

# ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ СПЕКТРА ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ФОРМУ ЛИНИИ РЕЗОНАНСА КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ В ОПТИЧЕСКИ ПЛОТНОЙ СРЕДЕ С БУФЕРНЫМ ГАЗОМ

*К. А. Баранцев\**, *Е. Н. Попов*, *А. Н. Литвинов\*\**

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 7 апреля 2015 г.

Построена теория формирования резонанса когерентного пленения населенностей для конечной ширины спектра лазерного излучения в оптически плотной среде  $\Lambda$ -атомов в ячейке с буферным газом. Выведены уравнения атомной матрицы плотности и уравнения переноса спектра лазерного излучения в ячейке с рабочим и буферным газами при конечной температуре. Исследована зависимость параметра качества резонанса когерентного пленения населенностей от ширины спектра излучения в случае детектирования сигнала прошедшего излучения и сигнала флуоресценции.

DOI: 10.7868/S0044451015110048

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие многочастотного лазерного излучения с квантовыми системами может приводить к появлению новых нелинейных оптических эффектов. Одним из таких эффектов является эффект когерентного пленения населенностей (КПН) [1–4] и родственный ему эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП) [5, 6]. Суть эффекта КПН (ЭИП) в простой невырожденной  $\Lambda$ -схеме состоит в появлении квантовой интерференции между каналами возбуждения двухчастотного лазерного излучения. Это приводит к отсутствию поглощения в данной среде в определенной частотной области, и таким образом в среде появляется окно прозрачности. Ширина этого окна прозрачности при достаточно небольших интенсивностях лазерного излучения определяется скоростью распада радиочастотной когерентности, которая в щелочных атомах на пять порядков меньше скорости распада оптических когерентностей. Такая особенность позволяет использовать это окно прозрачности как основу для разработки квантовых стандартов частоты нового поколения [7, 8], оптических магнитомет-

ров [9, 10], спектроскопических устройств высокого разрешения [11, 12], устройств для записи и хранения квантовой информации [13, 14] и др.

Как было уже сказано выше, одним из важных приложений эффекта КПН является область квантовых стандартов частоты (КСЧ) нового поколения. Отличительной особенностью и преимуществом эффекта КПН по сравнению с традиционными КСЧ, работающими на основе двойного радиооптического резонанса [15–17], является отсутствие использования микроволнового резонатора, что позволяет снизить как габаритные размеры, так и энергопотребление.

Исследованию явления КПН в ячейках посвящено достаточно много работ. Одним из направлений исследований является изучение формы резонанса КПН на атомах рубидия в ячейке с буферным газом для непрерывного излучения. Так, в работе [18] впервые теоретически рассмотрена возможность появления псевдорезонанса в поле сонаправленных волн. Экспериментальные исследования этого эффекта описаны в работах [19, 20]. Развитие данных работ с акцентом на использование псевдорезонанса в качестве репера для малогабаритных квантовых стандартов частоты нашло отражение в работах [21, 22]. Оптическая накачка атомов цезия в перпендикулярно направленных лазерных полях и

\*E-mail: kostmann@yandex.ru

\*\*E-mail: andrey.litvinov@mail.ru

эффект КПН в этих атомах рассмотрены теоретически и экспериментально в работе [23]. Теория эффекта сужения Дике для резонанса КПН в ячейке с буферным газом построена в работе [24].

Другой цикл работ по исследованию эффекта КПН в газовой ячейке посвящен импульсной накачке. Среди большого объема работ можно выделить исследования эффекта Дике резонанса КПН в атомах цезия при импульсной лазерной накачке [25]. Световые сдвиги эффекта КПН при импульсной накачке исследовались теоретически и экспериментально в работе [26]. Рамановская схема опроса при исследовании эффекта КПН была рассмотрена в работе [27]. Двухступенчатая импульсная схема опроса атомных часов (Рамана–Рамзея) на основе эффекта когерентного пленения населенностей предложена и исследована в работе [28]. Возникновение дублета резонанса КПН теоретически предсказано при использовании в качестве накачки лазерного излучения, поляризация которого имеет периодическую модуляцию [29]. Эффективное управление степенью когерентности между основными состояниями атома рубидия при накачке ультракороткими импульсами в условиях резонанса когерентного пленения населенностей продемонстрировано в работе [30]. Теоретические исследования формы линии резонанса КПН в полихроматическом лазерном излучении были рассмотрены в [31].

Одной из интересных особенностей накачки, вызывающей модификацию формы линии резонанса КПН, является так называемая зонная накачка. Суть такой накачки состоит в том, что в формировании резонанса КПН участвует только часть активных атомов, которая попадает непосредственно в область действия лазерного излучения. Так, в работе [32] показано, что зонная накачка атомов рубидия в газовой ячейке может приводить к существенному сужению резонанса КПН, так называемому диффузионно-индуцированному рамзеевскому сужению. Спустя некоторое время подобный эффект был обнаружен в ячейках с антирелаксационным стеночным покрытием и изучен экспериментально [33] и теоретически [34, 35].

Описанные выше работы за исключением [34, 35] были посвящены исследованию эффекта КПН в ячейке с буферным газом. Отметим, что введение буферного газа является не единственным способом увеличения времени когерентного взаимодействия активных атомов с лазерным излучением. Другой способ увеличения времени когерентного взаимодействия атомов с лазерным излучением, предложенный Робинсоном и др. в 50-х годах прошлого ве-

ка [36], заключается в использовании ячеек с антирелаксационным стеночным покрытием. Исследованию эффекта КПН в ячейке с антирелаксационным стеночным покрытием при лазерной накачке посвящены работы [37–42].

Подводя итог обзору проделанных работ, можно отметить, что исследования эффекта КПН — разно-сторонние и охватывают очень широкий круг вопросов. Однако стоит отметить, что проводимые исследования, главным образом теоретические, ставили своей целью выявление влияния отдельных факторов на форму линии резонанса КПН. В то же время стоит отметить, что при определенной температуре, необходимой для достижения требуемой концентрации активных атомов, среда, состоящая из этих атомов, становится оптически плотной, что ведет к поглощению излучения в ячейке. В условиях эффекта КПН поглощение излучения определяется не экспоненциальным законом Бугера–Ламберта, а подчиняется линейной зависимости [5]. Одновременно с этим важным остается тот факт, что лазерное излучение является некогерентным, а имеет конечную ширину спектра. При этом наличие буферного газа в ячейке с активными атомами является необходимым для того, чтобы имел место эффект Дике [43] и наблюдался достаточно узкий резонанс КПН. Построение последовательной теории, описывающей все эти факторы, в настоящее время не было реализовано, а были лишь попытки построить теорию эффекта КПН при использовании некогерентной ламповой накачки в оптически плотной среде [44]. Таким образом, настоящая работа ставит своей целью построение теоретической модели взаимодействия горячих щелочных атомов с лазерным излучением с конечной шириной спектра в ячейке с буферным газом. При этом среда считается оптически плотной, т. е. имеет место поглощение лазерного излучения в ячейке.

## 2. ТЕОРИЯ

### 2.1. Постановка задачи. Общий вид уравнения для атомной матрицы плотности

Рассмотрим взаимодействие двухчастотного лазерного излучения с насыщенным паром атомов  $^{87}\text{Rb}$  (активные атомы) в газовой ячейке при температурах примерно  $50^\circ\text{C}$  (рис. 1а). В ячейку помимо атомов  $^{87}\text{Rb}$  введен буферный газ  $\text{N}_2$ , концентрация которого на шесть порядков превышает концентрацию паров щелочного металла. При этом атомы буферного газа не взаимодействуют с лазерным излу-

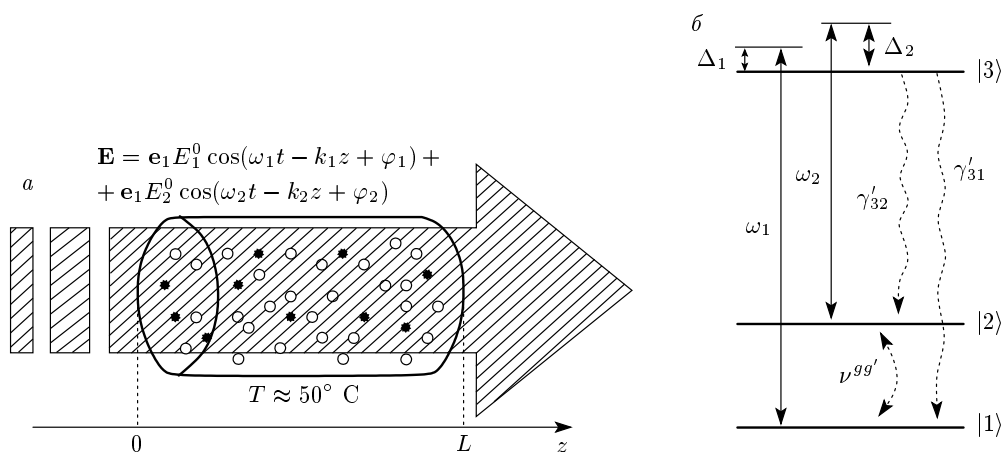


Рис. 1. а) Газовая ячейка, содержащая щелочные атомы и буферный газ, на которую падает двухчастотное лазерное излучение; б) схема квантовых уровней  $D_1$ -линии атома  $^{87}\text{Rb}$  и действующие на него лазерные поля с частотами  $\omega_{1,2}$ ;  $\Delta_{1,2}$  — однофотонные отстройки полей от атомных переходов,  $\gamma'_{mn}$  — скорости распада населенности уровня  $|3\rangle$  по соответствующим каналам,  $\nu^{gg'}$  — скорость перемешивания населенностей между нижними уровнями из-за столкновений

чением, которое действует на атомы  $^{87}\text{Rb}$ . Цель введения буферного газа заключается в том, что характер движения рабочих атомов в таком окружении становится диффузионным и длина свободного пробега резко сокращается. Это значительно уменьшает частоту столкновений активных атомов со стенками ячейки, что ведет к увеличению времени когерентного взаимодействия с лазерным полем (к эффекту Дике [43]) и сужению резонанса когерентного пленения населенностей [45, 46].

Рассмотрим лазерное поле в виде классической двухчастотной плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . Вектор напряженности электрического поля волны имеет вид

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_1 E_1^0(z, t) \exp\{-i[\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1(t)]\} + \mathbf{e}_2 E_2^0(z, t) \exp\{-i[\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2(t)]\} + \text{c.c.}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_j$  — единичные векторы поляризации,  $k_j$  — волновые числа,  $j = 1, 2$ . Амплитуды, частоты и фазы полей могут быть записаны как

$$E_j^0(z, t) = E_j^0(z) + \xi_j(t), \quad (2)$$

$$\omega_j(t) = \omega_j + \xi_{\omega_j}(t), \quad (3)$$

$$\varphi_j(t) = \varphi_j + \int \xi_{\varphi_j}(t) dt, \quad (4)$$

где  $\xi_j(t)$ ,  $\xi_{\omega_j}(t)$  — случайные функции с нулевым средним значением, отражающие амплитудные и частотные флуктуации полей,  $E_j^0(z)$ ,  $\omega_j$  — средние

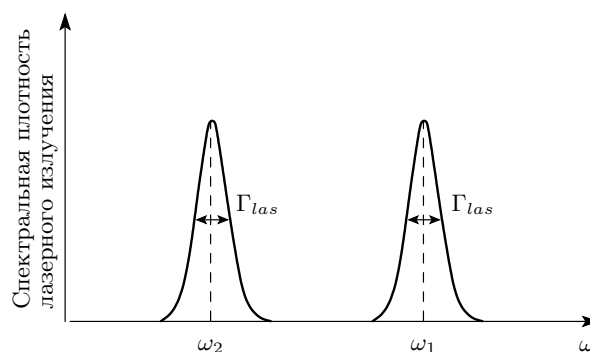


Рис. 2. Качественный вид спектральной плотности двухчастотного лазерного излучения

амплитуды и частоты,  $\varphi_j$  — начальные фазы лазерных полей. Усреднение проводится по достаточно большому промежутку времени  $\Delta t$  по сравнению с характерным временем флуктуации поля  $1/\Gamma_{las}$ , где  $\Gamma_{las}$  — ширина спектра каждой из двух частотных компонент излучения. Лазерные поля считаются стационарными в широком смысле, т. е. величины  $E_j^0(z)$ ,  $\omega_j$  не изменяются при сдвиге промежутка усреднения  $\Delta t$  по шкале времени.

Немонохроматичность лазерного излучения, связанная с шумом лазера, приводит к уширению спектральных линий (рис. 2). Ширина и форма линий определяются характером шума.

Энергетическая структура  $D_1$ -линии атома  $^{87}\text{Rb}$  может быть описана трехуровневой моделью, в которой два нижних уровня  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  соответствую-

ют сверхтонкому расщеплению состояния  $^2S_{1/2}$ , а верхний уровень  $|3\rangle$  соответствует состоянию  $^2P_{1/2}$  (рис. 1б). Частотная компонента лазерного поля  $\omega_1$  квазирезонансна переходу  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , а  $\omega_2$  — переходу  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  (длина волны 795 нм). Мы предполагаем, что ширина линий лазера  $\Gamma_{las}$  значительно меньше величины сверхтонкого расщепления  $\omega_{hfs}$  между уровнями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , которое в атоме  $^{87}\text{Rb}$  составляет 6.8 ГГц. Это позволяет избежать перекрестного действия частотной компоненты  $\omega_1$  на переход  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , а частотной компоненты  $\omega_2$  — на переход  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ .

Будем описывать состояние атома матрицей плотности  $\tilde{f}_{mn}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  — скорость и координата атома в лабораторной системе отсчета. Квантовые кинетические уравнения для матрицы плотности имеют вид [44]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right) \tilde{f}_{mn}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \times \\ \times \sum_j^3 \left[ H_{mj} \tilde{f}_{jn}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) - \tilde{f}_{mj}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) H_{jn} \right] + \\ + R_{mn} + S_{mn}, \quad (5)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан взаимодействия атома с лазерным полем,  $R$  — матрица релаксации,  $S$  — интеграл столкновений,  $m, n = 1, 2, 3$ . Гамильтониан может быть представлен как  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ ,  $\hat{H}_0$  — гамильтониан в отсутствие лазерного поля,

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i |i\rangle \langle i|, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_i$  — энергии атомных уровней,  $\hat{H}_{int}$  описывает взаимодействие атома с лазерным полем. В дипольном приближении  $\hat{H}_{int}$  может быть записан в виде

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E} = -d_{31}E_1^0(z, t) \times \\ \times \exp\{-i[\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1(t)]\} |3\rangle \langle 1| - \\ - d_{32}E_2^0(z, t) \exp\{-i[\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2(t)]\} \times \\ \times |3\rangle \langle 2| + \text{H.c.}, \quad (7)$$

где  $\hat{\mathbf{d}}$  — оператор дипольного момента,  $d_{31}$  и  $d_{32}$  — приведенные дипольные моменты соответствующих переходов. Используя (2), (3), (4) можно переписать (7) в виде

$$\hat{H}_{int} = \hbar\Omega_1(z, t) \exp\{-i[\omega_1 t - k_1 z]\} |3\rangle \langle 1| + \\ + \hbar\Omega_2(z, t) \exp\{-i[\omega_2 t - k_2 z]\} |3\rangle \langle 2| + \text{H.c.}, \quad (8)$$

где

$$\Omega_1(z, t) = -\frac{d_{31}E_1^0(z, t)}{\hbar} e^{-i\varphi_1(t)},$$

$$\Omega_2(z, t) = -\frac{d_{32}E_2^0(z, t)}{\hbar} e^{-i\varphi_2(t)}$$

— частоты Раби, содержащие амплитудные, частотные и фазовые флуктуации лазера, а также начальные фазы. Они представляют собой случайные комплекснозначные функции времени. Ясно, что элементы матрицы плотности  $\tilde{f}_{mn}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  также будут случайными функциями времени.

## 2.2. Явный вид стохастических уравнений для матрицы плотности

При цилиндрической форме ячейки в приближении плоского фронта волны и малой пристеночной релаксации можно свести задачу к одномерной, в которой оптические поля и матрица плотности атомов изменяются только вдоль оси  $z$ . Матрица плотности в силу доплеровского сдвига частоты будет существенно зависеть только от проекции скорости атома на направление луча лазера. На основе сказанного выше можно положить  $\tilde{f}_{mn}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \tilde{f}_{mn}(v_z, z, t)$ . Далее для краткости обозначим  $v_z \equiv v$ .

Выделим в недиагональных элементах матрицы плотности (атомных когерентностях) осциллирующий с лазерной частотой множитель  $\tilde{f}_{mn}(v, z, t) = f_{mn}(v, z, t) e^{i(\omega_j t - k_j z)}$ ,  $\tilde{f}_{nn}(v, z, t) = f_{nn}(v, z, t)$  ( $j = 1, 2$ ;  $m, n = 1, 2, 3$ ) и используем приближение вращающейся волны. Проведя в (5) такую замену переменных и подставив матричные элементы гамильтониана, исключим из уравнений множители  $e^{i(\omega_j t - k_j z)}$ ,  $j = 1, 2$ . Слагаемые, связанные с интегралом столкновений  $S_{mn}$  в правой части уравнения (5), описывают уход атомов  $^{87}\text{Rb}$  из определенной скоростной группы  $v$  и приход атомов в эту группу из других скоростных групп  $v'$ . Это происходит за счет столкновений атомов щелочного металла с атомами буферного газа, со стенками ячейки и столкновений активных атомов друг с другом. Более детально учет этих слагаемых и вывод системы уравнений с учетом интеграла столкновений разобран в работе [47]. В итоге получим систему интегродифференциальных уравнений в точке  $z$  для медленноменяющихся элементов матрицы плотности, в которой остается зависимость от времени только из-за наличия случайных флуктуаций в частотах Раби  $\Omega_1(z, t)$  и  $\Omega_2(z, t)$  [48]:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{11}(v, t) = & i\Omega_1^*(t)f_{13}(v, t) - i\Omega_1(t)f_{31}(v, t) + \\ & + \gamma_{31}f_{33}(v, t) - \nu f_{11}(v, t) + \\ & + M(v) \left\{ \nu^{gg} \int f_{11}(v', t) dv' + \nu^{gg'} \int f_{22}(v', t) dv' + \right. \\ & \left. + \nu^{31} \int f_{33}(v', t) dv' \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{22}(v, t) = & i\Omega_2^*(t)f_{23}(v, t) - i\Omega_2(t)f_{32}(v, t) + \\ & + \gamma_{32}f_{33}(v, t) - \nu f_{22}(v, t) + \\ & + M(v) \left\{ \nu^{gg} \int f_{22}(v', t) dv' + \nu^{gg'} \int f_{11}(v', t) dv' + \right. \\ & \left. + \nu^{32} \int f_{33}(v', t) dv' \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{33}(v, t) = & -i\Omega_1^*(t)f_{13}(v, t) + i\Omega_1(t)f_{31}(v, t) - \\ & - i\Omega_2^*(t)f_{23}(v, t) + i\Omega_2(t)f_{32}(v, t) - \\ & - \gamma' f_{33}(v, t) + \nu^{ee} M(v) \int f_{33}(v', t) dv', \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{12}(v, t) = & [i(\Delta_2 - \Delta_1) - \Gamma'_{12}] f_{12}(v, t) + \\ & + i\Omega_2^*(t)f_{13}(v, t) - i\Omega_1(t)f_{32}(v, t) + \\ & + \nu^{vv'} M(v) \int f_{12}(v', t) dv', \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{13}(v, t) = & [i(k_1v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] f_{13}(v, t) + \\ & + i\Omega_1(t)(f_{11} - f_{33})(v, t) + i\Omega_2(t)f_{12}(v, t), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{23}(v, t) = & [i(k_2v - \Delta_2) - \Gamma'_{23}] f_{23}(v, t) + \\ & + i\Omega_2(t)(f_{22} - f_{33})(v, t) + i\Omega_1(t)f_{21}(v, t). \quad (14) \end{aligned}$$

Для краткости в аргументах частот Раби и элементов матрицы плотности опускается зависимость от координаты  $z$ . Здесь  $\Gamma'_{mn} = \Gamma_{mn} + \nu$ ,  $\gamma' = \gamma + \nu$  — модифицированные из-за столкновений скорость распада атомных когерентностей и скорость распада верхнего уровня, где  $\nu$  — полная частота столкновений рабочих атомов с буферными. При температуре ячейки  $55^\circ\text{C}$ , концентрации рабочих атомов порядка  $10^{11} \text{ см}^{-3}$ , концентрации буферного газа порядка  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  частота столкновений для пары  $^{87}\text{Rb} + \text{N}_2$  имеет порядок  $\nu \approx 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\gamma = \gamma_{31} + \gamma_{32}$  — скорость распада верхнего уровня изолированного атома из-за взаимодействия с вакуумными модами. Однофотонные отстройки лазерных полей от переходов  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  и  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  определены как

$$\Delta_j = \omega_j - \omega_{3j}^{at} \quad (j = 1, 2),$$

$\omega_{3j}^{at}$  — частоты перехода между уровнями  $|3\rangle$  и  $|j\rangle$ ,  $\dot{f}_{mn}$  — частная производная по времени,  $M(v)$  — распределение Максвелла по проекции скорости,  $\nu^{ij}$  — частоты столкновений, при которых происходят переходы между состояниями  $|i\rangle$  и  $|j\rangle$ ,  $\nu_{12}^{vv'}$  — частота столкновений, при которых низкочастотная когерентность не разрушается, но атом изменяет свою скорость. При выводе системы уравнений (9)–(14) предполагалось

$$v \frac{\partial f_{mn}}{\partial z} \approx 0. \quad (15)$$

Предположение (15) позволяет пренебречь производной по координате от медленноменяющейся огибающей матрицы плотности в левой части (5). Малость этой производной обеспечивается, когда длина свободного пробега  $l$  рабочих атомов много меньше размеров ячейки:  $l \ll L$ . Это соотношение выполняется при концентрации буферного газа больше  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  и размерах ячейки порядка  $0.1 \text{ см}$ . При таком соотношении характер движения рабочих атомов становится диффузионным и слагаемое (15), отвечающее за свободный пролет атома, становится незначительным. При  $l \ll L$  пристеночная релаксация рабочих атомов идет в очень тонком слое вблизи стенок ячейки и вносит пренебрежимо малый вклад в сигнал на фотодетекторе. Это позволяет пренебречь и диффузионным переносом населенностей и атомных когерентностей. В уравнении (12) доплеровский сдвиг  $(k_1 - k_2)v$  для микроволнового перехода с длиной волны  $\lambda_{hfs} = 4.4 \text{ см}$  отсутствует, так как выполняется соотношение  $2\pi l \ll \lambda_{hfs}$  и имеет место сужение Дике.

### 2.3. Переход к уравнениям для средних значений матрицы плотности и спектральному представлению лазерных полей

Как уже говорилось,  $f_{mn}(v, z, t)$  представляет собой случайную функцию времени. Для расчета стабильности квантового стандарта частоты интерес представляют средние значения матрицы плотности  $\rho_{mn}(v, z) = \langle f_{mn}(v, z, t) \rangle$ . Усреднение проводится по достаточно большому промежутку времени по сравнению с характерным временем флуктуаций. Усредним уравнение (12):

$$\begin{aligned} \langle \dot{f}_{12}(v, t) \rangle = & [i(\Delta_2 - \Delta_1) - \Gamma'_{12}] \rho_{12}(v) + \\ & + i \langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle - i \langle \Omega_1(t) f_{32}(v, t) \rangle + \\ & + \nu^{vv'} M(v) \int \rho_{12}(v') dv'. \quad (16) \end{aligned}$$

Зависимость частот Раби и элементов матрицы плотности от координаты  $z$  для краткости опускается.

Выразим из уравнений (13), (14) оптические когерентности через квадратуры, воспользовавшись методом вариации произвольной постоянной:

$$f_{13}(v, t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] (t - t') \} \times [i\Omega_1(t') f_{11}(v, t') + i\Omega_2(t') f_{12}(v, t')], \quad (17)$$

$$f_{23}(v, t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp \{ [i(k_2 v - \Delta_2) - \Gamma'_{23}] (t - t') \} \times [i\Omega_2(t') f_{22}(v, t') + i\Omega_1(t') f_{21}(v, t')]. \quad (18)$$

Здесь в уравнениях (13), (14) мы сделали адиабатическое приближение, т. е. пренебрегли слагаемыми, содержащими населенность верхнего уровня  $f_{33}(v, t)$ , полагая интенсивности лазерных полей достаточно малыми (частоты Раби много меньше скорости распада верхнего уровня  $|\Omega_i(t)| \ll \gamma'$ ).

Рассмотрим слагаемое  $\langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle$  из (16) и подставим в него найденное выражение (17) для  $f_{13}(v, t)$ :

$$\langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle = \int_0^\infty d\tau \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] \tau \} \times [i \langle \Omega_2^*(t) \Omega_1(t') f_{11}(v, t') \rangle + i \langle \Omega_2^*(t) \Omega_2(t') f_{12}(v, t') \rangle]. \quad (19)$$

Здесь  $\tau = t - t'$ . Возникшие тройные корреляторы можно «расцепить», полагая, что  $t \geq t'$  и что состояние атомной системы в момент  $t'$  не влияет на значения поля  $\Omega_i(t)$  в последующие моменты времени в той же точке [44]:

$$\langle \Omega_2^*(t) \Omega_2(t') f_{12}(v, t') \rangle = \langle \Omega_2^*(t) \Omega_2(t') \rangle \langle f_{12}(v, t') \rangle = \langle \Omega_2^*(t) \Omega_2(t') \rangle \rho_{12}(v). \quad (20)$$

По теореме Винера–Хинчина корреляционная функция сигнала есть обратное фурье-преобразование его спектра мощности:

$$\langle \Omega_m^*(t) \Omega_n(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^\infty J_{mn}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (21)$$

$m, n = 1, 2,$

где  $J_{11}(\omega), J_{22}(\omega)$  — энергетические спектры частотных компонент лазерного излучения (с точностью до множителя  $|d_{3n}|^2/\hbar^2, n = 1, 2$ ), центрированные на нуль частоты, вещественны,  $J_{12}(\omega)$  — комплексная величина, называемая взаимным спектром, отражающая корреляции между частотными компонентами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Легко убедиться, что  $J_{12}(\omega) = J_{21}^*(\omega)$ .

Сигналы  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  могут быть разложены в интеграл Фурье,

$$\Omega_1(t) = \int_{-\infty}^\infty S_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (22)$$

$$\Omega_2(t) = \int_{-\infty}^\infty S_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где  $S_1(\omega), S_2(\omega)$  — фурье-компоненты сигналов. Из свойств преобразования Фурье следует связь энергетического спектра сигналов и их фурье-компонент:

$$J_{mn}(\omega) = S_m^*(\omega) S_n(\omega). \quad (23)$$

Отсюда видно, что для  $n = m$  в энергетическом спектре  $J_{mn}(\omega) = |S_n(\omega)|^2$  теряется информация о фазах фурье-компонент  $\arg(S_1(\omega))$  и  $\arg(S_2(\omega))$ . Фурье-компоненты могут быть выражены в виде

$$S_n(\omega) = \sqrt{J_{nn}(\omega)} e^{i \arg S_n(\omega)}. \quad (24)$$

Информация о фазах фурье-компонент содержится во взаимном спектре сигналов:

$$J_{12}(\omega) = S_1^*(\omega) S_2(\omega) = \sqrt{J_{11} J_{22}} \times \exp \{ i [\arg S_2 - \arg S_1] \} = \sqrt{J_{11} J_{22}} e^{i\Phi}. \quad (25)$$

Однако модуль величины  $J_{12}(\omega)$  новой информации при фиксированных  $J_{11}(\omega)$  и  $J_{22}(\omega)$  не несет.

Рассмотрим среднее от производной в левой части (16). Поскольку  $f_{12}(v, t)$  — случайная функция времени со средним значением  $\rho_{12}(v)$ , ее можно представить в виде

$$f_{12}(v, t) = \rho_{12}(v) + \xi_f(v, t), \quad (26)$$

где  $\xi_f(v, t)$  — случайная величина с нулевым средним значением. Тогда

$$\langle \dot{f}_{12}(v, t) \rangle = \langle \dot{\xi}_f(v, t) \rangle. \quad (27)$$

Предположим, что скачки производной  $\dot{\xi}_f(v, t)$  равнозначны в положительную и отрицательную области. Тогда среднее  $\langle \dot{\xi}_f(v, t) \rangle = 0$ . Таким образом, можем положить

$$\langle \dot{f}_{12}(v, t) \rangle = 0. \quad (28)$$

Итак, выражение (19) может быть записано следующим образом:

$$\langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle = \int_0^\infty d\tau \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] \tau \} \times \\ \times \left[ i\rho_{11}(v) \int_{-\infty}^\infty J_{21}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \right. \\ \left. + i\rho_{12}(v) \int_{-\infty}^\infty J_{22}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right]. \quad (29)$$

Взяв в (29) интеграл по  $\tau$ , получим выражение

$$\langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle = \\ = -i\rho_{11}(v) \int_{-\infty}^\infty \frac{J_{21}(\omega) d\omega}{i(k_1 v - \Delta_1 + \omega) - \Gamma'_{13}} - \\ - i\rho_{12}(v) \int_{-\infty}^\infty \frac{J_{22}(\omega) d\omega}{i(k_1 v - \Delta_1 + \omega) - \Gamma'_{13}}. \quad (30)$$

Обозначим интегралы в (30) как функции  $W_{21}(\Delta_1, v)$ ,  $W_{22}(\Delta_1, v)$ . Они содержат в себе только известные величины и могут быть вычислены:

$$\langle \Omega_2^*(t) f_{13}(v, t) \rangle = \\ = -i\rho_{11}(v)W_{21}(\Delta_1, v) - i\rho_{12}(v)W_{22}(\Delta_1, v). \quad (31)$$

Аналогично найдем выражения для остальных средних произведений, которые появятся при усреднении уравнений (9)–(12):

$$\langle \Omega_1^*(t) f_{23}(v, t) \rangle = -i\rho_{22}(v)W_{12}(\Delta_2, v) - \\ - i\rho_{21}(v)W_{11}(\Delta_2, v), \quad (32)$$

$$\langle \Omega_1^*(t) f_{13}(v, t) \rangle = -i\rho_{11}(v)W_{11}(\Delta_1, v) - \\ - i\rho_{12}(v)W_{12}(\Delta_1, v), \quad (33)$$

$$\langle \Omega_2^*(t) f_{23}(v, t) \rangle = -i\rho_{22}(v)W_{22}(\Delta_2, v) - \\ - i\rho_{21}(v)W_{21}(\Delta_2, v). \quad (34)$$

В итоге усредненное по времени уравнение для  $\rho_{12}(v)$  выглядит следующим образом:

$$0 = [i(\Delta_2 - \Delta_1) - \Gamma'_{12}] \rho_{12}(v) + \rho_{11}(v)W_{21}(\Delta_1, v) + \\ + \rho_{12}(v) [W_{22}(\Delta_1, v) + W_{11}^*(\Delta_2, v)] + \\ + \rho_{22}(v)W_{12}^*(\Delta_2, v) + \nu^{vv'} M(v) \int \rho_{12}(v') dv'. \quad (35)$$

Оно содержит неизвестную величину под знаком интеграла. Чтобы перейти от интегрального уравнения к алгебраическому, необходимо проинтегрировать (35) по скоростям атомов. Интегрирование наиболее просто провести в случае, когда поля достаточно малы и слабо искажают максвелловское распределение атомов по скоростям. В этом приближении столкновительные члены в уравнениях (9), (10), (12) будут приводить к максвеллизации скоростного распределения населенностей  $\rho_{11,22}(v, z)$  нижних уровней и низкочастотных когерентностей  $\rho_{12}(v, z)$ . Поэтому справедливо их представление в виде [47, 49]

$$\rho_{nn}(v, z) = M(v)\rho_{nn}(z), \quad n = 1, 2, \quad (36)$$

$$\rho_{12}(v, z) = M(v)\rho_{12}(z). \quad (37)$$

Интегрируем уравнение (35) по скоростям атомов с учетом (36), (37):

$$0 = [i(\Delta_2 - \Delta_1) - \Gamma'_{12}] \rho_{12} + \rho_{11}W_{21}(\Delta_1) + \\ + \rho_{12} [W_{22}(\Delta_1) + W_{11}^*(\Delta_2)] + \\ + \rho_{22}W_{12}^*(\Delta_2) + \nu^{vv'} \rho_{12}, \quad (38)$$

где

$$W_{ij}(\Delta_n) = \int M(v)W_{ij}(\Delta_n, v) dv = \\ = \iint \frac{M(v)J_{ij}(\omega) d\omega dv}{i(k_n v - \Delta_n + \omega) - \Gamma'_{n3}}, \quad i, j, n = 1, 2,$$

$$\rho_{mn}(z) = \int \rho_{mn}(v, z) dv.$$

Аналогично получаем из системы (9)–(14) остальные уравнения для средних значений матрицы плотности. В итоге система уравнений в точке  $z$  имеет вид

$$0 = \rho_{11} \cdot 2 \operatorname{Re} [W_{11}(\Delta_1)] + \rho_{12}W_{12}(\Delta_1) + \rho_{21}W_{12}^*(\Delta_1) + \\ + \gamma'_{31}\rho_{33} + \nu^{gg'}(\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (39)$$

$$0 = \rho_{22} \cdot 2 \operatorname{Re} [W_{22}(\Delta_2)] + \rho_{21}W_{21}(\Delta_2) + \rho_{12}W_{21}^*(\Delta_2) + \\ + \gamma'_{32}\rho_{33} + \nu^{gg'}(\rho_{11} - \rho_{22}), \quad (40)$$

$$0 = -\rho_{11} \cdot 2 \operatorname{Re} [W_{11}(\Delta_1)] - \rho_{22} \cdot 2 \operatorname{Re} [W_{22}(\Delta_2)] - \\ - \rho_{12}W_{12}(\Delta_1) - \rho_{21}W_{12}^*(\Delta_1) - \\ - \rho_{21}W_{21}(\Delta_2) - \rho_{12}W_{21}^*(\Delta_2) + (\nu^{ee} - \gamma')\rho_{33}, \quad (41)$$

$$0 = [i(\Delta_2 - \Delta_1) - \Gamma''_{12}] \rho_{12} + \rho_{11}W_{21}(\Delta_1) + \\ + \rho_{12} [W_{22}(\Delta_1) + W_{11}^*(\Delta_2)] + \rho_{22}W_{12}^*(\Delta_2). \quad (42)$$

Здесь

$$\gamma'_{31} = \gamma_{13} + \nu^{31}, \quad \gamma'_{32} = \gamma_{23} + \nu^{32}, \quad \Gamma''_{12} = \Gamma'_{12} - \nu^{v'v'}$$

В функциях

$$W_{ij}(\Delta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J_{ij}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(v) dv}{i(k_n v - \Delta_n + \omega) - \Gamma'_{n3}}$$

интеграл по скоростям может быть взят аналитически [50]:

$$W(\Delta_n, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(v) dv}{i(k_n v - \Delta_n + \omega) - \Gamma'_{n3}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{k_n v_t} w^* \left( \frac{\Delta_n - \omega}{k_n v_t} + i \frac{\Gamma'_{n3}}{k_n v_t} \right), \quad (43)$$

где  $w(x) = e^{-x^2} [1 - \operatorname{erf}(x)]$  — комплексная функция вероятности. Вещественная часть  $W(\Delta_n, \omega)$  имеет физический смысл линии поглощения газовой среды и представляет собой контур Фойгта, а мнимая часть — дисперсионный контур среды. Следовательно, функции  $W_{ij}(\Delta_n)$  имеют смысл интеграла перекрытия контура поглощения среды и спектра лазерного излучения: они показывают, на сколько полно лазерное излучение «захватывает» все скоростные группы атомов.

#### 2.4. Уравнения переноса спектра излучения

Лазерное излучение при прохождении через газовую ячейку поглощается на резонансных переходах активных атомов. Поглощение может происходить не одинаково для разных участков спектра лазера ввиду различных значений показателя преломления среды для различных частот излучения. Вследствие этого спектр может искажаться внутри газовой ячейки. Чтобы корректно учесть этот вклад, необходимо вывести уравнения переноса спектра. Уравнения переноса для частот Раби имеют вид [51]

$$\frac{\partial \Omega_1(t)}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_1(t)}{\partial t} = iq_1 f_{13}(t), \quad (44)$$

$$\frac{\partial \Omega_2(t)}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_2(t)}{\partial t} = iq_2 f_{23}(t), \quad (45)$$

где

$$q_1 = \frac{2\pi n_a d_{31}^2 \omega_1}{c\hbar}, \quad q_2 = \frac{2\pi n_a d_{32}^2 \omega_2}{c\hbar},$$

$n_a$  — концентрация рабочих атомов. Домножим уравнение (44) на  $\Omega_1^*(z, t)$ , а комплексно сопряженное (44) на  $\Omega_1(z, t')$ , после чего усредним уравнения по  $t$ :

$$\left\langle \Omega_1^*(t) \frac{\partial \Omega_1(t')}{\partial z} \right\rangle + \frac{1}{c} \left\langle \Omega_1^*(t) \frac{\partial \Omega_1(t')}{\partial t'} \right\rangle = iq_1 \langle \Omega_1^*(t) f_{13}(t') \rangle, \quad (46)$$

$$\left\langle \Omega_1(t') \frac{\partial \Omega_1^*(t)}{\partial z} \right\rangle + \frac{1}{c} \left\langle \Omega_1(t') \frac{\partial \Omega_1^*(t)}{\partial t} \right\rangle = -iq_1 \langle \Omega_1(t') f_{31}(t) \rangle. \quad (47)$$

Сложим уравнения (46) и (47), среднее от производной по времени можно положить нулю, аналогично уравнению (16):

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \Omega_1^*(t) \Omega_1(t') \rangle = iq_1 [\langle \Omega_1^*(t) f_{13}(t') \rangle - \langle \Omega_1(t') f_{31}(t) \rangle]. \quad (48)$$

Применим фурье-преобразование к (48):

$$\frac{\partial J_{11}(\omega, z)}{\partial z} = iq_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \times [\langle \Omega_1^*(t) f_{13}(t') \rangle - \langle \Omega_1(t') f_{31}(t) \rangle]. \quad (49)$$

Аналогично, путем домножения (44) и (45) на  $\Omega_1(z, t)$  и  $\Omega_2(z, t)$  получим

$$\frac{\partial J_{22}(\omega, z)}{\partial z} = iq_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \times [\langle \Omega_2^*(t) f_{23}(t') \rangle - \langle \Omega_2(t') f_{32}(t) \rangle], \quad (50)$$

$$\frac{\partial J_{12}(\omega, z)}{\partial z} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \times [q_2 \langle \Omega_1^*(t) f_{23}(t') \rangle - q_1 \langle \Omega_2(t') f_{31}(t) \rangle]. \quad (51)$$

Рассмотрим коррелятор  $\langle \Omega_1^*(t) f_{13}(t') \rangle$  из (49), воспользуемся выражениями (17), (18), проведем «расщепление» тройных корреляторов, аналогично разд. 2.3, после чего воспользуемся теоремой Винера – Хинчина:



$$\begin{aligned}
 \langle \Omega_1^*(t) f_{13}(v, t') \rangle &= \int_{-\infty}^{t'} dt'' \times \\
 &\times \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] (t' - t'') \} \times \\
 \times [i \langle \Omega_1^*(t) \Omega_1(t'') f_{11}(v, t'') \rangle + i \langle \Omega_1^*(t) \Omega_2(t'') f_{12}(v, t'') \rangle] &= \\
 &= \int_{-\infty}^{t'} dt'' \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] (t' - t'') \} \times \\
 \times [i \langle \Omega_1^*(t) \Omega_1(t'') \rangle \rho_{11}(v) + i \langle \Omega_1^*(t) \Omega_2(t'') \rangle \rho_{12}(v)] &= \\
 &= \int_{-\infty}^{t'} dt'' \exp \{ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] (t' - t'') \} \times \\
 \times \left[ i \rho_{11}(v) \int_{-\infty}^{\infty} J_{11}(\omega) \exp \{ i\omega(t - t'') \} d\omega + \right. \\
 \left. + i \rho_{12}(v) \int_{-\infty}^{\infty} J_{12}(\omega) \exp \{ i\omega(t - t'') \} d\omega \right]. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Проведем интегрирование по  $t''$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega_1^*(t) f_{13}(v, t') \rangle &= \\
 &= \left\{ i \rho_{11}(v) \int_{-\infty}^{\infty} J_{11}(\omega) d\omega + i \rho_{12}(v) \int_{-\infty}^{\infty} J_{12}(\omega) d\omega \right\} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{t'} dt'' \exp \{ - [i(k_1 v - \Delta_1 + \omega) - \Gamma'_{13}] t'' + \\
 &+ [i(k_1 v - \Delta_1) - \Gamma'_{13}] t' + i\omega t \} = \\
 &= -i \rho_{11}(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{11}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{i(k_1 v - \Delta_1 + \omega) - \Gamma'_{13}} - \\
 &- i \rho_{12}(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{12}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{i(k_1 v - \Delta_1 + \omega) - \Gamma'_{13}}. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Проведем интегрирование полученного выражения по скоростям, воспользовавшись (36), (37):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Omega_1^*(t) f_{13}(v, t') \rangle dv &= \\
 &= -i \rho_{11} \int_{-\infty}^{\infty} J_{11}(\omega) W(\Delta_1, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega - \\
 &- i \rho_{12} \int_{-\infty}^{\infty} J_{12}(\omega) W(\Delta_1, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (54)
 \end{aligned}$$

где

$$W(\Delta_n, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(v) dv}{i(k_n v - \Delta_n + \omega) - \Gamma'_{n3}}, \quad n = 1, 2.$$

Аналогично рассматривая другие корреляторы в (49)–(51), получаем уравнения переноса спектральной плотности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{11}(\omega, z)}{\partial z} &= 2q_1 \{ \rho_{11}(z) J_{11}(\omega, z) \operatorname{Re} [W(\Delta_1, \omega)] + \\
 &+ \operatorname{Re} [\rho_{12}(z) J_{12}(\omega, z) W(\Delta_1, \omega)] \}, \quad (55)
 \end{aligned}$$

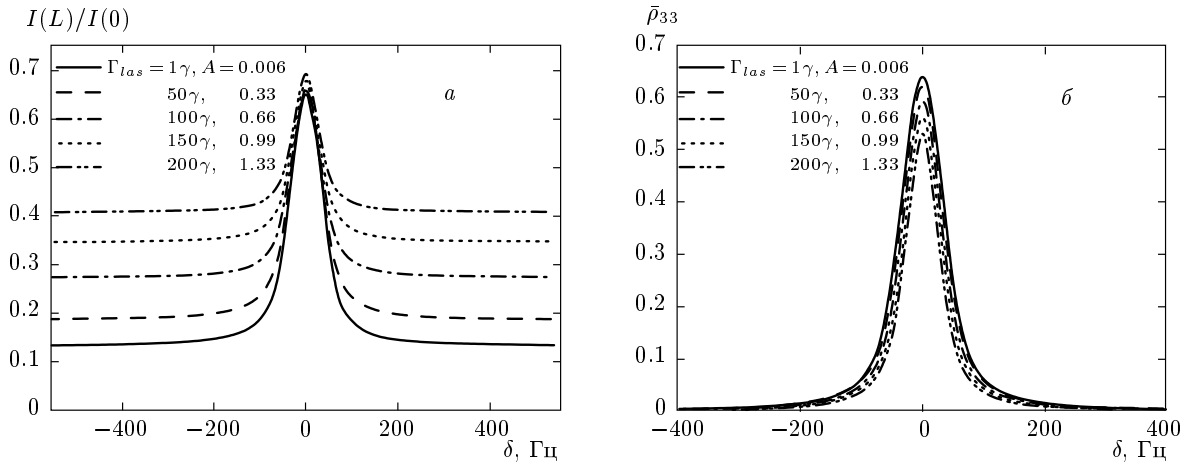
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{22}(\omega, z)}{\partial z} &= 2q_2 \{ \rho_{22}(z) J_{22}(\omega, z) \operatorname{Re} [W(\Delta_2, \omega)] + \\
 &+ \operatorname{Re} [\rho_{21}(z) J_{21}(\omega, z) W(\Delta_2, \omega)] \}, \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{12}(\omega, z)}{\partial z} &= q_2 W(\Delta_2, \omega) \times \\
 &\times \{ \rho_{22}(z) J_{12}(\omega, z) + \rho_{21}(z) J_{11}(\omega, z) \} + \\
 &+ q_1 W^*(\Delta_1, \omega) \{ \rho_{11}(z) J_{12}(\omega, z) + \\
 &+ \rho_{12}(z) J_{22}(\omega, z) \}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Поглощение спектральной плотности, согласно (23)–(25), описывается уравнениями (55), (56), а в уравнении переноса взаимного спектра (57) содержится информация о фазовых набеггах.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Система уравнений для средних значений матрицы плотности (39)–(42) позволяет отследить состояние рабочих атомов на промежутках времени больше времени усреднения  $\Delta t$ . Как уже говорилось, время усреднения должно быть много больше характерного времени флуктуаций лазерного поля  $\Delta t \gg 1/\Gamma_{las}$ . В работе рассматривается спектр лазерного излучения, ширина которого находится в диапазоне  $\gamma \leq \Gamma_{las} \leq \Delta_D$ . Здесь  $\Delta_D = kv_t$  — доплеровское уширение. Оценим нижнюю границу времени усреднения для  $\Gamma_{las} = \gamma$ . В этом случае время усреднения составляет  $\Delta t \gg 10^{-7}$  с<sup>-1</sup>. В квантовых стандартах частоты кратковременная нестабильность обычно рассчитывается на интервале усреднения порядка 1 с, что на много порядков превышает нижнюю оценку  $\Delta t$ . Поэтому система уравнений (39)–(42), решенная совместно с уравнениями переноса спектра (55)–(57), позволяет оценить кратковременную нестабильность квантового стандарта частоты на эффекте КПН.



**Рис. 3.** Форма КПН-резонанса по интенсивности излучения  $I = I_1 + I_2$  на выходе ячейки (а) и по средней населенности верхнего уровня рабочих атомов (б) для различных ширин спектра лазерного излучения. С изменением ширины спектра интегральная интенсивность излучения остается постоянной. Интенсивности на входе в ячейку  $I_1(0) = I_2(0) = 2$  мкВт/см<sup>2</sup>, температура  $T = 55$  °С, концентрация рабочих атомов  $^{87}\text{Rb } n_a = 1.15 \cdot 10^{11}$  см<sup>-3</sup>, концентрация буферного газа  $\text{N}_2 n_{buf} = 10^{18}$  см<sup>-3</sup>, длина ячейки  $L = 1$  см

Зададим энергетический спектр частотных компонент лазера на входе в ячейку в виде контура Лоренца, что соответствует стационарным флуктуациям несущих частот  $\omega_j(t) = \omega_j + \xi_{\omega_j}(t)$  [52]:

$$J_{11}(\omega, 0) = I_1(0) \frac{8\pi d_{31}^2}{\hbar^2} \frac{\Gamma_{las}}{2\pi(\omega^2 + \Gamma_{las}^2/4)}, \quad (58)$$

$$J_{22}(\omega, 0) = I_2(0) \frac{8\pi d_{32}^2}{\hbar^2} \frac{\Gamma_{las}}{2\pi(\omega^2 + \Gamma_{las}^2/4)}, \quad (59)$$

$$J_{12}(\omega, 0) = \sqrt{J_{11}(\omega, 0)J_{22}(\omega, 0)}. \quad (60)$$

В (60) сделано предположение, что фазы фурье-компонент сигналов одинаковы,

$$I_n(z) = \frac{\hbar^2}{8\pi d_{3n}^2} \int_{-\infty}^{\infty} J_{nn}(\omega, z) d\omega$$

— интенсивность лазерных полей.

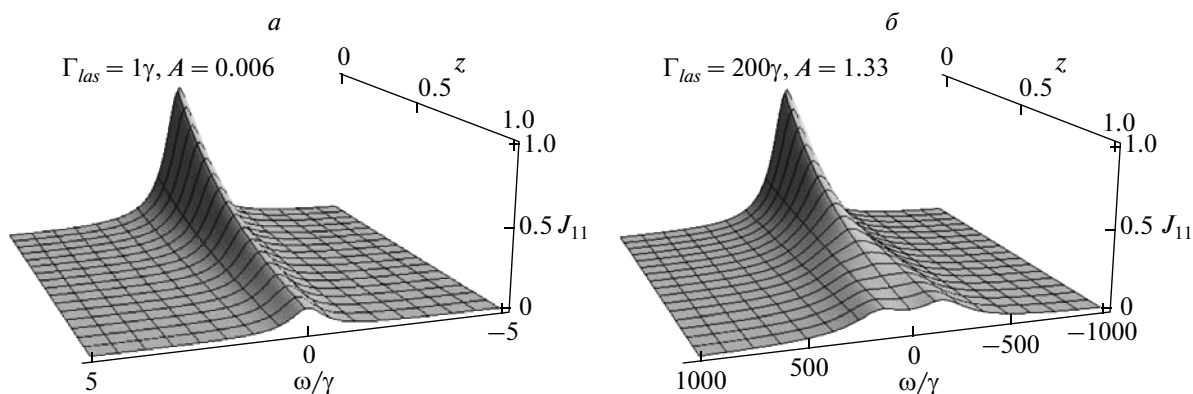
На рис. 3а представлена зависимость нормированной интенсивности излучения на выходе газовой ячейки от двухфотонной отстройки  $\delta = (\Delta_1 - \Delta_2)/2$ . Эта зависимость представляет собой форму КПН-резонанса. При этом однофотонная отстройка полагалась равной нулю ( $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2)/2 = 0$ ). Кривые на рис. 3а соответствуют различным ширинам спектра лазерных полей, но одинаковой интегральной интенсивности на входе в ячейку. При  $\delta = 0$  прошедшая интенсивность максимальна, поскольку рабочие атомы находятся в

состоянии КПН и среда просветляется [1]. На «хвостах» кривых отстройка далека от резонанса КПН и наблюдается обычное экспоненциальное поглощение света средой. Введем безразмерный параметр

$$A = \frac{\Gamma_{las}}{\Delta_D + \gamma/2 + \nu} \quad (61)$$

— отношение ширины спектра лазера к ширине линии поглощения рабочих атомов. Последняя складывается из доплеровского уширения  $\Delta_D$ , естественной ширины верхнего уровня  $\gamma/2$  и столкновительного уширения  $\nu$ . При температуре 50 °С доплеровское и столкновительное уширения сравнимы друг с другом и на два порядка превышают однородное.

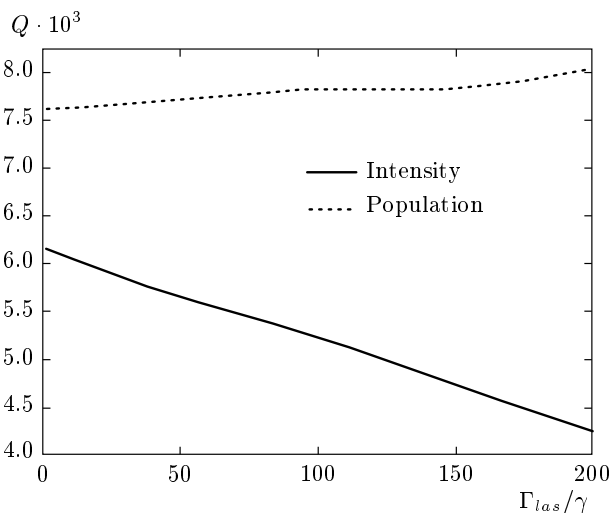
Для  $\Gamma_{las} = 1\gamma, 50\gamma$  и  $100\gamma$  (сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые на рис. 3а) параметр  $A < 1$ . Это значит, что лазерное излучение взаимодействует только с атомами из определенной скоростной группы и не все атомы  $^{87}\text{Rb}$  участвуют в формировании резонанса КПН. Тем не менее именно для этих условий наблюдается более сильное поглощение по сравнению с условиями возбуждения, когда ширина спектра лазерного излучения  $\Gamma_{las} > 100\gamma$  (точечная и штрихпунктирная с двумя точками кривые на рис. 3а). Это объясняется тем, что, согласно адиабатическому приближению, интенсивности лазерных полей полагаются малыми. Поэтому переходы  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  и  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  не насыщены, и на каждый фотон излучения найдется атом в основном состоянии, способный его погло-



**Рис. 4.** Поглощение энергетического спектра частотной компоненты  $\omega_1$  при прохождении излучения через среду в случае узкого (а) и широкого (б) спектра вне КПН-резонанса (двухфотонная отстройка  $\delta = 570$  Гц). С изменением ширины спектра интегральная интенсивность излучения остается постоянной. Параметры те же, что на рис. 3

тить. Это выполняется для широкого диапазона изменения  $\Gamma_{las}$ , для которого  $A \ll 1$ . При этом излучение поглощается равномерно по всему спектру, и поэтому он почти не искажается (рис. 4а). При увеличении  $\Gamma_{las}$  параметр  $A$  становится близок к единице. Число фотонов на краях спектра становится сравнимо или больше числа атомов, способных их поглотить, поэтому выходная интенсивность вне КПН-резонанса возрастает (точечная кривая на рис. 3а). Для  $\Gamma_{las} = 200\gamma$  параметр  $A > 1$ . При этом фотоны, имеющие частоты в области, отдаленной от центральной части спектра, взаимодействуют с «быстрыми» атомами, скорость которых выше наиболее вероятной тепловой. Число этих атомов мало по сравнению с числом фотонов, поэтому такие фотоны практически не будут поглощаться. При этом в центральной части спектра остается высокое поглощение излучения вне КПН-резонанса. Наличие таких особенностей в поглощении ведет к искажениям спектра в виде появления в нем провала (рис. 4б).

При построении квантового стандарта частоты на основе эффекта КПН может быть использовано два различных способа детектирования сигнала. Одним из таких способов регистрации сигнала является анализ интенсивности прошедшего сквозь ячейку излучения (рис. 3а). Второй способ — это анализ люминесценции рабочих атомов, т. е. случай, когда фотодетектор регистрирует излучение не в направлении луча лазера. В случае, когда анализируется люминесценция сигнала, мощность этого самого сигнала  $P$  пропорциональна населенности верхнего уровня рабочих атомов  $\bar{\rho}_{33}(\delta)$ , усредненной по длине ячейки:

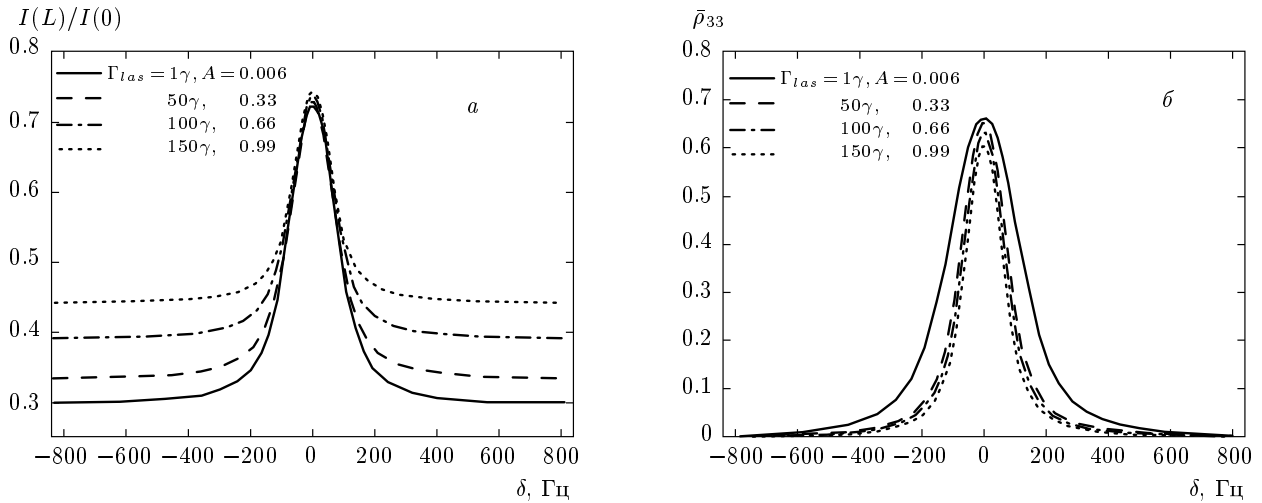


**Рис. 5.** Параметр качества КПН-резонанса в зависимости от ширины спектра лазера при измерении прошедшей интенсивности (сплошная кривая) и по сигналу люминесценции (штриховая кривая). С изменением ширины спектра интегральная интенсивность излучения остается постоянной. Параметры те же, что на рис. 3

$$P(\delta) = \hbar\omega\gamma'n_aV\bar{\rho}_{33}(\delta), \tag{62}$$

где  $\omega$  — частота оптического перехода,  $\gamma'$  — скорость распада верхнего уровня,  $n_a$  — концентрация рабочих атомов,  $V$  — объем ячейки. На рис. 3б приведен контраст резонанса КПН по сигналу люминесценции.

Оценить нестабильность квантового стандарта частоты можно по параметру качества  $Q$  резонанса, который пропорционален отношению амплитуды



**Рис. 6.** Форма КПН-резонанса по интенсивности излучения  $I = I_1 + I_2$  на выходе ячейки (а) и по средней населенности (б) верхнего уровня рабочих атомов для различных ширин спектра лазерного излучения. С изменением ширины спектра интегральная интенсивность излучения остается постоянной. Интенсивности на входе в ячейку  $I_1(0) = 8$  мкВт/см<sup>2</sup>,  $I_2(0) = 2$  мкВт/см<sup>2</sup>, температура  $T = 55$  °С, концентрация рабочих атомов  $^{87}\text{Rb}$   $n_a = 1.15 \cdot 10^{11}$  см<sup>-3</sup>, концентрация буферного газа  $\text{N}_2$   $n_{buf} = 10^{18}$  см<sup>-3</sup>, длина ячейки  $L = 1$  см

сигнала к ширине этого сигнала на полувысоте. Тогда, чем выше  $Q$ , тем выше стабильность стандарта частоты.

На рис. 5 приведена зависимость  $Q$  от ширины спектра лазера. На графике видно, что при увеличении ширины спектра параметр качества уменьшается для сигнала выходной интенсивности (сплошная кривая). Это в основном обусловлено поднятием «хвостов» на рис. 3а и, как следствие, уменьшением амплитуды резонанса. Рост  $Q$  для сигнала люминесценции обусловлен другими причинами в отличие от падения качества для сигнала интенсивности. А именно, при узком спектре лазера ( $A < 1$ ) вся интенсивность излучения приходится на атомы из достаточно узкой скоростной группы. В этом случае на конкретный атом, «захватываемый» спектром, эффективно действует большая интенсивность, чем при широком спектре ( $A \geq 1$ ). Известно, что резонанс КПН уширяется при увеличении интенсивности возбуждающих полей — так называемое световое уширение:  $\Delta_0 \approx \nu^{gg'} + \Omega^2/\gamma'$ , где  $\Delta_0$  — ширина КПН-резонанса,  $\Omega^2 \propto I$  — квадрат частоты Раби пропорционален интенсивности [14]. Таким образом, при увеличении  $\Gamma_{las}$  уменьшается ширина резонанса. На рис. 3б видно, что одновременно уменьшается и амплитуда резонанса. Тем не менее, отношение амплитуды к ширине  $Q$  возрастает, но гораздо слабее, чем для сигнала выходной интенсивности.

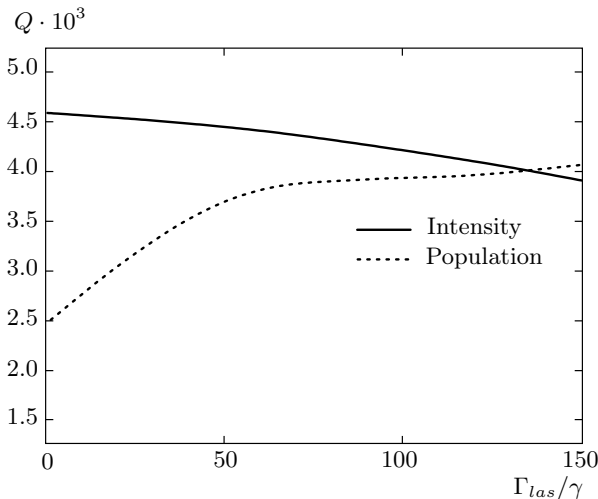
Далее рассмотрим важный в практическом отно-

шении случай, когда на оптических переходах действуют поля с различными частотами Раби. В атоме  $^{87}\text{Rb}$  матричные элементы дипольного момента на  $D_1$ -переходе для разных сверхтонких подуровней основного состояния различны. Поэтому при одинаковых интенсивностях накачивающих полей их частоты Раби будут различны. В математической модели мы полагаем матричные элементы дипольного момента  $d_{31}$  и  $d_{32}$  одинаковыми, поэтому смоделируем данную ситуацию, задав разные интенсивности  $I_1(0)$  и  $I_2(0)$ .

На рис. 6 представлены формы КПН-резонанса при интенсивностях  $I_1(0) > I_2(0)$ . На графиках прошедшей интенсивности видно, что резонанс уширился по сравнению со случаем одинаковых интенсивностей, но зависимости параметра качества от ширины спектра лазерного излучения остаются качественно неизменными: с увеличением ширины спектра лазерного излучения параметр качества сигнала выходной интенсивности падает, а для сигнала люминесценции — возрастает (рис. 7).

#### 4. ВЫВОДЫ

В работе построена теория формирования резонанса когерентного пленения населенностей для конечной ширины спектра лазерного излучения в оптически плотной среде  $\Lambda$ -атомов в ячейке с буферным газом. В рамках построенной теории выведе-



**Рис. 7.** Параметр качества КРН-резонанса в зависимости от ширины спектра лазера при измерении прошедшей интенсивности (сплошная кривая) и по сигналу люминесценции (штриховая кривая). С изменением ширины спектра интегральная интенсивность излучения остается постоянной. Параметры те же, что на рис. 6

ны основные уравнения для матрицы плотности совместно с уравнениями переноса спектра излучения через среду.

Найдена форма резонанса когерентного пленения населенностей при детектировании сигнала прошедшей сквозь ячейку интенсивности лазерного излучения и сигнала люминесценции атомов. Показано, что при наличии «широкого» спектра лазерного излучения ( $A > 1$ ) параметр качества сигнала прошедшей интенсивности падает по причине селективного поглощения и искажения спектра сигнала, а параметр качества сигнала люминесценции повышается в связи с уменьшением светового уширения. В случае использования лазера с «узким спектром» излучения ( $A < 1$ ), наоборот, параметр качества сигнала прошедшей интенсивности возрастает, так как спектр поглощается равномерно, а параметр качества сигнала люминесценции падает, поскольку происходит световое уширение резонанса когерентного пленения населенностей для «захватываемой» лазером скоростной группы атомов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-31422мол\_а, 15-02-01013, 13-02-00944) и в рамках Государственного задания для ВУЗов (базовая часть) 2014/184 и Государственного задания для ВУЗов (проектная часть) № 3.1446.2014К.

Авторы выражают благодарность И. М. Соколову за полезные обсуждения данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Nuovo Cimento B* **36**, 5 (1976).
2. E. Arimondo and G. Orriols, *Nuovo Cimento Lett.* **17**, 333 (1976).
3. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов и др., *УФН* **163**, 1 (1993).
4. E. Arimondo, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, XXXV, 257 (1996).
5. М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *ЖЭТФ* **68**, 728 (1989).
6. S. Harris, *Physics Today* **50**, 36 (1997).
7. M. Merimaa, T. Lindvall, I. Tittonen, and E. Ikonen, *J. Opt. Soc. B* **20**, 273 (2003).
8. J. Vanier, *Appl. Phys. B* **81**, 421 (2005).
9. M. Stahler, R. Wynands, S. Knappe et al., *Opt. Lett.* **27**, 1472 (2002).
10. A. Akulshin, A. Celikov, and V. Velichansky, *Opt. Commun.* **84**, 139 (1991).
11. D. Peter, D. Schwindt, S. Knappe, V. Shah, L. Hollberg, J. Kitching, L. Liew, and J. Moreland, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 6409 (2004).
12. V. V. Yashuk, J. Granwehr, D. F. Kimbal et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 160801 (2004).
13. M. D. Lukin, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 457 (2003).
14. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633 (2005).
15. J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Hilger, Bristol (1989), p. 1567.
16. А. С. Зибров, А. С. Жуков, В. П. Яковлев и др., *Письма в ЖЭТФ* **83**, 168 (2006).
17. A. Litvinov, G. Kazakov, B. Matisov, and I. Mazets, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41**, 125401 (2008).
18. S. A. Zibrov, Y. O. Dudin, V. L. Velichansky et al., in *Abstract Book of ICONO'05*, St. Petersburg (2005), p. ISK8.
19. С. А. Зибров, В. Л. Величнский, А. С. Зибров, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 534 (2005).

20. S. A. Zibrov, I. Novikova, D. F. Phillips et al., Phys. Rev. A **81**, 013833 (2010).
21. G. Kazakov, B. Matisov, I. Mazets, G. Mileti, and J. Delporte, Phys. Rev. A **72**, 063408 (2005).
22. E. Breschi, G. Kazakov, R. Lammegger et al., Phys. Rev. A **79**, 063837 (2009).
23. X. Liu, J. Mérolla, S. Guérandel et al., Phys. Rev. A **87**, 029903 (2013).
24. O. Firstenberg, M. Shuker, A. Ben-Kish et al., Phys. Rev. A **76**, 013818 (2007).
25. J.-M. Danet, M. Lours, S. Guérandel, and E. Clercq, Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions **61**, 567 (2014).
26. Y. Yano, W. Gao, S. Goka, and M. Kajita, Phys. Rev. A **90**, 013826 (2014).
27. D. L. Butts, J. M. Kinast, K. Kotru et al., Phys. Rev. A **84**, 043613 (2011).
28. Y. Yano, S. Goka, and M. Kajita, arXiv:1411.3779v2 [physics.atom-ph].
29. M. Huang and J. C. Camparo, Phys. Rev. A **85**, 012509 (2012).
30. D. Aumiler, Phys. Rev. A **82**, 055402 (2010).
31. A. Litvinov, G. Kazakov, B. Matisov et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 1 (2010).
32. Y. Xiao, I. Novikova, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, Phys. Rev. Lett. **96**, 043601 (2006).
33. E. Breschi, G. Kazakov, C. Schori et al., Phys. Rev. A **82**, 063810 (2010).
34. G. A. Kazakov, A. N. Litvinov, B. G. Matisov et al., J. Phys. B **44**, 235401 (2011).
35. Г. А. Казаков, А. Н. Литвинов, Б. Г. Матисов, КЭ **42**, 185 (2012).
36. H. Robinson, E. Ensberg, and H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. **3**, 9 (1958).
37. M. Klein, I. Novikova, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, J. Mod. Opt. **53**, 2583 (2006).
38. C. Y. Ye and A. S. Zibrov, Phys. Rev. A **65**, 023806 (2002).
39. G. Alzetta, S. Gozzini, A. Lucchesini et al., Phys. Rev. A **69**, 063815 (2004).
40. А. И. Окуневи́ч, Опт. и спектр. **97**, 890 (2004).
41. G. Kazakov, B. Matisov, A. Litvinov, and I. Mazets, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **40**, 3851 (2007).
42. M. Klein, M. Hohensee, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, Phys. Rev. A **83**, 013826 (2011).
43. R. H. Dicke, Phys. Rev. **89**, 472 (1953).
44. И. Е. Мазец, Б. Г. Матисов, ЖЭТФ **101**, 26 (1992).
45. S. Brandt, A. Nagel, R. Wynands, and D. Meschede, Phys. Rev. A **56**, 2 (1997).
46. R. Wynands and A. Nagel, Appl. Phys. B **68**, 1 (1999).
47. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).
48. К. А. Баранцев, Е. Н. Величко, and А. Н. Литвинов, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **47**, 245401 (2014).
49. E. Arimondo, Phys. Rev. A **54**, 2216 (1996).
50. М. Абрамови́ч, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва, (1979), с. 126.
51. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, ЖЭТФ **90**, 1610 (1986).
52. А. Г. Чирков, Б. Г. Матисов, *Современная теория стабильности прецизионных генераторов*, Изд. Политехн. универ., С.-Петербург (2010), с. 76.