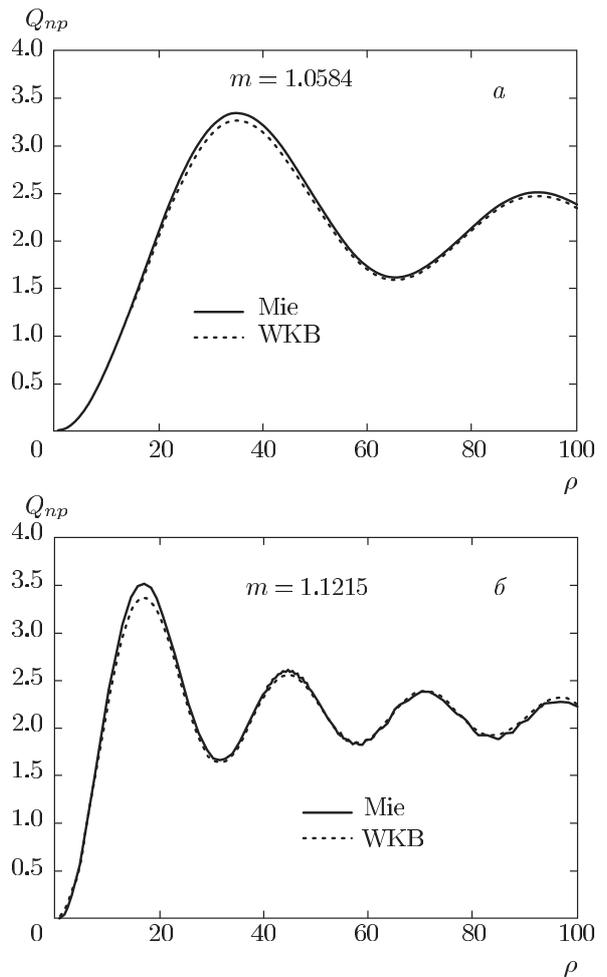


Рис. 3. Зависимости фактора эффективности ослабления Q_{np} неполяризованного света от параметра дифракции ρ для капель с относительным показателем преломления $m = 1.0584$ (а) и $m = 1.1215$ (б), рассчитанные по формулам Ми (Mie) и в приближении ВКБ (WKB)

строгим решением Ми, для фактора эффективности ослабления Q_{np} при относительных показателях преломления m , близких к единице (рис. 3а). С ростом m появляются расхождения на зависимостях $Q_{np} = Q_{np}(\rho)$. При больших m они становятся значительными и наблюдается смещение положения максимумов и минимумов.

Аналогичная тенденция имеет место для обратного рассеяния: чем ближе значение относительного показателя преломления m к единице, тем лучше соответствие между расчетами в рамках теории Ми и приближений ВКБ и РГ (см. рис. 4). Однако диапазон параметров дифракции меньше. Зависимости $Q_{np}^\pi(\rho)$ практически совпадают при малых ρ для $m = 1.01$ (рис. 4а). С увеличением m резуль-

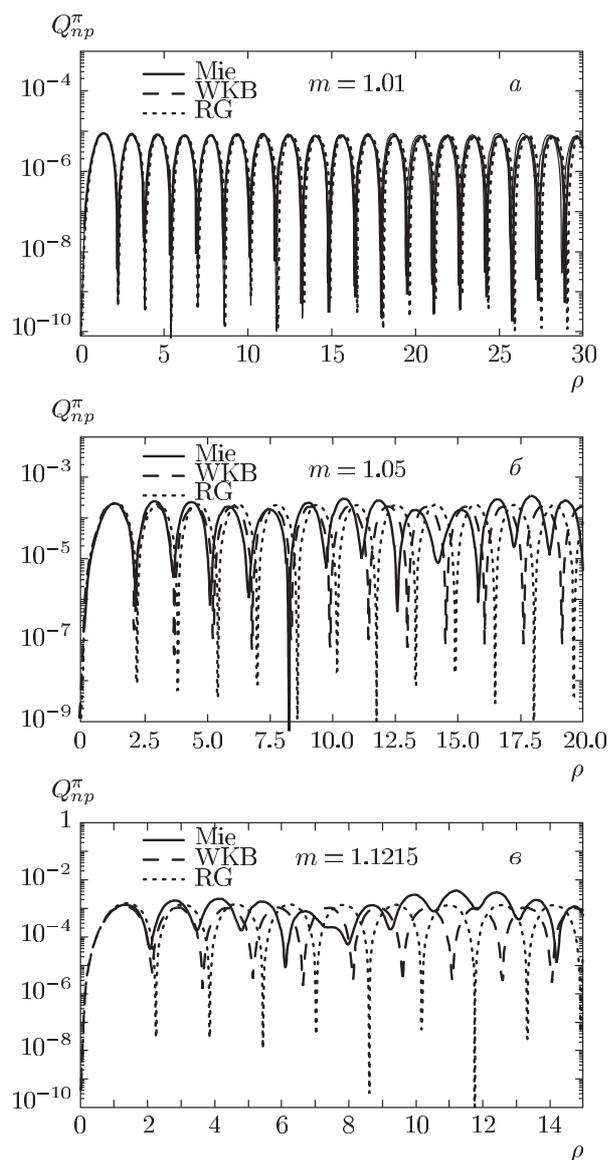


Рис. 4. Зависимости фактора эффективности обратного рассеяния неполяризованного света Q_{np}^{π} от параметра дифракции ρ для капли с относительным показателем преломления $m = 1.01$ (а), $m = 1.05$ (б) и $m = 1.1215$ (в). Расчет по формулам Ми (Mie), в ВКБ (WKB) приближении и приближении Рэлея–Ганса (RG)

таты расходятся. Наилучшее соответствие для Q_{np}^{π} имеет место в области первого максимума (рис. 4б, рис. 4в). Наибольшие расхождения результатов имеют место при больших ρ и m . Значения Q_{np}^{π} , полученные в рамках ВКБ-приближения, ближе к рассчитанным по формулам Ми, по сравнению с полученными в рамках приближения Рэлея–Ганса.

Вблизи минимумов зависимостей $Q_{np}^{\pi}(\rho)$ имеет место сильное, на порядки, расхождение между результатами теории Ми и приближений ВКБ и РГ.

ВКБ-приближение лучше описывает положение минимумов, чем приближение Рэлея–Ганса. Отметим, что положения минимумов в рамках приближений ВКБ и РГ можно найти аналитически, используя формулы (91), (92), (100). В целом, область параметров дифракции, где применимы приближения ВКБ и РГ, как и следует ожидать из условий, при которых они получены, уменьшается с ростом m .

На основе полученных результатов можно сделать ряд выводов о применимости развитого векторного ВКБ-приближения применительно к анализу обратного рассеяния света ЖК-капель: 1) необходимо исключать из рассмотрения значения параметров ЖК-капли вблизи минимумов значений фактора эффективности обратного рассеяния; 2) лучшее соответствие имеет место в области максимумов функции $Q_{np}^{\pi}(\rho)$; 3) увеличение оптической анизотропии Δn ЖК ведет к уменьшению количества максимумов на зависимости $Q_{np}^{\pi}(\rho)$ (и, соответственно, значений параметра дифракции ρ), в области которых можно использовать ВКБ-приближение; 4) можно продвинуться в область больших значений ρ и Δn , если ограничиваться «избирательным» рассмотрением значений параметра дифракции ρ , соответствующих окрестностям точек пересечения функций $Q_{np}^{\pi}(\rho)$, рассчитанных по формулам Ми и в рамках ВКБ-приближения (см. рис. 4). Поскольку показатель преломления необыкновенной волны зависит от ориентации оптической оси капли и показатель преломления полимера может отличаться от обыкновенного показателя преломления ЖК, при «избирательном» выборе параметра дифракции ρ необходимо дополнительно оценивать погрешность результатов путем варьирования относительного показателя преломления m из диапазона допустимых значений: от $m_1 = n_{\perp}/n_p$ до $m_2 = n_{\parallel}/n_p$. Аналогичные выводы при анализе обратного рассеяния имеют место и для приближения Рэлея–Ганса с той разницей, что диапазон его применимости меньше.

Влияние оптической анизотропии жидкого кристалла Δn и угла поляризации α на характеристики рассеяния света ЖК-капель при разных значениях показателя преломления полимерной матрицы n_p иллюстрируют рис. 5–8.

На рис. 5, 6 представлены факторы эффективности ослабления при освещении линейно поляризованным, Q_p , и неполяризованным, Q_{np} , светом в зависимости от параметра дифракции ρ . Расчеты выполнены по формулам (90), (101), (103), (105) для излучения, падающего перпендикулярно директору \mathbf{N} капли (см. рис. 2) при $\theta = \pi/2$ и разной оптиче-

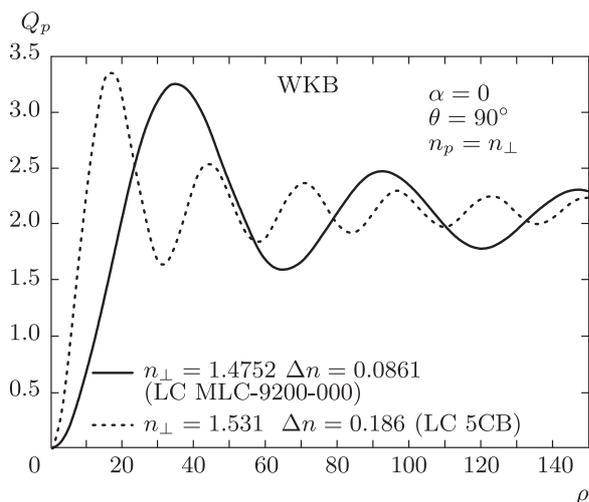


Рис. 5. Зависимости фактора эффективности ослабления Q_p поляризованного света от параметра дифракции ρ для каплей с разной оптической анизотропией Δn жидкого кристалла при $n_p = n_{\perp}$. Угол поляризации падающего света $\alpha = 0$. Оптическая ось капли ортогональна направлению падения света: $\theta = 90^\circ$

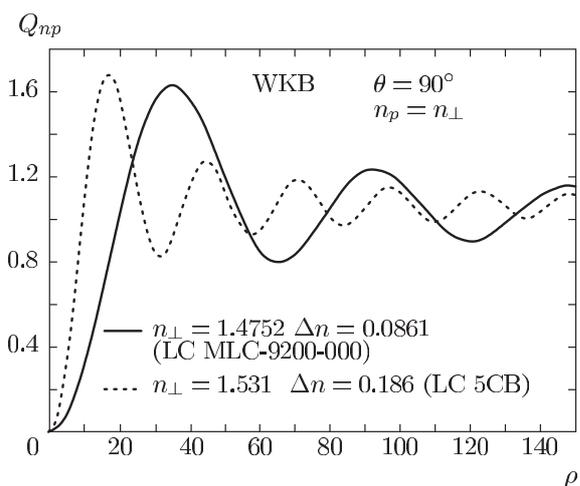


Рис. 6. Зависимости фактора эффективности ослабления неполяризованного света Q_{np} от параметра дифракции ρ для каплей с разной оптической анизотропией жидкого кристалла при $n_p = n_{\perp}$. Оптическая ось капли ортогональна направлению падения света: $\theta = 90^\circ$

ской анизотропии Δn жидкого кристалла. Рассмотрены два типа ЖК: MLC-9200-000 и 5CB в условиях равенства показателя преломления полимерной матрицы их обыкновенным показателям преломления: $n_p = n_{\perp}$. В этом случае обыкновенная волна не рассеивается. При одинаковом параметре дифракции значения Q_p больше, чем Q_{np} , т. е. поляризованное излучение рассеивается сильнее. Обратим

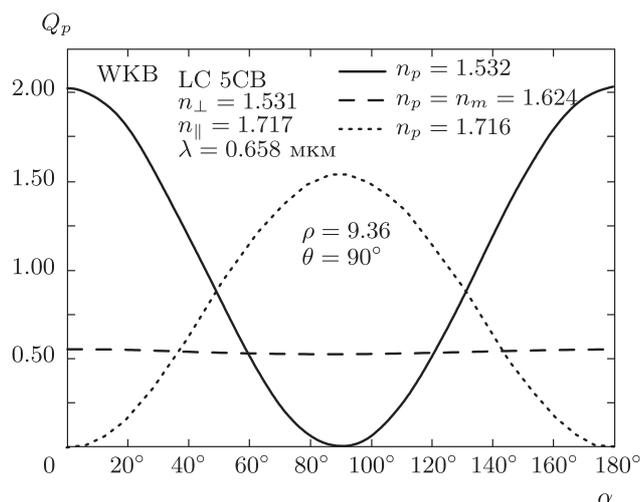


Рис. 7. Зависимости фактора эффективности ослабления поляризованного света Q_p от угла поляризации α падающей волны при разных значениях показателя преломления n_p полимерной матрицы. Оптическая ось капли ортогональна направлению падения света: $\theta = 90^\circ$

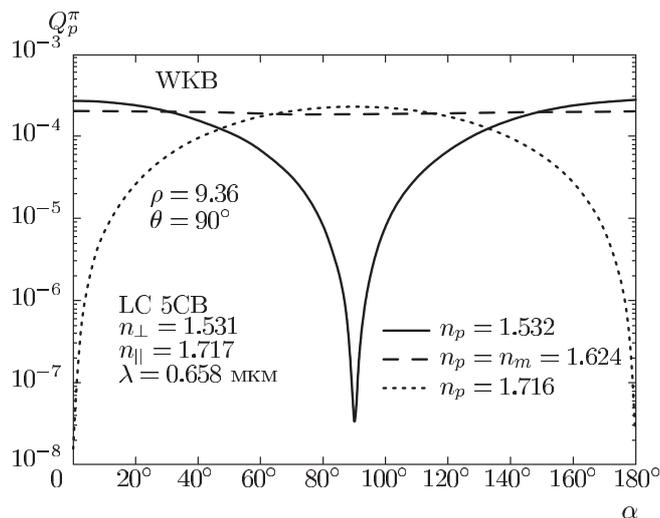


Рис. 8. Зависимости фактора эффективности обратного рассеяния поляризованного света Q_p^{π} от угла поляризации α падающей волны при разных значениях показателя преломления n_p полимерной матрицы. Оптическая ось капли ортогональна направлению падения света: $\theta = 90^\circ$

внимание, что асимптотические значения факторов эффективности ослабления для поляризованного и неполяризованного света равны $Q_{np} = 1$ (рис. 5) и $Q_p = 2$ (рис. 6), соответственно. Увеличение Δn ведет к увеличению числа осцилляций на зависимостях $Q_p(\rho)$ и $Q_{np}(\rho)$.

На рис. 7, 8 представлены факторы эффективности ослабления Q_p и обратного рассеяния Q_p^{π} при освещении ЖК-капли линейно поляризованным из-

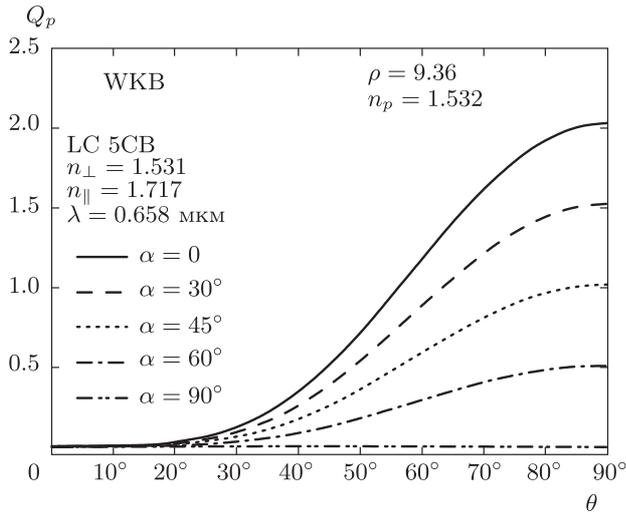


Рис. 9. Зависимости фактора эффективности ослабления поляризованного света Q_p от полярного угла ориентации θ оптической оси капли при разных углах поляризации α падающей волны

лучением в зависимости от угла поляризации α . Данные приведены для капли жидкого кристалла 5CB в полимерной матрице со следующими значениями показателя преломления: $n_p = 1.532 \approx n_{\perp}$; $n_p = n_m = 1.624$, где $n_m = (n_{\perp} + n_{\parallel})/2$ — средний показатель преломления ЖК; $n_p = 1.716 \approx n_{\parallel}$. Значение параметра дифракции $\rho = 9.36$. Оно соответствует точке пересечения кривых $Q_{np}^{\pi} = Q_{np}^{\pi}(\rho)$, рассчитанных по формулам Ми и в рамках ВКБ-приближения (см. рис. 4б). В данном случае погрешность расчетов, соответствующих выбранным значениям n_{\perp} , n_{\parallel} и n_p , при варьировании m от минимального значения до максимального значения не превышала 13%.

Как видно на рис. 7 и 8, при $n_p = n_m$ факторы эффективности рассеяния Q_p и Q_p^{π} не зависят от угла поляризации α . Это обусловлено равенством модуля разности между показателями преломления для обыкновенной и необыкновенной волн и полимером при $\theta = \pi/2$ (см. выражения (73)). Зависимости $Q_p(\alpha)$ и $Q_p^{\pi}(\alpha)$ на рис. 7, 8 являются периодически функциями от угла поляризации α с периодом π вследствие эквивалентности направлений директора капли \mathbf{N} и $-\mathbf{N}$ ЖК-капли [1–3].

Влияние угла ориентации θ оптической оси капли на характеристики рассеянного излучения приведены на рис. 9–12.

На рис. 9 и 10 представлены Q_p и Q_p^{π} в зависимости от θ для разных α . На рис. 9 видно, что Q_p монотонно возрастает с ростом θ при любом угле поляризации α . Значение Q_p максимально, когда ди-

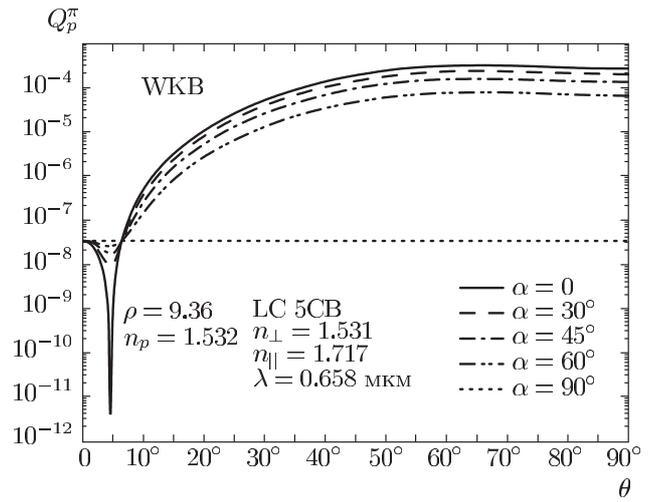


Рис. 10. Зависимости фактора эффективности обратного рассеяния поляризованного света Q_p^{π} от полярного угла ориентации θ оптической оси капли при разных углах поляризации α падающей волны

ректор капли \mathbf{N} расположен ортогонально направлению освещения. В этом случае реализуется максимальное значение относительного показателя преломления n_e , т. е. $n_e(\theta)/n_p \rightarrow \max$ при $\theta = \pi/2$ и $n_p \approx n_{\perp}$ (см. выражение (73)). Зависимость Q_p от θ является монотонной функцией. При углах ориентации оптической оси $\theta < 20^\circ$ фактор эффективности рассеяния практически не изменяется. Зависимость Q_p^{π} от θ является немонотонной и имеет минимум (рис. 10). Он наиболее выражен, когда $\alpha = 0$. При $\alpha = \pi/2$ он исчезает. Для угла поляризации $\alpha = \pi/2$ значения Q_p^{π} (рис. 10) и Q_p (рис. 9) не зависят от θ . Это связано с тем, что показатель преломления для обыкновенной волны не зависит от угла ориентации оптической оси капли. Тривиальный, но физически важный (в частности, для создания электрооптических модуляторов излучения, работающих на эффекте рассеяния [7–9, 58–61]), результат имеет место, когда $n_p = n_{\perp}$ и $\alpha = \pi/2$. В этом случае $Q_p = Q_p^{\pi} = 0$, т. е. рассеяние света отсутствует.

Отметим, что при освещении неполяризованным светом значения Q_{np} и Q_{np}^{π} равны соответствующим значениям Q_p и Q_p^{π} для поляризованного под углом $\alpha = \pi/4$ света. Этот результат легко получить из соотношений (101)–(104).

Влияние показателя преломления полимера n_p на зависимости $Q_p^{\pi}(\theta)$ и $Q_{np}^{\pi}(\theta)$ показано соответственно на рис. 11 и рис. 12. В расчетах использовались следующие значения n_p : 1) $n_p = 1.515$, которое меньше обыкновенного показателя преломления

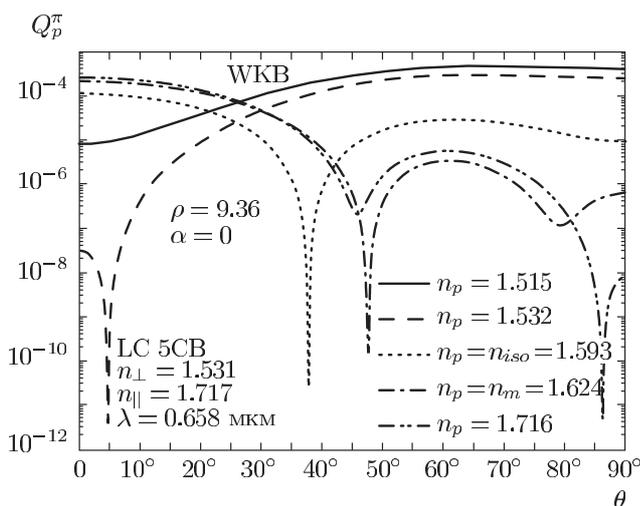


Рис. 11. Зависимости фактора эффективности обратного рассеяния поляризованного света Q_p^π от полярного угла ориентации θ оптической оси капли при разных показателях преломления n_p полимера

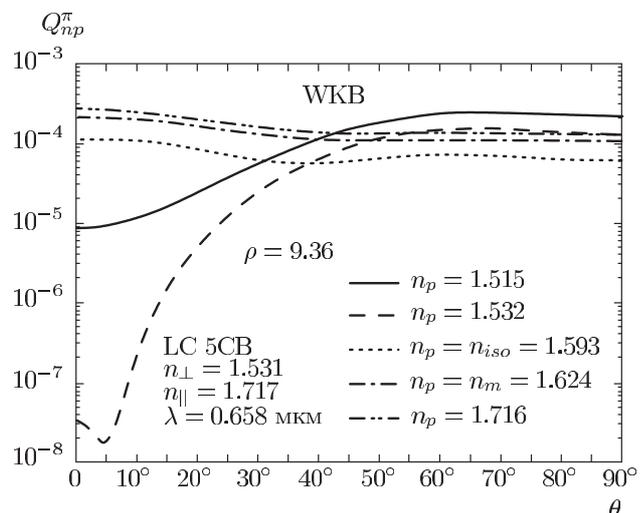


Рис. 12. Зависимости фактора эффективности обратного рассеяния неполяризованного света Q_{np}^π от полярного угла ориентации θ оптической оси капли при разных показателях преломления n_p полимера

ЖК n_\perp ; 2) $n_p = 1.532 \approx n_\perp$; 3) $n_p = n_{iso} = 1.593$, где $n_{iso} = (2n_\perp + n_\parallel)/3$ — показатель преломления ЖК в изотропной фазе [7]; 4) $n_p = n_m = 1.624$; 5) $n_p = 1.716 \approx n_\parallel$.

На рис. 11 и 12 видно, что при $n_p < n_\perp$ на зависимостях $Q_p^\pi(\theta)$ и $Q_{np}^\pi(\theta)$ минимум отсутствует. Если $n_\perp < n_p < n_\parallel$, то для падающего поляризованного света зависимости $Q_p^\pi(\theta)$ имеют два минимума (рис. 11), а для неполяризованного — один (рис. 12). Наличие минимумов (см. рис. 10–12) обу-

словлено экстремумами амплитудных функций рассеяния $S_{2,1}^\pi$ (выражения (91), (92)).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна получены соотношения для характеристик рассеяния и ослабления света каплями одноосного нематического жидкого кристалла произвольной формы с произвольной структурой поля директора.

Для сферических капель нематического ЖК с однородно ориентированной внутренней структурой локальных оптических осей найдены аналитические выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния в направлениях рассеяния строго вперед и строго назад. Проведена верификация полученных решений. Исследовано влияние характеристик ЖК, полимера, условий освещения и ориентации оптической оси на факторы эффективности ослабления и обратного рассеяния света для ЖК-капли.

Полученные результаты можно использовать для: исследования влияния формы и внутренней структуры ЖК-капель с однородным и неоднородным поверхностным сцеплением на характеристики рассеяния света [11–13]; построения модели рассеяния света каплями хиральных холестерических и смектических жидких кристаллов [54, 55]; анализа неселективного рассеяния света на спиральных доменах, образующихся при разрыве внешним полем спиральной структуры смектических ЖК [14, 15, 56–60]; анализа рассеяния биологическими частицами [61–68] и другими [2, 69–80] природными и искусственными объектами.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта №Ф15СО-039 НАН Беларуси и СО РАН (НАНБ–СО РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. M. Blinov, *Structure and Properties of Liquid Crystals*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York (2011).
2. М. Клеман, О. Д. Лаврентович, *Основы физики частично упорядоченных сред: коллоиды, фрактальные структуры, полимеры и биологические объекты*, Физматлит, Москва (2007).
3. П.-Ж. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).

4. V. G. Chigrinov, *Liquid Crystal Devices: Physics and Application*, Artech House, Boston–London (1999).
5. V. K. Fredericksz and V. Zolina, *Trans. Far. Soc.* **29**, 919 (1933).
6. E. Dubois-Violette and P. G. de Gennes, *J. Phys. Lett. (France)*. **36**, L-255 (1975).
7. F. Simoni, *Nonlinear Properties of Liquid Crystals and Polymer Dispersed Liquid Crystals*, World Sci., Singapore (1997).
8. Г. М. Жаркова, А. С. Сонин, *Жидкокристаллические композиты*, Наука, Москва (1994).
9. P. S. Drzaic, *Liquid Crystal Dispersions*, World Scientific, Singapore (1995).
10. V. A. Loiko, in *Nanodroplets*, ed. by Z. M. Wang, Springer, New York, Dordrecht, London (2013), Ch. 9, p. 195.
11. *Flexible Flat panel Displays*, ed. by G. P. Crawford, Wiley & Sons, Hoboken (2005).
12. О. О. Прищепа, А. В. Шабанов, В. Я. Зырянов, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 315 (2004).
13. О. О. Prishchepa, A. V. Shabanov, and V. Ya. Zyryanov, *Phys. Rev. E* **72**, 031712 (2005).
14. А. Л. Андреев, В. П. Бобылев, Н. А. Губасарян и др., *Опт. ж.* **72**, 58 (2005).
15. В. А. Лойко, А. В. Конколович, А. А. Мискевич, *ЖЭТФ* **135**, 608 (2009).
16. *Light Scattering by Nonspherical Particles*, ed. by M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, and L. D. Travis, Acad. Press, San Diego, San Francisco, New York, London, Sydney, Tokyo (2000).
17. S. K. Sharma and D. J. Sommerford, *Light Scattering by Optically Soft Particles: Theory and Applications*, Jointly Published with Praxis Publishing, UK (2006).
18. A. Doicu, T. Wriedt, and Y. A. Eremin, *Light Scattering by Systems of Particles*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2006).
19. A. A. Kokhanovsky, *Light Scattering Media Optics: Problems and Solutions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2004).
20. M. L. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2002).
21. Г. ван де Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
22. Д. Борен, К. Хафмен, *Поглощение и рассеяния света мелкими частицами*, Мир, Москва (1986).
23. V. A. Babenko, L. G. Astafyeva, and V. N. Kuzmin, *Electromagnetic Scattering in Disperse Media. Inhomogeneous and Anisotropic Particles*, Springer Praxis Publishing, Chichester, UK (2003).
24. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1986).
25. S. Zumer and J. W. Doane, *Phys. Rev. A* **34**, 3373 (1986).
26. A. Malinka, *JOSA A* **28**, 2086 (2011).
27. В.А. Лойко, А. В. Конколович, *ЖЭТФ* **130**, 1082 (2006).
28. P. G. Lisinetskaya, A. V. Konkolovich, and A. V. Loiko, *Appl. Opt.* **48**, 3144 (2009).
29. S. Zumer, *Phys. Rev. A* **37**, 4006 (1988).
30. V. A. Loiko, A. V. Konkolovich, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **33**, 2201 (2000).
31. V. A. Loiko, V. Ya. Zyryanov, U. Maschke et al., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **113**, 2585 (2012).
32. Д. А. Яковлев, О. А. Афонин, *Опт. и спектр.* **82**, 86 (1997).
33. V. A. Loiko, A. V. Konkolovich, and A. A. Miskevich, *J. Opt. Technol.* **78**, 455 (2011).
34. Е. В. Аксенова, Е. В. Крюков, В. П. Романов, *ЖЭТФ* **132**, 1435 (2007).
35. B. T. Draine and P. J. Flatau, *J. Opt. Soc. Amer. A* **11**, 1491 (1994).
36. D. A. Smuneev, P. C. Chaumet, and M. A. Yurkin, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **156**, 67 (2015).
37. J. G. Fikioris and P. C. Waterman, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **123**, 8 (2013).
38. A. D. Kiselev, V. Yu. Reshetnyak, and T. J. Sluckin, *Phys. Rev. E* **65**, 056609 (2002).
39. V. A. Loiko and V. I. Molochko, *Liq. Cryst.* **25**, 603 (1998).
40. В. А. Лойко, В. И. Молочко, *Опт. и спектр.* **85**, 811 (1998).
41. V. A. Loiko and V. I. Molochko, *Appl. Opt.* **38**, 2857 (1999).
42. В. А. Лойко, В. И. Молочко, *ЖТФ* **69**, 86 (1999).

43. A. Mertelj and M. Čopič, *Phys. Rev. E* **75**, 011705 (2007).
44. V. A. Loiko, V. Ya. Zyryanov, U. Maschke et al., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **113**, 2585 (2012).
45. В. А. Лойко, У. Машке, В. Я. Зырянов и др., *Опт. и спектр.* **110**, 111 (2011).
46. Дж. Хединг, *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*, Мир, Москва (1965).
47. J. D. Klett and R. A. Sutherland, *Appl. Opt.* **31**, 373 (1992).
48. В. Н. Лопатин, К. А. Шаповалов, *Опт. и спектр.* **78**, 817 (1995).
49. В. Н. Лопатин, Н. В. Шепелевич, *Опт. и спектр.* **81**, 115 (1996).
50. R. Ondris-Crawford, E. P. Boyko, B. G. Wagner et al., *Appl. Phys.* **69**, 6380 (1991).
51. V. Yu. Rudyak, A. V. Emelyanenko, and V. A. Loiko, *Phys. Rev. E* **88**, 052501 (2013).
52. О. О. Prishchера, A. V. Shabanov, V. Ya. Zyryanov, A. M. Parshin, and V. G. Nazarov, *JETP Lett.* **84**, 723 (2006).
53. Е. В. Ищенко, А. Л. Соколов, *Поляризационная оптика*, Изд-во МЭИ, Москва (2005).
54. V. Vorflusef and S. Kumar, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **43**, 866 (1998).
55. V. A. Loiko and A. V. Konkolovich, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **365**, 271 (2001).
56. V. A. Loiko, A. V. Konkolovich, and A. A. Miskevich, *Liq. Cryst.* **36**, 365 (2009).
57. E. P. Pozhidaev, V. E. Molkin, and V. G. Chigrinov, *Photon. Letts. of Poland* **3**, 11 (2011).
58. A. D. Kiselev, E. P. Pozhidaev, V. G. Chigrinov, and Hoi-Sing Kwok, *Phys. Rev. E* **83**, 031703 (2011).
59. K. Yoshino and M. Ozaki, *Jpn. J. Appl. Phys.* **23**, L385 (1984).
60. K. L. Marshall, J. Haddock, N. Bickel et al., *Appl. Opt.* **38**, 1287 (1999).
61. V. A. Loiko and V. V. Berdnik, *Appl. Opt.* **48**, 6178 (2009).
62. G. I. Ruban, S. M. Kosmacheva, N. V. Goncharova et al., *J. Biomed. Opt.* **12**, 044017-1 (2007).
63. V. A. Loiko, G. I. Ruban, O. A. Gritsai et al., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* **102**, 73 (2006).
64. V. Spizzichino, L. Fiorani, A. Lai et al., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* **112**, 876 (2011).
65. В. Н. Лопатин, А. В. Приезжев, А. Д. Апонасенко и др., *Методы светорассеяния в анализе дисперсных биологических сред*, Физматлит, Москва (2004).
66. O. C. Marina, C. K. Sanders, and J. R. Maurant, *Biomed. Opt. Exp.* **3**, 296 (2012).
67. R. Geolato, N. Riviere, R. Jorand et al., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* **146**, 207 (2014).
68. V. V. Berdnik and V. A. Loiko, in *Light Scattering Review: Light Scattering and Radiative Transfer*, ed. by A. A. Kokhanovsky, Springer, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2015). Vol. 10, p. 291.
69. A. A. Kokhanovsky and E. P. Zege, *Appl. Opt.* **43**, 1589 (2004).
70. V. A. Loiko, P. G. Maksimenko, and A. V. Konkolovich, *Opt. and Spectr.* **105**, 791 (2008).
71. J. P. F. Lagerwall and G. Scalia, *Curr. Appl. Phys.* **12**, 1387 (2012).
72. В. П. Дик, В. А. Лойко, *Опт. и спектр.* **117**, 115 (2014).
73. O. V. Yaroshchuk, L. O. Dolgov, and A. D. Kiselev, *Phys. Rev. E* **72**, 051715 (2005).
74. M. P. Shepilov, A. E. Kalmykov, and G. A. Sycheva, *J. Non-Cryst. Solids* **353**, 2415 (2007).
75. V. V. Berdnik and V. A. Loiko, *Appl. Opt.* **50**, 4246 (2011).
76. T. Machon and G. P. Alexander, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA (PNAS)* **110**, 4174 (2013).
77. D. Wei, U. Bortolozzo, J. P. Huignard, and S. Residori, *Opt. Exp.* **21**, 19545 (2013).
78. Yu-C. Hsiao, C.-Y. Wu, and C.-H. Chen, *Opt. Lett.* **36**, 2632 (2011).
79. В. А. Гуняков, М. Р. Крахалев, В. Я. Зырянов и др., *Письма в ЖТФ* **41**, 70 (2015).
80. M. I. Mishchenko, Z. M. Dlugach, and N. T. Zakharova, *Opt. Lett.* **39**, (2014).