

АДВЕКЦИЯ ПРИМЕСИ В ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ СРЕДАХ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

*Л. В. Матвеев**

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 сентября 2013 г.

Проанализированы режимы переноса примеси в перколяционных средах с конечной длиной корреляции, обусловленные механизмами адвекции и диффузии. Показано, что вследствие особенностей структуры перколяционных кластеров (наличия остова и мертвых концов) изменение транспортных характеристик среды от самоподобного типа к статистически однородному происходит в два этапа. Это, в свою очередь, приводит к появлению новых аномальных режимов переноса в системе. Рассмотрены случаи квазиизотропной, умеренно и сильно анизотропной сред.

DOI: 10.7868/S004445101404017X

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования проблемы переноса в перколяционных средах ведутся уже не одно десятилетие [1]. Существуют различные подходы, такие как случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW) [2], уравнения с дробными производными [3], описания на основе скейлинга [4], гребешковые [5] и ренормализационные модели [6], а также численные модели, целью которых в числе прочих является описание неклассического переноса в указанных средах. Неклассический характер переноса проявляется в том, что зависимость дисперсии примеси (R^2) от времени ($R^2 \propto t^\gamma$) характеризуется показателем степени $\gamma \neq 1$. В случае, когда перенос примеси по перколяционной среде обусловлен потоком инфильтрации, плодотворным подходом оказалась модель случайной адвекции [7, 8], в которой особенности среды учитываются в медленном (степенном) убывании корреляционной функции скорости с увеличением расстояния. Такой тип поведения коррелятора скорости следует из того, что в достаточно большом пространственном диапазоне перколяционные среды являются самоподобными, что, в свою очередь, обусловлено фрактальными свойствами перко-

ляционных кластеров, формирующих пути просачивания.

Два фактора определяют характер переноса в перколяционных средах: структура сетки каналов (кластеров), по которым мигрируют частицы, и механизм переноса по этим каналам (адвекция либо диффузия). Структура перколяционного кластера по сравнению с обычными статистически однородными средами имеет следующие особенности. Важной характеристикой кластера является наличие корреляционной длины ξ . На масштабах, меньших ξ , кластер имеет фрактальную структуру, что создает предпосылки для возникновения аномального режима переноса. На масштабах, больших ξ , среда миграции становится статистически однородной (размерность сетки проводящих каналов равна размерности вмещающего пространства) и можно ожидать, что перенос будет описываться классическими закономерностями, при которых среднее смещение частиц (при средней скорости, отличной от нуля) и дисперсия растут линейно со временем (т. е. пропорциональны t).

Ранее в рамках модели случайной адвекции с медленно убывающим коррелятором скорости были описаны режимы переноса как для области фрактальности [9], так и на масштабах больше корреляционной длины [10], в том числе при наличии анизотропии поля скоростей [11]. Следует, однако, отметить,

*E-mail: matweev@ibrae.ac.ru

что в этих исследованиях не учитывалось наличие ловушек внутри перколяционных сред, которые имеют в них также фрактальную структуру. Дело в том, что перколяционный кластер, определяющий область, по которой переносится примесь, имеет две части [12]. Одна часть — остов — соединяет удаленные области среды, и именно по ней примесь мигрирует на большие расстояния. Другая часть — мертвые концы — присоединены к остову каждый только в одном месте. Если частица попадает в мертвые концы, она остается локализованной в них, и для того, чтобы продвигаться дальше, должна вернуться в остов. Структура перколяционного кластера и вклад мертвых концов с точки зрения переноса примеси были рассмотрены в статье [13], но только для случая, когда механизмом переноса является диффузия. Учет действия ловушек для модели случайной адвекции был рассмотрен в работе [14], однако в этой работе не анализировались одновременно действие ловушек и наличие конечного радиуса корреляции. Тем не менее, именно такой случай характерен для практически важных задач (например, для переноса примесей в геологических формациях). Поэтому целью настоящей работы является построение режимов переноса в перколяционных средах с конечным радиусом корреляции с учетом действия ловушек, когда механизмом переноса по остову перколяционного кластера является адвекция. Также следует отметить, что исторически при моделировании случайной адвекции основное внимание уделялось ситуации, когда при отличной от нуля средней скорости поле флуктуирующей компоненты скорости полагалось изотропным [7–9], что естественно называть случаем «квазиизотропной» среды. На практике, по-видимому, наличие выделенного направления, вдоль которого действуют движущие силы (сила тяжести, градиент напора), будет приводить не только к появлению средней скорости, но и возникновению анизотропии в распределении флуктуирующей компоненты (ниже для этого случая будем разделять умеренно и сильно анизотропные среды). В этом смысле модель квазиизотропной случайной адвекции является вспомогательной. Однако, как показали исследования [11], полученные выводы данной модели [7–9] качественно остаются справедливыми и для истинно анизотропных сред [11].

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 описана модель, а в разд. 3 проанализированы режимы переноса для квазиизотропной среды. Раздел 4 посвящен постановке модели анизотропной случайной адвекции с ловушками и конечным радиусом корреляции. В разд. 5 описаны режимы пере-

носа для данного случая. В Заключении приведены основные выводы работы.

2. КВАЗИИЗОТРОПНЫЙ СЛУЧАЙ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается поведение примеси в среде, в которой каналы миграции определяются перколяционным кластером. Механизмом переноса частиц примеси в остове является адвекция и диффузия, а в мертвых концах — диффузия. Уравнение, описывающее эволюцию концентрации $c(\mathbf{r}, t)$ внутри кластера, имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}c - D\nabla c) = 0, \quad (1)$$

где скорость адвекции $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ является случайной функцией координат (отличной от нуля только внутри каналов остова) и в силу несжимаемости жидкости удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

В настоящей работе полагаем, что поле скоростей инфильтрации не зависит от времени.

Нас в первую очередь будет интересовать поведение примеси в остове, поскольку именно она определяет перенос на большие расстояния. После усреднения по ансамблю реализаций среды уравнение (1) для данной части примеси принимает стандартный вид

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = Q. \quad (3)$$

Здесь $\bar{c}(\mathbf{r}, t)$ — усредненная концентрация примеси в остове, которую ниже мы будем называть активной концентрацией.

Поток \mathbf{j} обусловлен адвекцией по системе каналов, принадлежащих остову [15], и определяется полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Мы считаем, что имеется отличная от нуля средняя скорость, так что $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ можно разбить на две части: среднюю

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (4)$$

и флуктуирующую часть

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0. \quad (5)$$

В итоге поток можно представить в виде

$$j_i = - \int_{-\infty}^t dt' \int f_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial \bar{c}(\mathbf{r}', t')}{\partial r_k} d\mathbf{r}' + u_i \bar{c}, \quad (6)$$

где ядро f_{ik} определяется флуктуациями $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$.

В правой части уравнения (3) Q описывает диффузионный обмен примеси между остовом и мертвыми концами. В общем виде, с учетом локальности ловушек, его можно представить в виде [11]

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi(t-t') \bar{c}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (7)$$

Мы рассматриваем задачу с начальными условиями

$$\bar{c}(\mathbf{r}, 0) = c_0(\mathbf{r}), \quad (8)$$

так что усредненная концентрация примеси может быть выражена через начальное распределение:

$$\bar{c}(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) c_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (9)$$

где $G(\mathbf{r}, t)$ — функция Грина уравнения (3). С учетом (6) и (7) функция Грина в представлении Фурье–Лапласа имеет вид

$$G_{\mathbf{k}, p} = [p + p\varphi(p) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - M(\mathbf{k}, p)]^{-1}, \quad (10)$$

где

$$M(\mathbf{k}, p) = -k_i k_j \int_0^\infty dt e^{-pt} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f_{ij}(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

$$\varphi(p) = \int_0^\infty dt e^{-pt} \varphi(t). \quad (12)$$

Режимы переноса будем характеризовать следующими величинами: полным числом активных частиц примеси

$$N(t) = \int \bar{c}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (13)$$

средним смещением частиц вдоль вектора средней скорости

$$\langle r_{\parallel} \rangle = N^{-1}(t) \int \bar{c}(\mathbf{r}, t) r_{\parallel} d\mathbf{r}, \quad r_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad (14)$$

и дисперсией $R^2(t)$. Будем различать продольную (вдоль направления вектора средней скорости) и поперечную дисперсии:

$$R_{\parallel}^2(t) = N^{-1}(t) \int \bar{c}(\mathbf{r}, t) (r_{\parallel} - \langle r_{\parallel} \rangle)^2 d\mathbf{r}, \quad (15)$$

$$R_{\perp}^2(t) = N^{-1}(t) \int \bar{c}(\mathbf{r}, t) r_{\perp}^2 d\mathbf{r}, \quad (16)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\mathbf{u}^2}.$$

Отметим, что величины $R_{\alpha}(t)$, определенные в (15) и (16), описывают также размер облака, содержащего основное количество частиц примеси.

Как указывалось во Введении, главной отличительной чертой перколяционной среды на масштабах, меньших корреляционного радиуса, является свойство самоподобия. Это позволяет воспользоваться идеями теории критических явлений [16] и, в частности, рассматривать процессы переноса с точки зрения их масштабной инвариантности [10]. Последнее подразумевает, что макроскопические уравнения должны быть инвариантными при одновременном преобразовании пространственных координат

$$\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r} \quad (17)$$

и всех остальных входящих в уравнения (3)–(12) величин

$$A \rightarrow \lambda^{\Delta_A} A. \quad (18)$$

Здесь λ — действительный положительный безразмерный параметр, а показатели степени Δ_A носят название масштабных размерностей величин A .

Рассмотрим ключевые параметры, описывающие перенос в перколяционной среде.

Для конкретной реализации среды флуктуации поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ определяются случайным распределением проводимости (в простейшем случае — конфигурацией остова перколяционного кластера). В рассматриваемой модели нас интересуют величины, усредненные по ансамблю реализаций. Тогда, наряду со средней скоростью \mathbf{u} , перенос определяется корреляционной функцией флуктуаций скорости, т. е. величинами

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \langle V_{i_1}(\mathbf{r}_1) V_{i_2}(\mathbf{r}_2) \dots V_{i_n}(\mathbf{r}_n) \rangle.$$

В квазиизотропном случае поле флуктуаций скорости можно характеризовать одним индексом [7–9, 15]. Вводя для обозначения масштабной размерности парной корреляционной функции индекс

$$\Delta_{K^{(2)}} = -2h, \quad (19)$$

при преобразовании (17) имеем

$$K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \lambda^{-2h} K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (20)$$

Исходя из соотношения (20), значения масштабной размерности пространственной координаты $\Delta_r = 1$, а также физических размерностей входящих величин, парный коррелятор для изотропной задачи можно представить в виде

$$K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \approx V^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{2h}, \quad (21)$$

где $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, а V — средняя амплитуда флуктуаций скорости. Данное выражение справедливо в области фрактальности:

$$a \ll r \ll \xi, \tag{22}$$

где a — нижний предел фрактальности. На масштабах $r \gg \xi$ среда становится статистически однородной, так что корреляционные функции скорости убывают экспоненциально быстро.

Для средней скорости просачивания в перколяционной среде справедливо выражение [10]

$$u \sim V \left(\frac{a}{\xi} \right)^h, \tag{23}$$

из сравнения которого с (21) следует, что влиянием средней скорости на перенос на масштабах $r \ll \xi$ можно пренебречь [10].

Как показано в работах [7–9], при значениях $h < 1$ перенос в области фрактальности определяется длинными коррелированными скачками, что и приводит к аномальным режимам переноса. В обратном случае при $h > 1$ главный вклад в перенос определяется распределением скоростей на масштабах порядка a , что соответствует механизму классической диффузии. Мы ограничимся нетривиальным случаем $h < 1$.

Второй важной характеристикой среды является «мощность» ловушек, определяемых наличием мертвых концов. Так как совокупность каналов, образованных мертвыми концами, также имеет фрактальную структуру, то и перенос по ним в определенном интервале времени $\tau_1 \ll t \ll \tau$ будет обладать свойством самоподобия [13]. В таком случае свойства ловушек удобно описывать с помощью введения масштабной размерности ядра $\varphi(t)$ (или, что эквивалентно, размерности Q), так что при преобразовании (17) соотношение (18) приобретает вид

$$\varphi(t) \rightarrow \lambda^{-\omega} \varphi(t). \tag{24}$$

Аналогично, как и для корреляционной функции скорости (21), выражение для $\varphi(t)$ в интервале самоподобия можно представить в виде

$$\varphi(t) \sim \tau_1^{-1} \left(\frac{\tau_1}{t} \right)^\alpha, \quad \tau_1 \ll t \ll \tau. \tag{25}$$

Отметим, что индексы α и ω связаны соотношением $\alpha = \omega / \Delta_t$, где Δ_t — масштабная размерность времени.

Ниже для описания режимов переноса будем в качестве независимого параметра рассматривать α , поскольку именно этот параметр определяется

структурой ловушек. Будем считать, что значения α лежат в диапазоне $0 < \alpha < 1$. Левая граница данного интервала определяется естественным условием убывания со временем потока примеси в мертвые концы. Условие на правой границе позволяет считать, что в уравнении (3), начиная с момента времени τ_1 , вклад ловушек Q превосходит вклад, определяемый производной по времени от концентрации $\bar{c}(\mathbf{r}, t)$.

Верхняя граница интервала самоподобия τ — это время насыщения ловушек примесью. Данное время определяется режимом переноса вдоль мертвых концов и их характерной длиной. Поскольку мертвые концы сами по себе являются фрактальными кластерами, их характерная длина пропорциональна некоторой степени ξ . В итоге, в общем случае имеем

$$\tau = \tau(\xi), \tag{26}$$

где вид функции $\tau(\xi)$ зависит от размерности мертвых концов и остова, а также от режима переноса по мертвым концам (но не по остову).

На временах $t \gg \tau$ ядро быстро (экспоненциально) убывает. На малых временах, $t < \tau_1$, вклад ловушек Q в уравнение для активной концентрации (3) не превосходит вклада, определяемого производной от концентрации по времени, поэтому для оценки будем считать

$$\varphi(t) \sim \tau_1^{-1}, \quad t < \tau_1. \tag{27}$$

3. РЕЖИМЫ ПЕРЕНОСА В КВАЗИИЗОТРОПНОЙ ПЕРКОЛЯЦИОННОЙ СРЕДЕ

Ниже для определенности будет проанализирован случай, когда характерное время адвекции на расстояние порядка a , $\tau_0 \sim a/V$, много меньше времени τ_1 , при котором становится существенным действие ловушек: $\tau_0 \ll \tau_1$. Обратный случай рассматривается аналогично.

В интервале $\tau_0 \ll t \ll \tau_1$ перенос примеси уже определяется коррелированными флуктуациями скорости (21), в то время как действием ловушек Q в правой части (3) можно пренебречь. В работе [15] было показано, что в этом случае масштабные размерности основных величин имеют вид

$$\Delta_G = -3, \quad \Delta_f = -(2h + 3), \quad \Delta_t = 1 + h, \tag{28}$$

и выражение для ядра $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$ можно представить как

$$f_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{V^2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^{2h+3} \psi(\eta), \quad r \gg a, \tag{29}$$

$$f_{ij}(r, t) \sim \frac{V^2}{a^3}, \quad r \leq a, \quad (30)$$

где $\psi(\eta)$ — безразмерная функция безразмерной переменной

$$\eta = \frac{r}{(a^h V t)^{1/(1+h)}}. \quad (31)$$

Подчеркнем, что выражения (29)–(31) справедливы при $r \ll \xi$, $t \ll \tau_1$. Из (29) и (30) следует, что основной вклад в интеграл (11) (при $h < 1$) дают значения пространственной переменной $r \gg a$. Отсюда, подставляя выражение (29) в (11), для масштабной размерности M получаем

$$\Delta_M = -(1+h). \quad (32)$$

Учитывая также, что

$$\Delta_p = -(1+h), \quad \Delta_k = -1, \quad (33)$$

приходим к следующему представлению для M :

$$M(\mathbf{k}, p) = -p\phi_1(\vartheta_1), \quad (34)$$

$$\vartheta_1 = k \left(\frac{a^h V}{p} \right)^{1/(1+h)}, \quad k = |\mathbf{k}|,$$

где $\phi_1(\vartheta_1)$ — безразмерная функция.

На основе изложенного и исходя из формулы (10), в которой можно пренебречь $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ (см. замечание после формулы (23)), а также $p\varphi(p)$ по сравнению с p , выражение для функции Грина в данном интервале времени сводится к следующему:

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + pt}}{p - M(\mathbf{k}, p)}. \quad (35)$$

С учетом (34) оно может быть представлено в виде

$$G_1(\mathbf{r}, t) = R_1(t)^{-3} g_1(\zeta_1), \quad (36)$$

где

$$R_1(t) \sim (a^h V t)^{1/(1+h)}, \quad (37)$$

а $g_1(\zeta)$ — безразмерная функция безразмерной переменной $\zeta_1 = r/R_1(t)$, имеющая асимптотики $g_1(0) \neq 0, \infty$ и $g_1(\zeta_1) \rightarrow 0$ при $\zeta_1 \rightarrow \infty$.

Как указано выше, на данных временах (в силу $R_1 \ll \xi$) переносом со средней скоростью можно пренебречь, так что среда остается изотропной. Поэтому продольная и поперечная дисперсии примеси совпадают, $R_{\parallel}^2 = R_{\perp}^2 \approx R_1^2$, и с учетом того, что $h < 1$, определяются супердиффузионной закономерностью.

В следующем временном интервале $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$, где верхняя граница τ_2 будет определена ниже, перенос по остову по-прежнему определяется случайной адвекцией с медленно убывающим коррелятором (21), но при этом становится существенным действие ловушек.

Интегрирование уравнения (3) по всему пространству с учетом соотношения $\partial \bar{c} / \partial t \ll Q$ и выражения (25) приводит к следующей зависимости полного числа активных частиц от времени:

$$N(t) \approx \tilde{N}(t) = N_0 \left(\frac{\tau_1}{t} \right)^{1-\alpha}, \quad (38)$$

где

$$N_0 = \int c_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (39)$$

В этом диапазоне масштабные индексы времени и ядра потока (6) принимают вид

$$\Delta_t = \frac{1+h}{\alpha}, \quad \Delta_f = - \left(2+h + \frac{1+h}{\alpha} \right), \quad (40)$$

и, как и в предыдущем случае, основной вклад в интеграл (11) дают значения пространственной переменной $r \gg a$. В итоге масштабная размерность M становится равной

$$\Delta_M = - \frac{1+h}{\alpha}, \quad (41)$$

так что сама величина M представима в виде

$$M(\mathbf{k}, p) = -\varphi(p)\phi_2(\vartheta_2), \quad (42)$$

$$\vartheta_2 = k \left(\frac{a^h V}{\varphi(p)} \right)^{1/(1+h)},$$

где $\phi_2(\vartheta_2)$ — также безразмерная функция.

Функцию Грина, определяемую теперь выражением

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + pt}}{p\varphi(p) - M(\mathbf{k}, p)} \quad (43)$$

(где в знаменателе по-прежнему опущено слагаемое $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ [10], но теперь $p \ll p\varphi(p)$), можно представить в виде

$$G_2(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{N}(t)}{N_0} R_2(t)^{-3} g_2(\zeta_2), \quad (44)$$

где

$$R_2(t) \sim (a^h V \tau_1^{1-\alpha} t^\alpha)^{1/(1+h)}, \quad \zeta_2 = r/R_2(t), \quad (45)$$

и свойства $g_2(\zeta)$ те же, что и $g_1(\zeta)$. Как и в предыдущем интервале, облако примеси растет изотропно, и

из-за того, что $R_2 \propto t^{\alpha/(1+h)}$, в зависимости от значений α и h перенос в данном временном интервале может происходить как в режиме супердиффузии, так и в режиме субдиффузии. Таким образом, несмотря на то что миграция частиц по-прежнему определяется «длинными скачками», результирующим режимом может оказаться субдиффузия, поскольку доля времени, которое частицы проводят в остовах, уменьшается с уменьшением общего времени процесса достаточно быстро (частицы все большую часть времени проводят в ловушках).

Данный режим имеет место до тех пор, пока флуктуации скорости скоррелированы или, иными словами, пока область, занимаемая примесью, меньше корреляционного радиуса ξ : $R_2(t) < \xi$. Отсюда следует выражение для верхней границы данного интервала времени, определяемое условием $R_2(\tau_2) \approx \xi$:

$$\tau_2 \approx \tau_1 \left(\frac{\xi^{1+h}}{a^h V \tau_1} \right)^{1/\alpha}. \quad (46)$$

Соотношение между временами τ_2 и τ , вообще говоря, заранее неизвестно, поскольку неизвестна функция $\tau(\xi)$. В настоящей работе мы полагаем $\tau_2 \ll \tau$, предполагая, что адвекция в остовах (даже с учетом действия ловушек) является более быстрым процессом, чем диффузионный перенос по мертвым концам. Для последнего в силу фрактальной структуры мертвых концов режим будет заведомо субдиффузионным. Случай обратного соотношения между временами может быть также легко рассмотрен.

В следующем временном интервале $\tau_2 \ll t \ll \tau$ размер облака примеси значительно превосходит корреляционный радиус. Учитывая, что основной вклад при вычислении функции Грина $G(\mathbf{r}, t)$ (см. (43)) дают значения переменных $p \sim t^{-1}$, $k \sim r^{-1}$ интерес представляет поведение $G_{\mathbf{k}, p}$, и M в диапазоне $k \ll \xi^{-1}$. Поскольку на расстояниях $r \gg \xi$ корреляторы скорости и, следовательно, ядро потока убывают экспоненциально, для M можно приближенно написать

$$M(\mathbf{k}, p) \approx -D_\xi k^2, \quad (47)$$

где

$$D_\xi \sim \xi u, \quad (48)$$

так что миграция частиц вдоль остова определяется некоррелированными скачками длиной порядка ξ . Кроме того, на данных временах существенный вклад в перенос оказывает дрейф примеси со средней скоростью \mathbf{u} . В то же время поведение ловушек по-прежнему определяется зависимостью (25).

Вычисления с учетом (47) среднего смещения (14) и дисперсий (15), (16) дают соотношения

$$\langle r_{\parallel} \rangle \sim R_{\parallel}(t) \sim R_3(t), \quad (49)$$

$$R_3(t) \sim u \tau_1^{1-\alpha} t^\alpha, \quad (50)$$

$$R_{\perp}(t) \sim (D_\xi \tau_1^{1-\alpha} t^\alpha)^{1/2}. \quad (51)$$

Функцию Грина

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+pt}}{p\varphi(p) + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + D_\xi k^2} \quad (52)$$

после интегрирования по волновому вектору можно представить как

$$G_3(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{N}(t)}{N_0} R_{\perp}(t)^{-2} R_{\parallel}(t)^{-1} \Phi(\mathbf{r}, R_{\parallel}(t), \mathbf{n}), \quad (53)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении средней скорости, а функция Φ равна

$$\Phi(\mathbf{r}, R_{\parallel}(t), \mathbf{n}) = \frac{\alpha \exp\left(-\frac{r}{2\xi} \left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r}\right)\right)}{8\pi^2} \times \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp\left(s - \frac{r}{R_{\parallel}(t)} s^\alpha\right) \frac{ds}{s^{1-\alpha}}, \quad \text{Re } b > 0. \quad (54)$$

Из формул (50), (51) видно, что в силу условия $0 < \alpha < 1$ перенос в поперечном направлении происходит в режиме субдиффузии, в то время как в продольном направлении возможна и субдиффузия, и супердиффузия.

На временах $t \gg \tau(\xi)$ значения переменной Лапласа, определяющие основной вклад в поведение G , лежат в области $p \ll \tau(\xi)^{-1}$. На этих временах ловушки насыщаются, так что для $\varphi(p)$ имеем оценку

$$\varphi(p) \sim \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{1-\alpha} \quad (55)$$

и перенос происходит в режиме классической адвекции-диффузии

$$G(\mathbf{r}, t) \approx \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha} \left(4\pi\tilde{D}_\xi t\right)^{-3/2} \times \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{u}}t)^2}{4\tilde{D}_\xi t}\right) \quad (56)$$

со средней скоростью

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u} \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha} \quad (57)$$

и эффективным коэффициентом диффузии

$$\tilde{D}_\xi \approx D_\xi \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)^{1-\alpha}. \quad (58)$$

Как следует из (56), полное количество активных частиц при этом уменьшается и определяется формулой

$$N(t) \approx N_1 = N_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)^{1-\alpha}. \quad (59)$$

4. АНИЗОТРОПНЫЙ СЛУЧАЙ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как указано во Введении, наличие выделенного направления, вдоль которого действуют движущие силы, будет приводить не только к появлению средней скорости, но и к возникновению анизотропии поля флуктуаций скорости и, соответственно, к изменению вида корреляционных функций. Для описания переноса в этом случае соотношения скейлинга (17), (18) должны быть обобщены [6]. В частности, теперь координатам вдоль и поперек выделенного направления должны быть приписаны различные масштабные размерности [11]. Если ось z направлена вдоль выделенного направления (например, вдоль вектора силы тяжести), то вместо (17) масштабное преобразование среды будем определять соотношением

$$\{\boldsymbol{\rho}, z\} \rightarrow \{\lambda^{1/\beta} \boldsymbol{\rho}, \lambda z\}, \quad (60)$$

где $\mathbf{r} = \{\boldsymbol{\rho}, z\}$, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, так что масштабные размерности пространственных координат имеют следующие значения:

$$\Delta_z = 1, \quad \Delta_\mu = \frac{1}{\beta}. \quad (61)$$

Здесь μ принимает значения x и y , а параметр β , аналогично параметрам h и α , определяется свойствами среды. Будем считать, что индекс $-2h$ по-прежнему характеризует парный коррелятор флуктуации скорости, но теперь только zz -компоненту:

$$\Delta_{K_{zz}^{(2)}} = -2h. \quad (62)$$

Масштабные индексы остальных компонент могут быть построены исходя из масштабных размерностей компонент скорости, соотношения между которыми, в свою очередь, следуют из условия несжимаемости (2). В итоге, например, для $\Delta_{K_{\mu\mu}^{(2)}}$ имеем

$$\Delta_{K_{\mu\mu}^{(2)}} = -2 \left(h + 1 - \frac{1}{\beta} \right). \quad (63)$$

Основываясь на формулах (62), (63), диагональные компоненты парного коррелятора в области фрактальности можно представить в виде [11]

$$K_{zz}^{(2)}(\mathbf{r}) \approx V^2 \left(\frac{a}{z} \right)^{2h} \varphi \left(\frac{\rho^\beta}{za^{\beta-1}} \right), \quad (64)$$

$$K_{\mu\mu}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \approx V^2 \left(\frac{a}{z} \right)^{2(1/\beta-1-h)} \tilde{\varphi} \left(\frac{\rho^\beta}{za^{\beta-1}} \right), \quad (65)$$

где φ и $\tilde{\varphi}$ имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi(x \rightarrow 0) &\rightarrow \text{const}, & \varphi(x \rightarrow \infty) &\sim x^{-2h}, \\ \tilde{\varphi}(x \rightarrow 0) &\rightarrow \text{const}, & \tilde{\varphi}(x \rightarrow \infty) &\sim x^{2(1+h-1/\beta)}. \end{aligned} \quad (66)$$

Аналогично строятся остальные компоненты корреляционной функции.

Область фрактальности в данном случае определяется двумя длинами корреляции ξ_{\parallel} и ξ_{\perp} , так что соотношения (64)–(66) действительны в области

$$a \ll z \ll \xi_{\parallel}, \quad a \ll \rho \ll \xi_{\perp}, \quad (67)$$

причем

$$\frac{\xi_{\parallel}}{a} \approx \left(\frac{\xi_{\perp}}{a} \right)^{\beta}. \quad (68)$$

Для средней скорости u вдоль оси z остается справедливым соотношение (23), в котором ξ заменяется на ξ_{\parallel} . Средняя скорость в поперечном направлении равна нулю.

Уравнение для средней концентрации сохраняет свой вид (3), однако наличие выделенного направления приводит к появлению нового слагаемого, так что вместо (6) теперь имеем [11]

$$\begin{aligned} j_i &= - \int_{-\infty}^t dt' \int f_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial \bar{c}(\mathbf{r}', t')}{\partial r_k} d\mathbf{r} - \\ &- \int_{-\infty}^t dt' \int f_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial \bar{c}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} d\mathbf{r} + u_i \bar{c}. \end{aligned} \quad (69)$$

Анизотропия поля скоростей никак не влияет на действие ловушек, поскольку миграция частиц в мертвых концах определяется диффузией и не связана с полем скоростей адвекции. Поэтому вид оператора Q , описывающего действие ловушек (7), сохраняется.

Как и для квазиизотропного случая, решается задача с начальными условиями (8).

5. РЕЖИМЫ ПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОМ СЛУЧАЕ

Построение решения в данной задаче проводится аналогично, как для изотропного случая. Поэтому далее мы лишь приведем полученные выражения для зависимости от времени размеров облака примеси и среднего смещения частиц, которые и определяют режим переноса в каждом временном диапазоне. Как и в работе [11], будут рассмотрены два случая: умеренной ($h < 1, 1/(1+h) < \beta < 2/(1+h)$) и сильной ($h < 1, \beta > 2/(1+h)$) анизотропии.

5.1. Умеренная анизотропия, $h < 1, 1/(1+h) < \beta < 2/(1+h)$

На малых временах $\tau_0 \ll t \ll \tau_1$ перенос определяется случайной адвекцией, и влиянием ловушек в этом случае можно пренебречь. Для продольной координаты размер облака примеси описывается формулой (37) ($R_{\parallel}(t) = R_1(t)$). Для размера в поперечном направлении, с учетом введенной масштабной размерности (61), имеем

$$R_{\perp}(t) = \left(a^{\beta(1+h)-1} V t \right)^{1/\beta(1+h)}. \quad (70)$$

Таким образом, облако примеси растет по супердиффузионной зависимости в обоих направлениях. Кроме того, в отличие от изотропного случая, в данном временном интервале существенным является среднее смещение частиц примеси, которое по порядку равно размеру облака в продольном направлении:

$$\langle z \rangle \sim R_1(t). \quad (71)$$

В следующем диапазоне $\tau_1 \ll t \ll \tilde{\tau}_2$ ловушки играют заметную роль, так что для продольного размера облака примеси справедливо соотношение $R_{\parallel}(t) = R_2(t)$ (см. (45)), а для размера в поперечном направлении —

$$R_{\perp} \approx \left(V a^{\beta(1+h)-1} \tau_1^{1-\alpha} t^{\alpha} \right)^{1/\beta(1+h)}. \quad (72)$$

Среднее смещение частиц определяется формулой

$$\langle z \rangle \sim R_2(t). \quad (73)$$

В зависимости от соотношения между h, β и α , режим может быть как субдиффузионным, так и супердиффузионным, причем в продольном и поперечном направлениях они могут качественно различаться, например, супердиффузионный в продольном направлении и субдиффузионный в поперечном (и наоборот!).

Для верхней границы интервала имеем

$$\tilde{\tau}_2 = \tau_1 \left(\frac{\xi_{\parallel}^{1+h}}{V a^h \tau_1} \right)^{1/\alpha}. \quad (74)$$

В диапазоне $\tilde{\tau}_2 \ll t \ll \tau$ размеры облака примеси превышают корреляционный радиус, но ловушки еще не насыщены. В итоге для среднего смещения и размера облака в продольном направлении справедливы соотношения (49), (50), а для поперечного размера — (51), в котором D_{ξ} следует заменить на

$$D_{\xi\perp} \sim \xi_{\perp}^2 \tilde{\tau}_2^{-1}. \quad (75)$$

Таким образом, расплывание облака происходит анизотропно, причем в поперечном направлении медленнее, чем по классической диффузии, а среднее смещение растет медленнее, чем по линейному со временем закону.

В диапазоне $t \gg \tau$ ловушки насыщаются, и реализуется классическая адвекция–диффузия с полным числом активных частиц N_1 , модифицированной скоростью \tilde{u} и анизотропной диффузией, так что эффективные коэффициенты диффузии описываются формулами

$$\tilde{D}_{\xi\nu} = D_{\xi\nu} \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)^{1-\alpha}, \quad \nu = \parallel, \perp, \quad (76)$$

где

$$D_{\xi\parallel} \sim \xi_{\parallel} u, \quad (77)$$

а $D_{\xi\perp}$ определяется формулой (75).

5.2. Сильная анизотропия, $h < 1, \beta > 2/(1+h)$

На малых временах $\tau_0 \ll t \ll \tau_1$ режим переноса был описан в работе [11], он представляет собой супердиффузию в продольном направлении $R_{\parallel}(t) = R_1(t)$ со средним смещением $\langle z \rangle \sim R_1(t)$ и классическую диффузию в поперечном направлении

$$R_{\perp}(t) = \sqrt{\tilde{D}t}, \quad \tilde{D} \sim Va. \quad (78)$$

В следующем диапазоне $\tau_1 \ll t \ll \tilde{\tau}_2$ действие ловушек приводит к режиму, для которого справедливы соотношения $\langle z \rangle = R_{\parallel}(t) = R_2(t)$ и

$$R_{\perp} \approx \sqrt{\tilde{D}\tau_1 \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha}}. \quad (79)$$

В диапазоне $\tilde{\tau}_2 \ll t \ll \tau$ перенос в продольном направлении описывается формулами (49), (50), а в поперечном — (79).

В диапазоне $t \gg \tau$ режимом переноса является адвекция–диффузия с полным числом активных частиц N_1 , скоростью дрейфа $\mathbf{\bar{u}}$ и эффективными коэффициентами диффузии $\bar{D}_{\xi\parallel}$ в продольном и \bar{D} в поперечном направлениях.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе описаны режимы переноса примеси, обусловленные адвекцией и диффузией в перколяционной среде с конечной длиной корреляции. Показано, что при учете ловушек, внутренне присутствующих перколяционным средам, можно выделить четыре временных интервала, в каждом из которых особые свойства перколяционной среды проявляются по-своему.

В первом временном интервале основную роль играет пространственное самоподобие системы хорошо проводящих каналов (остова перколяционного кластера). Для случая адвекции в поле скоростей просачивающейся по данным каналам жидкости свойство самоподобия приводит к медленному пространственному убыванию коррелятора флуктуаций скорости. В результате при значениях показателя степени убывания коррелятора $h < 1$ перенос примеси происходит в режиме супердиффузии.

В следующем временном интервале начинают действовать ловушки, обусловленные диффузией примеси в мертвые концы перколяционных кластеров. При этом происходит замедление переноса, так что супердиффузионный режим может смениться субдиффузионным.

На временах, когда размер облака примеси существенно превосходит корреляционный радиус среды, но ловушки еще не насыщены, режим переноса формируется под влиянием следующих факторов: дрейфа со средней скоростью, случайных скачков с длиной скачка порядка корреляционного радиуса и постепенным уменьшением доли времени, проводимого частицами в остове. Последнее обусловлено блужданием примеси в мертвых концах (в ловушках). В итоге в направлении средней скорости адвекции среднее смещение частиц оказывается порядка корня из дисперсии и может описываться как субдиффузионной, так и супердиффузионной закономерностью. В направлении, перпендикулярном к средней скорости, устанавливается субдиффузионный режим переноса.

На последней стадии ловушки насыщаются, и режимом переноса становится классическая адвекция–диффузия. Полное число активных частиц и

скорость среднего смещения уменьшаются (в одинаковое число раз). Значительная же часть примеси остается сосредоточенной в ловушках и в процессе переноса не участвует. Эффективные коэффициенты диффузии определяются как величиной корреляционной длины, так и временем насыщения ловушек.

В работе получены выражения, описывающие указанные режимы как для случая, когда распределение флуктуаций скорости изотропно, так и для анизотропного распределения.

Наличие двух этапов при переходе от самоподобного поведения системы к статистически однородному аналогично ситуации, которая возникает в статистически однородных двупористых средах [17], в которых системы каналов с высокой проницаемостью обеспечивают быстрый адвекционный перенос на большие расстояния, в то время как слабопроницаемые области играют роль ловушек. При определенном соотношении между параметрами также возможно сохранение неравновесия в слабопроницаемой подсистеме и на временах, когда размеры облака примеси будут значительно превосходить размеры неоднородностей. Окончательный режим в этом случае устанавливается только после насыщения ловушек примесью.

В заключение обсудим вопрос, насколько полученное усредненное описание будет соответствовать транспорту реального облака частиц, брошенных в среду при какой-то конкретной реализации течения. У данного вопроса есть два аспекта.

Первый касается задания начальных данных. Дело в том, что когда мы рассматривали перенос по перколяционной среде, мы неявно полагали, что в начальный момент времени примесь находится в остове перколяционного кластера, так что с самого начала перенос примеси определяется адвекцией в поле скоростей просачивающейся по остову жидкости. При рассмотрении единичного эксперимента может оказаться, что изначально ступок примеси локализован в мертвом конце. Тогда для того, чтобы примесь попала в остов, ей необходимо продиффундировать до места, где мертвый конец присоединяется к остову. Можно сказать, что возникает диффузионный барьер, который приведет к эффективной перенормировке источника. Данный вопрос рассматривался для различного типа сред (см. [18]). Для сред с фрактальной геометрией он еще нуждается в доработке.

Второй аспект — это соответствие между формулами, даваемыми моделью, и реальным распределением частиц в конкретном эксперименте. В по-

следнем случае распределение частиц в пространстве будет локализовано внутри каналов, формирующих перколяционный кластер. Поэтому вместо монотонного расплывания облака будет наблюдаться формирование структур и кластеров примеси. Попытка усреднить концентрацию по пространству не приводит к успеху, поскольку, как известно, доля пространства, занимаемая перколяционным кластером, на масштабах, меньших корреляционной длины ξ , зависит от размера области усреднения (перколяционный кластер обладает фрактальной размерностью). В этом случае сравнение теории с экспериментом должно проводиться для первого и второго моментов распределений концентрации, определяемых в теории и наблюдаемых в эксперименте (среднее смещение (14) и дисперсия (15), (16)).

Что касается непосредственного сравнения распределений концентрации, то данный вопрос — это вопрос о степени неопределенности предсказаний модели, опирающейся на свойства среды, усредненные по ансамблю реализаций [19]. Действительно, формирование перколяционного кластера, который в нашем случае определяет конкретную реализацию распределения проницаемости и, следовательно, поля скоростей, есть случайный процесс. Функция Грина G уравнения (3) получается в результате усреднения точной функции Грина $\hat{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$, являющейся решением уравнения (1), для конкретной реализации фрактальной (и, следовательно, неоднородной) среды:

$$G(\mathbf{r}, t) = \left\langle \hat{G} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{r}}{2}; t \right) \right\rangle,$$

где запись $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю реализаций среды. Степень неопределенности модели определяется статистическим разбросом, который происходит из-за пространственных флуктуаций указанных характеристик среды (прежде всего, проницаемости) и обусловлен формально статистической неопределенностью величины \hat{G} . Соответствующий статистический разброс \hat{G} (и, следовательно, концентрации примеси) определяется соотношением

$$\Delta = \frac{\sqrt{\langle \delta \hat{G}^2 \rangle}}{G}, \quad \delta \hat{G} = \hat{G} - G. \quad (80)$$

Предположим сначала, что размер области локализации примеси (облака примеси) велик в сравнении с длиной корреляции $R(t) \gg \xi$. В этом случае среду можно считать статистически однородной и в соответствии с эргодической гипотезой усреднение

по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по пространству. В частности, будем иметь:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \int_V d^3 r_0 \hat{G} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{r}}{2}; t \right),$$

где объем V , по которому происходит усреднение, удовлетворяет неравенству

$$\xi^3 \ll V \ll R^3(t).$$

Тогда основной вклад при вычислении числителя под знаком корня в формуле (80) дает интегрирование произведения $\delta \hat{G}(r_{01}) \delta \hat{G}(r_{02})$ по области $|r_{01} - r_{02}| \leq \xi$, и с учетом того, что в сильно неоднородной фрактальной среде масштаб флуктуаций $\delta \hat{G}$ порядка самой G , имеем

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{G}^2 \rangle &\sim \int_{|r_{01} - r_{02}| \leq \xi} d^3 r_{01} d^3 r_{02} \delta \hat{G}(r_{01}) \delta \hat{G}(r_{02}) \sim \\ &\sim \frac{\xi^3}{V} G^2. \end{aligned} \quad (81)$$

Подставляя эту оценку в соотношение (80), получаем, что относительный статистический разброс концентрации примеси за счет пространственных флуктуаций характеристик среды при временах, когда $R(t) \gg \xi$, можно оценить как

$$\Delta \leq \left(\frac{\xi}{R(t)} \right)^{3/2}. \quad (82)$$

При $R(t) \gg \xi$ данная величина мала, и модель будет описывать результаты эксперимента с хорошей точностью (после соответствующего усреднения наблюдаемой концентрации). По мере уменьшения размера облака примеси статистический разброс концентрации примеси растет и в том случае, когда данный размер оказывается сравнимым с длиной корреляции, величина статистического разброса становится порядка единицы:

$$\Delta \sim 1 \quad \text{при} \quad R(t) \sim \xi. \quad (83)$$

Таким образом, можно утверждать, что полученные в рамках предложенной модели формулы с хорошей точностью описывают поведение примеси в единичном эксперименте при временах, когда размер облака примеси сравним либо много больше корреляционной длины. На меньших временах результаты модели будут воспроизводиться после усреднения результатов единичных экспериментов по достаточно большому числу реализаций среды. Вопрос о

статистической неопределенности результатов модели в данном интервале времени нуждается в дополнительном исследовании.

Отметим также, что в литературе существуют модели, в которых для эффективного описания сред с фрактальными свойствами (в эффективных усредненных уравнениях) для относительной диффузии (в нашем случае — дисперсии) используется явная зависимость от пространственных либо временных координат (см., например, [20]). Однако данный способ вызывает определенные трудности при рассмотрении случаев с распределенным источником (например, случая, когда начальное распределение не сводится к дельта-функции). В рамках нашей модели вопрос о распределенных источниках по пространству решается формулой (9).

В случае же, когда речь идет об описании миграции отдельных частиц, введение явной зависимости коэффициента диффузии от пространственных и временных координат эквивалентно представленным в нашей работе формулам. Например, формулу (37) можно представить в виде $R_1 \sim \sqrt{D(t)t}$, где $D(t) = (a^h V)^{2/(1+h)} t^{(1-h)/(1+h)}$, либо $R_1 \sim \sqrt{D(R)t}$, где $D(R) = a^h V R^{1-h}$.

Автор приносит благодарность П. С. Кондратенко за внимание к работе и плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-08-00736-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Broadbent and J. Hammersley, Proc. of the Cambridge Philos. Soc. **53**, 629 (1957).
2. A. M. Sahimi, Phys. Rev. E **85**, 016316 (2012).
3. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, УФН **174**, 809 (2004).
4. Y. Gefen, A. Aharony, and S. Alexander, Phys. Rev. Lett. **50**, 77 (1983).
5. В. Е. Архинчеев, Е. М. Баскин, ЖЭТФ **100**, 292 (1991).
6. D. ben-Avraham and S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2000).
7. D. L. Koch and J. F. Brady, Phys. Fluids **31**, 965 (1988).
8. D. L. Koch and J. F. Brady, Phys. Fluids A **1**, 47 (1989).
9. И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **125**, 1082 (2004).
10. P. S. Kondratenko and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **75**, 051102 (2007).
11. P. S. Kondratenko and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **83**, 021106 (2011).
12. М. В. Исиченко, Rev. Mod. Phys. **29**, 961 (1992).
13. А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Письма в ЖЭТФ **80**, 464 (2004).
14. L. Bolshov, P. Kondratenko, L. Matveev et al., Vadose Zone J. **7**, 1152 (2008).
15. А. М. Дыхне, И. Л. Драников, П. С. Кондратенко et al., Phys. Rev. E **72**, 061104 (2005).
16. Ш. Ма, *Теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
17. Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **142**, 943 (2012).
18. О. А. Dvoretzskaya and P. S. Kondratenko, J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 465001 (2011).
19. П. С. Кондратенко, Частное сообщение.
20. V. Mendez, D. Campos, and J. Fort, Phys. Rev. E **69**, 016613 (2004).