

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*Р. Р. Сираев**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет
614000, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 8 декабря 2014 г.

Теоретически исследуется осциллирующее течение несжимаемой жидкости в насыщенной пористой среде при наличии твердого включения. Для описания нестационарной фильтрации применяется уравнение Бринкмана–Форцгеймера, в котором учитываются инерционные эффекты и слагаемые с ускорением, характерные для высоких скоростей фильтрации и наличия пульсаций. Конвективная часть ускорения отвечает за нелинейные эффекты вблизи макронеоднородностей. Эти эффекты могут играть заметную роль в нестационарных течениях в пористой среде, что показано на задаче обтекания твердого шара осциллирующим потоком, имеющим на бесконечности заданную скорость. Результаты свидетельствуют, что в случае высоких частот возникает вторичное усредненное течение, которое не может быть описано на основании законов фильтрации Дарси или Форцгеймера.

DOI: 10.7868/S0044451015080210

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что периодическое воздействие на жидкость часто приводит к возникновению усредненного течения. Природа воздействия может быть различной: колебания полости с неоднородно нагретой жидкостью, вибрации тел, помещенных в жидкость, периодическое внешнее течение и т. д. Имеется большое количество работ, в которых исследуются усредненные течения, возникающие в обычной жидкости. В то же время малоизученным остается вопрос о влиянии периодического воздействия на фильтрацию жидкости в насыщенной пористой среде.

Разнообразие природных и искусственных пористых материалов обуславливает использование различных моделей для описания фильтрации жидкостей. Теоретическое изучение при малых скоростях проводится на основе уравнения Дарси, устанавливающего связь между градиентом давления и скоростью:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \mathbf{v}. \quad (1)$$

Здесь и ниже пористая среда характеризуется коэффициентом пористости ε и проницаемостью K ,

а жидкость — динамической μ и кинематической ν вязкостью и плотностью ρ_f .

Закон Дарси может быть обоснован при помощи общих дифференциальных уравнений гидродинамики — уравнений Навье–Стокса — при условии, что силами инерции пренебрегают. Если скорость фильтрации не мала (число Рейнольдса, определенное по размеру поры, больше единицы), величины и направления скоростей жидких частиц значительно изменяются по причинам извилистости поровых каналов и непостоянства их поперечных размеров, что приводит к возрастанию роли инерционных сил и нарушению закона Дарси. При этом часто используют уравнение Форцгеймера, в котором вследствие учета инерционных эффектов появляется слагаемое, квадратичное по скорости фильтрации жидкости (см. [1]):

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \mathbf{v} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \quad (2)$$

Здесь c_F — безразмерный коэффициент (трения или торможения) Форцгеймера, величина которого зависит от природы пористого материала. В расчетах авторов значение c_F изменялось от нуля (для модели Дарси) до единицы для сред с умеренной пористостью.

Для высокопористой среды часто используют модель Бринкмана [2–4], в которой уравнение переноса импульса наряду с силой сопротивления Дарси

*E-mail: romauld@mail.ru

включает силу вязкого трения. В известном смысле модель Бринкмана является промежуточной между моделью насыщенной пористой среды Дарси и обычной жидкостью. В работе [2] из уравнения Навье–Стокса методом локального усреднения по объему получено уравнение Бринкмана–Форцгеймера:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{\varepsilon} \right) \right] = \\ = -\nabla p + \frac{\mu}{\varepsilon} \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Численный анализ на основе этого уравнения и экспериментальное исследование [3] показали, что влияние твердой границы и сил инерции заметно в средах с высокой проницаемостью, жидкостях с большим числом Прандтля, большими градиентами давления и в области пограничного слоя у передней кромки.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование колебательных течений несжимаемой жидкости в пористой среде. Обосновываются уравнения фильтрации, при этом учитываются гидродинамические эффекты, характерные для нестационарных течений. Решается задача о периодическом течении жидкости в пористой среде вблизи твердой сферы.

2. УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Нестационарное движение в пористой среде имеет ряд особенностей, которые не учитываются в уравнении Дарси. В частности, в осциллирующем течении скорость и ее производные по времени могут принимать большие значения, при этом возрастает роль сил инерции. В ряде исследований [4, 5] рассматриваются течения, в которых определяющую роль играют пульсации скорости, что свидетельствует о необходимости включить в уравнение слагаемые с ускорением. Этим требованиям удовлетворяет уравнение Бринкмана–Форцгеймера (3).

Данное уравнение может быть несколько упрощено, если интерес представляют фильтрационные течения в пористых средах со средней и низкой проницаемостью, для которых параметр Дарси, равный отношению проницаемости к квадрату характерного размера, мал: $Da < 10^{-6}$. Кроме того, не рассматриваются течения с пристеночными пограничными слоями. В этих случаях в уравнении Бринкмана–Форцгеймера слагаемое с вязким сопротивлением становится пренебрежимо малым по сравнению с остальными. Таким образом, для описания нестационарной фильтрации можно воспользоваться следующей системой уравнений:

ционарной фильтрации можно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\frac{\nabla p}{\rho_f} - \frac{\nu}{K} \mathbf{v} - \\ - c_F K^{-1/2} |\mathbf{v}| \mathbf{v} - \frac{1}{2} v^2 \left(\nabla \frac{1}{\varepsilon^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Последнее слагаемое в формуле (4) описывает эффекты, связанные с неоднородностью пористой среды. В предположении, что характеристики пористой среды — просветность, пористость, проницаемость — не зависят от координат, данное слагаемое обращается в нуль.

Левая часть уравнения переноса импульса (4) содержит конвективное ускорение, которое отвечает за нелинейные эффекты вблизи макронеоднородностей. Покажем на конкретном примере, что эти эффекты могут играть заметную роль в нестационарных течениях в пористой среде.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ШАРА

В качестве примера рассмотрим обтекание твердого шара осциллирующим потоком, имеющим на бесконечности заданную скорость $\mathbf{u} \sin \Omega t$. Окружающая шар пористая среда безгранична и однородна, в результате последнее слагаемое в (4) исчезает.

Сопоставление характерных времен фильтрации и распространенных в технике колебаний указывает на целесообразность рассмотрения высокочастотных пульсаций малой амплитуды. В этом случае метод усреднения позволяет получить замкнутую систему уравнений, описывающих усредненные поля скорости и давления.

Для получения усредненных уравнений воспользуемся методом многих масштабов [6]. При высокочастотных вибрациях система (4), (5) содержит малый параметр $\alpha = \Omega^{-1}$. Выделим параметр α в уравнении (4) явным образом, проведя перенормировку времени $t' = \Omega t$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \\ = -\frac{\alpha \nabla p}{\rho_f} - \frac{\alpha \nu}{K} \mathbf{v} - \alpha c_F K^{-1/2} |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6)$$

Разложим переменные, описывающие движение, в ряд по α :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \alpha \mathbf{v}_1 + \dots, \quad p = \alpha^{-1} p_{-1} + p_0 + \dots \quad (7)$$

В разложении (7) слагаемое $\alpha^{-1}p_{-1}$ учитывает большую амплитуду пульсаций давления, возникающего в результате вибраций. При высокочастотных вибрациях движение можно разбить на быстроосциллирующую и медленную части. Возникает иерархия времен: $t_0 = t'$, $t_1 = \alpha t'$, $t_2 = \alpha^2 t'$ и так далее, где t_0 — «быстрое» время, по порядку величины равное периоду вибраций; t_1, t_2 — времена медленных процессов, характерных для вторичных (усредненных) течений.

Проницаемость K для большинства природных и искусственных пористых сред является малой величиной, поэтому полагаем $\alpha K^{-1} \sim 1$. В то же время считаем $\alpha K^{-1/2} \ll 1$.

Подставляя ряды (7) в уравнение (6), в главном порядке разложения по α имеем

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t_0} = -\frac{\nabla p_{-1}}{\rho_f} - \frac{\nu}{K} \mathbf{v}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \quad (8)$$

Решения системы можно записать в виде

$$\mathbf{v}_0 = \text{Re}(\mathbf{w} \exp(i\Omega t_0)), \quad p_{-1} = \text{Re}(q \exp(i\Omega t_0)).$$

Уравнение для амплитуд пульсационных полей имеет вид

$$\frac{i\Omega}{\varepsilon} \mathbf{w} = -\frac{\nabla q}{\rho_f} - \frac{\nu}{K} \mathbf{w}. \quad (9)$$

Изменим масштаб переменной \mathbf{w} , выделив из нее множитель $\varepsilon/(\varepsilon + i\Omega K/\nu)$:

$$\mathbf{w}_r = -\frac{K}{\nu} \frac{\nabla q}{\rho_f}. \quad (10)$$

В результате нормировки поле \mathbf{w}_r становится вещественным, так как поле q вещественно вследствие дивергентности \mathbf{w} .

Уравнения для усредненных величин \mathbf{v}_1, p_0 выводятся с использованием процедуры усреднения по времени системы уравнений (4), (5). В уравнении фильтрации жидкости не учитывается слагаемое с ускорением ввиду его малости. В результате получается система

$$\frac{\nu \mathbf{v}_1}{K} = -\frac{\nabla p_0}{\rho_f} - B(\mathbf{w}_r \nabla) \mathbf{w}_r, \quad \mathbf{w}_r = -\frac{K}{\nu} \frac{\nabla q}{\rho_f}, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_r = 0.$$

В (11) для упрощения записи введена величина

$$B = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^2},$$

включающая параметр $\omega = \Omega K/\nu$ — безразмерную частоту вибрации.

Для перехода к безразмерным переменным выберем масштабы расстояния, времени, скорости, давления, пульсационных скорости и давления соответственно $L, L^2/u, u, \rho_f u^2, u, \rho_f u^2$, где L — характерный размер. В безразмерной форме система уравнений (11) примет вид

$$\frac{1}{\text{Re}} \mathbf{V} = -\nabla P - B(\mathbf{W} \nabla) \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = -\text{Re} \nabla q, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{W} = 0.$$

В уравнениях (12) $\mathbf{V}, \mathbf{W}, P$ — безразмерные усредненная и пульсационная компоненты скорости и давление. Система содержит параметр $\text{Re} = uK/\nu L$.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с центром шара, а азимутальная ось направлена вдоль \mathbf{u} . Граничные условия на поверхности шара и на большом удалении от него имеют вид

$$r = R: \quad V_r = 0, \quad W_r = 0; \quad (13)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{W} = \mathbf{u}.$$

Задача (12), (13) может быть решена аналитически. В первую очередь заметим, что поле пульсационной скорости \mathbf{W} дивергентно и потенциально. Поскольку при этом выполняется соотношение $(\mathbf{W} \nabla) \mathbf{W} = \nabla W^2/2$, усредненная скорость также потенциальна:

$$\mathbf{V} = \text{Re}(-\nabla P - B \nabla W^2). \quad (14)$$

Таким образом, рассматриваемая задача в математическом плане подобна задаче о прямолинейном и равномерном движении шара в вязкой жидкости, и, пользуясь аналогией [7], можно написать решение уравнения (12) для пульсационной компоненты скорости:

$$\mathbf{W} = \mathbf{u} - \frac{R^3}{2r^3} (3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}). \quad (15)$$

Усредненную скорость определяем согласно формуле (14). Предварительно вычислим ∇W^2 :

$$\nabla W^2 = \nabla W_D^2 + \nabla W_P^2,$$

$$\nabla W_D^2 = \frac{3R^3}{r^4} [\mathbf{n} (5(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 - u^2) - 2\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})], \quad (16)$$

$$\nabla W_P^2 = \frac{3R^6}{2r^7} [\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + u^2)].$$

При этом оказывается, что

$$\text{div} \nabla W_D^2 = 0, \quad B \text{div} \nabla W_P^2 = -\text{div} \nabla P. \quad (17)$$

Перенормируем давление так, чтобы выполнялось равенство $\nabla P = -B \nabla W_D^2$. Тогда выражение для скорости (14) принимает вид

$$\mathbf{V} = -B \operatorname{Re} \nabla W_D^2 = 3B \operatorname{Re} \left(\frac{R}{r^2} - \frac{R^3}{r^4} \right) \times \left[\mathbf{n} \left(u^2 - 5 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 \right) + 2 \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right]. \quad (18)$$

Компоненты скорости в сферических координатах записываются как

$$\begin{aligned} V_r &= 3B \operatorname{Re} u^2 \left(\frac{R}{r^2} - \frac{R^3}{r^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \\ V_\theta &= 3B \operatorname{Re} u^2 \left(\frac{R}{r^2} - \frac{R^3}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) получено в предположении, что течение обладает симметрией относительно аксиальной оси. Это означает, что во всей области $V_\varphi = W_\varphi = 0$, т.е. все величины зависят от координат r, θ и не зависят от угла φ . По этой причине в сферической системе координат движение можно рассматривать как двумерное, происходящее в плоскости $\varphi = \text{const}$. Течение является симметричным также относительно плоскости $\theta = 0$.

Введем функцию тока ψ вектора усредненной компоненты скорости:

$$V_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi \sin \theta), \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi). \quad (20)$$

В терминах функции тока решение (19) имеет вид

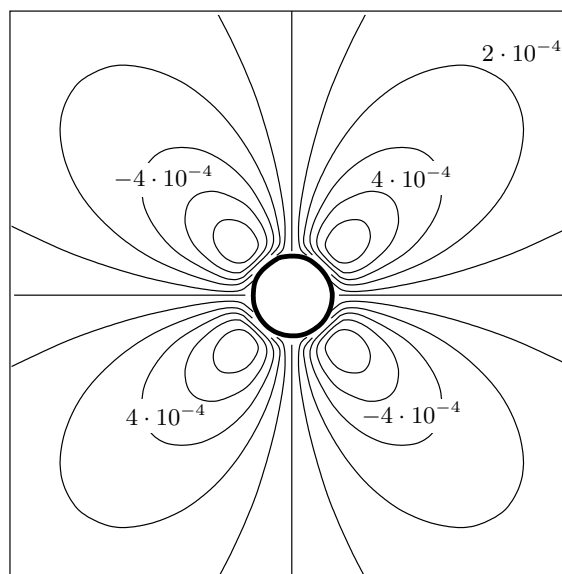
$$\psi = \frac{3}{2} B \operatorname{Re} u^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin 2\theta. \quad (21)$$

На рисунке изображена картина линий тока стационарного вторичного течения. Жидкость притекает к шару вдоль плоскости $\theta = \pi/2$ и растекается в перпендикулярных направлениях вдоль полярной оси. Интенсивность течения быстро убывает с увеличением расстояния от шара.

Анализ процедуры вывода усредненных уравнений показывает, что причиной вторичного течения является наличие конвективного члена в (4) и взаимодействие между инерцией и вязкостью. Поскольку конвективное слагаемое мало по сравнению с остальными, усредненное течение оказывается слабее пульсаций. Для максимальной по области усредненной скорости имеем

$$\left| \frac{V_{max}}{u} \right| \sim \frac{3uB \operatorname{Re}}{R}. \quad (22)$$

Заметим, что в качестве характерного размера L может быть выбран радиус шара R . Тогда $\operatorname{Re} = uK/\nu R$, и во всех выражениях (13)–(22) необходимо положить $R = 1$.



Линии тока вторичного течения: $\operatorname{Re} = 10^{-4}$, $\omega = 10^{-2}$, $\varepsilon = 0.3$, $R = 10^{-2}$

Приведем оценку величины усредненной скорости. Допустим, область с характерным размером $L = 1$ м, заполненная пористым материалом с проницаемостью $K = 10^{-8}$ м² и пористостью $\varepsilon = 0.3$, содержит твердое включение в виде шара радиусом $R = 10^{-2}$ м. Пористый материал насыщен водой при температуре 25 °С, которая совершает осциллирующее движение с амплитудой скорости $u = 10^{-2}$ м/с и с частотой $\Omega = 1$ Гц. В этом случае число Рейнольдса равно 10^{-4} и согласно (22) $V_{max}/u \sim 10^{-1}$. Для твердых включений меньшего размера вторичное течение является более интенсивным. С уменьшением же проницаемости эффект ослабевает. Так, при $K = 10^{-12}$ м, $R = 10^{-4}$ м имеем $V_{max}/u \sim 10^{-3}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование колебательного движения жидкости в пористой среде показывает, что для его теоретического описания следует использовать уравнения более общие, чем законы фильтрации Дарси и Форцгеймера. Различие заключается в том, что помимо учета инерционных эффектов, характерных для высоких скоростей фильтрации, принимаются во внимание слагаемые с ускорением, поскольку для нестационарных течений заметную роль играют пульсации скорости.

Высокочастотные осцилляции жидкости малой амплитуды в пористой среде, содержащей твердые включения, приводят к появлению вторичного усредненного течения. Причиной его возникновения является взаимодействие между вязкостью и инерционными эффектами, обусловленными конвективным ускорением. Упрощения, получающиеся в результате пренебрежения конвективным членом в уравнении переноса импульса, приводят к решениям, которые свободны от вторичных течений, и поэтому могут дать ошибочные представления о решении в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer (1992).
2. K. Vafai and C. L. Tien, *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 195 (1981).
3. K. Vafai and C. L. Tien, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 1183 (1982).
4. Р. Р. Сираев, В. И. Якушин, в сб. *Конвективные течения*, ПГПУ, Пермь (2007), с. 43.
5. Р. Р. Сираев, В. И. Якушин, *Изв. РАН, МЖГ* **2**, 67 (2008).
6. А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Наука, Москва (1976), с. 245.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986), с. 89.