

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ. ЧЕТЫРЕ РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ

*И. И. Вигдорovich**

*Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119192, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 апреля 2014 г.

Исследованы автомодельные течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое, когда скорость набегающего потока задана как степенная (с показателем m) функция продольной координаты. Показано, что существуют четыре различных автомодельных режима течения. Каждому режиму отвечает свой параметр подобия, одним из которых является известный параметр Клаузера, а три других установлены впервые. При неблагоприятном градиенте давления, когда показатель степени m лежит в некотором диапазоне, зависящем от числа Рейнольдса, задача имеет два решения с разными значениями толщины пограничного слоя и трения на стенке, что указывает на возможность гистерезиса в предотрывном течении. Отрыв наступает не при минимальном значении m , которое соответствует наиболее сильному неблагоприятному градиенту давления, а при $m = -0.216 - 0.4 \text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3})$, где Re_p — число Рейнольдса, образованное по продольному градиенту давления. Результаты теории находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

DOI: 10.7868/S0044451014110170

1. ВВЕДЕНИЕ

Автомодельное течение в турбулентном пограничном слое, когда профили усредненных параметров потока в различных поперечных сечениях подобны, возникает при степенной зависимости скорости на внешней границе слоя от продольной координаты (см., например, [1]):

$$u_e(x) = Bx^m, \quad x \geq 0, \quad (1.1)$$

где B — некоторая размерная постоянная. Клаузер [2, 3] для таких течений ввел параметр подобия

$$\beta = -\frac{2\delta^* u_e'}{c_f u_e}, \quad (1.2)$$

где u_e' — производная скорости по продольной координате, c_f — коэффициент трения на стенке, δ^* — толщина вытеснения. Позднее из интеграла импульса была получена связь между показателем степени m и параметром Клаузера [4]:

$$m = -\frac{\beta}{1 + 3\beta}, \quad (1.3)$$

которая, однако, при неблагоприятном (положительном) градиенте давления плохо подтверждается экспериментальными данными. Вообще, несмотря на многолетнюю историю исследования (первая работа Клаузера вышла в 1954 г.), многие основные свойства этого автомодельного течения остаются неясными. На основании работ [1, 5] часть авторов, например, считает, что толщина слоя должна расти линейно, а коэффициент трения на стенке быть постоянным, хотя эти условия не выполняются для простейшего автомодельного течения при нулевом градиенте давления. Другой важный невыясненный вопрос касается области существования (например, в переменных m — число Рейнольдса) и единственности автомодельных решений, а также значения m , при котором происходит отрыв. Имеющиеся по этим вопросам мнения собраны в работе [6] и допускают существование только одного [7, 8], двух [1, 9] или, как в ламинарном случае, континуума автомодельных решений [6, 10] при неблагоприятном градиенте давления в некотором диапазоне значений показателя степени m . Некоторую ясность в этот вопрос внесла работа [11], в которой теоретически на основе асимптотического анализа показано, что при достаточно сильном неблагоприятном градиенте давления задача имеет два решения.

*E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

Оказывается, что существуют четыре качественно различных автомодельных режима течения. Цель настоящей работы — дать их полное описание в терминах законов подобия для основных гидродинамических величин: усредненной скорости, компонент тензора Рейнольдса, интегральных параметров и трения на стенке. В работе [12] сформулированы условия замыкания уравнений движения в виде функциональных связей между компонентами тензора Рейнольдса и поперечным градиентом усредненной скорости, которые являются следствием того факта, что рассматриваемое турбулентное течение в целом зависит только от трех определяющих параметров — входящих в соотношение (1.1) величин B и m и кинематической вязкости жидкости ν . Идея существования таких связей в случае, когда задача зависит от конечного числа определяющих параметров, впервые была сформулирована в работе [13] и затем использовалась в ряде работ, см., например, [14–16]. Уравнения пограничного слоя вместе с условиями замыкания дают поставленную краевую задачу для поля усредненной скорости, которая после специальной замены переменных [17] решается методом сращиваемых асимптотических разложений при больших значениях логарифма числа Рейнольдса, образованного по толщине пограничного слоя.

Для случая благоприятного и умеренного неблагоприятного градиента давления (первый режим течения) решение получено в работе [12] и кратко изложено в разд. 4. Искомые величины в переменных подобия зависят от одного связанного с градиентом давления безразмерного параметра γ , который может изменяться в диапазоне $-1/2 < \gamma \leq \infty$. При $\gamma \rightarrow -1/2$ решение имеет особенность, в соответствии с которой относительная толщина пограничного слоя стремится к бесконечности, но трение на стенке в нуль не обращается. Из этого можно заключить, что особое поведение решения не связано с отрывом пограничного слоя.

Причина возникновения такой неожиданной ситуации исследуется в разд. 5, где рассматривается течение с сильным неблагоприятным градиентом давления (второй характерный режим), когда параметр γ близок к $-1/2$. В этом случае течение определяется новым параметром подобия ω . Относительная толщина пограничного слоя, γ и m немонотонно зависят от ω , что говорит о наличии у автомодельной задачи ровно двух решений в определенном диапазоне параметров. При этом режиме течения коэффициент трения на стенке также не обращается в

нуль, поскольку в главном члене разложения вообще не зависит от градиента давления (параметра ω).

Ситуация, когда продольный градиент давления влияет на трение в главном члене разложения, возникает при третьем, предотрывном, режиме течения (разд. 6). Переход к нему осуществляется при $\omega \rightarrow \infty$ на второй ветви решения. Это означает, что для того чтобы получить предотрывный режим путем непрерывного изменения показателя степени m (начиная, например с $m = 0$), нужно сначала уменьшать m до некоторой минимальной величины (которая вычислена в разд. 5), а затем, когда решение перешло на вторую ветвь, увеличивать m , т. е. снижать продольный градиент давления, делая его более благоприятным. предотрывный режим течения имеет свой параметр подобия Ω . В разд. 6 вычислены предельные значения Ω_* и m_* , при которых трение на стенке обращается в нуль в главном члене разложения.

Последний, четвертый режим течения, при котором наступает отрыв потока, рассматривается в разд. 7. При первом, втором и третьем характерных режимах продольный градиент давления не изменяет представленный в переменных подобия профиль скорости в пристеночной области, который, таким образом, является профилем скорости при нулевом градиенте давления. При сильном уменьшении трения на стенке происходит перестройка течения в пристеночной области, так что влияние продольного градиента становится существенным. Однако полученное условие замыкания [12] вместе с уравнением сохранения импульса позволяют рассчитать профиль скорости в пристеночной области пограничного слоя, находящегося в состоянии отрыва, с помощью известного профиля скорости для пограничного слоя при нулевом градиенте давления. (Заметим, что для вычисления профилей скорости во внешней области пограничного слоя и других параметров мы используем простую приближенную модель [12], наиболее адекватную для рассматриваемого автомодельного течения.)

Раздел 8 посвящен закону трения, который формулируется в виде зависимости числа Рейнольдса, образованного по толщине вытеснения пограничного слоя, от коэффициента трения и трех параметров подобия β , Ω и τ (последний является параметром подобия для четвертого режима). В формулу входят три универсальные функции этих параметров, каждая из которых вычислена из решения, полученного для соответствующего режима течения.

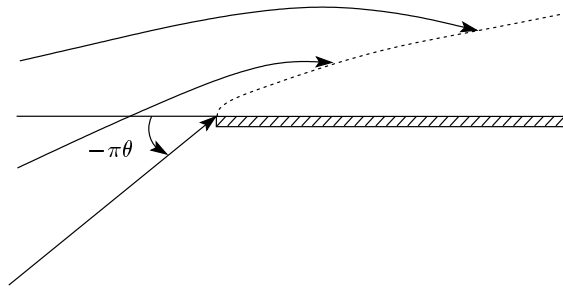


Рис. 1. Пограничный слой на пластине при степенной зависимости скорости от продольной координаты. Показаны линии тока потенциального течения и внешняя граница пограничного слоя

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим обтекание бесконечным потоком несжимаемой жидкости угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Пусть одна из плоскостей является поверхностью тока невязкого течения, а на второй, как показано на рис. 1, в результате выполнения условия прилипания образуется турбулентный пограничный слой. Тогда распределение скорости на его внешней границе, если пренебречь эффектом вытеснения, будет задано уравнением (1.1), в котором показатель степени связан с углом между плоскостями $\pi\theta$ равенством

$$m = \frac{\theta}{1 - \theta}, \quad -1 < \theta < 1.$$

2.1. Условия замыкания

Таким образом, величины B и m полностью задают потенциальное обтекание угла, а для определения турбулентного течения в пограничном слое необходимо дополнительно задать только кинематическую вязкость жидкости ν . Поэтому любая усредненная характеристика рассматриваемого течения, в частности, турбулентное касательное напряжение и поперечный градиент усредненной продольной компоненты скорости являются функциями декартовых координат x, y и величин B, m и ν :

$$\langle u'v' \rangle = F_1(x, y, \nu, B, m), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x, y, \nu, B, m). \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение толщину пограничного слоя

$$\Delta = F_3(x, \nu, B, m) \quad (2.3)$$

как некоторую величину, характеризующую поперечный масштаб турбулентного течения. Например, как это обычно делается на практике, толщиной пограничного слоя можно считать расстояние до стенки, на котором усредненная скорость на 1% отличается от u_e . Разрешая уравнения (2.2), (2.3) относительно величин x и B и подставляя их в (2.1), получим соотношение

$$\langle u'v' \rangle = F_4 \left(\Delta, y, \nu, \frac{\partial u}{\partial y}, m \right),$$

из которого после применения П-теоремы следует равенство

$$\langle u'v' \rangle = - \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 S(\text{Re}, \eta, m), \quad (2.4)$$

$$\text{Re} = \frac{y^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}.$$

Здесь S — непрерывная функция трех переменных.

Вблизи стенки, в вязком подслое переменную η в формуле (2.4) можно положить равной нулю. В этой области продольный градиент давления не оказывает влияния на течение, если только трение на стенке не очень мало. Это означает, что при всех положительных m , т. е. при благоприятном градиенте давления, и в некотором диапазоне отрицательных значений m должно выполняться равенство

$$S(\text{Re}, 0, m) = S_i(\text{Re}), \quad \text{Re} \geq 0, \quad (2.5)$$

где S_i — универсальная функция. Переходя в (2.5) к пределу при $\text{Re} \rightarrow \infty$, получим

$$S(\infty, 0, m) = S_i(\infty) = \varkappa^2, \quad (2.6)$$

где \varkappa — постоянная Кармана. Можно считать S непрерывной и дифференцируемой функцией своих аргументов. Мы поставим более слабые условия:

$$S(\text{Re}, \eta, m) = S_i(\text{Re}) + O(\eta^{\alpha_1}),$$

$$\eta \rightarrow 0, \quad \text{Re} = O(1),$$

$$S_i(\text{Re}) = \varkappa^2 + O(\text{Re}^{-\alpha_2}), \quad \text{Re} \rightarrow \infty,$$

$$S(\text{Re}, \eta, m) = S(\infty, \eta, m) + O(\text{Re}^{-\alpha_2}), \quad (2.7)$$

$$\text{Re} \rightarrow \infty, \quad 1/\eta = O(1),$$

$$S(\infty, \eta, m) = \varkappa^2 + O(\eta^{\alpha_1}),$$

$$\eta \rightarrow 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Условия (2.7) представляют собой математическую формулировку основного, восходящего еще к Карману [18], физического предположения, согласно которому в рассматриваемом течении есть только два

характерных масштаба длины — вязкий (определяющий толщину вязкого подслоя у стенки) и внешний (толщина пограничного слоя). При больших числах Рейнольдса молекулярная вязкость не существенна вне вязкого подслоя, а внешний масштаб не оказывает влияния на течение в пристеночной области.

Для других компонент тензора Рейнольдса имеют место представления, аналогичные (2.4),

$$\langle u'^2 \rangle = \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 S_1(\text{Re}, \eta, m), \quad (2.8)$$

выражения для $\langle v'^2 \rangle$ и $\langle w'^2 \rangle$ получаются путем замены индекса функции S_1 на 2 и 3, соответственно.

2.2. Замена переменных

Функция тока $\psi(x, y)$ усредненного течения удовлетворяет уравнению (см., например, [1])

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = u_e u'_e + (\nu \psi_{yy} - \langle u'v' \rangle)_y + \langle (v'^2) - (u'^2) \rangle_x. \quad (2.9)$$

От обычного уравнения пограничного слоя (2.9) отличается последним слагаемым в правой части, которое в первом приближении позволяет учесть изменение давления поперек слоя. Перейдем к новым переменным по формулам [17]

$$\psi = u_e \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \xi = \ln \text{Re}_\Delta, \quad \text{Re}_\Delta = \frac{u_e \Delta}{\nu}, \quad (2.10)$$

используя в качестве независимых переменных логарифм числа Рейнольдса Re_Δ , образованного по толщине пограничного слоя, и относительное расстояние до стенки. С учетом условий замыкания (2.4), (2.8) уравнение (2.9) в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - (\Psi + \Psi_\xi)\Psi_{\eta\eta} + \gamma(\Psi_\eta^2 - 1)] = \\ = \left[(\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(\text{Re}, \eta, m) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} \right]_\eta + \\ + \Lambda \left[\frac{\partial}{\partial \xi} + (\gamma - 1)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ \times (\eta \Psi_{\eta\eta})^2 [S_2(\text{Re}, \eta, m) - S_1(\text{Re}, \eta, m)], \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} = e^\xi \eta^2 \Psi_{\eta\eta}; \\ \xi > -\infty, \quad \eta = 0: \quad \Psi_\eta = 0, \quad \Psi = 0; \\ \eta \rightarrow \infty, \quad \Psi_\eta \rightarrow 1; \quad (2.12) \\ \Lambda(\xi) = \frac{d(u_e \Delta)}{u_e dx}, \quad \gamma(\xi) = \frac{d \ln u_e}{d\xi}. \end{aligned}$$

Кроме безразмерной функции тока Ψ в уравнение (2.11) входит вторая неизвестная функция $\Lambda(\xi)$, градиент давления задает функция $\gamma(\xi)$.

Уравнение (2.11) удобно для асимптотического исследования. Переменная ξ , равная логарифму числа Рейнольдса, является большой величиной, что позволяет искать асимптотическое решение задачи при $\xi \rightarrow \infty$. Кроме того, согласно равенству

$$\frac{d\Delta}{dx} = \Lambda(1 - \gamma), \quad (2.13)$$

которое следует из (2.12), скорость продольного изменения толщины пограничного слоя и функция $\Lambda(\xi)$ — величины одного порядка, поэтому, по крайней мере вне области отрыва, последнюю можно считать малой по сравнению с единицей, $\Lambda \ll 1$.

3. ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ

В пристеночной области пограничного слоя решение будем искать в переменных

$$\begin{aligned} y_+ = \frac{y u_e}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} = \eta e^\xi \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \\ u_+ = \frac{u}{u_e \sqrt{c_f/2}} = \frac{\Psi_\eta}{\sqrt{c_f/2}}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение (2.9) поперек слоя и перейдем к независимым переменным ξ и y_+ . Для функции $u_+(\xi, y_+)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(y_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right)^2 S(\text{Re}, \eta, m) + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} - 1 = \\ = -\gamma \Lambda e^{-\xi} \left(\frac{2}{c_f} \right)^{3/2} y_+ + \dots, \quad (3.2) \\ \text{Re} = y_+^2 \frac{\partial u_+}{\partial y_+}, \quad \eta = \frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}}. \end{aligned}$$

В правой части здесь стоит член, связанный с градиентом давления, многоточием обозначены слагаемые, меньшие по порядку величины при $\xi \rightarrow \infty$. Как видно из (3.2), продольный градиент существен в пристеночной области только при очень малом, порядке

$$\Lambda^{2/3} e^{-2\xi/3} = \Lambda^{2/3} \text{Re}_\Delta^{-2/3},$$

коэффициенте трения на стенке. Мы сначала будем рассматривать случай, когда

$$c_f = O(\xi^{-2}).$$

Переходя в (3.2) к пределу при

$$\xi \rightarrow \infty, \quad y_+ = O(1)$$

и принимая во внимание соотношение (2.7), получим, что первый член разложения скорости

$$u_+(\xi, y_+) = U_+(y_+) + O(e^{-\alpha\xi}), \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(y_+ \frac{dU_+}{dy_+}\right)^2 S_i(\text{Re}) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1, \quad (3.4)$$

$$\text{Re} = y_+^2 \frac{dU_+}{dy_+}, \quad U_+(0) = 0,$$

которое имеет логарифмическую асимптотику во внешней части пристеночной области [12]:

$$U_+ = \frac{1}{\varkappa}(\ln y_+ + C) + O(y_+^{-\alpha}), \quad (3.5)$$

$$y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

В соответствии с экспериментальными данными примем $C = 2.05$.

Таким образом, если пограничный слой не находится в состоянии близком к отрыву, когда трение на стенке очень мало, закон стенки для профиля скорости имеет тот же вид, что при нулевом градиенте давления. Наиболее убедительно этот факт экспериментально подтвержден в работе [19].

4. БЛАГОПРИЯТНЫЙ И УМЕРЕННЫЙ НЕБЛАГОПРИЯТНЫЙ ГРАДИЕНТЫ ДАВЛЕНИЯ

В работе [12] решение автомодельной задачи получено в виде следующих асимптотических разложений:

$$\gamma(\xi) = \gamma_0(1 + \zeta^{-1}) + O(\zeta^{-2}), \quad \gamma_0 = \frac{m}{1+m}, \quad (4.1)$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{\varkappa \zeta^{-1}}{\sqrt{-f(\infty, \gamma_0)(1+\gamma_0)(1+2\gamma_0)}} + O(\zeta^{-2}), \quad (4.2)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \eta + \Lambda(\xi)(1 + \gamma_0)f(\eta, \gamma_0) + O(\zeta^{-2}), \quad (4.3)$$

$$\zeta \rightarrow \infty,$$

справедливых при больших значениях переменной ζ , которая введена по формуле

$$\xi = \zeta + \ln \zeta.$$

Здесь функция f удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{2\gamma_0 f' - \eta f''}{1 + \gamma_0} = [(\eta f'')^2 S(\infty, \eta, m)]', \quad (4.4)$$

$$f(0, \gamma_0) = f'(\infty, \gamma_0) = 0,$$

решение которого имеет логарифмическую асимптотику на стенке

$$f'(\eta, \gamma_0) = \frac{\sqrt{-f(\infty, \gamma_0)}}{\varkappa} \sqrt{\frac{1+2\gamma_0}{1+\gamma_0}} \times$$

$$\times \left[\ln \eta + A(\gamma_0) - \ln \sqrt{-f(\infty, \gamma_0)} \right] + O(\eta^\alpha), \quad (4.5)$$

$$\eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0,$$

где $A(\gamma_0)$ — некоторая функция.

Решение (4.2), (4.3) описывает течение при благоприятном и умеренном неблагоприятном градиентах давления. Во внешней области в этом случае справедлив закон дефекта скорости [12]

$$\frac{1-u/u_e}{\sqrt{c_f/2-\delta^*u'_e/u_e}} = -\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{\sqrt{-f(\infty, \gamma_0)}} + O(\sqrt{c_f}), \quad (4.6)$$

который обобщает известный закон дефекта скорости Кармана [1] на случай течения с градиентом давления. Параметром подобия является параметр Клаузера (1.2), который связан с показателем степени m соотношением (1.3), а с параметром γ_0 — соотношением

$$\gamma_0 = -\frac{\beta}{1+2\beta} + O(\xi^{-1}). \quad (4.7)$$

Из выражения (4.5) следует, что параметр, задающий градиент давления, должен подчиняться условию $\gamma_0 > -1/2$. В предельном случае $\gamma_0 = -1/2$ функция

$$g(\eta) = f(\eta, -1/2)$$

представляет собой решение уравнения

$$(\eta g'')^2 S(\infty, \eta, -1/3) + 2\eta g' = 0; \quad (4.8)$$

$$g(0) = g'(\infty) = 0,$$

и имеет на стенке степенную асимптотику

$$g'(\eta) = g'(0) + \frac{2\sqrt{-2g'(0)\eta}}{\varkappa} + o(\sqrt{\eta}), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Поскольку функция g' не имеет требуемой логарифмической асимптотики, в работе [12] рассматривалась область вблизи стенки, в которой

$$\eta = \frac{(1+2\gamma_0)\sqrt{-g(\infty)}}{D_0} \eta_0, \quad (4.10)$$

$$\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{\sqrt{-g(\infty)}} = -D_0 + \sqrt{2(1+2\gamma_0)} h(\eta_0) + \dots,$$

$$D_0 = \frac{-g'(0)}{\sqrt{-g(\infty)}}. \quad (4.11)$$

Подстановка (4.10) в (4.4) и переход к пределу при $\gamma_0 \rightarrow -1/2$, $\eta_0 = O(1)$ дают для функции $h(\eta_0)$ уравнение

$$(\varkappa\eta_0 h')^2 = 1 + \eta_0, \quad (4.12)$$

а сращивание с асимптотикой (4.9) — дополнительное условие

$$h = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{\eta_0} + o(1), \quad \eta_0 \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

с учетом которого интеграл уравнения (4.12) принимает вид

$$h = \frac{1}{\varkappa} \left[\ln \eta_0 + 2\sqrt{1+\eta_0} - 2 \ln \left(1 + \sqrt{1+\eta_0} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Из сопоставления асимптотического представления (4.5) с (4.10) и (4.14) следует асимптотика функции A при $\gamma_0 \rightarrow -1/2$:

$$A(\gamma_0) = -\frac{\varkappa D_0}{\sqrt{2(1+2\gamma_0)}} - \ln(1+2\gamma_0) + \ln \frac{D_0}{4} + 2 + \Phi \left(\frac{1+2\gamma_0}{1+\gamma_0} \right), \quad \Phi(0) = 0. \quad (4.15)$$

Таким образом, при $\gamma_0 \rightarrow -1/2$ внешняя область пограничного слоя приобретает двухслойную структуру. Над логарифмическим подслоем вблизи стенки образуется промежуточная область — градиентный подслой [20], во внешней части которого профиль скорости подчиняется закону квадратного корня (4.9), (4.13), что характерно для течений с сильным неблагоприятным градиентом давления [20].

Для коэффициента трения в работе [12] получено выражение

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \varkappa\zeta^{-1} - \varkappa\zeta^{-2} \times \left[\ln(\varkappa\sqrt{-f(\infty, \gamma_0)}) - A(\gamma_0) + C \right] + O(\zeta^{-3}), \quad (4.16)$$

в котором C — постоянная в логарифмическом законе (3.5).

В работе [12] выполнен расчет профилей скорости, основанный на предположении, что входящая в условие замыкания (2.4) функция $S(\infty, \eta, m)$ не зависит от m . В этом случае она может быть определена из уравнения (4.4) по одному известному профилю скорости, в качестве которого выбран профиль скорости $f'(\eta, 0)$ в пограничном слое при нулевом градиенте давления. Результаты такого приближенного расчета скорости и касательного напряжения очень хорошо соответствуют экспериментальным данным. Все расчеты, которые выполнены в данной работе, также основаны на этом предположении. В расчетах используется функция S , определенная в [12].

5. СИЛЬНЫЙ НЕБЛАГОПРИЯТНЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

Решение (4.2), (4.3) становится непригодным при $\gamma_0 \rightarrow -1/2$ ($m \rightarrow -1/3$), поскольку относительная толщина пограничного слоя в этом случае, согласно формуле (4.2), стремится к бесконечности. В то же время коэффициент трения на стенке к нулю не стремится, потому что, как видно из (4.16), в главном члене вообще не зависит от γ_0 . Последнее обстоятельство наталкивает на мысль, что особенность решения не связана с отрывом пограничного слоя. Исследуем поведение решения рассматриваемой задачи при $\gamma \rightarrow -1/2$, когда реализуется режим течения с сильным неблагоприятным градиентом давления.

Для дальнейшего удобно перейти в уравнении (2.11) от функции тока Ψ к новой искомой функции Φ по формуле

$$\Psi(\xi, \eta) = \eta + \Lambda(\xi)\Phi(\xi, \eta). \quad (5.1)$$

Проинтегрировав уравнение (2.11) поперек слоя, с учетом условий в набегающем потоке получим

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\gamma + \frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) [\Phi - \Phi(\xi, \infty)] - \eta\Phi_\eta - \\ & - \Lambda\Phi_\eta \left(1 + \frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Phi - \\ & - \Lambda \left(1 + \gamma + 2\frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \int_\eta^\infty \Phi_\eta^2 d\eta = \\ & = (\eta\Phi_{\eta\eta})^2 S(\infty, \eta, m) + \Lambda(1 - \gamma) \times \\ & \times \eta^3 \Phi_{\eta\eta}^2 [S_1(\infty, \eta, m) - S_2(\infty, \eta, m)] + \\ & + \Lambda \left(1 - \gamma + 2\frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \times \\ & \times \int_\eta^\infty (\eta\Phi_{\eta\eta})^2 [S_1(\infty, \eta, m) - S_2(\infty, \eta, m)] d\eta. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Уравнение (5.2) рассматривается во внешней области пограничного слоя, при этом в правой части опущено слагаемое, связанное с молекулярным трением.

5.1. Внешняя область

Представим функцию $\gamma(\xi)$ в виде

$$\gamma(\xi) = -\frac{1}{2} + \sigma\zeta^{-2/3} + O(\zeta^{-1}), \quad (5.3)$$

где σ — некоторый параметр. Выбор порядка малости второго слагаемого в (5.3) будет обоснован ниже.

Подставляя выражение (5.3) в решение (4.2), (4.16), с учетом асимптотики (4.15) получим

$$\Lambda(\xi) = \frac{\varkappa \zeta^{-2/3}}{\sqrt{-g(\infty)\sigma}} + O(\zeta^{-4/3}), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c_f(\xi)}{2}} &= \frac{\varkappa}{\zeta} - \frac{\varkappa^2 D_0}{2\zeta^{5/3}\sqrt{\sigma}} - \\ &- \frac{\varkappa}{\zeta^2} \left(\ln \frac{8\varkappa\sigma\sqrt{-g(\infty)}}{D_0\zeta^{2/3}} - 2 + C \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из (5.4) следует, что при сильном неблагоприятном градиенте давления функцию Λ нужно искать в виде

$$\Lambda(\xi) = \frac{2\varkappa^{2/3}\omega(\sigma)}{\zeta^{2/3}\sqrt{-g(\infty)}} + O(\zeta^{-4/3}), \quad (5.6)$$

где функция $\omega(\sigma)$ удовлетворяет условию срачивания

$$\omega(\sigma) \rightarrow \frac{\varkappa^{1/3}}{2\sqrt{\sigma}}, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Теперь рассмотрим две характерные области во внешней части пограничного слоя. В силу малости величин $1 + 2\gamma$ и Λ и частных производных по переменной ξ только второе слагаемое в левой и первое в правой части уравнения (5.2) имеют порядок единицы. Подставляя (5.3), (5.6) в уравнение (5.2) и переходя к пределу

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad 1/\eta = O(1),$$

для функции 2Φ получим уравнение (4.8), следовательно при $1/\eta = O(1)$ выполняется равенство

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{g(\eta)}{2} + O(\zeta^{-2/3}). \quad (5.8)$$

Вблизи стенки нужно рассмотреть градиентный подслой толщиной порядка $\zeta^{-2/3}$, в котором кроме указанных выше членов нужно учесть вклад первого и последнего слагаемых в левой части и последнего слагаемого в правой части уравнения (5.2). Теперь ясно, что показатель степени второго члена разложения (5.3) выбран так, чтобы вблизи стенки существенную роль играло максимальное число членов уравнения (5.2). Введем в градиентном подслое новые переменные по формулам

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L\sqrt{-g(\infty)}}{2D_0\zeta^{2/3}}\eta_0, \\ \frac{2\Phi_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{-g(\infty)}} &= -D_0 + \zeta^{-1/3}\sqrt{L}h(\eta_0) + O(\zeta^{-2/3}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$L = 4\sigma - \varkappa^{2/3}\omega[G + 3H], \quad (5.10)$$

$$G = \int_0^\infty \frac{g'^2(\eta) d\eta}{[-g(\infty)]^{3/2}}, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\infty \frac{(\eta g'')^2}{[-g(\infty)]^{3/2}} \times \\ &\times [S_1(\infty, \eta, -1/3) - S_2(\infty, \eta, -1/3)] d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя (5.3), (5.9) в уравнение (5.2) и переходя к пределу при

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad \eta_0 = O(1),$$

получим, что функция h удовлетворяет уравнению (4.12) и дополнительному условию (4.13) и, следовательно, имеет вид (4.14).

5.2. Срачивание с решением в пристеночной области

Асимптотика профиля скорости на стенке согласно (5.1), (5.6), (5.9) и (4.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_e} &= 1 - \frac{\varkappa^{2/3}D_0\omega}{\zeta^{2/3}} + \frac{\omega\sqrt{L}}{\varkappa^{1/3}\zeta} \times \\ &\times \left[\ln \eta + \ln \frac{D_0\zeta^{2/3}}{2L\sqrt{-g(\infty)}} + 2 + O(\eta^\alpha) \right] + \\ &+ O(\zeta^{-4/3}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для того чтобы обеспечить условие срачивания с решением при умеренном неблагоприятном градиенте давления коэффициент трения на стенке, принимая во внимание (5.5), будем искать в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c_f(\xi)}{2}} &= \frac{\varkappa}{\zeta} \left(1 - \frac{t_1}{\zeta^{2/3}} + \frac{2 \ln \zeta}{3\zeta} + \frac{t_2}{\zeta} \right) + \\ &+ O(\zeta^{-7/3}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Коэффициенты ω, t_1, t_2 подлежат определению при срачивании с решением в пристеночной области.

Связь между внешними и внутренними переменными задается равенствами

$$\begin{aligned} \ln y_+ &= \ln \eta + \zeta + \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \\ u_+ &= \frac{u}{u_e \sqrt{c_f/2}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (5.12), (5.14) и логарифмического закона (3.5) получим условие сращивания [21]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left(\ln \eta + \zeta + \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} + C \right) = \\ & = 1 - \frac{\varkappa^{2/3} D_0 \omega}{\zeta^{2/3}} + \frac{\omega \sqrt{L}}{\varkappa^{1/3} \zeta} \left(\ln \eta + \ln \frac{D_0 \zeta^{2/3}}{2L \sqrt{-g(\infty)}} + 2 \right) + \\ & \quad + O(\zeta^{-4/3}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при $\ln \eta$ будем иметь

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \frac{\omega \varkappa^{2/3} \sqrt{L}}{\zeta} + O(\zeta^{-4/3}). \quad (5.16)$$

Для того чтобы это разложение согласовывалось с (5.13), второе слагаемое должно быть порядка $\zeta^{-5/3}$, а не порядка $\zeta^{-4/3}$, т.е. слагаемое порядка $\zeta^{-4/3}$ в разложении (5.12) не должно содержать логарифма. Это накладывает условие на следующий член разложения (5.9). Подстановка (5.13) в (5.15) и (5.16) дает

$$\begin{aligned} \omega \sqrt{L} &= \varkappa^{1/3}, \quad t_1 = D_0 \varkappa^{2/3} \omega, \\ t_2 &= 2 - C - \ln \frac{2 \varkappa^{4/3} \sqrt{-g(\infty)}}{D_0 \omega^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.3. Двухзначность решения. Параметр подобия

Первое соотношение (5.17) при учете (5.10) можно записать в виде

$$\sigma = \frac{\varkappa^{2/3}}{4\omega^2} + \frac{\varkappa^{2/3} \omega}{4} [G + 3H]. \quad (5.18)$$

Зависимость σ от ω немонотонна. При $\omega \rightarrow 0$ получаем связь (5.7). Минимум достигается при

$$\omega_t = 2^{1/3} [G + 3H]^{-1/3}. \quad (5.19)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ величина σ неограниченно возрастает. С ростом ω растет толщина пограничного слоя, а коэффициент трения на стенке, как видно из (5.13), (5.17), убывает. Таким образом, когда показатель степени m в законе (1.1) близок к предельной величине $-1/3$, задача имеет два решения с разными значениями толщины пограничного слоя и трения на стенке.

Из второго равенства (2.12) следует формула

$$m = \frac{d \ln u_e}{d \ln x} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{d \ln \Delta}{d \ln x}. \quad (5.20)$$

Здесь для второго сомножителя на основании (2.13), (5.6) справедлива оценка

$$\frac{x}{\Delta} \frac{d \Delta}{d x} = 1 + O(\zeta^{-1}),$$

с учетом которой из (5.3), (5.20) получим

$$m = -\frac{1}{3} + \frac{4\sigma(\omega)}{9} \zeta^{-2/3} + O(\zeta^{-1}). \quad (5.21)$$

Из (2.12) следует равенство

$$\gamma = \frac{\Delta u'_e}{\Lambda u_e}, \quad (5.22)$$

с помощью которого число Рейнольдса Re_p , образованное по продольному градиенту давления, можно представить в виде

$$Re_p \equiv -\frac{u_e^2}{u'_e \nu} = -\frac{Re_\Delta}{\gamma \Lambda}. \quad (5.23)$$

Подставляя в (5.23) соотношение (5.6), будем иметь

$$Re_p = \frac{\zeta^{5/3} e^\zeta \sqrt{-g(\infty)}}{\varkappa^{2/3} \omega} \left[1 + O(\zeta^{-2/3}) \right]. \quad (5.24)$$

Соотношения (5.21), (5.24) задают зависимость показателя степени m от числа Рейнольдса.

Рассмотрим как меняется состояние пограничного слоя на некотором фиксированном расстоянии от передней кромки при изменении показателя степени m , чего можно достичь, изменяя угол $\pi\theta$ между плоскостями (см. рис. 1). Угол можно уменьшать до некоторого предельного значения, ниже которого решения нет, хотя трение на стенке в нуль не обращается. Если после прохождения нижней точки начать увеличивать угол $\pi\theta$, может возникнуть явление гистерезиса с переходом решения на вторую ветвь, дальнейшим увеличением толщины пограничного слоя и снижением трения на стенке. Как будет показано в следующем разделе, именно на этой ветви решения при некотором значении γ , отличающемся от $-1/2$ на конечную величину, происходит обращение коэффициента трения в нуль, т.е. отрыв пограничного слоя.

Соотношения (5.21), (5.24) позволяют вычислить параметр ω , при котором показатель степени m достигает минимума, если Re_p фиксировано. Это значение равно

$$\omega = \omega_t \left[1 + \frac{1 + O(\zeta^{-1/3})}{3\zeta + 5} \right]. \quad (5.25)$$

Интеграл H неизвестен, однако, как будет показано в следующем разделе, его величиной по сравнению с $G = 7.02$ можно пренебречь, что позволяет

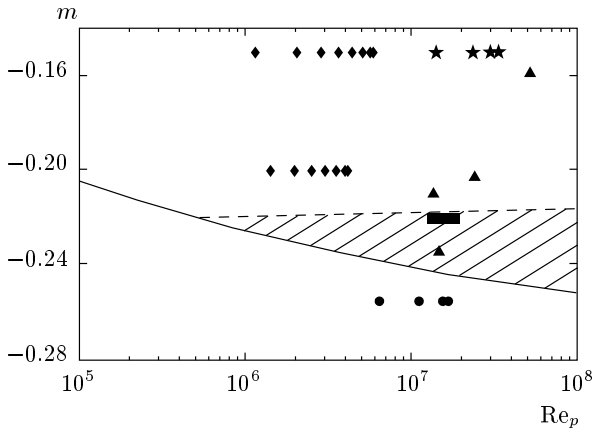


Рис. 2. Граница области существования автомоделного решения (сплошная кривая), линия отрыва (штриховая кривая), область гистерезиса (заштрихована) и данные измерений: • — [22], ★ — [23], ◆ — [24], ▲ — [9], ■ — [19]

дать оценку $\omega_t \approx 0.67$ и рассчитать на основании (5.21)–(5.25) кривую, задающую нижнюю границу области существования автомоделного решения на плоскости Re_p, m . Эта граница показана на рис. 2, из которого видно, что поправка на число Рейнольдса является очень существенной, и при значениях Re_p , наблюдавшихся в экспериментах, минимум показателя степени сильно отличается от предельной величины $m = -1/3$. Приведенные на рис. 2 экспериментальные данные в целом подтверждают выводы теории; ниже расчетной кривой лежат только точки [22], хотя и в этом случае рассогласование с расчетом невелико и составляет 6–7%. (Следует иметь в виду, что показатель степени m в ряде работ определен весьма приблизительно.)

На основании (5.1), (5.6), (5.8) профиль скорости во внешней области пограничного слоя можно представить в виде

$$\frac{u_e - u}{u_e} = -\frac{\varkappa^{2/3} \omega g'(\eta)}{\zeta^{2/3} \sqrt{-g(\infty)}} + O(\zeta^{-4/3}).$$

Сопоставляя это равенство с законом дефекта скорости (4.6), получим

$$\omega \left(\frac{\varkappa}{\zeta}\right)^{2/3} = \sqrt{\frac{c_f}{2} - \frac{\delta^* u_e'}{u_e}} + O(\zeta^{-4/3}). \quad (5.26)$$

Поскольку согласно (5.13) переменную ζ можно выразить через коэффициент трения, выражение параметра ω через измеряемые величины имеет вид

$$\omega = \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1/6} \sqrt{1 + \beta}. \quad (5.27)$$

Таким образом, рассмотренный режим течения с сильным неблагоприятным градиентом давления возникает при больших значениях параметра Клаузера β , когда величина (5.27) становится порядка единицы. В этом случае именно ω , а не β , является параметром подобия.

В таблице приведены значения параметра ω для известных экспериментов в автомоделном пограничном слое с неблагоприятным градиентом давления. Как видно из таблицы, не менее половины всех профилей скорости получены при $\omega > 0.67$ и, следовательно, не описываются теорией, данной в работе [12] (см. разд. 4).

6. ПРЕДОТРЫВНЫЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим режим течения, при котором главный член разложения трения на стенке может обратиться в нуль. Для оценок используем решение, полученное в предыдущем разделе. Как видно из выражения (5.13), существенное изменение трения происходит, когда первые два члена разложения становятся одного порядка малости, для чего, согласно (5.17), параметр ω должен достичь величины порядка $\xi^{2/3}$. В этом случае, как видно из (5.3), (5.6), величины $1 + 2\gamma$ и Λ имеют порядок единицы. То обстоятельство, что относительная толщина слоя Λ в предотрывном течении больше не стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, строго говоря, означает, что приближение пограничного слоя перестает быть справедливым, и течение должно описываться полными уравнениями Рейнольдса.

Однако, как указано, например, в работе [28], анализ течения вблизи точки отрыва можно выполнить, оставаясь в рамках уравнений пограничного слоя, если принять во внимание величину компонент тензора Рейнольдса. На рис. 2 и 3 работы [12] видно, что характерное значение безразмерного пути смещения вне логарифмического подслоя не превышает 0.1 (обычно принимается равным 0.08). Следовательно, характерное значение функции $S(\infty, \eta, m)$ в этой области меньше 0.01. Поскольку во внешней области пограничного слоя все компоненты тензора Рейнольдса — величины одного порядка, аналогичную оценку можно дать для функций $S_1(\infty, \eta, m)$ и $S_2(\infty, \eta, m)$. Как следует из уравнения импульсов (2.11), функции $\Lambda(\xi)$ и $S(\infty, \eta, m)$ должны иметь один порядок величины. Тогда последнее слагаемое в правой части (2.11), имеющее квадратичный порядок малости, можно отбросить, и течение будет описываться обычным уравнением пограничного слоя. По этой же причине величина параметра H в форму-

Таблица. Параметры, характеризующие профили скорости, измеренные в автомодельном пограничном слое при неблагоприятном градиенте давления

Источник	β	ω	Ω	m	$Re_{\delta^*} \cdot 10^{-4}$	Обозначение	
Clauser (1954) [2, 3] течение 1	1.358	0.492			0.890		
	1.715	0.518			1.282		
	1.704	0.517			1.403		
	1.732	0.522			1.695		
	1.891	0.539			2.023		
	2.164	0.558			2.266		
	2.172	0.560			2.335		
	2.349	0.573			2.516		
	течение 2	4.638	0.696	0.0543		1.436	
		5.517	0.736	0.0563		1.741	
		5.928	0.753	0.0571		2.027	
		6.258	0.766	0.0576		2.332	
		7.531	0.832	0.0635		3.069	○
		8.700	0.886	0.0679		3.693	△
		12.07	1.012	0.0761		4.645	
		16.28	1.147	0.0846		5.452	
Stratford (1959) [25] эксперимент 5	5.341	0.730	0.0564		0.857		
	4.613	0.710	0.0578		0.969		
	7.754	0.877	0.0726		1.214	○	
	13.61	1.112	0.0907		1.600		
	эксперимент 6	26.92	1.347	0.0860		1.121	△
		31.32	1.441	0.0911		1.495	▽
		68.77	1.956	0.1065		2.538	
		78.99	2.073	0.1106		3.128	
Bradshaw (1966) [23]	0.869	0.443		-0.15	1.423		
	0.824	0.433		-0.15	2.130		
	0.858	0.433		-0.15	2.643		
	0.973	0.442		-0.15	3.134		
Bradshaw, Ferriss (1965) [22]	5.208	0.744	0.0608	-0.255	2.379		
	5.139	0.737	0.0595	-0.255	4.008		
	4.292	0.685	0.0546	-0.255	4.676	◇	
	5.172	0.733	0.0584	-0.255	5.705		

ле (5.18) много меньше чем G и в расчетах ее можно не учитывать.

Аналогичная ситуация имеет место в задачах о турбулентной струе или слое смешения. Относительная толщина (угол расширения) автомодельной

струи или слоя смешения не зависит от числа Рейнольдса и является конечной величиной, достаточно малой, однако, чтобы уравнение пограничного слоя описывало течение с хорошей точностью.

Заметим, что еще Г. М. Бам-Зеликович при вы-

Таблица. Продолжение

Источник	β	ω	Ω	m	$Re_{\delta^*} \cdot 10^{-4}$	Обозначение	
Andersen, Kays, Moffat (1972) [24] течение 1	0.674	0.458		-0.15	0.154		
	0.686	0.448		-0.15	0.239		
	0.696	0.442		-0.15	0.306		
	0.708	0.440		-0.15	0.375		
	0.685	0.434		-0.15	0.422		
	0.693	0.433		-0.15	0.480		
	0.685	0.430		-0.15	0.522		
	0.712	0.433		-0.15	0.549		
	течение 2	1.201	0.515		-0.20	0.165	
		1.559	0.528		-0.20	0.286	
		1.626	0.528		-0.20	0.385	
		1.630	0.524		-0.20	0.468	
		1.577	0.516		-0.20	0.528	
		1.547	0.510		-0.20	0.585	
		1.575	0.510		-0.20	0.655	
1.750	0.525		-0.20	0.729			
Orlando, Moffat, Kays (1974) [26]	6.531	0.816	0.0671	-0.275	0.620		
	7.171	0.841	0.0683	-0.275	0.790		
	6.224	0.812	0.0688	-0.275	0.928	Δ	
	6.112	0.814	0.0704	-0.275	1.090	∇	
East, Sawyer, Nash (1979) [9]	0.466	0.386		-0.159	2.551		
	1.89	0.523		-0.203	3.874	Δ	
	7.27	0.821	0.0627	-0.234	5.824	\circ	
	61.6	1.824	0.0961	-0.210	12.702	\square	
Skåre, Krogstad (1994) [19]	19.9	1.180	0.0766	-0.22	7.847	\bullet	
	20.0	1.180	0.0763	-0.22	8.312	Δ	
	19.6	1.169	0.0757	-0.22	8.835	\blacktriangle	
	20.1	1.179	0.0758	-0.22	9.241	\square	
	20.2	1.180	0.0757	-0.22	9.806	\blacksquare	
	21.2	1.200	0.0761	-0.22	10.186	\diamond	
	21.4	1.204	0.0761	-0.22	10.718	\blacklozenge	
Skote, Henningson, Henkes (1998) [27]	0.24	0.414		-0.077	0.063		
	0.24	0.404		-0.077	0.105		
	0.65	0.471		-0.15	0.074		
	0.65	0.460		-0.15	0.111		

воде известного критерия отрыва турбулентного пограничного слоя (см., например, [29]) считал относительную толщину слоя конечной.

6.1. Внешняя область

Во внешней области пограничного слоя решение будем искать в виде

$$\gamma = \gamma_0 + O(\xi^{-2}), \quad \Phi(\xi, \eta) = -\gamma_0\varphi(\eta) + O(\xi^{-2}),$$

$$\Lambda(\xi) = -\frac{\Omega}{\gamma_0\sqrt{-\varphi(\infty)}} + O(\xi^{-2}). \quad (6.1)$$

Здесь Ω — некоторый параметр. Подстановка (6.1) в уравнение (5.2) дает

$$\frac{1+2\gamma_0}{\gamma_0}[\varphi(\infty) - \varphi] + \frac{\eta\varphi'}{\gamma_0} + \frac{\Omega\varphi\varphi'}{\gamma_0\sqrt{-\varphi(\infty)}} +$$

$$+ \frac{(1+\gamma_0)\Omega}{\gamma_0\sqrt{-\varphi(\infty)}} \int_{\eta}^{\infty} \varphi'^2 d\eta = (\eta\varphi'')^2 S(\infty, \eta, m), \quad (6.2)$$

$$\varphi(0) = \varphi'(\infty) = 0. \quad (6.3)$$

Слагаемыми, связанными с нормальными напряжениями Рейнольдса, мы пренебрегаем. Таким образом, мы по-прежнему ищем решение задачи в виде асимптотических разложений при больших значениях переменной ξ , но для первого члена разложения (функции φ) используем не точное уравнение, а приближенное, в котором опущен ряд конечных, но относительно малых членов. Положим

$$- \left(1 + 2\gamma + \frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\right) \Phi(\xi, \infty) -$$

$$- \Lambda \left(1 + \gamma + 2\frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\right) \int_0^{\infty} \Phi_{\eta}^2 d\eta -$$

$$- \Lambda \left(1 - \gamma + 2\frac{d \ln \Lambda}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} (\eta\Phi_{\eta\eta})^2 [S_1(\infty, \eta, m) - S_2(\infty, \eta, m)] d\eta =$$

$$= -\xi^{-2}\gamma_0^2\varphi(\infty)N(\xi), \quad N(\xi) = O(1). \quad (6.4)$$

Здесь в левой части выписаны все отличные от нуля на стенке члены уравнения (5.2). Оценка (6.4) следует из решения (5.9), (5.17) при $\omega \sim \xi^{2/3}$ и означает,

что предельное значение на стенке касательного напряжения во внешней области имеет порядок ξ^{-2} . Соотношение (6.4) дает дополнительное условие

$$\frac{1+2\gamma_0}{1+\gamma_0} = \Omega G_2, \quad G_2 = \int_0^{\infty} \frac{\varphi'^2 d\eta}{[-\varphi(\infty)]^{3/2}}, \quad (6.5)$$

с учетом которого уравнение (6.2) принимает вид

$$\frac{\eta\varphi' - (1+2\gamma_0)\varphi}{\gamma_0} + \frac{\Omega\varphi\varphi'}{\gamma_0\sqrt{-\varphi(\infty)}} - \frac{(1+\gamma_0)\Omega}{\gamma_0\sqrt{-\varphi(\infty)}} \times$$

$$\times \int_0^{\eta} \varphi'^2 d\eta = (\eta\varphi'')^2 S(\infty, \eta, m). \quad (6.6)$$

Решение этого уравнения имеет конечную производную $\varphi'(0)$, т.е. ведет себя подобно функции g . По аналогии с (4.11) удобно ввести обозначение

$$D = \frac{-\varphi'(0)}{\sqrt{-\varphi(\infty)}}.$$

Как видно из уравнения (6.6), касательное напряжение (правая часть уравнения) обращается в нуль на стенке в силу граничного условия (6.3) и на внешней границе слоя — в силу (6.3) и дополнительного соотношения (6.5). В целом, число условий на единицу больше чем порядок уравнения. Поэтому уравнение (6.6) вместе с условиями (6.3), (6.5) представляют собой краевую задачу на собственные значения, из которой можно определить φ и γ_0 при каждом значении Ω . Параметр Ω изменяется от нуля до величины, при которой

$$1 - \Omega D(\Omega) = 0. \quad (6.7)$$

Это равенство означает обращение скорости на стенке в нуль.

6.1.1. Численное решение задачи на собственные значения

Выразив γ_0 из соотношения (6.5), преобразуем уравнение (6.6) к виду

$$\Omega G_2\varphi - (2 - \Omega G_2)\eta\varphi' - \frac{\Omega(2 - \Omega G_2)\varphi\varphi'}{\sqrt{-\varphi(\infty)}} +$$

$$+ \frac{\Omega}{\sqrt{-\varphi(\infty)}} \int_0^{\eta} \varphi'^2 d\eta =$$

$$= (1 - \Omega G_2)(\eta\varphi'')^2 S(\infty, \eta, m). \quad (6.8)$$

Выясним сначала структуру решения при малых Ω . Представим искомую функцию в виде асимптотического разложения

$$\varphi = g + \Omega \varphi_1 + O(\Omega^2), \quad \Omega \rightarrow 0, \quad (6.9)$$

где функция g удовлетворяет уравнению (4.8). Далее будет показано, что показатель степени m по-прежнему связан с параметром γ_0 равенством (4.1), откуда на основании (6.5) и (6.9) следует, что

$$m = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\Omega G + O(\Omega^2), \quad (6.10)$$

где величина G задается формулой (5.11). Подстановка (6.9), (6.10) в (6.8) дает для функции φ_1 линейное уравнение

$$\eta^2 g'' S(\infty, \eta, -1/3) \varphi_1'' + \eta \varphi_1' = F, \quad (6.11)$$

$$F = \frac{G}{2}(g - \eta g') + \frac{G}{9} \frac{\partial}{\partial m} \ln S(\infty, \eta, -1/3) \eta g' + \frac{\int_0^\eta g'^2 d\eta - 2gg'}{2\sqrt{-g(\infty)}}.$$

С учетом того, что однородное уравнение (6.11) имеет решение

$$\varphi_1' = \sqrt{-g'}, \quad (6.12)$$

искомую функцию можно представить в виде

$$\varphi_1' = \sqrt{-g'} \times \left(\int_\eta^\infty \frac{F d\eta}{\eta g' \sqrt{2\eta S(\infty, \eta, -1/3)}} + B \right). \quad (6.13)$$

В силу уравнения (4.8) величина $\eta \varphi_1'' \sqrt{S(\infty, \eta, -1/3)}$ для решения (6.12) равна $\sqrt{\eta/2}$, т.е. отлична от нуля на внешней границе слоя. Поэтому, для того чтобы решение (6.13) удовлетворяло второму условию (для касательного напряжения) на внешней границе слоя, постоянную B нужно положить равной нулю.

Для численного решения задачи в общем случае преобразуем уравнение (6.8) к виду

$$\sqrt{-\varphi'} = \int_\eta^\infty \sqrt{\frac{(2 - \Omega G_2)(1 + \Omega W)}{4(1 - \Omega G_2)\eta S(\infty, \eta, m)}} d\eta, \quad (6.14)$$

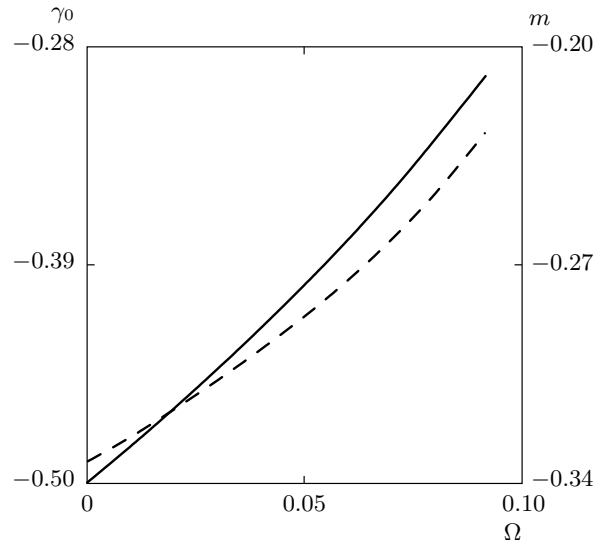


Рис. 3. Зависимости параметров γ_0 (сплошная кривая) и m (штриховая кривая) от Ω

$$W = -\frac{G_2 \varphi}{(2 - \Omega G_2) \eta \varphi'} + \frac{\varphi}{\eta \sqrt{-\varphi(\infty)}} - \frac{\int_0^\eta \varphi'^2 d\eta}{(2 - \Omega G_2) \eta \varphi' \sqrt{-\varphi(\infty)}}.$$

В справедливости (6.14) можно убедиться, продифференцировав обе части. Уравнение (6.14) решалось методом итераций. Итерации дают хорошую сходимость.

По результатам вычислений корень уравнения (6.7) $\Omega_* = 0.0911$. Параметр γ_0 монотонно растет на интервале $0 < \Omega \leq 0.0911$ (см. рис. 3) и на конце этого интервала имеет значение $\gamma_* = -0.296$. В дальнейшем понадобятся значения производных

$$k_* = \left. \frac{d(\Omega D)}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_*} = 9.7, \quad \left. \frac{d\gamma_0}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_*} = 3.1. \quad (6.15)$$

Примерно до $\Omega = 0.05$ функция φ' хорошо аппроксимируется двумя первыми членами разложения (6.9). Результаты расчета скорости и касательного напряжения во всем диапазоне изменения параметра Ω представлены на рис. 4. Асимптотика решения уравнения (6.6) на стенке имеет вид

$$\frac{(-\varphi')^{1/2}}{[-\varphi(\infty)]^{1/4}} = \sqrt{D} - \frac{\sqrt{(2 - \Omega D)\eta}}{\varkappa[-\varphi(\infty)]^{1/4}} + O(\eta), \quad (6.16)$$

$\eta \rightarrow 0.$

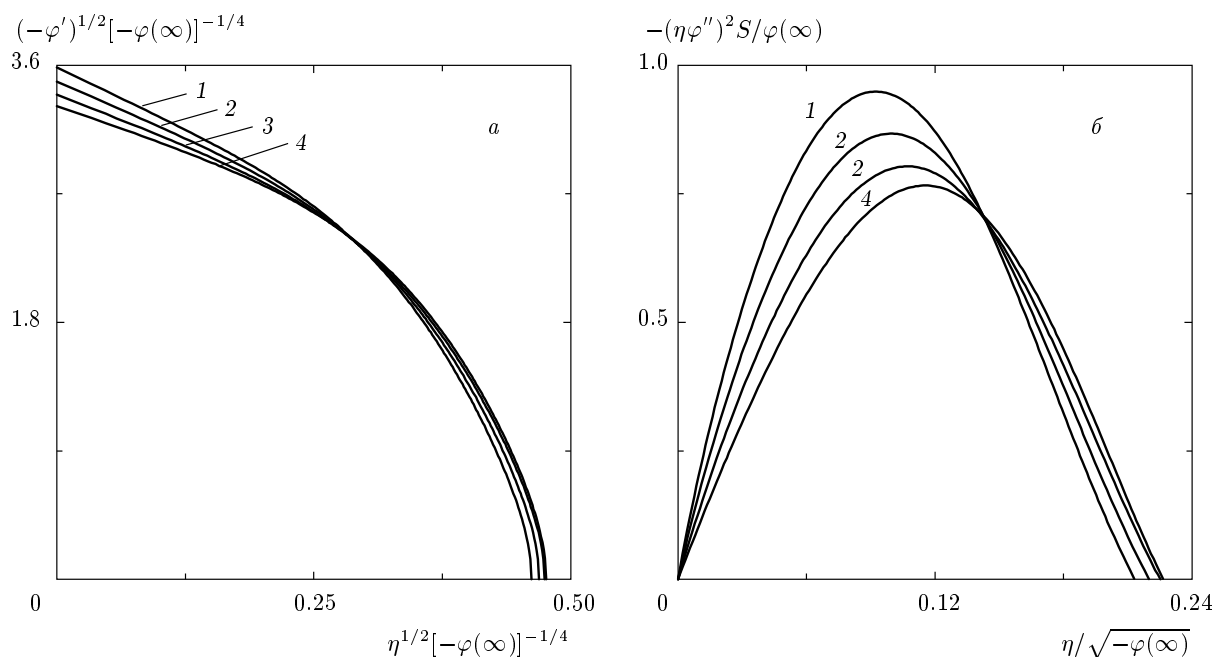


Рис. 4. Расчетные профили скорости (а) и касательного напряжения (б) для значений параметра $\Omega = 0$ (1), 0.03 (2), 0.06 (3), 0.0911 (4)

Согласно этому выражению, наклон кривых при $\eta = 0$ на рис. 4а с ростом параметра Ω уменьшается по абсолютной величине и достигает минимума в предельном случае $\Omega D = 1$.

6.2. Закон дефекта скорости

На основании (5.1), (6.1) закон дефекта скорости во внешней области пограничного слоя можно записать в виде

$$\frac{u_e - u}{u_e} = -\frac{\Omega \varphi'(\eta)}{\sqrt{-\varphi(\infty)}} + O(\xi^{-2}). \quad (6.17)$$

Проинтегрировав обе части (6.17) поперек слоя, будем иметь

$$\frac{\delta^*}{\Delta} = \Omega \sqrt{-\varphi(\infty)} + O(\xi^{-2}). \quad (6.18)$$

Из (5.22), (6.18) и второго равенства (6.1) получим

$$\Omega = \sqrt{-\frac{\delta^* u'_e}{u_e}} + O(\xi^{-2}). \quad (6.19)$$

Это есть выражение параметра подобия Ω через измеряемые величины.

С учетом (6.19) закон дефекта скорости (6.17) принимает вид

$$\frac{u_e - u}{\sqrt{-\delta^* u'_e u_e}} = -\frac{\varphi'(\eta, \Omega)}{\sqrt{-\varphi(\infty, \Omega)}} + O(\xi^{-2}). \quad (6.20)$$

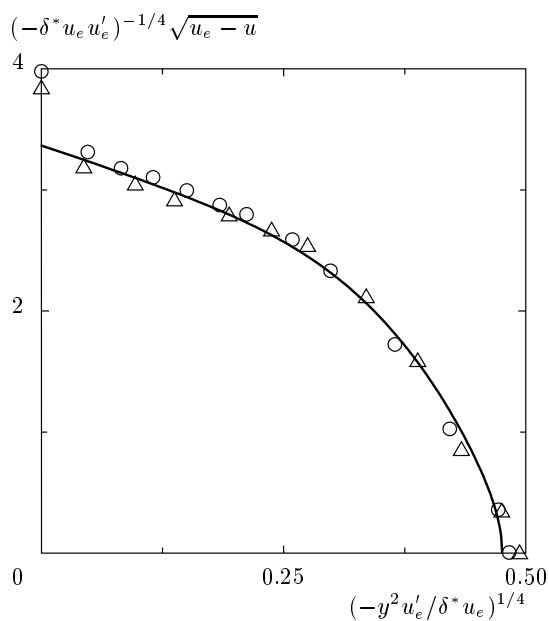


Рис. 5. Данные измерений [2] профиля скорости при $\beta = 7.53$ и 8.7 и расчетная кривая для $\Omega = 0.067$. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

Поскольку $c_f = O(\xi^{-2})$, а заданный формулой (6.19) параметр Ω — конечная величина, левую часть

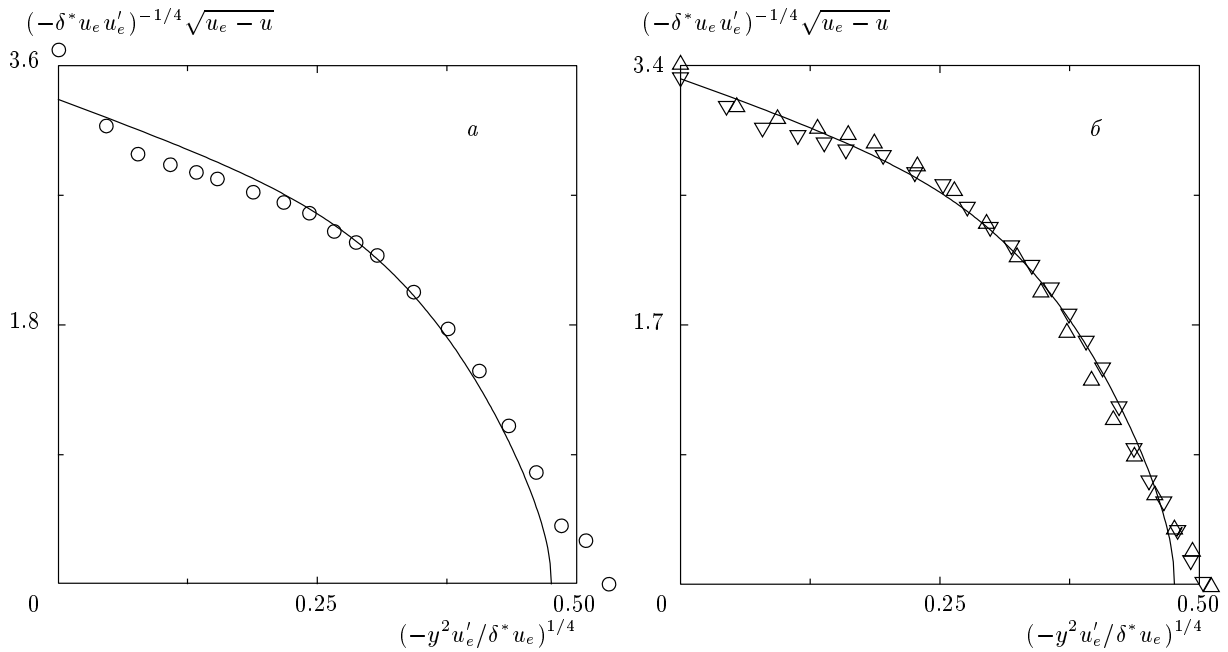


Рис. 6. Данные измерений профилей скорости из работы [25] и расчетные кривые; $\Omega = 0.072$ (а); 0.0911 (б). Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

(6.20), сохраняя тот же порядок точности, можно записать в виде (4.6). Тогда формулировки закона дефекта скорости для двух режимов течения будут различаться только параметрами подобия.

Правила подобия для турбулентных напряжений на основании (2.4), (2.8), (6.20) имеют вид

$$\frac{\langle u'v' \rangle}{\delta^* u_e u_e'} = -\frac{[\eta\varphi''(\eta, \Omega)]^2}{\varphi(\infty, \Omega)} S(\infty, \eta, m) + O(\xi^{-2}),$$

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{\delta^* u_e u_e'} = \frac{[\eta\varphi''(\eta, \Omega)]^2}{\varphi(\infty, \Omega)} S_1(\infty, \eta, m) + O(\xi^{-2}).$$

(6.21)

Выражения для других компонент аналогичны второй формуле (6.21). Из формул (6.18), (6.19) следует выражение для поперечного масштаба

$$\Delta_1 = \sqrt{-\frac{\delta^* u_e}{u_e'}}. \tag{6.22}$$

В таблице приведены значения параметра подобия Ω в тех случаях, когда течение в соответствии со сформулированным в разд. 5.2 критерием описывается вторым решением. Максимальная величина этого параметра, наблюдавшаяся в эксперименте, несколько выше теоретического значения $\Omega_* = 0.0911$. Разница составляет приблизительно 20 %.

На рис. 5–10 профили скорости и касательного напряжения, измеренные в предотрывном автомо-

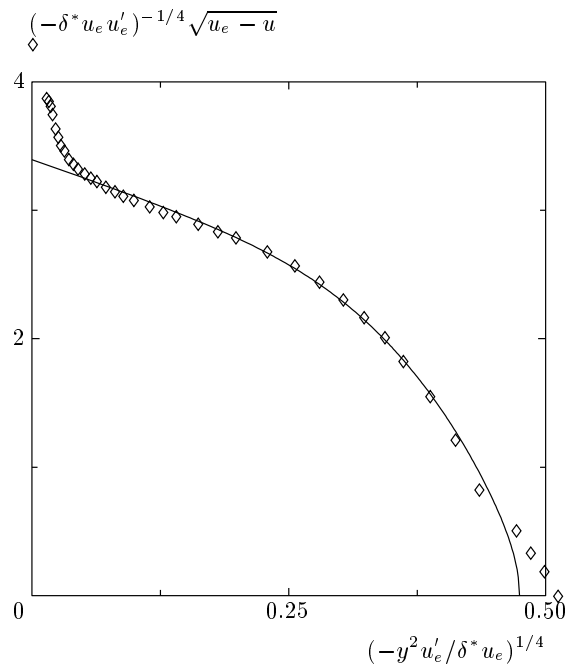


Рис. 7. Данные измерений профиля скорости из работы [8] при $\beta = 4.29$ и расчетная кривая для $\Omega = 0.055$. Обозначение экспериментальных точек приведено в таблице

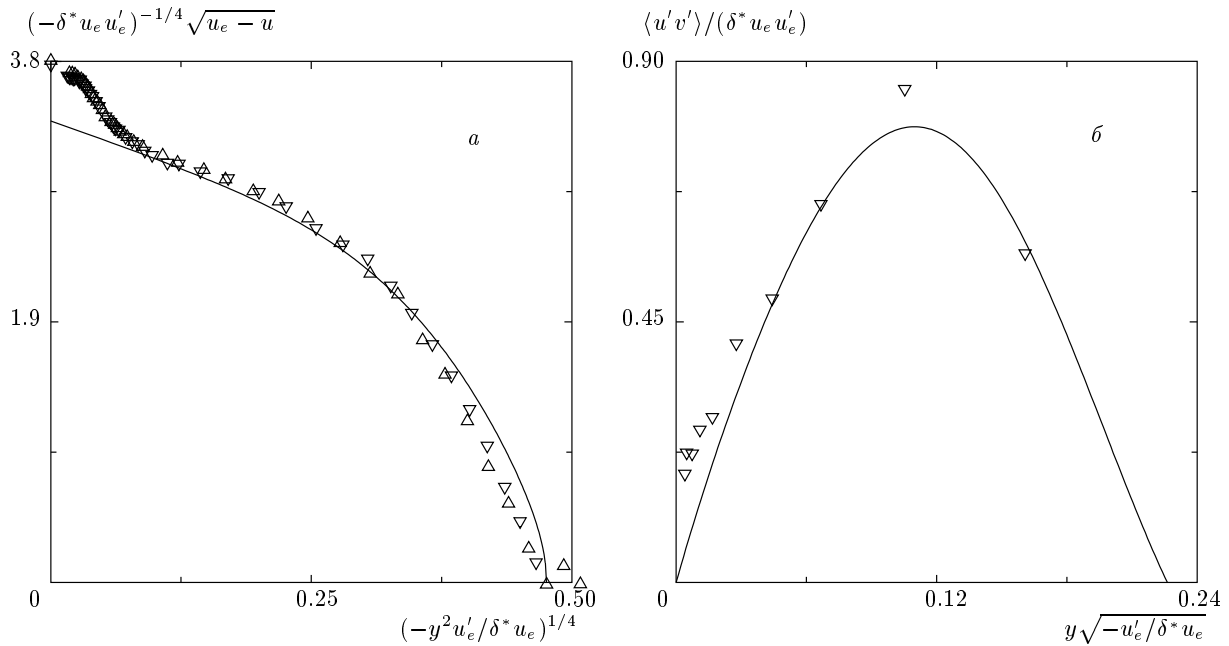


Рис. 8. Данные измерений из работы [26] профилей скорости (а) и касательного напряжения (б) и расчетные кривые для $\Omega = 0.070$. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

дельном пограничном слое, построены в переменных подобия (6.20), (6.21) вместе с расчетными кривыми. В качестве поперечного масштаба используется величина (6.22). Можно видеть хорошее соответствие теории и эксперимента.

Как видно на рис. 11, нормальные напряжения Рейнольдса также подчиняются правилу подобия (6.21). В переменных (6.21) профили рейнольдсовых напряжений во внешней области зависят только от одного параметра Ω . Для проверки этого положения нормальные напряжения, измеренные в работах [9, 19] при близких значениях $\Omega = 0.063$ и 0.076 соответственно (значения параметра β при этом сильно различаются, см. таблицу), построены на рис. 12. Экспериментальные профили на рис. 12 практически полностью совпадают.

Из выражения (6.20) для формпараметра пограничного слоя (отношение толщины вытеснения δ^* к толщине потери импульса θ), аналогично тому, как это сделано в работе [12] для случаев благоприятного и умеренного неблагоприятного градиентов давления, можно получить равенство

$$(1 - \theta/\delta^*)/\Omega = G_2(\Omega) + O(\xi^{-2}). \quad (6.23)$$

Соответствующие экспериментальные данные вместе с расчетной кривой построены на рис. 13. Здесь также имеется удовлетворительное согласо-

вание экспериментальных и расчетных данных, а наиболее точные измерения [19] очень близки к расчету.

Толщина пограничного слоя и интегральные параметры растут линейно по длине пластины. Из (2.13), (6.1), (6.18) и (6.23) следуют формулы

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{(\gamma_0 - 1)\Omega}{\gamma_0 \sqrt{-\varphi(\infty)}} [1 + O(\xi^{-2})],$$

$$\frac{\delta^*}{x} = (1 - 1/\gamma_0)\Omega^2 [1 + O(\xi^{-2})],$$

$$\frac{\theta}{x} = \left(1 - \frac{1}{\gamma_0}\right) \Omega^2 (1 - \Omega G_2) [1 + O(\xi^{-2})]. \quad (6.24)$$

Правые части соотношений (6.24) зависят от параметра подобия Ω и могут быть вычислены по значениям функций, которые построены на рис. 3 и 13. Как видно на рис. 14, расчетный наклон прямых, задающих толщины вытеснения и потери импульса, практически полностью совпадает с данными измерений [19].

Рассматриваемое решение, как сказано выше, получено в предположении малости относительной толщины пограничного слоя, которая вычисляется по первой формуле (6.24). Наибольшее значение этой величины согласно расчетам достигается при $\Omega = \Omega_*$ и составляет 0.09, что вполне приемлемо.

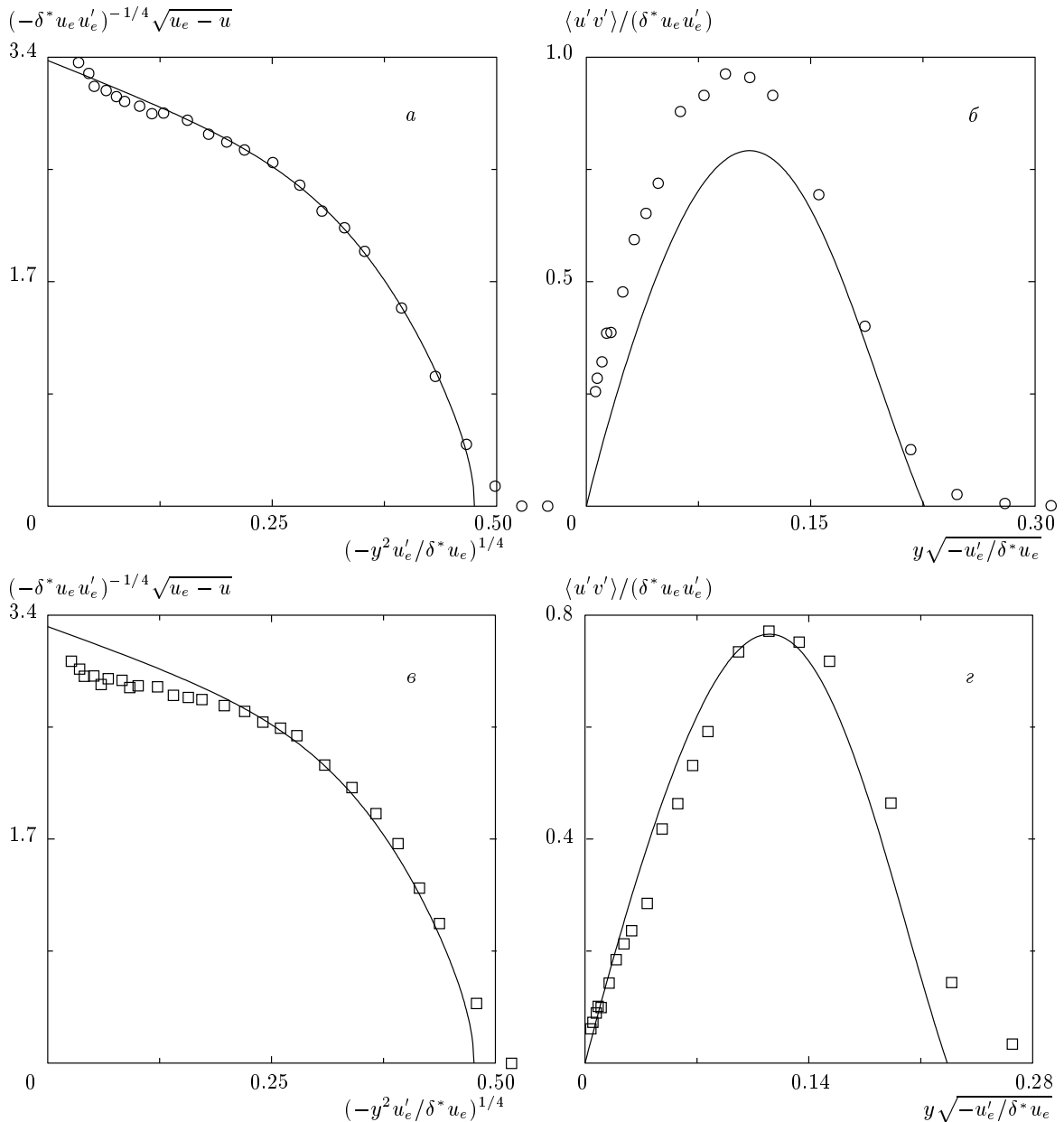


Рис. 9. Данные измерений скорости (а, в) и касательного напряжения (б, г) из работы [9] и расчетные кривые; $\Omega = 0.063$ (а, б); 0.0911 (в, г). Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

Соотношения (5.20), (2.13) и первое равенство (6.24) снова дают формулу (4.1). Согласно этой формуле и вычисленному выше значению γ_* , отрыв наступает при $m_* = -0.228$. Зависимость показателя степени m от параметра подобия Ω дана на рис. 3.

Докажем теперь справедливость соотношения

$$\frac{1 + 2\gamma}{1 + \gamma} - \frac{1}{1 + \beta} = \Omega G_2(\Omega) + O(\xi^{-2/3}) \quad (6.25)$$

для всех режимов течения. При благоприятном и умеренном неблагоприятном градиенте давления обе части (6.25) имеют порядок ξ^{-1} . Левая — на основании (4.1), (4.7), правая — поскольку в этом случае $\Omega = O(\xi^{-1})$. В предотрывном режиме при $\Omega = O(1)$ второе слагаемое в левой части (6.25) имеет порядок ξ^{-2} , и соотношение выполняется в силу (6.5). Для переходного режима с сильным неблагоприятным градиентом давления это соотношение на

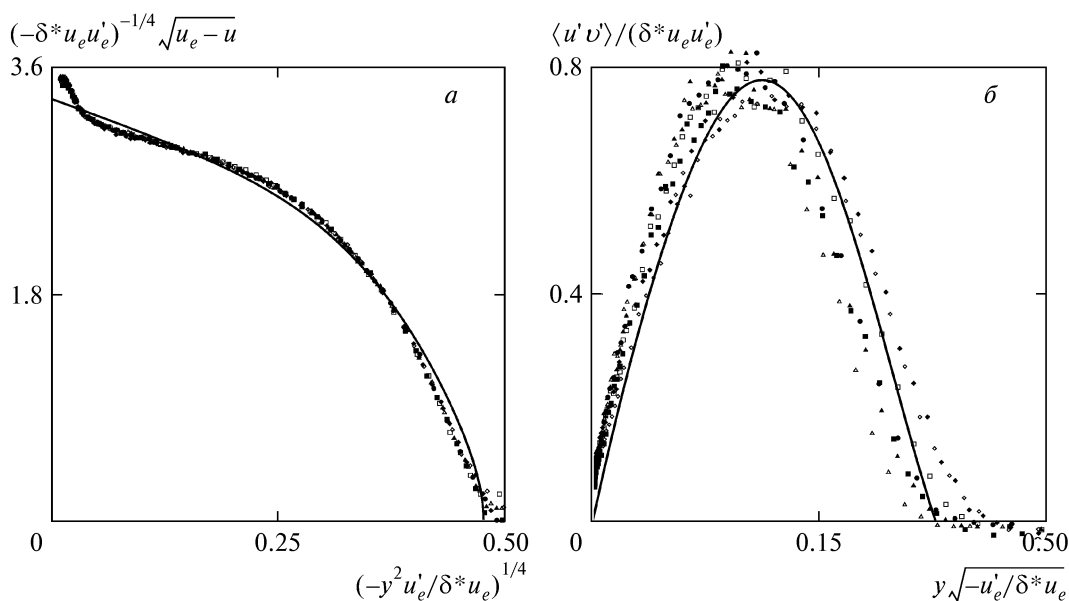


Рис. 10. Данные измерений профилей скорости (а) и касательного напряжения (б) из работы [19] и расчетные кривые для $\Omega = 0.076$. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

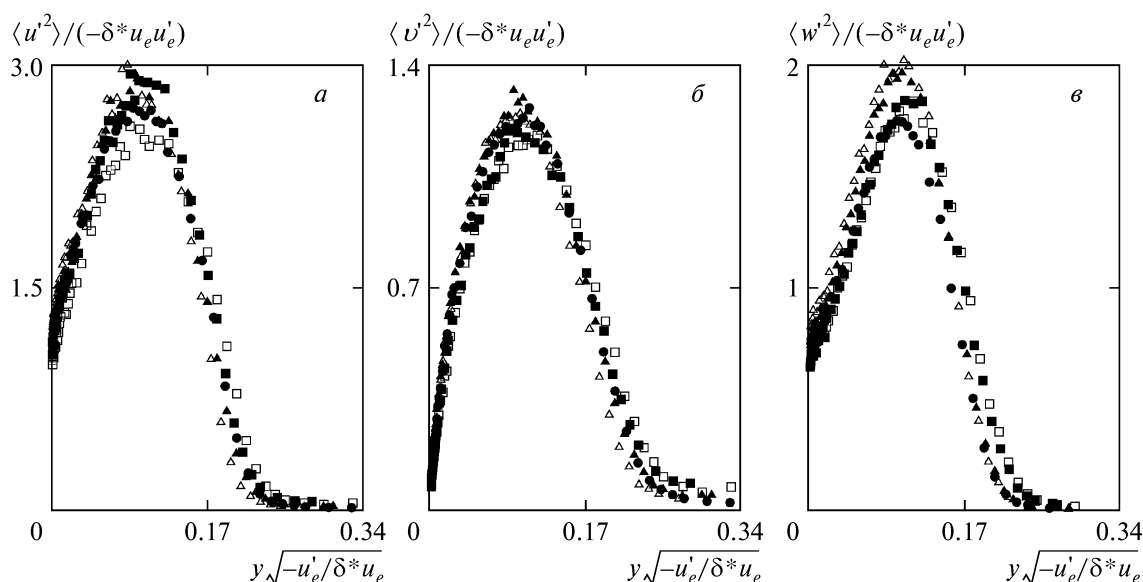


Рис. 11. Данные измерений нормальных напряжений Рейнольдса в переменных подобию (6.21) из работы [19]. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

основании (5.3) и (5.26) дает равенство (5.18).

Таким образом, связанный с γ формулой (4.1) показатель степени m в общем случае выражается через два параметра подобию, β и Ω . Имеющиеся экспериментальные данные (значение m указано не во всех работах, см. таблицу) представлены на рис. 15 и хорошо соответствуют расчетной кривой. Теперь

ясно, почему при неблагоприятном градиенте давления формула (1.3) не описывает результаты измерений. Эта формула равносильна (6.25) только при $\Omega = 0$.

Из выражения (6.25) и соотношений (4.1), (6.23) следует, что m можно представить как функцию β и формпараметра пограничного слоя

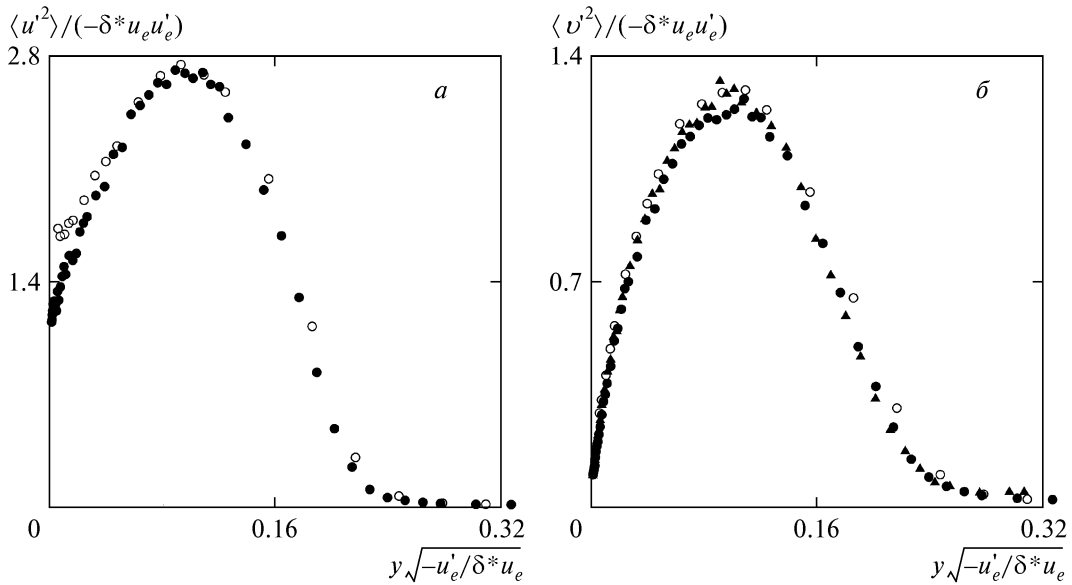


Рис. 12. Данные измерений профилей нормальных напряжений Рейнольдса в переменных подобия (6.21) из работы [9] при $\Omega = 0.063$ и работы [19] при $\Omega = 0.076$. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

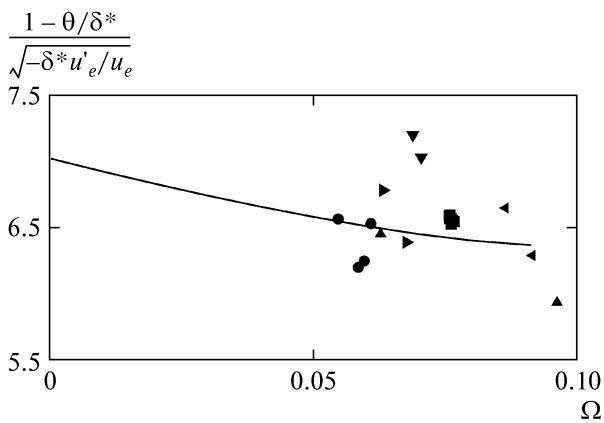


Рис. 13. Формпараметр пограничного слоя, расчетная кривая и данные измерений: \blacktriangleright — [2], \blacktriangleleft — [25], \blacktriangledown — [26], остальные обозначения — как на рис. 2

$$m = \frac{1 + \beta - \delta^* / \theta}{(1 - \beta) \delta^* / \theta - 2(1 + \beta)}. \quad (6.26)$$

Аналогичное соотношение, полученное в работе [27], отличается от (6.26) и, как можно убедиться, хуже описывает экспериментальные данные.

6.3. Градиентный подслой и сращивание с решением в пристеночной области

Введем переменную ζ по формуле

$$\xi = \zeta + k \ln \zeta, \quad (6.27)$$

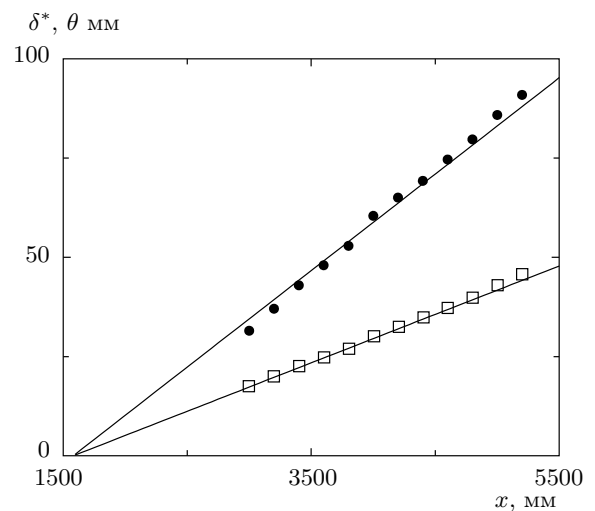


Рис. 14. Экспериментальное [19] и расчетное распределения толщин вытеснения (\bullet) и потери импульса (\square) по длине пластины

где коэффициент k будет определен ниже.

Соотношения (5.9), (5.17) при $\omega \sim \xi^{2/3}$ дают толщину градиентного подслоя порядка ξ^{-2} . Будем ис-

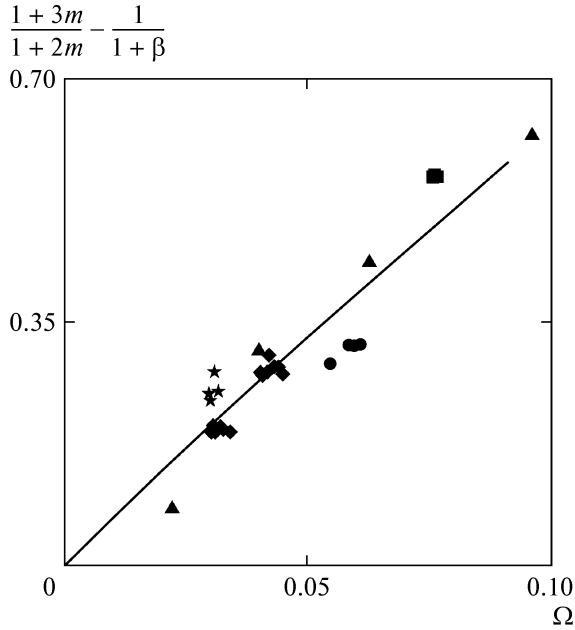


Рис. 15. Связь между показателем степени m и параметрами β и Ω . Обозначения экспериментальных точек — как на рис. 2 и 13

качь решение в виде

$$\eta = \zeta^{-2} M \eta_0, \quad -\frac{\Phi_\eta(\xi, \eta)}{\gamma_0 \sqrt{-\varphi(\infty)}} = -D + \zeta^{-1} \sqrt{N(\infty)} h(\eta_0) + O(\zeta^{-2}). \quad (6.28)$$

Подстановка выражений (6.4), (6.28) в уравнение (5.2) и предельный переход

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad \eta_0 = O(1)$$

снова дают для функции h уравнение (4.12) и граничное условие (4.13) при значении масштаба

$$M = \frac{N(\infty) \sqrt{-\varphi(\infty)}}{D(2 - \Omega D)}. \quad (6.29)$$

Асимптотика профиля скорости на стенке на основании (5.1), второго равенства (6.1) и представлений (6.28) и (4.14) имеет вид

$$\frac{u}{u_e} = 1 - \Omega D + \frac{\Omega \sqrt{N(\infty)}}{\varkappa \zeta} \times [\ln \eta + 2 \ln \zeta - \ln(4M) + 2 + O(\eta^\alpha)] + O(\zeta^{-2}), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Это соотношение, связь между внешними и внутренними переменными

$$\ln y_+ = \ln \eta + \zeta + k \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}}$$

и логарифмический закон (3.5) дают условие срачивания

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left(\ln \eta + \zeta + k \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} + C \right) = \\ = 1 - \Omega D + \frac{\Omega \sqrt{N(\infty)}}{\varkappa \zeta} [\ln \eta + 2 \ln \zeta - \ln(4M) + 2] + \\ + O(\zeta^{-2}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Приравнивая коэффициенты при $\ln \eta$, будем иметь

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \frac{\Omega \sqrt{N(\infty)}}{\zeta} + O(\zeta^{-2}). \quad (6.31)$$

Откуда следует, что коэффициент трения на стенке в предотрывном течении нужно искать в виде

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = t_1 \zeta^{-1} [1 + t_2 \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2})], \quad (6.32)$$

где коэффициенты t_1 и t_2 подлежат определению. Подстановка этого разложения в (6.30) и (6.31) дает $k = 3$ и

$$\begin{aligned} t_1 &= \varkappa(1 - \Omega D), \\ t_2 &= \ln \frac{D(2 - \Omega D)}{4t_1 N(\infty) \sqrt{-\varphi(\infty)}} + 2 - C, \\ N(\infty) &= \left(\frac{t_1}{\Omega} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Здесь учтено представление (6.29).

Как видно из выражений (6.32), (6.33), по мере увеличения Ω трение на стенке падает и при выполнении условия (6.7) обращается в нуль. При этом параметры γ и m растут (см. рис. 3); это означает, что пограничный слой стремится к отрыву в ситуации, когда градиент давления снижается и становится более благоприятным.

6.4. Уточнение условия отрыва

Полученное выше решение уравнения пограничного слоя можно уточнить, учтя в следующем приближении слагаемые в правой части уравнения (2.11) или уравнения (5.2), содержащие нормальные напряжения Рейнольдса. Мы уточним критическое значение параметра γ_0 , для которого такая поправка наиболее существенна.

Сохраняя в (6.4) слагаемое, содержащее нормальные напряжения, для параметра γ_0 получим выражение

$$\gamma_0 = \frac{\Omega(G_2 + H_2) - 1}{2 - \Omega(G_2 - H_2)}, \quad (6.34)$$

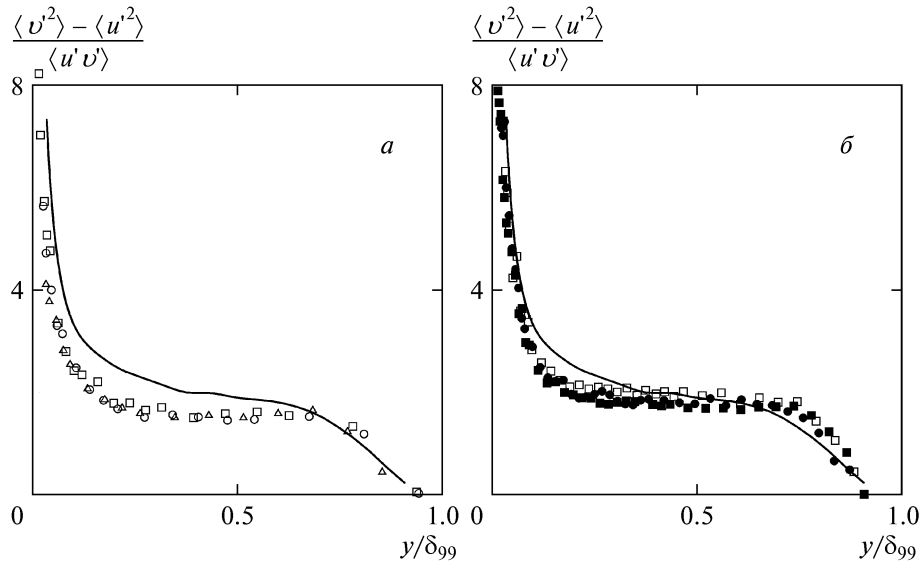


Рис. 16. Профили отношения компонент тензора Рейнольдса в пограничном слое при неблагоприятном градиенте давления по данным измерений из работ [9] (а) и [19] (б); сплошные кривые — прямое численное моделирование [30] при нулевом градиенте давления. Обозначения экспериментальных точек приведены в таблице

$$H_2 = \int_0^\infty \frac{(\eta\varphi'')^2}{[-\varphi(\infty)]^{3/2}} S(\infty, \eta, m) \times T(\infty, \eta, m) d\eta, \quad T = \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle u'^2 \rangle}{\langle u'v' \rangle}. \quad (6.35)$$

Здесь используется отношение компонент тензора Рейнольдса T , имеющее во внешней области порядок единицы. Профили этой величины по данным измерений [9, 19] и прямого численного моделирования [30] построены на рис. 16. В автомодельном пограничном слое величина T , так же, как путь смещения, слабо зависит от градиента давления: экспериментальные точки на рис. 16а, полученные при $\beta = 1.89, 7.27, 61.6$, и на рис. 16б, полученные при $\beta \approx 21$, практически описывают одну кривую, которая, к тому же, мало отличается от результата прямого численного моделирования для пограничного слоя при нулевом градиенте давления. Для вычисления интеграла (6.35) использовались профиль величины T , аппроксимированный по данным, представленным на рис. 16, и расчетный профиль касательного напряжения при $\Omega = \Omega_*$. Результатом является оценка $H_2 \approx 0.25$. Эта величина действительно составляет всего 4 % от параметра G_2 , который в этом случае равен 6.37. По формуле (6.34) получим

$$\gamma_* = -0.275 \quad (m_* = -0.216),$$

что лучше соответствует экспериментальным данным [9, 19] (см. таблицу). Следует, однако, заметить, что описанная процедура не является асимптотически строгой, поскольку в формулу (6.34) подставлены значения Ω_* и G_2 , полученные из первого приближения.

При выводе условия замыкания (2.4) мы предполагали, что рассматриваемое автомодельное течение полностью определяется тремя параметрами ν , B и m . Выяснилось, однако, что это не совсем так. В определенном диапазоне изменения показателя степени m существуют два различных автомодельных течения. Это означает, что функция $S(\infty, \eta, m)$ в общем случае двузначна по m и имеет точку ветвления при $m = -1/3$. Хотя результаты расчетов, выполненных в предположении, что эта функция вообще не зависит от m , хорошо соответствуют экспериментальным данным для всех режимов течения.

7. ОБРАЩЕНИЕ ТРЕНИЯ В НУЛЬ

В предотрывном течении согласно соотношениям (6.32), (6.33) коэффициент трения имеет тот же порядок величины $O(\xi^{-2})$, что при благоприятном и умеренном неблагоприятном градиентах давления (см. равенство (4.16)). Поэтому остается в силе и логарифмический закон (3.5), что полностью подтвер-

ждают, например, экспериментальные данные из работы [19], которые получены как раз для предотрывного режима течения. Решение (6.32) становится непригодным, когда $\Omega \rightarrow \Omega_*$ и трение на стенке стремится к нулю, т.е. только при одном значении $m = m_*$. Условие (2.5) верно для всех $m \neq m_*$. Следовательно, по непрерывности оно верно и при $m = m_*$. Таким образом, условие замыкания (2.4) и равенство (2.6) справедливы всегда, в том числе при обращении трения на стенке в нуль.

7.1. Пристеночная область

Введем в пристеночной области новые переменные по формулам

$$y_x = \frac{yu_p}{\nu}, \quad u_x = \frac{u}{u_p}, \quad (7.1)$$

$$u_p = (-\nu u_e u'_e)^{1/3} = u_e \text{Re}_p^{-1/3}.$$

Подстановка выражений (7.1) в уравнение (3.2) и предельный переход

$$\text{Re}_p \rightarrow \infty, \quad y_x = O(1)$$

дают для первого члена разложения

$$u_x = U_x(y_x) + O(\text{Re}_p^{-\alpha}), \quad \alpha > 0 \quad (7.2)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(y_x \frac{dU_x}{dy_x}\right)^2 S_i(\text{Re}) + \frac{dU_x}{dy_x} = \tau + y_x, \quad (7.3)$$

$$\text{Re} = y_x^2 \frac{dU_x}{dy_x}, \quad U_x(0) = 0,$$

которое зависит от параметра подобия

$$\tau = \frac{cf}{2} \text{Re}_p^{2/3}. \quad (7.4)$$

Как видно из уравнения (7.3), теперь пристеночная область не является слоем постоянного напряжения. В уравнения (7.3) и (3.4) входит одна и та же функция S_i . Эти уравнения можно записать в виде

$$y_x^2 \frac{dU_x}{dy_x} = \text{Re}, \quad \text{Re}^2 S_i(\text{Re}) + \text{Re} = y_x^2 (\tau + y_x),$$

$$y_+^2 \frac{dU_+}{dy_+} = \text{Re}, \quad \text{Re}^2 S_i(\text{Re}) + \text{Re} = y_+^2.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{dU_x}{dy_x} = (\tau + y_x) U'_+(y_x \sqrt{\tau + y_x}), \quad (7.5)$$

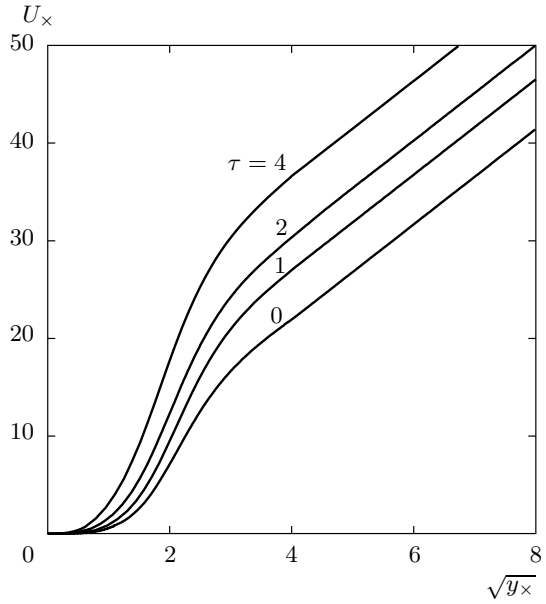


Рис. 17. Профили скорости в пристеночной области для различных значений параметра подобия τ

которое позволяет рассчитать профили скорости в пристеночной области пограничного слоя вблизи точки отрыва по известному профилю скорости при нулевом градиенте давления. Для задания последнего использовались данные прямого численного моделирования пограничного слоя на пластине [30] и напорного течения в плоском канале [31], которые дают близкие результаты. Профили скорости для разных значений трения на стенке показаны на рис. 17.

Принимая во внимание известную асимптотику функции U_+ на стенке [4]

$$U_+(y_+) = y_+ + O(y_+^4), \quad y_+ \rightarrow 0,$$

и логарифмический закон (3.5), из (7.5) для профиля скорости получим

$$\tau \neq 0: \quad U_x = \tau y_x + \frac{1}{2} y_x^2 + O(y_x^4),$$

$$\tau = 0: \quad U_x = \frac{1}{2} y_x^2 + O(y_x^{13/2}), \quad y_x \rightarrow 0,$$

$$U_x = \frac{2}{\varkappa} \sqrt{y_x} + E(\tau) + y_x^{-\alpha}, \quad y_x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad (7.6)$$

$$E(\tau) = \int_0^\infty \left[(\tau + y) U'_+(y \sqrt{\tau + y}) - \frac{1}{\varkappa \sqrt{y}} \right] dy.$$

При выводе асимптотики (7.6), кроме того, пришлось предположить, что в формуле (3.5) $\alpha > 1/3$.

Таким образом, на внешней границе пристеночной области профиль скорости ведет себя как корень квадратный из расстояния до стенки (см. рис. 17), причем коэффициент пропорциональности известен и может быть вычислен через постоянную Кармана.

Для исследования асимптотики функции E при $\tau \rightarrow \infty$ сделаем замену переменных

$$y_x = \frac{y_+}{\sqrt{\tau}}, \quad U_x = \sqrt{\tau} U_+ \quad (7.7)$$

и преобразуем уравнение (7.3) к виду

$$\left(y_+ \frac{dU_+}{dy_+}\right)^2 S_i(\text{Re}) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1 + \tau^{-3/2} y_+, \quad (7.8)$$

$$U_+(0) = 0.$$

В пределе при

$$\tau \rightarrow \infty, \quad y_+ = O(1)$$

получим уравнение (3.4). Теперь нужно рассмотреть область, в которой

$$y_+ = \tau^{3/2} Y, \quad U_+ = \frac{3 \ln \tau}{2\kappa} + V(Y), \quad Y = O(1). \quad (7.9)$$

Из условия срачивания с асимптотикой (3.5) будем иметь

$$V \rightarrow \frac{1}{\kappa} (\ln Y + C), \quad Y \rightarrow 0. \quad (7.10)$$

Подставляя (7.9) в уравнение (7.8) и переходя к пределу

$$\tau \rightarrow \infty, \quad 1/Y = O(1),$$

получим уравнение

$$\kappa Y \frac{dV}{dY} = \sqrt{1 + Y},$$

решение которого, удовлетворяющее условию (7.10), имеет вид

$$V = \frac{1}{\kappa} \left[2\sqrt{1 + Y} + \ln Y - 2 \ln \left(1 + \sqrt{1 + Y} \right) + C + 2 \ln 2 - 2 \right]. \quad (7.11)$$

Сопоставляя (7.11) и (7.6) при учете (7.7) и (7.9), получим

$$E(\tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{\kappa} \left[\frac{3}{2} \ln \tau + C + 2 \ln 2 - 2 + K(\tau) \right], \quad (7.12)$$

$$K(\infty) = 0.$$

С другой стороны, при $\tau = 0$ будем иметь

$$E(0) = \frac{2}{3} \int_0^\infty \left(U_+'(y) - \frac{1}{\kappa y} \right) y^{1/3} dy.$$

Численное значение интеграла $E(0) \approx 2.0$.

7.2. Срачивание с решением во внешней области

Согласно (7.4),

$$c_f = 2\tau \text{Re}_p^{-2/3}. \quad (7.13)$$

Из выражений (6.28)–(6.32) и первого соотношения (6.33) получим, что при таком значении трения на стенке толщина градиентного подслоя имеет порядок $\Delta \text{Re}_p^{-2/3}$. Согласно (7.1) порядок толщины пристеночной области — $\Delta \text{Re}_p^{1/3} R_\Delta^{-1}$. Это величины одного порядка, поскольку на основании соотношений (5.22), (6.1) справедливо равенство

$$R_\Delta = \frac{\Omega \text{Re}_p}{\sqrt{-\varphi(\infty)}}. \quad (7.14)$$

Таким образом, по мере уменьшения трения на стенке градиентный подслей погружается в пристеночную область, а логарифмический подслей исчезает.

Параметр подобия мало отличается от своего критического значения и может быть представлен в виде

$$\Omega = \Omega_* + a(\tau) \text{Re}_p^{-1/3} + O\left(\text{Re}_p^{-2/3}\right). \quad (7.15)$$

Отсюда и из выражения (6.20) следует, что во внешней области профиль скорости описывается универсальной кривой

$$\frac{u}{u_e} = 1 + \frac{\Omega_* \varphi'(\eta, \Omega_*)}{\sqrt{-\varphi(\infty, \Omega_*)}}.$$

Согласно соотношениям (6.16), (6.17), во внешнем решении асимптотика скорости на стенке имеет вид

$$\frac{u}{u_e} = 1 - \Omega D + \frac{2\Omega \sqrt{D(2 - \Omega D)} \eta}{\kappa [-\varphi(\infty)]^{1/4}} + O(\eta), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (7.16)$$

Выполним асимптотическое срачивание решений для внешней и пристеночной областей, используя асимптотические представления (7.16) и (7.6) и связь между внутренними и внешними переменными

$$y_x = \frac{\Omega \eta \text{Re}_p^{2/3}}{\sqrt{-\varphi(\infty, \Omega)}}, \quad u_x = \frac{u}{u_e} \text{Re}_p^{1/3}, \quad (7.17)$$

которая следует из соотношений (7.1) и (7.14). С учетом выражений (6.15) и (7.15) асимптотическое представление (7.16) во внутренних переменных записывается в виде

$$u_x = -k_* a(\tau) + \frac{2}{\kappa} \sqrt{y_x} + \dots$$

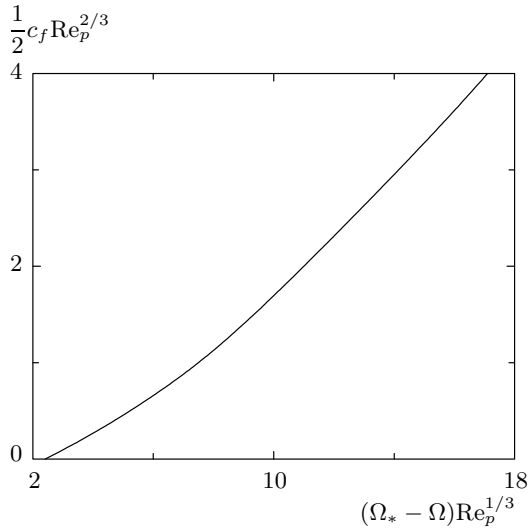


Рис. 18. Расчетная кривая, задающая распределение трения на стенке

Сравнивая это выражение с (7.6) и (7.2), получим

$$a(\tau) = -k_*^{-1} E(\tau).$$

Последнее равенство, с учетом соотношений (7.15), (6.19), (7.4), можно переписать в виде

$$k_*^{-1} E(\tau) = (\Omega_* - \Omega) \text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3}). \quad (7.18)$$

Соотношение (7.18) задает связь между параметрами подобия τ и Ω и представляет собой закон трения для рассматриваемого режима течения. Соответствующая расчетная кривая дана на рис. 18.

Согласно выражению (7.18), трение на стенке обращается в нуль при

$$\Omega = \Omega_* - E(0)k_*^{-1} \text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3}), \quad (7.19)$$

$$E(0)/k_* = 0.21.$$

Соответствующие выражения для γ_0 и m имеют вид

$$\gamma_0 = \gamma_* + b \text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3}),$$

$$m = \frac{\gamma_*}{1 - \gamma_*} + \frac{b \text{Re}_p^{-1/3}}{(1 - \gamma_*)^2} + O(\text{Re}_p^{-2/3}),$$

$$b = -\frac{E(0)}{k_*} \frac{d\gamma_0}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_*} = -0.65.$$

Последнее выражение задает линию отрыва, показанную на рис. 2. Между этой линией и границей области существования автомодельного решения на

рис. 2 лежит область, в которой реализуется предотрывный режим течения. Эту область можно назвать областью гистерезиса, поскольку в ней возможно также течение при умеренном и сильном неблагоприятном градиентах давления.

Соотношение (7.19) можно сопоставить с известным критерием отрыва турбулентного пограничного слоя, предложенным Г. М. Бам-Зеликовичем (см., например, [29]), который в используемых обозначениях записывается в виде

$$\Omega \approx 0.12, \quad (7.20)$$

где значение постоянной взято из опытов. Соотношение (7.19) предлагает поправку для критерия (7.20) на конечное число Рейнольдса. Расхождение численных значений теоретической расчетной величины Ω_* и эмпирической постоянной (7.20) составляет 30 %.

8. ЗАКОН ТРЕНИЯ

В справедливости равенства

$$R_\Delta = \frac{1}{\sqrt{-f(\infty, \gamma_0) c_f / 2}} \times \exp \left[\frac{\varkappa}{\sqrt{c_f / 2}} + A - C + O(\sqrt{c_f}) \right], \quad (8.1)$$

которое, по существу, представляет собой известную формулу Кармана [20], можно убедиться непосредственной подстановкой разложения (4.16). Используя равенство (8.1) и полученные в работе [12] выражения для толщины пограничного слоя и функции Λ (формулы (5.3) и (5.1), соответственно), получим

$$R_{\delta^*} = \sqrt{\frac{1 + \gamma_0}{1 + 2\gamma_0}} \times \exp \left[\frac{\varkappa}{\sqrt{c_f / 2}} + A - C + O(\sqrt{c_f}) \right], \quad (8.2)$$

где R_{δ^*} — число Рейнольдса, образованное по толщине вытеснения. Используя асимптотическое представление (4.15) и выражение для параметра γ_0 (4.7), соотношение (8.2) можно записать в виде

$$R_{\delta^*} = \frac{D_0}{2} (1 + \beta)^{3/2} \exp \left[\frac{\varkappa}{\sqrt{c_f / 2}} - \varkappa D_0 \sqrt{1 + \beta} + \Phi \left(\frac{1}{1 + \beta} \right) + 2 - C + O(\sqrt{c_f}) \right]. \quad (8.3)$$

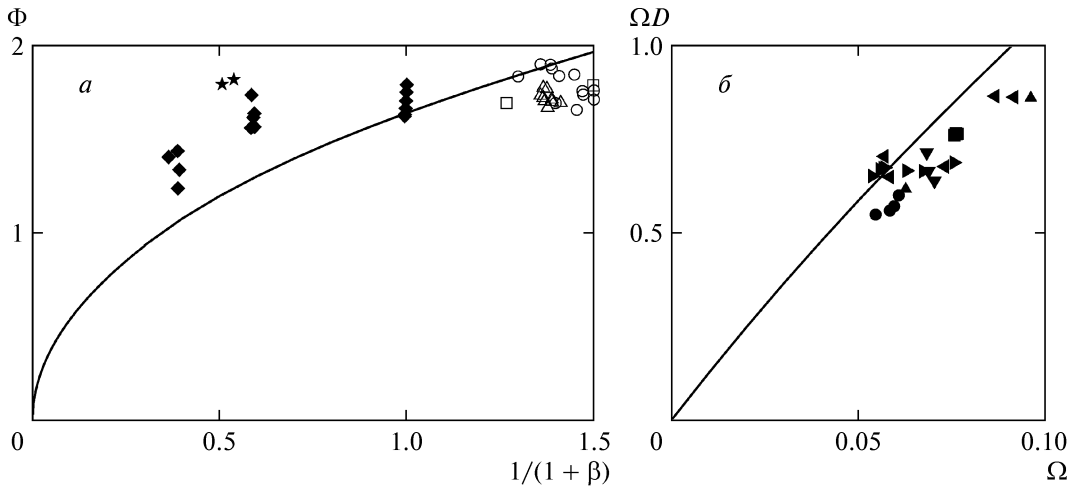


Рис. 19. Входящие в закон трения универсальные функции Φ (а) и ΩD (б) по данным расчета и измерений: \circ — [32], Δ — [33], \square — [34], остальные обозначения — как на рис. 2 и 13

Это равенство показывает, что связь между трением на поверхности, числом Рейнольдса и продольным градиентом давления, когда последний имеет отрицательную или небольшую положительную величину, может быть задана с помощью функции одной переменной Φ . Режиму с сильным неблагоприятным градиентом давления, когда $\beta \rightarrow \infty$, соответствует $\Phi(0) = 0$; при нулевом градиенте давления

$$\Phi(1) = \varkappa D_0 - \ln \frac{D_0}{2} + A(0);$$

максимальному по абсолютной величине отрицательному градиенту давления также отвечает некоторое конечное значение универсальной функции $\Phi(3/2)$, достигаемое при $\beta = -1/3$.

Функция Φ , полученная в результате интегрирования уравнения (4.4), построена на рис. 19а. Ее экспериментальные значения, вычисленные из соотношения (8.3) по числу Рейнольдса, коэффициенту трения и параметру Клаузера, в целом удовлетворительно согласуются с результатам расчета.

Аналогично из условия срачивания (6.30) с учетом соотношений (6.32) и (6.33) будем иметь

$$\text{Re}_\Delta = \frac{\Omega^2 D(\Omega)[2 - \Omega D(\Omega)]}{4(c_f/2)^{3/2} \sqrt{-\varphi(\infty)}} \times \exp \left[\frac{\varkappa[1 - \Omega D(\Omega)]}{\sqrt{c_f/2}} + 2 - C + O(\sqrt{c_f}) \right].$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (6.18), получим закон трения для предотрывного режима течения:

$$\text{Re}_{\delta^*} = \frac{\Omega^3 D(\Omega)[2 - \Omega D(\Omega)]}{4(c_f/2)^{3/2}} \times \exp \left[\frac{\varkappa[1 - \Omega D(\Omega)]}{\sqrt{c_f/2}} + 2 - C + O(\sqrt{c_f}) \right], \quad (8.4)$$

в который также входит одна универсальная функция $\Omega D(\Omega)$. Эту функцию можно выразить из (8.4), представив ее в виде разложения

$$\Omega D(\Omega) = 1 - P + \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left[\ln \frac{1 - P^2}{4} + 2 - C \right] + O(c_f), \quad (8.5)$$

$$P = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \ln \left(\frac{\text{Re}_{\delta^*} \sqrt{c_f/2}}{1 + \beta} \right).$$

Соотношение (8.5) дает другую формулировку закона трения для предотрывного режима течения. Экспериментальные значения функции $\Omega D(\Omega)$, которые вычислены из соотношения (8.5), вместе с расчетной кривой представлены на рис. 19б. Экспериментальные точки лежат несколько ниже теоретической кривой, однако в целом также удовлетворительно с ней согласуются.

Три соотношения (8.3), (8.4) и (7.18), которые справедливы для разных режимов течения, можно объединить в один универсальный закон трения

$$\text{Re}_{\delta^*} = \frac{\Omega^3 D(\Omega)[2 - \Omega D(\Omega)]}{4(c_f/2)^{3/2}} \exp \left[\frac{\varkappa[1 - \Omega D(\Omega)]}{\sqrt{c_f/2}} + \Phi \left(\frac{1}{1 + \beta} \right) - K(\tau) + 2 - C + O(\xi^{-1}) \right]. \quad (8.6)$$

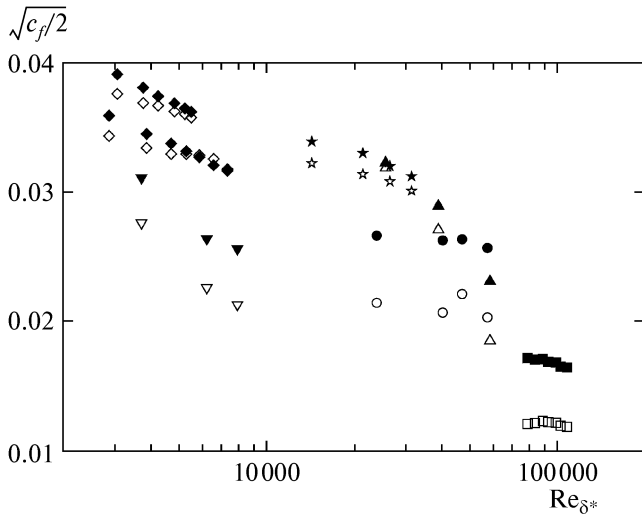


Рис. 20. Экспериментальные (темные символы) и расчетные (светлые символы) значения коэффициента трения. Обозначения — как на рис. 2 и 13

Это соотношение при $\beta = O(1)$ и $\Omega = O(\xi^{-1})$ совпадает с (8.3) в силу равенства $D(0) = D_0$, а при $\Omega = O(1)$ и $1/\beta = O(\xi^{-1})$ совпадает с (8.4) в силу равенства $\Phi(0) = 0$. В обоих случаях функция K мала и ею можно пренебречь. Эта функция начинает играть роль, если $\tau = O(1)$. На основании соотношения (7.18)

$$1 - \Omega D(\Omega) = E(\tau) \text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3}).$$

Подставляя это выражение вместе с равенством (7.13) в формулу (8.6) и переходя к пределу при $\text{Re}_p \rightarrow \infty$, на основании определения функции K (7.12) получим тождество.

На рис. 20 рассчитанные по формуле (8.6) значения трения на стенке для случая неблагоприятного градиента давления сопоставлены с экспериментальными данными. Видно, что при умеренном неблагоприятном градиенте давления (данные работ [9, 23, 24]), формула (8.6) дает результаты, очень близкие к измерениям (различие не превышает нескольких процентов), хотя эти же данные на рис. 19а гораздо больше расходятся с расчетной кривой. Здесь сказывается преимущество представления (8.6), которое справедливо для всех режимов течения, перед соотношением (8.3), которое пригодно только для одного режима. Иными словами, формула (8.6) позволяет учесть влияние параметра подобия Ω на течение при умеренном неблагоприятном градиенте давления. Для предотрывного режима (данные работ [9, 19, 22, 26]) расчетные и экспе-

риментальные значения расходятся гораздо больше (до 30%). Это связано с тем, что точность формулы (8.6) при малых значениях коэффициента трения очень сильно зависит от поведения функции $1 - \Omega D$ при Ω близком к Ω_* и от самого критического значения параметра подобия.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для турбулентного пограничного слоя со степенным распределением скорости набегающего потока существуют четыре автомодельных режима течения. При благоприятном и умеренном неблагоприятном градиенте давления (первый режим) пограничный слой имеет обычную двухслойную структуру, такую же как при безградиентном течении. Параметром подобия является известный параметр равновесности Клаузера β .

При сильном неблагоприятном градиенте давления (второй режим) пограничный слой становится трехслойным. Над логарифмическим подслоем вблизи стенки образуется промежуточная область — градиентный подслой, в котором касательное напряжение изменяется линейно. Во внешней части градиентного подслоя профиль скорости подчиняется закону квадратного корня. Во внешней области профиль скорости в переменных подобия описывается универсальной (зависящей только от безразмерного расстояния до стенки) функцией. Параметром подобия служит величина

$$\omega = (c_f/2)^{1/6} \sqrt{1 + \beta}.$$

В этом режиме при каждом значении показателя степени m существуют ровно два решения с разными значениями толщины пограничного слоя и трения на стенке. Переход с одной ветви решения на другую происходит при величине параметра подобия $\omega \approx 0.67$. Относительная толщина пограничного слоя зависит от продольной координаты и убывает вниз по потоку пропорционально $(\ln \text{Re}_x)^{-1}$ и $(\ln \text{Re}_x)^{-2/3}$ для первого и второго режима, соответственно.

Третьим является предотрывный режим течения, при котором пограничный слой по-прежнему имеет трехслойную структуру. Эта структура такова, что профиль скорости, полученный из решения для внешней области, удовлетворяет на стенке условию «проскальзывания» и, кроме того, подчиняется закону квадратного корня. Величина проскальзывания уменьшается по мере роста параметра подобия

$$\Omega = \sqrt{-\delta_* u'_e / u_e}$$

и обращается в нуль при значении $\Omega_* = 0.0911$, которому отвечает отрыв. Предотрывный режим — это последний режим течения, при котором профиль скорости имеет логарифмический участок.

Логарифмический подслей полностью исчезает при четвертом режиме течения, когда трение на стенке может обратиться в нуль. Ему приходит на смену промежуточная область, в которой профиль скорости подчиняется закону квадратного корня. Пограничный слой вновь приобретает двухслойную структуру. Во внешней области профиль скорости в переменных подобия описывается одной универсальной кривой, полученной при $\Omega = \Omega_*$. Параметром подобия является величина

$$\tau = \text{Re}_p^{2/3} c_f / 2.$$

Решение дает поправку порядка $\text{Re}_p^{-1/3}$ для значения параметра Ω , при котором происходит отрыв потока. При третьем и четвертом режимах толщина пограничного слоя и интегральные параметры в первом приближении линейно растут по длине, однако всегда, во всех четырех случаях, трение на стенке не постоянно и зависит от продольной координаты.

В результате точного асимптотического решения задачи установлен характерный масштаб дефекта скорости во внешней области (закон дефекта скорости), справедливый для всех четырех режимов течения. Рассчитаны два семейства безразмерных профилей скорости, зависящих от параметров β и Ω . Сформулированы законы подобия для профилей компонент тензора Рейнольдса. Установлен закон трения, справедливый во всем диапазоне изменения градиента давления, от благоприятного до вызывающего отрыв пограничного слоя. В формулировку закона входят три универсальные функции от переменных β , Ω и τ , соответственно. Показатель степени m есть функция двух параметров подобия β и Ω .

Автор признателен В. Кейсу (W. M. Kays), Р. Моффату (R. J. Moffat) и П.-А. Кростату (P.-Å. Krogstad), которые любезно предоставили данные своих экспериментальных исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00260).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge Univ. Press, New York (1976).

2. F. H. Clauser, *J. Aero. Sci.* **21**, 91 (1954).
3. F. H. Clauser, *Advan. Appl. Mech.* **4**, 1 (1956).
4. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, The MIT Press (1972).
5. J. C. Rotta, *Prog. Aerospace Sci.* **2**, 3 (1962).
6. W. H. Schofield, *J. Fluid Mech.* **113**, 91 (1981).
7. G. L. Mellor and D. M. Gibson, *J. Fluid Mech.* **24**, 225 (1966).
8. P. Bradshaw, *J. Fluid Mech.* **29**, 625 (1967).
9. L. F. East, W. G. Sawyer, and C. R. Nash, *RAE Tech. Rep. 79040* (1979).
10. M. R. Head, *J. Fluid Mech.* **73**, 1 (1976).
11. B. Scheichl and A. Kluwick, in *Progress in Turbulence*, ed. by J. Peinke et al., Springer Proceedings in Physics, V. 101, Pt. 3. Springer, Berlin, Heidelberg (2005), p. 111.
12. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **144**, 413 (2013).
13. И. И. Вигдорович, *ДАН* **392**, № 3, 340 (2003).
14. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **126**, 1180 (2004).
15. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **128**, 850 (2005).
16. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **131**, 1115 (2007).
17. И. И. Вигдорович, *Изв. АН, МЖГ* № 4, 106 (1993).
18. Th. von Kármán, *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Proc. of the 3rd Intern. Congress Applied Mechanics*, Stockholm, 24–29 August 1930, Vol. 1, ed. by C. W. Oseen and W. Weibull, Stockholm, Aktiebolaget Sveriges Litografiska Tryckerier (1931), p. 85–93.
19. P. E. Skåre and P.-Å. Krogstad, *J. Fluid Mech.* **272**, 319 (1994).
20. Б. А. Кадер, А. М. Яглом, *Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа*, ВИНТИ, Москва (1984), т. 18, с. 3.
21. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).
22. P. Bradshaw and D. Ferriss, *NPL Aero. Rep. 1145* (1965).
23. P. Bradshaw, *NPL Aero. Rep. 1184* (1966).
24. P. S. Andersen, W. M. Kays, and R. J. Moffat, *Rep. HMT-15*, Stanford Univ. (1972).
25. B. S. Stratford, *J. Fluid Mech.* **5**, 17 (1959).

26. A. F. Orlando, R. J. Moffat, and W. M. Kays, *Rep. HMT-17*, Stanford Univ. (1974).
27. M. Skote, D. S. Henningson, and R. A. W. M. Henkes, *Flow, Turbulence and Combustion* **60**, 47 (1998).
28. R. E. Melnik, *Computers and Fluids* **17**, № 1, 165 (1989).
29. Г. Н. Абрамович, *Прикладная газовая динамика*, Ч. 1, 5-е изд., Наука, Москва (1991).
30. P. R. Spalart, *J. Fluid Mech.* **187**, 61 (1988).
31. S. Hoyas and J. Jimenez, *Phys. Fluids*, **18**, 011702-1 (2006).
32. H. Ludwig and W. Tillmann, *Ing.-Arch.* **17**, 288 (1949).
33. W. J. Bauer, *Ph. D. Thesis*, State Univ. of Iowa (1951).
34. H. J. Herring and J. F. Norbury, *J. Fluid Mech.* **27**, 541 (1967).