ЖЭТФ, 2016, том 149, вып. 1, стр. 23–40

РАССЕЯНИЕ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ НА ОДИНОЧНОМ КВАНТОВОМ ВИХРЕ В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

Л. А. Смирнов [a,b*], *А. И. Смирнов* [a**], *В. А. Миронов* [a]

[a] *Институт прикладной физики Российской академии наук 603950, Нижний Новгород, Россия*

[b] *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского 603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 2015 г.

Исследован процесс рассеяния вихревых пар, являющихся частным случаем двумерных темных солитонов, на одиночном квантовом вихре в бозе-эйнштейновском конденсате с отталкивающим взаимодействием между атомами. Для этого была развита асимптотическая теория, описывающая динамику таких двумерных солитоноподобных образований в произвольном плавно неоднородном потоке ультрахолодного бозе-газа. В пренебрежении радиационными потерями, связанными с излучением звуковых волн, показано, что парам вихрь–антивихрь можно поставить в соответствие квазичастицы и описать их поведение каноническими уравнениями Гамильтона. Для данных уравнений найдены интегралы движения, используя которые можно классифицировать различные режимы рассеяния вихревых пар на одиночном квантовом вихре. Теоретические построения подтверждены численными расчетами, выполненными непосредственно в рамках уравнения Гросса – Питаевского. Предложен способ, позволяющий оценить радиационные потери при столкновении солитоноподобного образования с фазовой сингулярностью. С помощью прямого численного моделирования показано, что при определенных условиях взаимодействие вихревых пар с ядром одиночного квантового вихря сопровождается достаточно интенсивным излучением звуковых волн, из-за чего нарушаются условия применимости развитой асимптотической теории. В частности, на конкретном примере наглядно продемонстрировано, как радиационные потери приводят к трансформации пары вихрь–антивихрь в безвихревой двумерный темный солитон, т. е. к аннигиляции фазовых сингулярностей.

DOI: 10.7868/S004445101601003X

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика вихревых структур и их взаимодействие друг с другом во многом определяют ключевые аспекты эволюции облака ультрахолодного вырожденного бозе-газа с отталкивающим взаимодействием между атомами. С квантовыми вихрями (топологическими дефектами или фазовыми сингулярностями) связаны нарушение режима сверхтекучести и переход бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) в турбулентное состояние [1–10]. Для описания такого перехода важно максимально продвинуться в решении эталонных задач взаимодействия различного рода вихревых образований [1, 11–13].

Причины рождения квантовых вихрей в ультрахолодном вырожденном бозе-газе весьма разнообразны. Они образуются в потоках БЭК за препятствиями, роль которых обычно играют лазерные пучки [5–9, 14], из-за развития модуляционной неустойчивости вытянутых (квазиодномерных) неоднородностей [7, 8, 15], на фронте ударных волн [16–19] и т. д. При этом квантовые вихри возникают, как правило, парами вихрь–антивихрь. Такие окончательно сформировавшиеся пары в однородном БЭК являются частным случаем двумерных темных солитонов [20–25], движущихся вдоль прямых линий с постоянными скоростями. В отсутствии внешнего потенциала эти солитоны представляют собой уединенные локализованные решения уравнения Гросса – Питаевского (ГП), совпадающего в безразмерных переменных с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) с дефокусирующей нелинейностью [26–29].

* E-mail: smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru

** E-mail: smirnov@appl.sci-nnov.ru

Как показано нами в работах [24], в плавно неоднородном конденсате, когда расстояние между вихрем и антивихрем существенно меньше характерного масштаба неоднородности среды, вихревые пары также близки по своей структуре к соответствующим двумерным темным солитонам. Однако в этом случае в процессе распространения форма солитоноподобных образований медленно перестраивается (в частности, изменяется дистанция между противоположными по знаку топологическими дефектами), и движутся они ускоренно и, вообще говоря, не по прямым, а по искривленным траекториям.

В предлагаемой статье мы рассмотрим особенности динамики таких квазисолитонных структур в неоднородном потоке ультрахолодного вырожденного бозе-газа, уделив особое внимание их рассеянию на одиночном квантовом вихре. При больших характерных расстояниях между фазовыми сингулярностями для описания их взаимодействия в ряде случаев можно использовать приближение несжимаемой жидкости и модель точечных вихрей, динамика которых активно изучается в гидродинамике и математической физике с начала прошлого века. Как показал еще Пуанкаре [30,31], нелинейная гамильтонова система уравнений, которой подчиняется движение трех точечных вихрей, всегда интегрируема. Ее многочисленные решения были детально исследованы Гребли [32,33]. В частности, им рассматривалась и задача рассеяния вихревой пары на вихре. Однако применительно к БЭК развитая Гребли теория, не учитывающая сжимаемость ультрахолодного вырожденного бозе-газа, имеет лишь очень ограниченную область применения.

Отметим также, что в ряде работ изучались процессы рассеяния на одиночном квантовом вихре звуковых волн [34] и одномерных темных солитонов [35,36]. Наши исследования являются естественным продолжением этих публикаций.

Кратко анонсируем содержание предлагаемой статьи. Она разделена на две основные части: разд. 2 и 3. В разд. 2 развивается вариационный подход к задаче о поведении двумерного темного солитона в плавно неоднородном облаке конденсата при наличии в нем стационарных потоков. В разд. 3 с использованием результатов развитой асимптотической теории и с помощью прямого численного моделирования, выполненного непосредственно в рамках уравнения ГП, анализируется задача о рассеянии пары вихрь–антивихрь на одиночном квантовом вихре. Здесь же мы уделили особое внимание численному исследованию радиационных потерь, обусловленных излучением звуковых волн при столкновении вихревой пары с исходно изолированной фазовой сингулярностью. В Заключении (разд. 4) подводятся итоги работы и формулируются ее основные результаты.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ВИХРЕВЫХ ПАР В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНОМ БЭК С ПОТОКОМ

2.1. Стационарные квантовые вихри и двумерные темные солитоны

Бозе-эйнштейновский конденсат будем описывать в приближении среднего поля, согласно которому система из макроскопического числа идентичных бозе-частиц, находящихся в конденсированном состоянии, характеризуется единой классической волновой функцией $\Psi(\mathbf{r},t)$, удовлетворяющей уравнению ГП [26–29]. Это уравнение для ультрахолодного вырожденного бозе-газа с отталкивающим взаимодействием между атомами в безразмерных переменных имеет следующий вид [24, 26–28]:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\Psi + \left(1 - |\Psi|^2\right)\Psi = V_{ext}(\mathbf{r})\,\Psi. \qquad (1)$$

Здесь время t, координаты $\mathbf{r}$, функция $\Psi(\mathbf{r},t)$ и потенциал $V_{ext}(\mathbf{r})$ воздействующих на конденсат внешних сил нормированы таким образом, что безразмерный химический потенциал основного состояния равен единице [24,26–28]. От уравнения (1) всегда можно перейти с помощью преобразования Маделунга $\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)\exp\left[i\theta(\mathbf{r},t)\right]$ к уравнениям гидродинамики сжимаемой невязкой жидкости:

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\psi^2 \nabla\theta\right) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\theta\right)^2 = 1 - \psi^2 + \frac{\Delta\psi}{2\psi} - V_{ext}(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где $\psi(\mathbf{r},t)$ и $\theta(\mathbf{r},t)$ — действительные функции координат и времени, имеющие четкий физический смысл, а именно, $n(\mathbf{r},t) = \psi^2(\mathbf{r},t)$ — концентрация атомов БЭК, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \nabla\theta(\mathbf{r},t)$ — их скорость. Со слагаемым $\Delta\psi/2\psi$ связывают специфическое так называемое квантовомеханическое давление.

В данной работе речь пойдет о двумерной задаче, к которой сводится анализ поведения ультрахолодного вырожденного бозе-газа, удерживаемого в дискообразной ловушке [24,26–28]. Потенциал такой ловушки достаточно сильно локализован по координате z и плавно изменяется по двум другим координатам x и y. Этот факт позволяет считать структуру облака БЭК по оси z фиксированной, а в уравнениях (1)–(3) после процедуры факторизации [24,26–28] рассматривать только зависимость функций от двумерного вектора $\mathbf{r} = (x, y)$. Не будем в дальнейшем учитывать воздействие внешних сил на конденсат в плоскости x, y, т. е. положим $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$, и сконцентрируемся на особенностях, связанных прежде всего с взаимодействием нелинейных волновых структур. Отметим, что подобное пренебрежение внешними силами оправдано для очень плавных ловушек. Кроме того, данное предположение заведомо выполняется в тех случаях, когда используются технологии и методы, предложенные и продемонстрированные в экспериментах [37], в которых удалось создать квазиоднородное распределение концентрации БЭК в достаточно большой области пространства.

В исходно однородном БЭК, когда $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$, существуют покоящиеся и движущиеся с постоянной скоростью нелинейные волновые структуры соответственно в виде одиночных квантовых вихрей [1, 26–29] и двумерных темных солитонов [20–24]. Данные структуры описываются уединенными решениями уравнения ГП (1) и во многом определяют долговременную эволюцию облака ультрахолодного бозе-газа.

Наличие квантовых вихрей (топологических дефектов или фазовых сингулярностей) является одной из наиболее характерных особенностей сверхтекучих систем [1, 26–29], к которым, в частности, относится БЭК разреженных ультрахолодных газов с отталкивающим взаимодействием между атомами. Циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему центр вихря, равна $2\pi\varkappa$, где $\varkappa$ — целое число, часто называемое азимутальным индексом или топологическим зарядом. Соответственно, при обходе вокруг этих линий фаза макроскопической волновой функции сверхтекучей системы меняется на $2\pi\varkappa$.

Вихри с азимутальными индексами $|\varkappa| > 1$ распадаются на $|\varkappa|$ вихрей, устойчивых в классе двумерных решений, с единичными по модулю топологическими зарядами [38, 39]. Поэтому далее будем считать, что $\varkappa = \pm 1$. Отметим также, что квантовые вихри с $\varkappa = -1$, в которых конденсат вращается по часовой стрелке, принято называть антивихрями.

В связанной с центральной точкой полярной системе координат r, φ стационарные волновые функции $\Psi_v^{\pm}(\mathbf{r})$ соответственно вихря и антивихря имеют достаточно простой вид, а именно, $\Psi_v^{\pm}(\mathbf{r}) = \psi_v(r)\exp(\pm i\varphi)$, где фаза $\pm\varphi$ определяет наличие сингулярного (при $r = 0$) вихревого потока $\mathbf{v}_v^{\pm}(\mathbf{r}) = \pm\boldsymbol{\varphi}_0/r$ ($\boldsymbol{\varphi}_0$ — орт угловой переменной φ), а амплитуда $\psi_v(r)$ и в том, и в другом случаях удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [1, 26–29]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi_v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi_v}{dr}-\frac{1}{r^2}\psi_v\right)+\left(1-\psi_v^2\right)\psi_v = 0 \qquad (4)$$

с граничными условиями $\psi_v(0) = 0$ и $\psi_v(\infty) = 1$, обеспечивающими непрерывность $\psi_v(r)$ в точке $r = 0$ и выход концентрации конденсата на единицу при $r \to \infty$.

Окрестность точки $r = 0$, где концентрация $n_v(r) = \psi_v^2(r)$ бозе-частиц в вихревом решении заметно отличается от плотности однородного фонового конденсата, т. е. $n_v(r) \ll 1$, и существенно квантовомеханическое давление, называется сердцевиной или ядром квантового вихря. На границе этой области скорость потока БЭК становится порядка скорости звука. Характерный размер сердцевины близок к корреляционному радиусу (равному единице в используемых безразмерных переменных), который в случае разреженного ультрахолодного бозе-газа велик по сравнению с межатомным расстоянием. Поэтому структура вихря (антивихря) может быть описана макроскопическим образом.

Функцию $\psi_v(r)$, удовлетворяющую уравнению (4) и соответствующим граничным условиям, можно найти только численно. Однако несложно установить асимптотическое поведение $\psi_v(r)$ при $r \to 0$ и при $r \to \infty$ [22, 40]. В первом случае, когда $r \ll 1$,

$$\psi_v(r \ll 1) = \alpha_1 r-\frac{\alpha_1}{4}r^3+\frac{\alpha_1\left(4\alpha_1^2+1\right)}{48}r^5+o\left(r^7\right), \qquad (5)$$

где $\alpha_1 = 0.824177059$. Вне ядра квантового вихря (антивихря) на достаточно больших расстояниях $r \gg 1$ от него амплитуда $\psi_v(r)$ волновой функции БЭК определяется следующим выражением:

$$\psi_v(r \gg 1) = 1-\frac{1}{4}r^{-2}-\frac{9}{32}r^{-4}-\frac{161}{128}r^{-6}+o\left(r^{-8}\right). \qquad (6)$$

Используя асимптотики (5) и (6), для стационарного распределения концентрации $n_v(r)$ конденсата с вихрем (антивихрем) можно подобрать аппроксимацию Паде [40]

$$n_v^{[2/2]}(r) = \frac{a_1 r^2 + a_2 r^4}{1 + b_1 r^2 + b_2 r^4}, \qquad (7)$$

$$a_1 = \alpha_1^2, \quad b_1 = \frac{3\alpha_1^2}{\sqrt{2}\left(2-\alpha_1^2\right)},$$

$$a_2 = b_2 = \frac{\alpha_1^2\left(2\alpha_1^2-1\right)}{4\left(2-\alpha_1^2\right)},$$

которая воспроизводит коэффициенты в разложении (5) до слагаемых порядка r^3, а в разложении (6) до членов порядка r^{-2}, т. е. дает правильное поведение $n_v(r)$ одновременно при $r \to 0$ и $r \to \infty$.

Несложно показать, что энергия БЭК, сосредоточенная внутри области радиусом R, при наличии в ее центре фазовой сингулярности логарифмически растет с увеличением R [26, 27, 40]. Однако в однородном конденсате существуют устойчивые стационарные вихревые образования, обладающие конечной энергией. Простейшие из них — пары вихрь–антивихрь, которые являются частным случаем двумерных темных солитонов уравнения ГП (1) с $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$.

Двумерные темные солитоны представляют собой локализованные провалы концентрации, движущиеся с постоянной дозвуковой скоростью $\bar{v}$ на фоне конденсата единичной плотности [20–24]. Их волновые функции $\bar{\Psi}_s(\xi, y, \bar{v})$ удовлетворяют стационарному НУШ

$$-i\bar{v}\frac{\partial\bar{\Psi}_s}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\Psi}_s}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\Psi}_s}{\partial y^2}+\left(1-\left|\bar{\Psi}_s\right|^2\right)\bar{\Psi}_s = 0 \quad (8)$$

с граничным условием $\bar{\Psi}_s\left(\xi^2 + y^2 \to \infty\right) \to 1$. Эти уединенные образования можно также рассматривать как однопараметрическое семейство решений вариационной задачи $\delta\left(\mathcal{H} - \bar{v}\mathcal{P}_x\right) = 0$, где

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(|\nabla\Psi|^2 + \left(1 - |\Psi|^2\right)^2\right), \quad (9)$$

$$\mathbf{P} = \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\left(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi\right) \quad (10)$$

— соответственно гамильтониан и импульс БЭК. Из данной вариационной формулировки вытекают следующие соотношения [20, 21, 24]:

$$\begin{gathered}\bar{\mathcal{E}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \left|\frac{\partial\bar{\Psi}_s}{\partial\xi}\right|^2, \\ \bar{\mathcal{E}} - \bar{v}\bar{\mathcal{P}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \left|\frac{\partial\bar{\Psi}_s}{\partial y}\right|^2, \\ \bar{v}\bar{\mathcal{P}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(1 - \left|\bar{\Psi}_s\right|^2\right)^2, \\ \bar{v} = \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{\mathcal{P}}} < \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\mathcal{P}}}.\end{gathered} \quad (11)$$

Здесь $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_s$ — энергия солитона, а $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{sx}$ — его импульс. При этом $\bar{v}$, $\bar{\mathcal{P}}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ однозначно связаны друг с другом.

В работах [20–24] в рамках уравнения (8) были подробно исследованы свойства двумерных темных солитонов и, в частности, детально проанализированы особенности их внутренней структуры в зависимости от величины $\bar{v}$, играющей роль параметра задачи. Когда $0 < \bar{v} < 0.61$, солитоны являются вихревыми, а при $0.61 \le \bar{v} < 1$ — безвихревыми. В первом случае они представляют так называемые пары вихрь–антивихрь, в которых концентрация конденсата в двух точках, расположенных на линии, перпендикулярной направлению движения, обращается в нуль. Фаза волновой функции $\bar{\Psi}_s(\xi, y, \bar{v})$ БЭК при обходе вокруг этих точек изменяется на $\pm 2\pi$. С увеличением скорости распространения $\bar{v}$ энергия $\bar{\mathcal{E}}$ двумерного темного солитона уменьшается, а фазовые сингулярности в нем сближаются. При критическом значении энергии $\bar{\mathcal{E}}_* = 7.59$, соответствующем $\bar{v}_* = 0.61$, топологические дефекты сливаются и вместо вихревой пары образуется безвихревой солитон, в котором плотность конденсата уже нигде не обращается в нуль и отсутствуют скачки на $\pm 2\pi$ в распределении фазы. В слабонелинейном пределе, когда скорость $\bar{v}$ стремится к звуковой, т. е. когда $1 - |\bar{v}| \ll 1$, безвихревые солитоны близки по своей структуре к уединенным решениям уравнения Кадомцева – Петвиашвили (КП) [23, 41–43].

Отметим, что для рассчитанной путем численного решения стационарного уравнения (8) зависимости импульса $\bar{\mathcal{P}}$ двумерного темного солитона от его энергии $\bar{\mathcal{E}}$ нами была найдена достаточно простая аналитическая аппроксимация [24]:

$$\bar{\mathcal{P}}\left(\bar{\mathcal{E}}\right) = \wp\left(\bar{\mathcal{E}}\right)\operatorname{sh}\left[\bar{\mathcal{E}}/\wp\left(\bar{\mathcal{E}}\right)\right], \quad (12)$$

$$\wp\left(\bar{\mathcal{E}}\right) = 2\pi + \frac{2\pi}{3}\exp\left[-\left(\frac{\bar{\mathcal{E}}}{9.8}\right)^2\right], \quad (13)$$

обладающая высокой точностью, или, другими словами, построено нелинейное дисперсионное соотношение для рассматриваемых солитонных возбуждений в однородном конденсате.

2.2. Гамильтонова динамика двумерных темных солитонов в вихревом потоке

Для построения теории турбулентности в БЭК важно знать, как вихревые пары взаимодействуют друг с другом и с одиночными квантовыми вихрями [2–10]. Исходя из того, что пара вихрь–антивихрь является частным случаем двумерного темного солитона в однородном конденсате, проанализируем задачу рассеяния такого солитоноподобного образования на топологическом дефекте. При этом воспользуемся вариационным методом, который неоднократно продемонстрировал свою высокую эффективность и целесообразность при изучении динамики и взаимодействия уединенных волн в разнообразных физических моделях, описываемых нелинейными уравнениями, близких к интегрируемым [29, 43, 44]. Идеология данного метода аналогична подходу, предложенному Уиземом и использованному им для изучения поведения цугов периодических бегущих волн [45].

Итак, пусть двумерный темный солитон (в частности, вихревая пара), движущийся в общем случае на фоне плавно неоднородного БЭК, налетает на одиночный квантовый вихрь, имеющий топологический заряд $\varkappa = +1$. Заметим, что все полученные ниже результаты из соображений симметрии легко переносятся и на случай фазовой сингулярности с противоположным по знаку азимутальным индексом $\varkappa = -1$, т.е. антивихря. В области пространства, где характерный размер Λ_s двумерного темного солитона мал по сравнению с расстоянием r_s до центра вихря, т.е. $\Lambda_s \ll r_s$, можно ввести малый параметр $\mu = \Lambda_s / r_s \ll 1$, характеризующий плавность изменения вихревого поля скоростей на масштабе Λ_s. При этом волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ конденсата удобно представить в виде произведения

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_v(\mathbf{r})\, \Phi(\mathbf{r}, t), \tag{14}$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — комплексная функция координат $\mathbf{r}$ и времени t, $\Psi_v(\mathbf{r})$ — стационарная волновая функция одиночного квантового вихря (верхний индекс «+» здесь опущен, чтобы не загромождать запись в дальнейшем). Выделение в качестве одного из сомножителей функции $\Psi_v(\mathbf{r})$ отражает тот факт, что двумерный темный солитон, пролетая на больших расстояниях r_s ($r_s \gg \Lambda_s$) от центра фазовой сингулярности, очень слабо возмущает структуру квантового вихря и созданного им течения и, следовательно, обратным влиянием такого возмущения на динамику рассматриваемого солитоноподобного образования можно пренебречь. После подстановки выражения (14) в уравнение ГП (1) для второго сомножителя $\Phi(\mathbf{r}, t)$, описывающего поведение двумерного темного солитона в плавно неоднородном вихревом потоке БЭК, получим следующее нелинейное динамическое уравнение:

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\Phi + n_v(\mathbf{r})\left(1 - |\Phi|^2\right)\Phi + \\ + \left(i\mathbf{v}_v(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\nabla\left[\ln n_v(\mathbf{r})\right]\right)\cdot\nabla\Phi = 0. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{v}_v(\mathbf{r})$ представляет собой поле скоростей, созданное в ультрахолодном бозе-газе изолированным топологическим дефектом, а $n_v(\mathbf{r})$ определяет неоднородное распределение концентрации фонового конденсата с одиночным квантовым вихрем. Уравнение (15) по сути является НУШ с плавно неоднородными коэффициентами. Соответствующая ему (и его комплексно сопряженному аналогу) плотность функции Лагранжа имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(\Phi, \Phi^*) = \frac{i}{2} n_v(\mathbf{r}) \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_v(\mathbf{r})\cdot\nabla\right)\Phi^* - \text{c.c.}\right] + \\ + \frac{n_v(\mathbf{r})}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{n_v^2(\mathbf{r})}{2}\left(1 - |\Phi|^2\right)^2. \tag{16}$$

Теперь для описания динамики двумерных темных солитонов в плавно неоднородном вихревом потоке можно воспользоваться вариационным методом, в основе которого лежит усреднение выражения (16) по так называемым быстрым переменным.

Будем считать, что солитоноподобное образование движется на неоднородном фоне вдоль плавно изогнутой траектории $\mathbf{r}_s(t)$ с медленно изменяющейся скоростью $\mathbf{v}_s(t) = \dot{\mathbf{r}}_s(t)$. При этом в силу условия $\Lambda_s \ll r_s$ в любой произвольный момент времени t такое квазисолитонное возбуждение близко по своей структуре к соответствующему уединенному решению $\Phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, \mathbf{v}_s)$ уравнения (15), в котором вместо скалярной функции $n_v(\mathbf{r})$ пространственных переменных $\mathbf{r}$ и векторного поля $\mathbf{v}_v(\mathbf{r})$ подставлены для каждого t не зависящие от $\mathbf{r}$ локальные значения соответствующих величин в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_s(t)$, т.е. $n_v(\mathbf{r}_s)$ и $\mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s)$. С учетом сказанного выше в качестве аппроксимации, корректно описывающей форму двумерного темного солитона в рассматриваемом случае, естественно выбрать функцию $\Phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t))$ с зависящими от времени t параметрами. С помощью несложных преобразований $\Phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t))$ можно выразить через введенную ранее волновую функцию $\bar{\Psi}_s(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{v})$:

$$\Phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t)) = \bar{\Psi}_s\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{v}(t)\right), \tag{17}$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\bar{v}}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s)\right), \tag{18}$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\bar{v}}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\right)\cdot\left[\mathbf{z}_0 \times \left(\dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s)\right)\right] \tag{19}$$

являются нормированными ортогональными криволинейными координатами, сопровождающими квазисолитон вдоль трассы его распространения, $\mathbf{z}_0$ —

единичный вектор, перпендикулярный плоскости x, y и направленный вдоль оси z, а величина

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(\mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t)) = \frac{\left|\dot{\mathbf{r}}_s(t) - \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s(t))\right|}{\sqrt{n_v(\mathbf{r}_s(t))}} \quad (20)$$

имеет смысл нормированной скорости двумерного темного солитона в системе координат $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$.

Подставим в плотность функции Лагранжа (16) вместо $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ее аппроксимацию $\Phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t))$. Принимая во внимание плавную зависимость векторного поля $\mathbf{v}_v(\mathbf{r})$ и фоновой плотности $n_v(\mathbf{r})$ конденсата от координат $\mathbf{r}$ на характерных масштабах Λ_s рассматриваемого квазисолитонного образования, а также предполагая, что скорость $\dot{\mathbf{r}}_s(t)$ двумерного темного солитона медленно изменяется во времени, перейдем согласно (18) и (19) с помощью преобразования поворота и дополнительной нормировки к новым переменным $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ и проинтегрируем по ним $\mathcal{L}(\Phi_s, \Phi_s^*)$. Если воспользоваться зеркальной симметрией функции $\bar{\Psi}_s\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{v}\right)$ относительно $\bar{\eta} = 0$, т. е. $\bar{\Psi}_s\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{v}\right) = \bar{\Psi}_s\left(\bar{\xi}, -\bar{\eta}, \bar{v}\right)$, асимптотиками ее поведения на бесконечности [20, 24] и соотношениями (11), придем к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s) &= \\ &= -\iint\limits_{D_s} \mathcal{L}\big(\Phi_s(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}_s(t)), \Phi_s^*(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}_s(t))\big)\, d^2\tilde{\mathbf{r}} = \\ &= n_v(\mathbf{r}_s)\Big[\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s)\,\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s)) - \\ &\qquad - \bar{\mathcal{E}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))\Big]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)$, D_s — область локализации солитона, а величины $\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ и $\bar{\mathcal{E}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ в каждый фиксированный момент времени t представляют собой соответствующие интегральные характеристики двумерного темного солитона, который в беспотоковом однородном конденсате единичной концентрации распространялся бы вдоль прямой линии с постоянной скоростью, равной значению $\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s)$, рассчитанному при заданном t по формуле (20). По аналогии с работами [24] в дальнейшем $\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ и $\bar{\mathcal{E}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ назовем соответственно нормированным импульсом и нормированной энергией рассматриваемого квазисолитонного образования. Определенные таким способом $\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ и $\bar{\mathcal{E}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))$ связаны между собой нелинейным дисперсионным соотношением (12), (13).

Теперь двумерный темный солитон (в том числе пару вихрь–антивихрь) можно интерпретировать как композитную квазичастицу с функцией Лагранжа (21). Используя развитый в классической механике гамильтонов формализм [46], путем введения вместо $\dot{\mathbf{r}}_s$ в качестве вектора независимых переменных обобщенного импульса

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_s(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s) &= \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_s} = \\ &= \frac{\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s))}{\bar{v}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s)}\big(\dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s)\big) \end{aligned} \quad (22)$$

можно прийти к достаточно удобным для анализа и численного решения так называемым каноническим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} &= \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)}{\partial \mathbf{p}_s} = \\ &= \sqrt{n_v(\mathbf{r}_s)}\,\bar{v}\left(\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)\right)\frac{\mathbf{p}_s}{|\mathbf{p}_s|} + \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_s}{dt} &= -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)}{\partial \mathbf{r}_s} = -\left(\mathbf{p}_s \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_s}\right)\mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s) + \\ &+ \left(\frac{|\mathbf{p}_s|\,\bar{v}\left(\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)\right)}{2\sqrt{n_v(\mathbf{r}_s)}} - \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)\right)\frac{\partial n_v(\mathbf{r}_s)}{\partial \mathbf{r}_s}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s) &= \mathbf{p}_s \cdot \dot{\mathbf{r}}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s) - \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)) = \\ &= n_v(\mathbf{r}_s)\,\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s) + \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s) \end{aligned} \quad (25)$$

является функцией Гамильтона квазичастицы, соответствующей рассматриваемому солитоноподобному образованию. Поскольку гамильтониан (25) не зависит явным образом от времени, будет выполняться закон сохранения

$$n_v(\mathbf{r}_s)\,\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s) + \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s) = H = \mathrm{const}, \quad (26)$$

согласно которому нормированная энергия двумерного темного солитона должна изменяться вдоль его трассы распространения следующим образом:

$$\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s) = \frac{H - \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{v}_v(\mathbf{r}_s)}{n_v(\mathbf{r}_s)}, \quad (27)$$

где постоянная H определяется начальными условиями. Зная $\bar{\mathcal{E}}$, можно найти и функцию $\bar{v}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)$, используя подобранную нами аппроксимацию (12), (13) для зависимости $\bar{\mathcal{P}}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)$:

$$\bar{v}\left(\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)\right) = \left[\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{d\bar{\mathcal{E}}}\right]^{-1}\Bigg|_{\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s)}. \quad (28)$$

В данной работе обсуждается процесс рассеяния вихревых пар на неоднородностях созданного одиночным квантовым вихрем сингулярного поля скоростей $\mathbf{v}_v(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varphi}_0/r$, направленного вдоль угловой переменной φ полярной системы координат r, φ, и аксиально-симметричного распределения концентрации $n_v(r)$ БЭК, зависящего только от радиальной координаты r. Учитывая эти особенности, перепишем выражение (20) для нормированной скорости $\bar{v}(t)$ двумерного темного солитона следующим образом:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(r_s, \dot{r}_s, \dot{\varphi}_s) = \sqrt{\frac{r_s^2 \dot{r}_s^2 + (r_s^2 \dot{\varphi}_s - 1)^2}{r_s^2 n_v(r_s)}}, \tag{29}$$

где $r_s = r_s(t)$ и $\varphi_s = \varphi_s(t)$ — положение центра солитоноподобного образования в полярной системе координат r, φ, связанной с одиночным квантовым вихрем, а точки над переменными обозначают производные по времени t. Из соотношения (29) и равенства $n_v(\mathbf{r}_s) = n_v(r_s)$ непосредственно следует, что лагранжиан (16) не зависит явным образом от угловой переменной φ_s, т.е. для квазичастицы, ассоциируемой с рассматриваемым уединенным провалом концентрации, φ_s является циклической обобщенной координатой. В силу уравнений Лагранжа соответствующий φ_s обобщенный импульс $\ell_s = \partial\bar{\mathcal{L}}/\partial\dot{\varphi}_s$ представляет собой интеграл движения:

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}\big(\bar{v}(r_s, \dot{r}_s, \dot{\varphi}_s)\big)}{\bar{v}(r_s, \dot{r}_s, \dot{\varphi}_s)} \left(r_s^2 \dot{\varphi}_s - 1\right) = M = \text{const}. \tag{30}$$

Это обстоятельство совместно с законом сохранения (26), переписанным в виде

$$n_v(r_s)\,\bar{\mathcal{E}}\big(\bar{v}(r_s, \dot{r}_s, \dot{\varphi}_s)\big) + \frac{M}{r_s^2} = H = \text{const}, \tag{31}$$

существенно упрощает анализ решений системы канонических уравнений (23), (24). При наличии аналитической аппроксимации (12), (13) для зависимости нормированного импульса $\bar{\mathcal{P}}$ солитоноподобного образования от его нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}$ соотношений (30) и (31) достаточно, чтобы свести задачу о динамике двумерного темного солитона к квадратурам. В частности, они позволяют получить трансцендентное алгебраическое уравнение для минимального расстояния $r_{s_{min}}$, на которое, согласно развитым выше представлениям, квазичастица приближается к топологическому дефекту, расположенному в точке с $r = 0$. Подставляя выражение (29) для $\bar{v}(r_s, \dot{r}_s, \dot{\varphi}_s)$ в формулы (30), (31) и полагая $\dot{r}_s = 0$, находим, что

$$r_{s\,min}^2 n_v(r_{s_{min}})\,\bar{\mathcal{P}}^2\left(\bar{\mathcal{E}}(r_{s_{min}})\right) = M^2, \tag{32}$$

$$\bar{\mathcal{E}}(r_{s_{min}}) = \frac{H r_{s_{min}}^2 - M}{r_{s_{min}}^2 n_v(r_{s_{min}})}. \tag{33}$$

Из данных соотношений с учетом (12), (13) несложно с помощью стандартных численных методов (например, метода Ньютона–Рафсона) [47] найти значение $r_{s_{min}}$.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ С ОДИНОЧНЫМ КВАНТОВЫМ ВИХРЕМ

3.1. Пролетный и обменный режимы рассеяния вихревой пары на одиночном квантовом вихре

Численное моделирование динамики вихревых пар, взаимодействующих с вихревым потоком, проводилось как в рамках развитой в разд. 2.2 асимптотической теории, так и непосредственно с помощью уравнения ГП (1) для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ БЭК. Во втором случае применялся созданный нами высокопроизводительный пакет программ численного решения уравнения ГП (1), в основе которых лежит схема расщепления с использованием быстрого преобразования Фурье, адаптированная под современные графические процессоры от компании NVIDIA [48].

Будем считать, что в исходно однородном конденсате возбужден одиночный квантовый вихрь с топологическим зарядом $\varkappa = +1$ и с центром в начале декартовой системы координат xy. Пусть в момент времени $t = 0$ из точки $x_0 < 0$, y_0 в положительном направлении оси x стартует вихревая пара, изначально ориентированная вдоль оси y и характеризующаяся нормированной скоростью $\bar{v}_0$, которой соответствуют нормированные энергии $\bar{\mathcal{E}}_0 = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{v}_0)$ и импульс $\bar{\mathcal{P}}_0 = \bar{\mathcal{P}}_0(\bar{v}_0)$. Далее по аналогии с классической задачей рассеяния [46] будем выбирать такие x_0, что при любых y_0 рассматриваемое солитоноподобное образование изначально сильно дистанцировано от квантового вихря. Это возможно, когда $|x_0|$ существенно превышает характерный размер Λ_s двумерного темного солитона, т.е. $|x_0| \gg \Lambda_s$, где для вихревой пары Λ_s определяется расстоянием между входящими в нее вихрем и антивихрем. Однако отметим, что из-за пространственной ограниченности любого реального облака вырожденного ультрахолодного бозе-газа не следует выбирать слишком большие по модулю x_0.

Для определенности ниже приводятся результаты численных расчетов, выполненных при фиксированных значениях абсциссы $x_0 = -20$ точки старта и начальной нормированной скорости $\bar{v}_0 = 0.54$ двумерного темного солитона, исходно заданного в виде пары вихрь–антивихрь. Рассмотренные в предлагаемой работе примеры отражают основные характерные особенности взаимодействия вихревых пар с изолированным топологическим дефектом.

Основываясь на используемом в разд. 2.2 факторизованном представлении (14), при прямом численном моделировании в рамках уравнения ГП (1) волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в начальный момент времени $t = 0$ задавалась в виде произведения

$$\Psi(x, y, t = 0) = \Psi_v(x, y)\, \bar{\Psi}_s(x - x_0, y - y_0, \bar{v}_0). \quad (34)$$

Здесь первый сомножитель $\Psi_v(x, y)$ — отвечающая одиночному квантовому вихрю стационарная волновая функция, амплитуда $\psi_v(x, y)$ которой (а значит, и неоднородное распределение концентрации $n_v(x, y)$ фонового БЭК) в каждом узле пространственной сетки вычислялась на основе решения уравнения (4) без использования каких-либо аппроксимаций. Второй множитель $\bar{\Psi}_s(x - x_0, y - y_0, \bar{v}_0)$ в (34) при выбранном значении $x_0 = -20$ корректно описывает форму вихревой пары, которая изначально ориентирована вдоль оси y, характеризуется нормированной скоростью $\bar{v}_0 = 0.54$ и стартует из точки $x_0 = -20$, y_0 в положительном направлении оси x. При фиксированных $\bar{v}_0$ и x_0 ордината y_0 точки старта играет роль параметра задачи.

Согласно развитому в разд. 2.2 вариационному подходу налетающему на исходно изолированную фазовую сингулярность двумерному темному солитону можно поставить в соответствие квазичастицу, движение которой подчиняется каноническим уравнениям (23), (24), имеющим два первых интеграла (30) и (31). В рассматриваемой ситуации при $t = 0$ обобщенный импульс $\mathbf{p}_s(t)$ квазичастицы направлен вдоль оси x и равен по модулю $\sqrt{n_{v0}}\,\bar{\mathcal{P}}_0$, т. е. $\mathbf{p}_s(t = 0) = \sqrt{n_{v0}}\,\bar{\mathcal{P}}_0\mathbf{x}_0$, а присутствующие в соотношениях (30) и (31) постоянные M и H определяются следующими выражениями:

$$M = -\sqrt{n_{v0}}\,\bar{\mathcal{P}}_0 y_0, \quad H = n_{v0}\bar{\mathcal{E}}_0 + \frac{M}{x_0^2 + y_0^2}, \quad (35)$$

где $n_{v0} = n_v\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)$ — концентрация фонового БЭК в точке с координатами x_0, y_0, для вычисления которой можно воспользоваться аппроксимацией Паде (7). Данная аппроксимация применялась нами при решении системы гамильтоновых уравнений (23), (24), а также при анализе и интерпретации полученных результатов.

На рис. 1 и 2 приведены результаты прямого численного моделирования в рамках уравнения ГП (1) динамики в плавно неоднородном вихревом потоке БЭК двумерного темного солитона, который характеризуется начальной нормированной скоростью $\bar{v}_0 = 0.54$, т. е. представляет собой пару, ориентированную вдоль оси y вихрь–антивихрь, и стартует из точки $x_0 = -20$, y_0, где координата y_0 принимает соответственно значения $y_0 = -10$ (рис. 1) и $y_0 = 15$ (рис. 2). Фрагменты *а*–*д* на данных рисунках представляют собой следующие друг за другом через равные промежутки времени Δt (для каждого примера временной интервал Δt свой) мгновенные снимки пространственного распределения концентрации вырожденного ультрахолодного бозе-газа. Здесь же для сравнения сплошными линиями показаны рассчитанные с помощью системы гамильтоновых уравнений (23), (24) траектории движения квазичастиц, отвечающих рассматриваемым солитоноподобным образованиям. Несложно заметить, что и в той, и в другой ситуации, вне зависимости от знака y_0, ядро одиночного квантового вихря практически не смещается относительно своего исходного положения и все время локализовано вблизи начала декартовой системы координат x, y, а вихревая пара в процессе рассеяния распространяется вдоль трассы, найденной с использованием развитой в разд. 2.2 асимптотической теории. Таким образом, при выбранных значениях $\bar{v}_0$, x_0 и y_0 предложенный нами вариационный подход адекватно описывает поведение двумерного темного солитона в плавно неоднородном вихревом потоке, созданном в БЭК изолированным топологическим дефектом. Однако заметим, что в этих двух случаях абсолютная величина ординаты y_0 точки старта была достаточно большой.

Численные расчеты, выполненные непосредственно в рамках уравнения ГП (1), показывают, что если уменьшать модуль параметра $|y_0|$ при фиксированных значениях x_0 и начальной нормированной скорости $\bar{v}_0$, то рано или поздно наступит ситуация, когда двумерный темный солитон (в частности, вихревая пара) двигается строго вдоль линии, полученной с помощью канонических уравнений (23), (24), лишь на начальном этапе (в течение конечного времени), а затем отклоняется от данной траектории. Данное обстоятельство демонстрируют рис. 3, 4, иллюстрирующие, как на одиночном квантовом вихре рассеивается налетающее из двух разных точек $x_0 = -20$, $y_0 = -2.5$ и $x_0 = -20$, $y_0 = 5$ солитоноподобное образование, исходно заданное в виде ориентированной вдоль

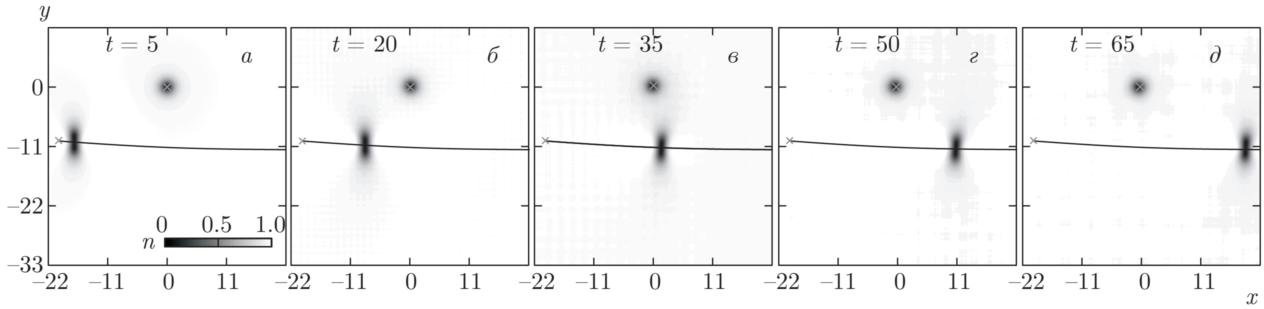


Рис. 1. Мгновенные снимки при $t = 5$ (*а*), $t = 20$ (*б*), $t = 35$ (*в*), $t = 50$ (*г*) и $t = 65$ (*д*) плотности БЭК, иллюстрирующие процесс рассеяния двумерного темного солитона на одиночном квантовом вихре (с топологическим зарядом $\varkappa = +1$), возбужденном в исходно однородном ультрахолодном бозе-газе и расположенном в центре декартовой системы координат xy (маркер в виде крестика). В момент времени $t = 0$ ориентированное вдоль оси y солитоноподобное образование стартует из точки $x_0 = -20$, $y_0 = -10$ (маркер в виде крестика) и имеет нормированную скорость $\bar{v}_0 = 0.54$, т. е. изначально представляет собой вихревую пару. Распределения концентрации конденсата получены путем прямого численного моделирования, выполненного непосредственно в рамках уравнения ГП (1). Сплошной кривой черного цвета изображена рассчитанная с помощью канонических уравнений (23), (24) траектория движения композитной квазичастицы

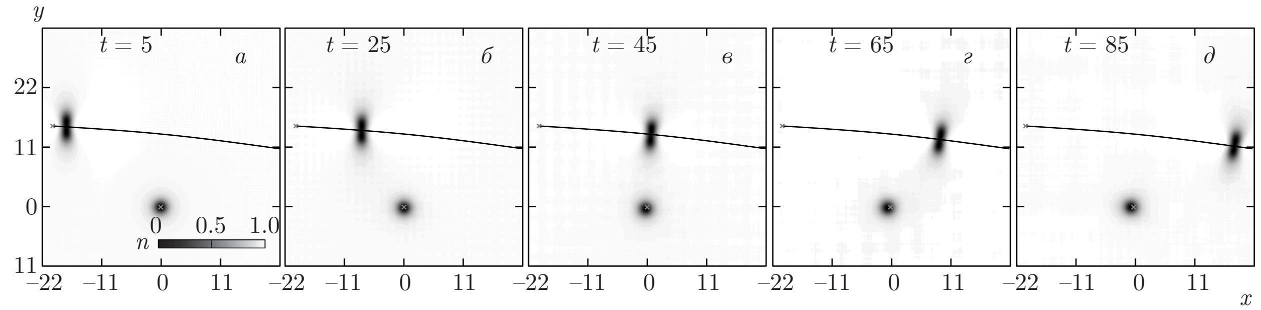


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но в моменты времени $t = 5$ (*а*), $t = 25$ (*б*), $t = 45$ (*в*), $t = 65$ (*г*) и $t = 85$ (*д*) для вихревой пары, налетающей на одиночный квантовый вихрь из точки $x_0 = -20$, $y_0 = 15$. Координата $y_0 = 15$ точки старта существенно больше бифуркационного значения $y_{0_b} \approx 9.8$, что соответствует режиму пролетного рассеяния солитоноподобного образования на одиночном квантовом вихре

оси y вихревой пары с $\bar{v}_0 = 0.54$. Такое поведение связано с тем, что пара вихрь–антивихрь подходит к точке $x = 0$, $y = 0$, где исходно располагался изолированный топологический дефект, на расстояние r_s, сравнимое со своим характерным размером Λ_s. В результате условия применимости развитой в разд. 2.2 асимптотической теории нарушаются, и на динамику двумерного темного солитона начинает оказывать влияние целый ряд эффектов, не учитываемых при выводе системы гамильтоновых уравнений (23), (24). В частности, нами не принимались во внимание ни движение центра одиночного квантового вихря, ни его итоговое смещение относительно начала декартовой системы координат xy, а также излучение звуковых волн. Однако даже в тех случаях, когда предложенный в разд. 2.2 вариационный подход формально перестает быть справедливым, канонические уравнения (23), (24) продолжают сохранять свою информативность. В первую очередь, это проявляется в том, что смена пролетного режима движения на режим захвата рассеивающим центром для квазичастиц, соответствующих солитоноподобному образованию, всегда свидетельствует о качественном изменении характера взаимодействия двумерных темных солитонов с одиночным квантовым вихрем. Поясним подробнее, о чем идет речь.

С учетом нелинейного дисперсионного соотношения (12), (13) и аппроксимации Паде (7) для концентрации фонового конденсата $n_v(r)$ выражения (32), (33) совместно с (35) представляют собой не что иное, как трансцендентное алгебраическое уравнение относительно $r_{s_{min}}$. Из него численно можно найти минимальное расстояние $r_{s_{min}}$, на которое рассматриваемая квазичастица приближается к началу декартовой системы координат x, y, как функ-

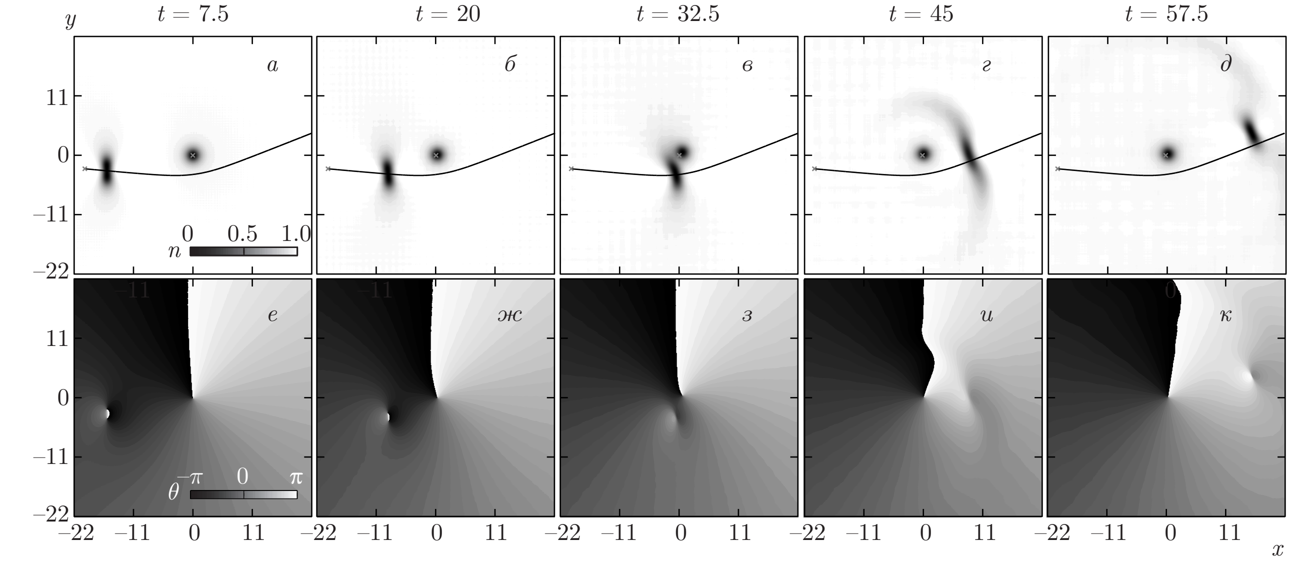


Рис. 3. Мгновенные снимки плотности БЭК (*а–д*) и фазы его волновой функции (*е–к*) при $t = 7.5$ (*а,е*), $t = 20$ (*б,ж*), $t = 32.5$ (*в,з*), $t = 45$ (*г,и*) и $t = 57.5$ (*д,к*) для случая, когда на изначально изолированный топологический дефект (с азимутальным индексом $\varkappa = +1$), расположенный в центре декартовой системы координат xy (маркер в виде крестика), налетает двумерный темный солитон, который стартует из точки $x_0 = -20$, $y_0 = -2.5$ (маркер в виде крестика) и в момент времени $t = 0$ имеет нормированную скорость $\bar{v}_0 = 0.54$, т. е. изначально представляет собой ориентированную вдоль оси y вихревую пару. Пространственные распределения концентрации и фазы получены путем прямого численного моделирования, выполненного непосредственно в рамках уравнения ГП (1). Сплошной кривой черного цвета изображена рассчитанная с помощью канонических уравнений (23), (24) траектория движения композитной квазичастицы, соответствующей солитоноподобному образованию. В области активного взаимодействия (фрагменты *в,з*) с одиночной фазовой сингулярностью пара вихрь–антивихрь трансформируется в безвихревой солитон. Помимо этого рассматриваемый процесс рассеяния сопровождается достаточно интенсивным излучением звуковых волн, что можно заметить на фрагментах *г,д*. Радиационные потери приводят к существенному уменьшению нормированной энергии двумерного темного солитона, в результате чего он остается безвихревым даже после того, как уйдет на большое расстояние от центра одиночного квантового вихря (см. фрагменты *и,к*, на которых, в отличие от фрагментов *е,ж*, отсутствуют скачки фазы на 2π в области локализации солитоноподобного образования)

цию параметра y_0 при фиксированных $\bar{v}_0$ и x_0. На фрагменте *а* рис. 5 приведен график зависимости $r_{s_{min}}(y_0)$ для значений $\bar{v}_0 = 0.54$ и $x_0 = -20$ соответственно начальной нормированной скорости вихревой пары и абсциссы ее точки старта. Здесь же на фрагменте *б* изображены рассчитанные с помощью канонических уравнений (23), (24) предполагаемые траектории движения данного двумерного темного солитона при $y_0 = -5.5$ (штриховая линия), $y_0 = 4.5$ (сплошная линия) и $y_0 = 14.5$ (пунктирная линия).

Трансцендентное алгебраическое уравнение, связывающее минимальное расстояние $r_{s_{min}}$ между квазичастицей и рассеивающим центром с параметром y_0, не имеет решений в некотором, вообще говоря, зависящем от $\bar{v}_0$ и x_0 интервале $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < < y_0 < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, причем при любых $\bar{v}_0$ и x_0 всегда выполняется неравенство $y_{0_b}(\bar{v}_0) > |y_{0_a}(\bar{v}_0)|$. Данный факт наглядно отражает фрагмент *а* рис. 5, на котором видно, как при $\bar{v}_0 = 0.54$ и $x_0 = -20$ график функции $r_{s_{min}}(y_0)$ области отрицательных y_0 монотонно убывает, обрывается в точке с $y_0 = y_{0_a} \approx \approx -0.34$, а затем вновь появляется при $y_0 = y_{0_b} \approx \approx 9.8$ и непрерывно нарастает с ростом y_0. Отсутствие решений у трансцендентного алгебраического уравнения для $r_{s_{min}}$, когда $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < y_0 < < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, свидетельствует о бифуркационном изменении в характере динамического поведения квазичастицы при $y_0 = y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 = y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$. Когда $y_0 \le y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 \ge y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, квазичастицы можно назвать пролетными, так как в конечном итоге они уходят на бесконечность. Если же ордината y_0 стартовой точки попадает в интервал от $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ до $y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, то квазичастица захватывается рассеивающим центром, расположенным в начале декартовой системы координат x, y, и падает на него, совершая вращательное движение по скру-

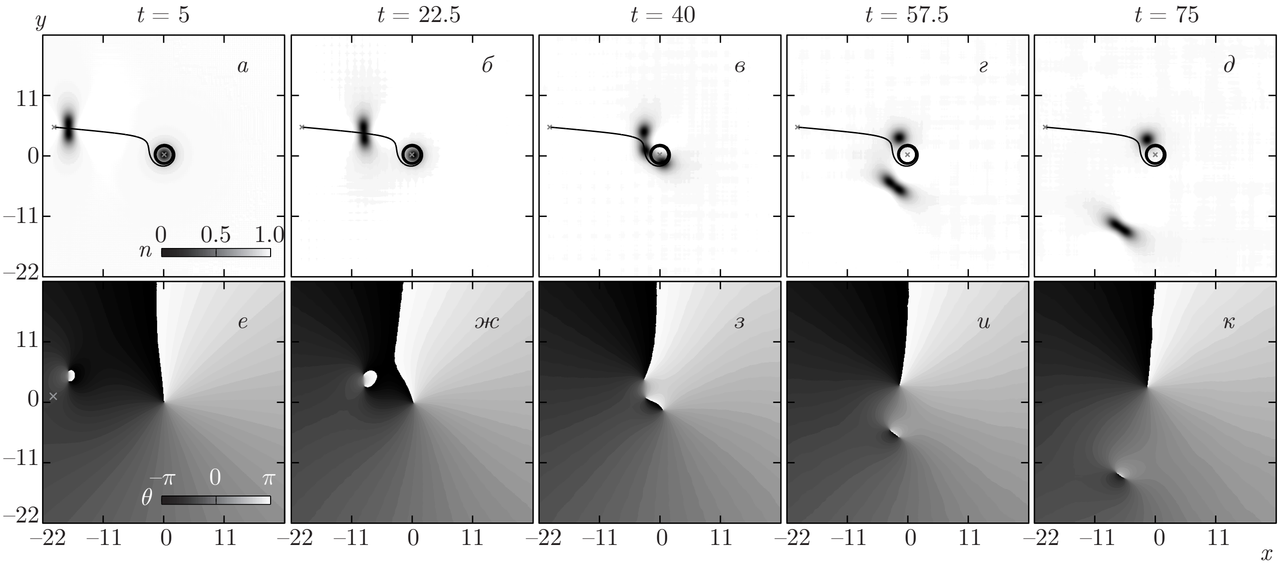


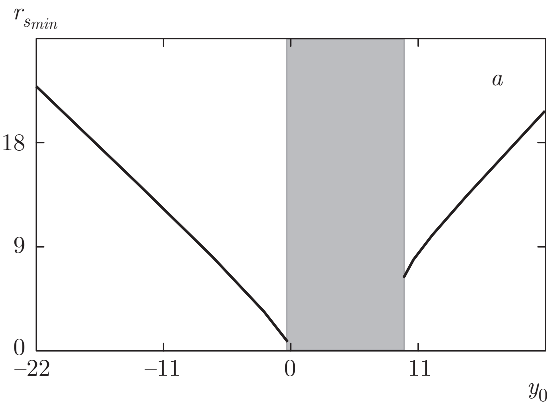
Рис. 4. Мгновенные снимки плотности БЭК (*а–д*) и фазы его волновой функции (*е–к*) в моменты времени $t = 5$ (*а,е*), $t = 22.5$ (*б,ж*), $t = 40$ (*в,з*), $t = 57.5$ (*г,и*) и $t = 75$ (*д,к*) для изначально вихревой пары, налетающей на исходно изолированный топологический дефект из точки $x_0 = -20$, $y_0 = 5$. Значение $y_0 = 5$ попадает в интервал от $y_{0a} \approx -0.34$ до $y_{0_b} \approx 9.8$, поэтому солитоноподобное образование обменным образом взаимодействует с одиночным квантовым вихрем, что демонстрируют фрагменты *б–г* и *ж–и*. В данном случае радиационные потери, обусловленные излучением звуковых волн, малы

чивающейся спирали. На фрагменте *б* рис. 5 первому случаю соответствуют трассы распространения, отмеченные штриховыми и пунктирными кривыми, а второму — траектория, изображенная линией и начинающаяся из точки, лежащей внутри области серого цвета.

Численные расчеты, выполненные непосредственно в рамках уравнения ГП (1), показывают, что при $y_0 \lesssim y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 \gtrsim y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$ двумерные темные солитоны (в частности, пары вихрь–антивихрь), по существу представляющие собой составные (композитные) квазичастицы, в результате рассеяния на одиночном квантовом вихре сохраняются как единое целое и действительно уходят на бесконечность, т. е. являются пролетными (например, см. рис. 1, 2 и 3). Когда же $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < y_0 < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, то из-за столкновения с сердцевиной фазовой сингулярности исходный (как вихревой, так и безвихревой) двумерный темный солитон разрушается. Одна его часть образует ядро нового одиночного квантового вихря, а другая часть объединяется с изначально изолированным топологическим дефектом и покидает область взаимодействия в виде вновь сформировавшегося солитоноподобного образования (например, см. рис. 4). Можно сказать, что рассеяние сопровождается своеобразным обменом, при котором происходит перезамыкание линий тока в БЭК [49, 50]. Похожие эффекты имеют место и в аналогичной задаче для трех точечных вихрей в гидродинамике несжимаемой жидкости [31–33]. Однако спецификой вырожденного ультрахолодного бозе-газа является его принципиальная сжимаемость, благодаря которой рассматриваемые процессы сопровождаются радиационными потерями, обусловленными излучением звуковых волн [49, 50].

Используя предложенную в работах [49, 50] терминологию, первый режим, при котором рассеяние не сопровождается разрушением (в указанном выше смысле) налетающего на фазовую сингулярность солитоноподобного образования, будем называть пролетным, а второй режим — обменным. Такая терминология отчасти перекликается с принятой в ядерной физике классификацией возможных вариантов взаимодействия сталкивающихся частиц [51].

Фактически, примеры пролетного рассеяния вихревой пары при относительно больших по модулю значениях параметра y_0 были приведены на рис. 1 и 2. При этом, как уже отмечалось, одиночный квантовый вихрь остается практически неподвижным, а поведение солитоноподобного обра-



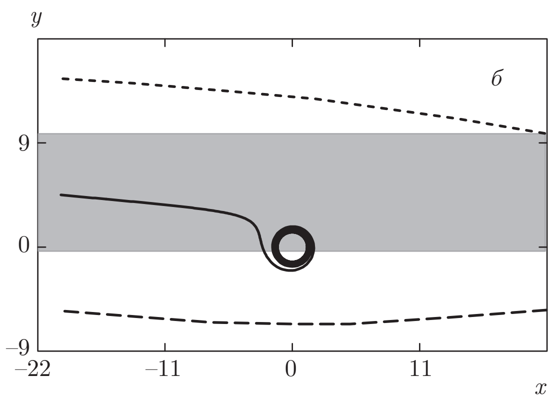


Рис. 5. *а*) Вычисленная с использованием развитой в разд. 2.2 асимптотической теории зависимость от y_0 минимально возможного расстояния $r_{s_{min}}(y_0)$ между рассеивающим центром и квазичастицей, соответствующей двумерному темному солитону, который стартует из точки $x_0 = -20$, y_0 и имеет начальную нормированную скорость $\bar{v}_0 = 0.54$, т. е. в момент времени $t = 0$ представляет собой ориентированную вдоль оси y вихревую пару. *б*) Рассчитанные с помощью канонических уравнений (23), (24) траектории движения рассматриваемой квазичастицы при трех различных значениях y_0: $y_0 = -5.5$ (длинные штрихи), $y_0 = 4.5$ (сплошная линия) и $y_0 = 14.5$ (короткие штрихи). Внутри интервала от $y_{0_a} \approx -0.34$ до $y_{0_b} \approx 9.8$ у трансцендентного алгебраического уравнения, связывающего между собой $r_{s_{min}}$ и y_0, нет действительных решений. Данному интервалу соответствуют заштрихованные области на фрагментах *а* и *б*. Если ордината y_0 точки старта попадает в интервал $y_{0_a} < y_0 < y_{0_b}$, то квазичастица захватывается расположенным в начале декартовой системы координат рассеивающим центром и приближается к нему по скручивающейся спирали

зования с хорошей степенью точности описывается в рамках предложенного в разд. 2.2 вариационного подхода.

Рисунок 3 демонстрирует процесс пролетного столкновения с исходно изолированным топологическим дефектом вихревой пары, которая, как и в предыдущих случаях, изначально ориентирована вдоль оси y и характеризует нормированную скорость $\bar{v}_0 = 0.54$, однако стартует из точки $x_0 = -20$, $y_0 = -2.5$, имеющей достаточно близкую к бифуркационному значению $y_{0_a} \approx -0.34$ ординату $y_0 = -2.5$. Сначала (см. фрагменты *а,б,в*) такая пара движется ускоренно вдоль траектории, рассчитанной с помощью канонических уравнений (23), (24). Согласно развитым теоретическим представлениям, при $y_0 < y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ скорость двумерного темного солитона тем больше, чем меньше расстояние между ним и центром фазовой сингулярности. Главным образом это обусловлено двумя факторами: во-первых, неоднородный вихревой поток ориентирован под острым углом к направлению движения солитоноподобного образования в каждой точке трассы его распространения, во-вторых, при сокращении дистанции между изолированным топологическим дефектом и налетающей на него композитной квазичастицей ее нормированная энергия $\bar{\mathcal{E}}$ уменьшается (см. соотношение (31), где $2M > H$, $H > 0$), что неизбежно влечет за собой рост нормированной скорости $\bar{v}$ и, как следствие, изменение характерных пространственных размеров двумерного темного солитона. В данном случае при подлете к началу декартовой системы координат x, y вихрь и антивихрь (нули концентрации конденсата) в паре сближаются друг с другом (см. фрагменты *а,е* и *б,ж* на рис. 3).

В рассматриваемом примере у налетающего на фазовую сингулярность солитоноподобного образования начальная нормированная скорость $\bar{v}_0 \approx 0.54$ близка к критическому значению $\bar{v}_* \approx 0.61$, при превышении которого вихревая пара сбрасывает циркуляцию и превращается в безвихревой двумерный темный солитон (см. разд. 2.1 и работы [20–22, 24]). На рис. 3 наряду с мгновенными снимками распределения концентрации БЭК (фрагменты (*а*–*д*) для наглядности приведена еще и соответствующая различным моментам времени фазовая структура волновой функции конденсата (фрагменты *е*–*к*). Это позволяет достоверно установить, что в области активного взаимодействия с исходно изолированным топологическим дефектом вихревая пара преобразуется в безвихревой двумерный темный солитон (см. фрагменты *б,з* на рис. 3). Об этом, в частности, свидетельствует исчезновение скачков фазы волновой функции конденсата на 2π в области локализации солитона на фрагменте *з*. Как уже отмечалось выше, такое поведение связано с уменьшением нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}$ квазичастицы при сближении с одиночным квантовым вихрем, когда $y_0 < y_{0_a} \approx -0.34$. На фрагментах *г* и *и* рис. 3 легко заметить, что рассеяние сопровождается излучением звуковой волны. Радиационные потери также приводят к уменьшению нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}$ у покидающего область активного взаимодействия двумерного темного солитона. Из-за них безвихревое солитоноподобное образование, в которое трансформировалась налетающая на исходно изолированный топологический дефект вихревая пара, не может вновь превратиться в пару вихрь–антивихрь, а так и остается безвихревым даже после того, как уйдет на большое расстояние от центра фазовой сингулярности (см. фрагменты *д,к* на рис. 3). Другими словами, в результате столкновения с одиночным квантовым вихрем происходит аннигиляция (коллапс) топологических дефектов, составляющих вихревую пару.

Отметим, что когда двумерный темный солитон подходит к ядру одиночного квантового вихря на расстояние, при котором создаваемые им потоки БЭК в области локализации сердцевины топологического дефекта становятся существенными, центр фазовой сингулярности приходит в движение и начинает смещаться из точки с координатами $x = 0$, $y = 0$ (см. фрагменты *в* и *г* на рис. 3). После окончания этапа активного взаимодействия одиночный квантовый вихрь чаще всего так и остается сдвинутым относительно своего первоначального положения. Из-за перечисленных выше эффектов двумерный темный солитон отклоняется от траектории движения, предсказанной каноническими уравнениями (23), (24), при выводе которых не учитывались динамика центра одиночного квантового вихря и излучение звуковых волн.

Характерные черты обменных столкновений вихревой пары с одиночным квантовым вихрем иллюстрирует рис. 4. На нем изображены соответствующие различным моментам времени мгновенные снимки концентрации (фрагменты *а*–*д*) и фазы (фрагменты *е*–*к*) волновой функции БЭК для случая рассеяния на исходно изолированном топологическом дефекте двумерного темного солитона, который изначально представляет собой ориентированную вдоль оси y пару вихрь–антивихрь с нормированной скоростью $\bar{v}_0 = 0.54$ и стартует из точки $x_0 = -20$, $y_0 = 5$. Значение параметра y_0 лежит внутри интервала от $y_{0_a} = -0.34$ до $y_{0_b} = 9.8$. Фрагменты *а* и *б* на рис. 4 наглядно демонстрируют, что на начальном этапе вихревая пара приближается к фазовой сингулярности, распространяясь вдоль трассы, рассчитанной с помощью системы гамильтоновых уравнений (23), (24). В процессе сближения с одиночным квантовым вихрем двумерный темный солитон в отличие от ситуации, когда $y_0 = -2.5$, не ускоряется, а замедляется. Из-за этого увеличивается расстояние между центрами вихря и антивихря, составляющих пару. Рассматриваемая композитная квазичастица тормозится, во-первых, за счет возрастания ее нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}$ при подлете к началу декартовой системы координат (см. соотношение (31), где $2M < H$, $H > 0$), а во-вторых, вихревым потоком, ориентированным под тупым углом к направлению движения солитона в каждой точке его траектории.

Когда характерный размер Λ_s двумерного темного солитона становится сравним с расстоянием r_s до начала декартовой системы координат x, y, наступает стадия активного взаимодействия солитоноподобного образования с одиночной фазовой сингулярностью. Вихревая пара перестает существовать как нечто целое и, объединяясь с исходно изолированным топологическим дефектом, образует систему из трех равноправных, контактирующих между собой объектов, а именно, двух вихрей и одного антивихря (см. фрагменты *в,з*) на рис. 4). В течение этого взаимодействия наблюдается достаточно сложное движение фазовых сингулярностей (трех нулей концентрации БЭК). В некоторый момент времени дистанция между центрами антивихря и исходно покоящегося вихря оказывается меньше, чем расстояние между топологическими дефектами, входящими в состав двумерного темного солитона при $t = 0$. Поскольку связь между двумя топологическими дефектами с противоположными по знаку азимутальными индексами определяется их взаимным расположением (чем ближе они расположены, тем сильнее связаны), ядро вихря, исходно принадлежавшего налетающей вихревой паре, постепенно останавливается и превращается в сердцевину стационарного изолированного топологического дефекта, сдвинутого относительно начала координат. При этом антивихрь и изначально одиночный квантовый вихрь формируют новый двумерный темный солитон, который с течением времени удаляется от точки $x = 0$, $y = 0$ (см. фрагменты *г,и* и *д,к* на рис. 4). Можно сказать, что возникает новая квазичастица, покидающая область активного взаимодействия под тупым углом к оси x, т. е. реализуется типичное для лобовых столкновений так называемое обратное рассеяние.

Мгновенные снимки распределения фазы волновой функции БЭК позволяют более подробно проследить и получить дополнительную информацию о том, как протекают разрушение и образование двумерных темных солитонов. В частности, из фрагментов *ж–и* на рис. 4 можно сделать вывод о том, что в момент образования новой вихревой пары происходит перезамыкание линий тока. Как и в случае пролетного рассеяния, когда $y_0 = -2.5$, описанные здесь обменные процессы сопровождаются излучением звуковых волн. Однако стоит отметить, что в данной ситуации уровень радиационных потерь сравнительно низкий.

3.2. Радиационные потери при рассеянии вихревой пары на одиночном квантовом вихре

Как уже отмечалось выше, при взаимодействии двумерного темного солитона с одиночным квантовым вихрем часть запасенной в солитоноподобном образовании энергии излучается в виде звуковых волн в окружающее пространство. Согласно развитым в разд. 2.2 теоретическим представлениям, величина нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{th}$ двумерного темного солитона при $r_s \to \infty$ совпадает с постоянной H (см. выражение (31)), которую, в свою очередь, можно определить из начальных условий в точке старта x_0, y_0 по формулам (35). Это утверждение справедливо не только для пролетного, но и для обменного режима рассеяния. Если пренебрегать излучением звуковых волн, то по аналогии с задачей о поведении трех точечных вихрей с зарядами $\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \varkappa_3 = +1$ в идеальной несжимаемой жидкости [31–33] новое солитоноподобное образование (в частности, вихревая пара) вне зависимости от динамики топологических дефектов в процессе обменного столкновения должно также иметь при $r_s \to \infty$ равную H нормированную энергию $\bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{th}$. Поэтому в качестве количественной характеристики радиационных потерь нами была выбрана разность между $\bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{th} = H$ и рассчитанной с помощью непосредственного численного моделирования уравнения ГП (1) нормированной энергией $\bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{num}$, которую имеет двумерный темный солитон на очень больших расстояниях $r_s \gg r_{s0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ от начала декартовой системы координат x, y после акта рассеяния на одиночном квантовом вихре. Величину $\bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{num}$ можно найти двумя способами: во-первых, определить установившуюся скорость $\bar{v}_{\infty}^{num}$ уединенного провала плотности конденсата, а затем, воспользовавшись аналитической аппроксимацией (12), (13) для $\bar{\mathcal{P}}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)$, решить трансцендентное алгебраическое уравнение, во-вторых, вычислить непосредственно по распределению концентрации $n\left(\mathbf{r}, t\right)$ БЭК в области локализации двумерного темного солитона (подробности см. в работе [24]).

Описанный выше способ расчета радиационных потерь, обусловленных излучением звуковых волн при рассеянии вихревой пары на одиночном квантовом вихре, является по существу дальнейшим развитием предложенной в работах [49, 50] оценки интенсивности этого излучения для случая пары вихрь–антивихрь с большим расстоянием ℓ между формирующими ее фазовыми сингулярностями, т. е. при $\ell \gg 1$. Такие вихревые пары обладают малыми нормированными скоростями движения $\bar{v}$ ($\bar{v} \ll 1$) и большими нормированными энергиями $\bar{\mathcal{E}}$ ($\bar{\mathcal{E}} \gg 1$), которые приближенно связаны с ℓ такими же соотношениями (см. работы [24, 49] и указанные в них ссылки):

$$\bar{v} = 1/\ell, \quad \bar{\mathcal{E}} = 2\pi \ln \ell, \tag{36}$$

как в случае вихревых диполей в идеальной несжимаемой жидкости. Отметим, что выражения (36) непосредственно вытекают из аппроксимации (12), (13) для зависимости нормированного импульса $\bar{\mathcal{P}}$ двумерного темного солитона от его нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}$. Авторы работ [49, 50] контролировали изменение расстояния ℓ в процессе рассеяния и использовали приближение (36) для вычисления изменения энергии вихревой пары, и, следовательно, потерь на излучение. Однако в случае, когда $\ell \sim 1$, данное приближение не работает. Используемый нами подход к расчету радиационных потерь является более общим и не требуется никаких ограничений на размер вихревой пары, т. е. справедлив для двумерных темных солитонов с произвольной запасенной энергией.

На рис. 6 приведены графики зависимости $\Delta\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{th} - \bar{\mathcal{E}}_{\infty}^{num}$ от параметра y_0 при фиксированных значениях начальной нормированной скорости $\bar{v}_0 = 0.54$ вихревой пары и абсциссы $x_0 = -20$ точки старта. Видно, что функция $\Delta\bar{\mathcal{E}}\left(y_0\right)$ имеет ярко выраженные максимумы вблизи границ $y_0 = y_{0a} \approx -0.34$ и $y_0 = y_{0b} \approx 9.8$, разделяющих между собой области пролетного и обменного взаимодействия. Другими словами, наиболее интенсивным излучением звуковых волн сопровождается рассеяние двумерных темных солитонов, налетающих на одиночный квантовый вихрь под близкими к критическим значениям y_{0a} и y_{0b} параметрами y_0, причем это из-

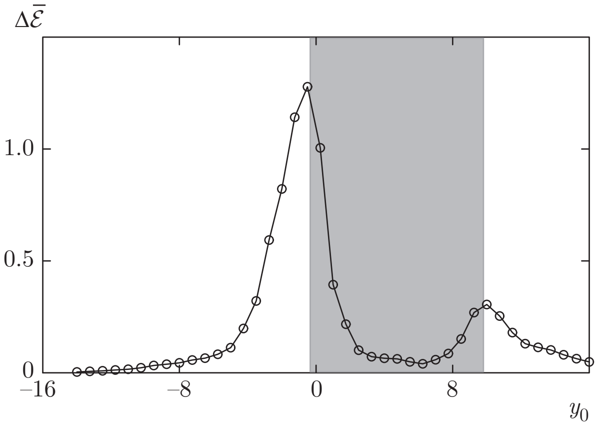


Рис. 6. График зависимости от y_0 радиационных потерь $\Delta\bar{\mathcal{E}}\,(y_0)$, которые сопровождают рассеяние на исходно одиночном квантовом вихре двумерного темного солитона, стартующего из точек с координатами $x_0 = -20$, y_0 и изначально представляющего собой ориентированную вдоль оси y вихревую пару, обладающую при $t = 0$ нормированной скоростью $\bar{v}_0 = 0.54$. Функция $\Delta\bar{\mathcal{E}}\,(y_0)$ имеет локальные максимумы вблизи границ $y_{0_a} \approx -0.34$ и $y_{0_b} \approx 9.8$ интервала параметров y_0, внутри которого солитоноподобное образование обменным образом взаимодействует с изолированным топологическим дефектом. Этому интервалу соответствует заштрихованная область

лучение при $y_0 \approx y_{0_b}$ меньше, чем при $y_0 \approx y_{0_a}$. Вместе с тем, внутри интервала $y_{0_a} < y_0 < y_{0_b}$ радиационные потери заметно ослабевают, а при больших по модулю y_0, когда $|y_0| > y_b$, они становятся настолько малыми, что ими можно пренебречь.

Описанные выше особенности представленной на рис. 6 зависимости $\Delta\bar{\mathcal{E}}\,(y_0)$ можно объяснить, анализируя ускоренное движение солитоноподобного образования вдоль искривленной траектории при столкновении с топологическим дефектом. Действительно, именно с ускоренным движением локализованных провалов концентрации ультрахолодного бозе-газа напрямую связано излучение звуковых волн: чем больше ускорение ямок плотности БЭК, тем выше интенсивность излучаемого ими звука [49, 50]. Значительное увеличение радиационных потерь в окрестности отрицательного бифуркационного параметра y_{0_a} обусловлено тем, что при таких y_0 основные изменения скорости двумерного темного солитона происходят достаточно быстро в течение небольшого промежутка времени, пока солитон находится на сравнимых с его собственным характерным размером Λ_s расстояниях от исходно изолированной фазовой сингулярности, т. е. в непосредственной близости от ядра одиночного квантового вихря. Чем дальше мы уходим от левой границы y_{0_a} в глубь интервала $y_{0_a} < y_0 < y_{0_b}$, тем существеннее становится влияние обменных процессов на динамику вихревой пары. Эти процессы, по-существу, обрывают трассу распространения двумерного темного солитона, и он не успевает достигнуть тех ее участков, где должен согласно уравнениям (23), (24) испытывать максимальные ускорения. В результате интенсивность излучаемых звуковых волн уменьшается. Однако, когда прицельное расстояние y_0 приближается к своему положительному критическому значению y_{0_b}, вновь наблюдается рост радиационных потерь. В окрестности точки $y_0 = y_{0_b}$ функция $\Delta\bar{\mathcal{E}}\,(y_0)$ достигает еще одного локального максимума, появление которого напрямую коррелирует с тем, что при сближении с топологическим дефектом солитон тормозится, его пространственные размеры увеличиваются, и, как следствие, возрастают масштабы области обменного взаимодействия, из которой излучаются звуковые волны. Вдали от границ интервала $y_{0_a} < y_0 < y_{0_b}$, в областях больших по модулю параметров y_0, излучение звуковых волн становится очень слабым, так как трассы распространения плавные и испытываемые вихревыми парами ускорения малы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках приближения среднего поля для БЭК с отталкивающим взаимодействием между атомами мы провели подробное исследование процесса рассеяния на одиночном квантовом вихре вихревых пар, являющихся частным случаем двумерных темных солитонов в исходно однородном конденсате. При анализе данной проблемы использовались как аналитические методы, так и непосредственное численное моделирование с помощью уравнения ГП (1) для волновой функции БЭК. Рассмотренная задача является важной и весьма актуальной для теории когерентных волн материи и нелинейных волновых процессов в вырожденных ультрахолодных квантовых газах. Подводя итоги, перечислим основные полученные результаты.

Во-первых, развит вариационный подход для описания динамики двумерных темных солитонов в плавно неоднородном БЭК при наличии в нем стационарных потоков. Показано, что солитоноподобным образованиям в таком конденсате можно поставить в соответствие композитные квазичастицы, поведение которых подчиняется каноническим уравнениям (23), (24) гамильтоновой механики.

Во-вторых, применительно к рассеянию двумерного темного солитона на одиночном квантовом вихре при наличии аксиальной симметрии у распределения плотности фонового конденсата найдены два первых интеграла движения (30), (31) системы уравнений (23), (24). Это позволило предложить метод поиска минимального расстояния $r_{s_{min}}$, на которое квазичастица приближается к стационарному рассеивающему центру, и получить для $r_{s_{min}}$ трансцендентное алгебраическое уравнение. Данное уравнение не имеет действительных решений в зависящем от начальной нормированной скорости $\bar{v}_0$ двумерного темного солитона и абсциссы x_0 его точки старта интервале $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < y_0 < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$ значений ординаты y_0. Границы этого интервала разделяют между собой два возможных режима движения квазичастиц: пролетный (когда $y_0 \le y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 \ge y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$) и захваченный (когда $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < y_0 < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$).

В-третьих, непосредственно в рамках уравнения ГП (1) проведено детальное численное моделирование динамики волновой функции БЭК, позволившее подробно проанализировать рассеяние вихревой пары на одиночном квантовом вихре и объяснить, используя развитые теоретические представления, все ключевые особенности и тонкости данного процесса. В частности, наглядно продемонстрировано, что траектории движения и структурные изменения пары вихрь–антивихрь с хорошей степенью точности описываются с помощью предложенного вариационного подхода при параметрах y_0, значительно превышающих по модулю характерные пространственные размеры солитоноподобного образования. Однако даже в тех случаях, когда нарушаются условия применимости используемых аналитических методов и асимптотическая теория формально перестает быть справедливой, ее результаты продолжают сохранять свою информативность. Как показывают прямые численные расчеты, выполненные с использованием уравнения ГП (1), при фиксированных значениях начальной нормированной скорости $\bar{v}_0$ двумерного темного солитона и абсциссы x_0 его точки старта смена пролетного режима движения на режим захвата рассеивающим центром для квазичастицы, ассоциируемой с рассматриваемым уединенным провалом концентрации конденсата, всегда свидетельствует о качественном изменении характера взаимодействия солитона с исходно изолированным топологическим дефектом. Бифуркационные значения $y_0 = y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 = y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$ фактически разделяют области принципиально отличающихся друг от друга пролетных и обменных столкновений вихревой пары с фазовой сингулярностью. При пролетном рассеянии (когда $y_0 \lesssim y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 \gtrsim y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$) пара вихрь–антивихрь на протяжении всей трассы своего распространения сохраняется как единое целое, претерпевая вдоль нее лишь внутренние структурные трансформации. В случае же обменного взаимодействия, когда $y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0) < y_0 < y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, исходно вихревой пары ($\bar{v}_0 < \bar{v}_* \approx 0.61$) с одиночным квантовым вихрем все три топологических дефекта достаточно близко подходят друг к другу и образуют систему из трех равноправных активно контактирующих объектов. При этом наблюдается сложное движение фазовых сингулярностей (нулей концентрации БЭК), в результате которого топологические дефекты с одинаковыми по знаку азимутальными индексами меняются между собой ролями: ядро изначально движущегося вихря постепенно останавливается и превращается в сердцевину стационарной фазовой сингулярности, а антивихрь и исходно покоящийся вихрь формируют новую пару, улетающую из области сильного взаимодействия на бесконечность.

В-четвертых, проанализировано излучение звуковых волн в процессе рассеяния вихревой пары на одиночном квантовом вихре. Для этого в ходе прямого численного моделирования, выполненного непосредственно в рамках уравнения ГП, определялась нормированная энергия солитоноподобного образования после того, как оно уйдет на значительное расстояние от центра изолированного вихря. Затем вычислялось отличие этой энергии от значения, рассчитанного с помощью развитой асимптотической теории. В результате было показано, что радиационные потери зависят немонотонным образом от ординаты y_0 точки, из которой пара вихрь–антивихрь налетает на топологический дефект. Интенсивность излучения достигает своих максимальных значений вблизи границ $y_0 = y_{0_a}(\bar{v}_0, x_0)$ и $y_0 = y_{0_b}(\bar{v}_0, x_0)$, где происходит смена режимов пролетных и обменных соударений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-12-00811).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009); A. L. Fetter, J. Low Temp. Phys. **161**, 445 (2010).
2. R. Numasato, M. Tsubota, and V. S. L'vov, Phys. Rev. A **81**, 063630 (12) (2010).

3. B. Nowak, D. Sexty, and T. Gasenzer, Phys. Rev. B **84**, 020506 (2011); J. Schole, B. Nowak, and T. Gasenzer, Phys. Rev. A **86**, 013624 (2012); B. Nowak, J. Schole, D. Sexty, and T. Gasenzer, Phys. Rev. A **85**, 043627 (2012).

4. T. Simula, M. J. Davis, and K. Helmerson, Phys. Rev. Lett. **113**, 165302 (2014).

5. M. T. Reeves, B. P. Anderson, and A. S. Bradley, Phys. Rev. A **86**, 053621 (2012); A. S. Bradley and B. P. Anderson, Phys. Rev. X **2**, 041001 (2012); M. T. Reeves, T. P. Billam, B. P. Anderson, and A. S. Bradley, Phys. Rev. Lett. **110**, 104501 (2013).

6. G. W. Stagg, A. J. Allen, N. G. Parker, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. A **91**, 013612 (2015).

7. B. P. Anderson, J. Low Temp. Phys. **161**, 574 (2010).

8. K. E. Wilson, E. C. Samson, Z. L. Newman, T. W. Neely, and B. P. Anderson, Annu. Rev. Cold Atoms Molec. **1**, 261 (2013).

9. W. J. Kwon, G. Moon, J.-Y. Choi, S. W. Seo, and Y.-I. Shin, Phys. Rev. A **90**, 063627 (2014).

10. T. W. Neely, A. S. Bradley, E. C. Samson, S. J. Rooney, E. M. Wright, K. J. H. Law, R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, M. J. Davis, and B. P. Anderson, Phys. Rev. Lett. **111**, 235301 (2013).

11. P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González, P. Schmelcher, and D. S. Hall, Phys. Lett. A **375**, 3044 (2011); S. Middelkamp, P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González, P. Schmelcher, D. V. Freilich, and D. S. Hall, Phys. Rev. A **84**, 011605 (2011); R. Navarro, R. Carretero-González, P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, M. W. Ray, E. Altuntaş, and D. S. Hall, Phys. Rev. Lett. **110**, 225301 (2013); V. Koukouloyannis, G. Voyatzis, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. E **89**, 042905 (2014); D. Yan, R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, N. P. Proukakis, and D. Spirn, Phys. Rev. A **89**, 043613 (2014).

12. T. P. Billam, M. T. Reeves, B. P. Anderson, and A. S. Bradley, Phys. Rev. Lett. **112**, 145301 (2014); T. P. Billam, M. T. Reeves, and A. S. Bradley, Phys. Rev. A **91**, 023615 (2015).

13. A. Lucas and P. Surówka, Phys. Rev. A **90**, 053617 (2014).

14. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **137**, 1004 (2010).

15. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **139**, 55 (2011); L. A. Smirnov, D. A. Smirnova, E. A. Ostrovskaya, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. B **89**, 235310 (2014).

16. Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, and L. V. Hau, Science **293**, 663 (2001).

17. J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, Phys. Rev. Lett. **101**, 170404 (2008).

18. M. A. Hoefer and B. Ilan, Phys. Rev. A **80**, 061601 (2009).

19. F. Pinsker, N. G. Berloff, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. A **87**, 053624 (2013).

20. C. A. Jones and P. H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2599 (1982); C. A. Jones, S. J. Putterman, and P. H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 2991 (1986).

21. E. A. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E **51**, 4479 (1995).

22. N. G. Berloff, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 1617 (2004).

23. S. Tsuchiya, F. Dalfovo, C. Tozzo, and L. P. Pitaevskii, J. Low. Temp. Phys. **148**, 393 (2007); S. Tsuchiya, F. Dalfovo, and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **77**, 045601 (2008).

24. L. A. Smirnov and V. A. Mironov, Phys. Rev. A **85**, 053620 (2012); В. А. Миронов, Л. А. Смирнов, Письма в ЖЭТФ **95**, 627 (2012).

25. A. Paredes, D. Feijoo, and H. Michinel, Phys. Rev. Lett. **112**, 173901 (2014).

26. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, 2nd ed., Clarendon, Oxford, UK (2003).

27. C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK (2008).

28. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates*: *Theory and Experiment*, Springer, Berlin, Heidelberg (2008).

29. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).

30. H. Poincaré, *Theorié des Tourbillons*, Cours de la Facultédes Sciences de Paris, Paris (1893).

31. H. Aref, Phys. Fluids **22**, 393 (1979).

32. W. Gröbli, *Specielle Probleme über die Bewegung Geradliniger Paralleler Wirfbelfäden*, Ph. D. thesis, Zürich: Zürcher und Furrer (1877).

33. H. Aref, N. Rott, and H. Thomann, Annu. Rev. Fluid Mech. **24**, 1 (1992).

34. C. Nore, M. E. Brachet, E. Cerda, and E. Tirapegui, Phys. Rev. Lett. **72**, 2593 (1994); C. Wexler and D. J. Thouless, Phys. Rev. B **58**, R8897 (1998); S. G. Llewellyn Smith, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3597 (2002); P. Capuzzi, F. Federici, and M. P. Tosi, Phys. Rev. A **78**, 023604 (2008); Y. Guo and O. Bühler, Phys. Fluids **26**, 027105 (2014).

35. Y. S. Kivshar, A. Nepomnyashchy, V. Tikhonenko, J. Christou, and B. Luther-Davies, Opt. Lett. **25**, 123 (2000); D. Neshev, A. Nepomnyashchy, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **87**, 043901 (2001).

36. Y. V. Kartashov and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **89**, 055804 (2014).

37. A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013); T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, A. L. Gaunt, R. P. Smith, N. Navon, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. Lett. **112**, 040403 (2014); I. Gotlibovych, T. F. Schmidutz, A. L. Gaunt, N. Navon, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. A **89**, 061604 (2014).

38. I. Aranson and V. Steinberg, Phys. Rev. B **53**, 75 (1996).

39. P. Kuopanportti, E. Lundh, J. A. M. Huhtamäki, V. Pietilä, and M. Möttönen, Phys. Rev. A **81**, 023603 (2010); P. Kuopanportti and M. Möttönen, Phys. Rev. A **81**, 033627 (2010).

40. C. Rorai, K. R. Sreenivasan, and M. E. Fisher, Phys. Rev. B **88**, 134522 (2013).

41. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Physica D **18**, 455 (1986).

42. M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1991).

43. Э. Инфельд, Дж. Роуландс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, 2-е изд., Физматлит, Москва (2006).

44. Э. Скотт, *Нелинейная наука*: *рождение и развитие когерентных структур*, Физматлит, Москва (2007).

45. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).

46. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, 5-е изд., Физматлит, Москва (2012).

47. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition*: *The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge University Press, New York, USA (2007).

48. V. Surkov, Parallel Computing **36**, 372 (2010); H. Bauke and C. H. Keitel, Comp. Phys. Comm. **182**, 2454 (2011); T. Dziubak and J. Matulewski, Comp. Phys. Comm. **183**, 800 (2012); X. Antoine, W. Bao, and C. Besse, Comp. Phys. Comm. **184**, 2621 (2013).

49. N. G. Parker, *Numerical Studies of Vortices and Dark Solitons in Atomic Bose-Einstein Condensates*, Ph. D. thesis, Department of Physics, University of Durham, UK (2004).

50. C. F. Barenghi, N. G. Parker, N. P. Proukakis, and C. S. Adams, J. Low. Temp. Phys. **138**, 629 (2005).

51. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, т. 1, Мир, Москва (1979).