

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

*А. М. Камчатнов**

*Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 сентября 2013 г.

Рассмотрены периодические волны в квазиодномерном двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате при условии, что взаимодействие между атомами допускает смешивание компонент. Возможность относительного движения компонент приводит к существенно более разнообразной динамике, чем в однокомпонентном случае. В частности, в эксперименте было обнаружено, что при наличии течения одной компоненты относительно другой могут возбуждаться волны с противофазными колебаниями компонент. Развита теория однофазных периодических волн в случае «слабого» смешивания компонент, когда динамика конденсата с достаточно хорошей точностью описывается системой уравнений Гросса – Питаевского с равными константами нелинейного взаимодействия как между атомами одного сорта, так и между атомами разных сортов. Рассмотрены случаи как отталкивающих, так и притягивающих взаимодействий. Детально изучен предельный случай волн постоянной амплитуды. Рассмотрена структура аналогов солитонов в этих системах. Обсуждается возможность приложения развитой теории к экспериментально наблюдаемым волновым периодическим структурам в двухкомпонентных конденсатах.

DOI: 10.7868/S0044451014040144

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные уравнения типа векторного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) впервые возникли, по-видимому, при описании распространения световых импульсов и пучков с учетом их поляризации [1], и это их приложение получило большое развитие в литературе (см., например, [2, 3]). Кроме того, было обнаружено, что при определенном выборе постоянных нелинейного взаимодействия векторное НУШ обладает свойством полной интегрируемости методом обратной задачи рассеяния [4], что позволило найти его многосолитонные решения, бризеры и другие важные волновые структуры.

Реализация бозе-эйнштейновских конденсатов атомов, находящихся в нескольких различных атомных состояниях, усилило интерес к нелинейной динамике такого рода систем (см., например, обзор [5]). Например, если различные компоненты конденсата смешиваются, то в таком конденсате возможно существование двух типов линейных волн: обычных волн плотности, когда обе компоненты

колеблются в основном в фазе, и так называемых волн поляризации, когда они колеблются в противофазе. Соответственно, в такой системе имеются два конуса Маха и два канала черенковского излучения, что существенно меняет характер возбуждений в системе по сравнению с однокомпонентным случаем. В частности, в однокомпонентном конденсате согласно закону дисперсии Боголюбова для линейных волн их фазовая скорость всегда больше скорости звука, вычисленной в длинноволновом пределе. Поэтому при сверхзвуковом течении конденсата мимо препятствия вследствие интерференции черенковских волн образуется стационарная картина так называемых корабельных волн [6–9], расположенных вне конуса Маха. Внутри конуса Маха располагаются нелинейные дисперсионные ударные волны [10], распадающиеся вдали от препятствия на косые солитоны [11–13]. Описанная теоретическая картина была подтверждена экспериментами по течению мимо препятствий поляритонного конденсата [14, 15], когда, в отличие от атомного конденсата, существенную роль играет также затухание солитонов из-за их излучения из микрорезонатора [16].

При обобщении этой теории на двухкомпонент-

*E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

ный случай обнаружилось [17, 18], что характер возникающей волновой картины существенным образом зависит от характера потенциала препятствия. Если препятствие отталкивает от себя обе компоненты конденсата, то сильно возбуждаются синфазные колебания плотности, а колебания поляризации с ведущей ролью относительного движения компонент возбуждаются слабо. Если же препятствие притягивает одну компоненту и отталкивает другую, то, наоборот, сильно возбуждаются моды с существенным вкладом относительного движения и слабо возбуждаются моды с совместными колебаниями полной плотности. Особенно наглядно это проявляется в нелинейных возбуждениях: в течении мимо препятствия, отталкивающего обе компоненты, образуется лишь солитон плотности [17], тогда как в течении мимо препятствия с разнонаправленным действием потенциала образуется лишь бризер поляризационной моды [18], однако образования одновременно обоих типов нелинейных возбуждений в указанных работах замечено не было.

Существенной чертой экспериментов с течением мимо препятствия является то, что обе компоненты конденсата натекают на препятствие с одинаковой скоростью и волновые структуры образуются благодаря действию потенциала. Однако существуют и другие механизмы генерации волновых структур, обусловленные свойствами эволюционного уравнения, а не внешнего возмущения. Например, взаимное действие эффектов дисперсии и нелинейности может приводить к генерации дисперсионных ударных волн из изначально гладкого импульса (применительно к бозе-эйнштейновскому конденсату этот вопрос рассматривался, например, в работах [19, 20]). Другим универсальным механизмом служит модуляционная неустойчивость однородных распределений и течений среды. В частности, если в двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате одна из компонент движется относительно другой с достаточно большой скоростью, то в таком конденсате могут возбуждаться волны поляризации [21]. В экспериментальных работах [22–24] было найдено, что на нелинейной стадии развития этой неустойчивости образуется периодическая волна поляризации, в которой компоненты конденсата движутся в противофазе, так что положение гребней плотности одной компоненты совпадает с положением впадин плотности другой компоненты, тогда как суммарная плотность остается практически постоянной (характерная длина, на которой меняется суммарная плотность, совпадает по порядку величины с размером ловушки, т. е. эта длина много больше,

чем длина волны возникшей из-за неустойчивости периодической структуры). Эти наблюдения делают актуальной проблему теоретического описания нелинейных волн поляризации. В настоящей работе развита такая теория для случая, когда значения констант нелинейного взаимодействия близки друг к другу и нелинейная динамика двухкомпонентного конденсата с хорошей точностью описывается пределом Манакова [4] для системы уравнений Гросса–Питаевского. Мы нашли точное однофазное решение этой системы и исследовали его предельные случаи. В частности, продемонстрировано, что предельный случай волны поляризации с постоянной амплитудой обладает свойствами, качественно согласующимися с наблюдаемыми в указанных экспериментах волновыми структурами.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В общем случае динамика двухкомпонентного конденсата описывается системой уравнений Гросса–Питаевского

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_+}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta \Psi_+ - \\ - (g_{11} |\Psi_+|^2 + g_{12} |\Psi_-|^2) \Psi_+ = 0, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_-}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta \Psi_- - \\ - (g_{12} |\Psi_+|^2 + g_{22} |\Psi_-|^2) \Psi_- = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ψ_{\pm} — волновые функции компонент конденсата, а постоянные нелинейного взаимодействия $g_{ij} = 4\pi\hbar^2 a_{ij}/m_a$ выражаются через длины рассеяния a_{ij} . Мы предполагаем, что компоненты конденсата различаются атомными состояниями и имеют одинаковые массы атомов m_a . Эти компоненты могут смешиваться, если константы нелинейного взаимодействия удовлетворяют условию $g_{12}^2 < g_{11}g_{22}$ [25, 26]. В экспериментах [22–24] эти константы соответствовали состояниям $|1, -1\rangle$ и $|2, -2\rangle$ сверхтонкой структуры атомов ^{87}Rb , длины рассеяния которых друг на друге равны $a_{11} = 100.4a_0$, $a_{12} = 98.98a_0$ и $a_{22} = 98.98a_0$, где a_0 — радиус Бора [27]. Таким образом, они удовлетворяют указанному условию и в то же время очень близки друг к другу. Поэтому для описания динамики конденсата можно принять, что все постоянные нелинейного взаимодействия имеют одно и то же значение g . Отметим, что в этом случае порог неустойчивости по скорости, вычисленный в работе [21], обращается в нуль, т. е. сколь угодно медленное относительное движение компонент приводит к росту волны поляризации.

В достаточно разреженном конденсате поперечное движение атомов обеих компонент в сигарообразной ловушке описывается одной и той же волновой функцией основного состояния двумерного гармонического осциллятора. Усреднение по этой волновой функции сводит систему (1) к одномерной системе, описывающей движение компонент конденсата вдоль ловушки, т. е. вдоль аксиальной координаты x . При этом общая постоянная нелинейного взаимодействия принимает эффективное значение $g_{1D} = g/2\pi a_{\perp}^2$, где $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m_a\omega_{\perp}}$, ω_{\perp} — частота поперечных колебаний атомов в ловушке. Наконец, удобно перейти к безразмерным переменным, нормируя волновые функции на характерную суммарную плотность ρ_{ch} : $\Psi_{\pm} = \sqrt{\rho_{ch}}\psi_{\pm}$. Тогда в качестве единицы длины естественно взять длину когерентности $\hbar/\sqrt{m_a g_{1D} \rho_{ch}}$, а в качестве единицы времени — время $\hbar/g_{1D} \rho_{ch}$, за которое волна плотности проходит со скоростью звука $\sqrt{g_{1D} \rho_{ch}/m_a}$ расстояние, равное длине корреляции. В результате приходим к системе Манакова [4], где ради удобства мы сохранили для безразмерных переменных x и t прежние обозначения:

$$i\partial_t \psi_{\pm} + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 \psi_{\pm} - \sigma (|\psi_{\pm}|^2 + |\psi_{\mp}|^2) \psi_{\pm} = 0. \quad (2)$$

Мы ввели здесь для большей общности множитель $\sigma = \pm 1$. При $\sigma = 1$ константы взаимодействия положительны, что соответствует отталкиванию атомов, и именно этот случай был реализован в экспериментах [22–24]. Однако для других (в частности, оптических) приложений может оказаться актуальным случай притягивающего взаимодействия (фокусирующей нелинейности), когда $\sigma = -1$.

Задача о нахождении периодических решений системы (2) уже рассматривалась в ряде работ [28–30]. Однако, по-видимому, периодических решений в удобной для приложений форме представлено пока не было. Наш подход основан на представлении двухкомпонентной волновой функции (ψ_+, ψ_-) в виде спинора [31]:

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \chi = \sqrt{\rho} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $\rho(x, t) = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ обозначает полную плотность конденсата и $\Phi(x, t)$ имеет смысл потенциала скорости его синфазного течения. Угол

$\theta(x, t)$ является переменной, описывающей относительную плотность компонент конденсата ($\cos \theta = (|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2)/\rho$), и $\phi(x, t)$ есть потенциал скорости относительного движения компонент. Соответственно плотности отдельных компонент равны

$$\rho_+(x, t) = \rho \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \rho_-(x, t) = \rho \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

а их фазы и скорости течения определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm}(x, t) &= \frac{1}{2}(\Phi \mp \phi), \\ v_{\pm}(x, t) &= \partial_x \varphi_{\pm} = \frac{1}{2}(U \mp v), \end{aligned} \quad (5)$$

где переменные $U = \Phi_x$ и $v = \phi_x$ характеризуют среднюю и относительную скорости течения. Удобно ввести также единичный вектор \mathbf{S} , представляющий спинор χ :

$$\mathbf{S}(x, t) = \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ — вектор матриц Паули. Мы будем называть вектор \mathbf{S} вектором поляризации двухкомпонентного конденсата. Подстановка формул (3) в уравнения (2) дает систему [32]

$$\begin{aligned} \rho_t + \frac{1}{2}[\rho(U - v \cos \theta)]_x &= 0, \\ \Phi_t - \frac{\text{ctg} \theta}{2\rho}(\rho\theta_x)_x + \frac{\rho_x^2}{4\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{2\rho} + \\ &+ \frac{1}{4}(\Phi_x^2 + \theta_x^2 + \phi_x^2) + 2\sigma\rho = 0, \\ \theta_t + \frac{1}{2\rho}[(\rho v \sin \theta)_x + \rho U \theta_x] &= 0, \\ \phi_t - \frac{1}{2\rho \sin \theta}(\rho\theta_x)_x + \frac{1}{2}Uv &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Волны в конденсате без относительного движения

Начнем изучение системы (7) с элементарного случая линейных волн, распространяющихся в покоящемся конденсате с однородной полной плотностью ρ_0 и однородными распределениями плотностей компонент, задаваемыми углом θ_0 . Взаимодействие между атомами будем считать отталкивающим ($\sigma = 1$). Обозначим малые отклонения от равновесных значений как $\rho' = \rho - \rho_0$, $\theta' = \theta - \theta_0$ и

линеаризуем систему (7) относительно малых переменных $\rho' \sim \theta' \sim U \sim v \sim \varepsilon \ll 1$. В результате, продифференцировав дополнительно уравнения для потенциалов Φ и ϕ по x , получим

$$\begin{aligned} \rho'_t + \frac{\rho_0}{2}(U_x - \cos \theta_0 v_x) &= 0, \\ U_t - \frac{\text{ctg} \theta_0}{2} \theta'_{xxx} - \frac{\rho'_{xxx}}{2\rho_0} + 2\rho'_x &= 0, \\ \theta'_t + \frac{1}{2} \sin \theta_0 \cdot v_x = 0, \quad v_t - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \theta'_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Как мы видим, вторая пара уравнений для переменных θ' и v , описывающих динамику вектора поляризации (6), отщепилась от первой пары. Эти уравнения описывают волны поляризации, распространяющиеся согласно уравнению

$$\theta'_{tt} - \frac{1}{4} \theta'_{xxxx} = 0 \quad \text{или} \quad v_{tt} - \frac{1}{4} v_{xxxx} = 0, \quad (9)$$

соответствующему закону дисперсии ($\theta' \propto v \propto \exp[i(kx - \omega t)]$)

$$\omega = \frac{1}{2} k^2. \quad (10)$$

Стоит отметить, что закон дисперсии не зависит от равновесных значений ρ_0, θ_0 и совпадает с законом дисперсии свободных частиц с единичной массой, который соответствует дисперсионным членам в уравнениях Гросса–Питаевского (2).

Первая пара уравнений системы (8) описывает волны плотности, взаимодействующие с поляризационной волной. Собственное колебание соответствует нулевым значениям поляризационных переменных $\theta' = v = 0$, когда система сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \rho'_{tt} - \rho_0 \rho'_{xx} + \frac{1}{4} \rho'_{xxxx} &= 0 \quad \text{или} \\ U_{tt} - \rho_0 U_{xx} + \frac{1}{4} U_{xxxx} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда следует закон дисперсии для волн Боголюбова

$$\omega = k \sqrt{\rho_0 + \frac{1}{4} k^2}. \quad (12)$$

В длинноволновом пределе он сводится к линейному закону $\omega \approx c_s k$ для звуковых волн со скоростью звука $c_s = \sqrt{\rho_0}$. Поскольку обе компоненты движутся синфазно и атомы в них имеют одинаковую массу, относительное распределение типов атомов по компонентам значения не имеет и от параметра θ_0 закон дисперсии не зависит.

Как хорошо известно, в случае конденсата с притяжением между атомами ($\sigma = -1$) вместо (12) получается закон дисперсии

$$\omega = k \sqrt{-\rho_0 + \frac{1}{4} k^2}, \quad (13)$$

который при $k < 2\sqrt{\rho_0}$ приводит к комплексным значениям частоты, т. е. к модуляционной неустойчивости однородного распределения плотности.

3.2. Волны в конденсате с относительным движением

Обратимся теперь к случаю, когда в равновесном состоянии одна из компонент движется относительно другой с постоянной скоростью U_0 . Эта задача рассматривалась в общем случае произвольных значений постоянных нелинейного взаимодействия в работе [21] и здесь мы дадим более детальное исследование интересующего нас случая равных значений нелинейных постоянных. Итак, пусть в однородном состоянии $v_+ = (U - v)/2 = U_0, v_- = (U + v)/2 = 0$, т. е. $U = U_0, v = -U_0$. Линеаризация системы (7) относительно малых переменных $\rho', \theta', U' = U - U_0, v' = v + U_0$ дает

$$\begin{aligned} \rho'_t + \frac{\rho_0}{2}(U'_x - \cos \theta_0 v'_x) + \frac{U_0}{2} \times \\ \times [(1 + \cos \theta_0) \rho'_x - \rho_0 \sin \theta_0 \theta'_x] &= 0, \\ U'_t + 2\rho'_x - \frac{1}{2\rho_0} \rho'_{xxx} - \frac{\text{ctg} \theta_0}{2} \theta'_{xxx} + \\ + \frac{U_0}{2}(U'_x - v'_x) &= 0, \\ \theta'_t + \frac{\sin \theta_0}{2} v'_x + \\ + \frac{U_0}{2} \left[(1 - \cos \theta_0) \theta'_x - \frac{\sin \theta_0}{\rho_0} \rho'_x \right] &= 0, \\ v_t - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \theta'_{xxx} - \frac{U_0}{2}(U'_x - v'_x) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда обычным образом получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \Omega^4 - \frac{1}{2} k^2 (k^2 + U_0^2 + 2\rho_0) \Omega^2 - k^3 U_0 \rho_0 \cos \theta_0 \cdot \Omega + \\ + \frac{1}{16} k^4 (k^2 - U_0^2) (k^2 - U_0^2 + 4\rho_0) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Omega = \omega - U_0/2$. Оно определяет неявным образом зависимость $\omega = \omega(k)$.

Явные формулы легко получаются в частном случае равных плотностей компонент, когда $\theta_0 = \pi/2$ и уравнение (15) становится биквадратным относительно Ω . В этом случае находим

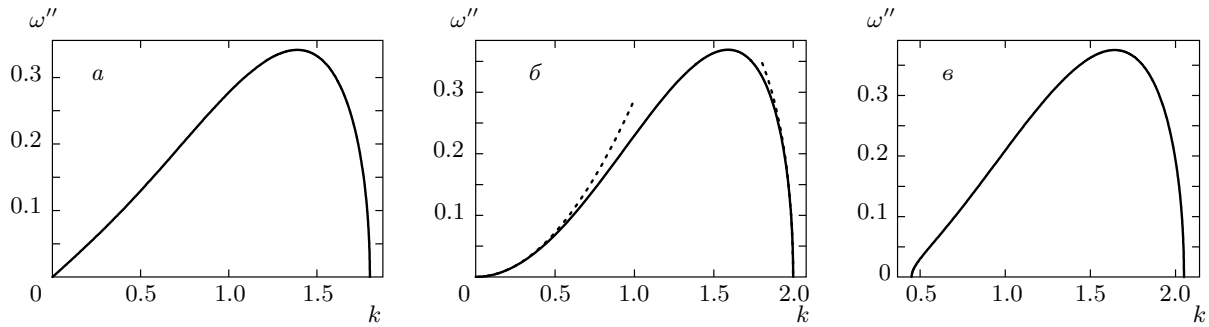


Рис. 1. Инкремент неустойчивости ω'' в зависимости от волнового числа гармонического возмущения при различных значениях скорости течения U_0 одной компоненты относительно другой при равных плотностях компонент: $U_0 = 1.8$ (а); $U_0 = 2$ (б); $U_0 = 2.05$ (в). Полная плотность равна $\rho_0 = 1.0$. Штриховые линии на рис. 1б соответствуют приближенным формулам (18) и (19)

$$\omega = \frac{1}{2}U_0 + \frac{1}{2}k \times \sqrt{2\rho_0 + U_0^2 + k^2 \pm 2\sqrt{\rho_0^2 + 2\rho_0 U_0^2 + U_0^2 k^2}}. \quad (16)$$

Легко видеть, что при $U_0 = 0$ закон дисперсии моды, соответствующей верхнему знаку, переходит в закон дисперсии Боголюбова (12) для волны плотности, а закон дисперсии моды, соответствующей нижнему знаку, — в закон дисперсии (10) волны поляризации. Наиболее интересный результат заключается в том, что для поляризационной моды при $U_0 \neq 0$ (нижний знак в (16)) имеется область волновых чисел k , когда частота ω становится комплексной, что означает неустойчивость волны поляризации. Зависимость мнимой части ω'' от k в области неустойчивости для трех типичных значений U_0 показана на рис. 1. При $U_0 < 2\sqrt{\rho_0}$ область неустойчивости соответствует волновым числам $0 < k < k_{c1}$, где граничное значение равно $k_{c1} = U_0$. При малых k инкремент неустойчивости растет линейно с увеличением k ,

$$\omega'' \approx \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\rho_0 + 2\rho_0 U_0^2} - 2\rho_0 - U_0^2} k, \quad (17)$$

но коэффициент пропорциональности стремится к нулю при $U_0 \rightarrow 2\sqrt{\rho_0} - 0$, и в этом пределе зависимость становится квадратичной (рис. 1б):

$$\omega'' \approx \frac{k^2}{2\sqrt{3\rho_0}}. \quad (18)$$

При $U_0 > 2\sqrt{\rho_0}$ появляется второе граничное значение $k_{c2} = \sqrt{U_0^2 - \rho_0} < k_{c1}$, ограничивающее область неустойчивости со стороны низких частот (рис. 1в). При стремлении k к граничному значению k_{c1} ин-

кремент неустойчивости обращается в нуль по корневому закону:

$$\omega'' \approx \frac{k}{2}\sqrt{\frac{\rho_0(U_0^2 - k^2)}{\rho_0 + U_0^2}}. \quad (19)$$

Если $\theta_0 \neq \pi/2$, то картина качественно остается прежней, однако формулы становятся слишком громоздкими и дисперсионные кривые удобнее строить с помощью уравнения (15) численно. Приведем здесь лишь формулы для крайних значений $k_{c1,2}$ при неравных плотностях компонент. Концевые значения определяются условием, что два комплексных корня уравнения (15) сливаются, т. е. дискриминант этого уравнения равен нулю. Выражение для дискриминанта квадратично по $\cos^2 \theta$, и решение этого квадратного уравнения можно написать в виде

$$\cos^2 \theta_0 = \frac{1}{27U_0^2 \rho_0^2} \{ -2k^6 + 3(U_0^2 - 4\rho_0)k^4 + 3(U_0^2 - \rho_0)(U_0^2 + 5\rho_0)k^2 + (U_0^2 + 2\rho_0) \times (2U_0^4 - 10U_0^2 \rho_0 - \rho_0^2) - 2[k^4 - (U_0^2 - 4\rho_0)k^2 + (U_0^2 - \rho_0)]^{3/2} \}. \quad (20)$$

Решение этого уравнения относительно k^2 задает $k_{c1,2}$ как функции $\cos^2 \theta_0$. При малых $\cos^2 \theta_0$ легко найти поправки к значениям, приведенным выше:

$$\begin{aligned} k_{c1}^2 &= U_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{U_0^2 + \rho_0} \cos^2 \theta_0 \right), \\ k_{c2}^2 &= U_0^2 \left(1 + \frac{\rho_0}{U_0^2 - \rho_0} \cos^2 \theta_0 \right) - 4\rho_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Пример точных зависимостей, даваемых уравнением (20), и его приближенных решений (21) показан на рис. 2. Как мы видим, даже вблизи порога

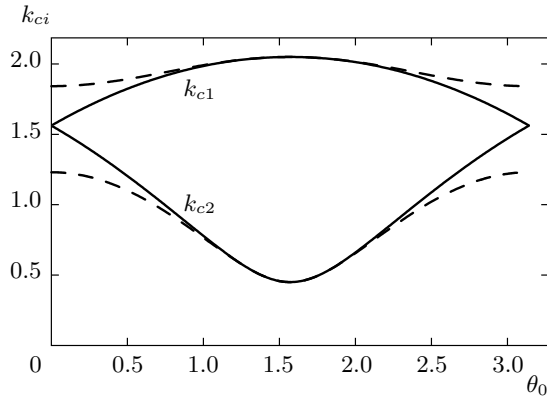


Рис. 2. Зависимости значений $k_{c1,2}$ волнового числа на краях области неустойчивости от угла θ_0 , определяющего относительные плотности компонент. Штриховые линии соответствуют приближенным формулам (21)

появления предельного значения k_{c2} точность формул (21) удовлетворительна (ошибка не более 10%) при $0.5 < \theta_0 < 2.5$, что соответствует диапазону $0.2 < \rho_{1,2}/\rho_0 < 0.8$ относительных изменений плотностей компонент. Область неустойчивости максимальна при равных плотностях компонент и исчезает вместе с плотностью одной из компонент. Максимальный инкремент неустойчивости соответствует волновым числам $k \sim U_0$.

Итак, если компоненты конденсата движутся относительно друг друга, то вследствие неустойчивости однородного состояния в нем возникают волны поляризации. Рост амплитуды волны может быть остановлен нелинейными эффектами, которые рассматриваются в следующих разделах.

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Сначала будем проводить выкладки для произвольного значения σ , и конкретизируем это значение, лишь когда это понадобится сделать. При этом ограничимся случаем, когда обе компоненты конденсата имеют равные химические потенциалы μ и волна распространяется со скоростью V . Следовательно, будем искать решение системы (7) в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \\ \Phi &= -2\mu t + \Phi_0(\xi), \quad \phi = \phi(\xi), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\xi = x - Vt$. Подстановка выражений (22) в первое уравнение (7) и интегрирование дают

$$\Phi_\xi - \phi_\xi \cos \theta = 2(V - A/\rho), \quad (23)$$

где A — постоянная интегрирования. Функция ϕ_ξ может быть исключена из уравнения (23) с помощью последнего уравнения системы (7) с учетом $\phi_t = -V\phi_\xi$. Это дает уравнение для $\Phi_\xi \equiv \Phi_{0,\xi}$, решение которого имеет вид

$$\Phi_\xi = 2V - \frac{A + K}{\rho}, \quad (24)$$

и, следовательно,

$$\phi_\xi = \frac{A - K}{\rho \cos \theta}, \quad (25)$$

где

$$K = \pm \sqrt{A^2 + \rho \operatorname{ctg} \theta (\rho \theta_\xi)_\xi}. \quad (26)$$

Подстановка выражений для Φ_ξ и ϕ_ξ в третье уравнение системы (7) дает уравнение для K

$$K_\theta + (2 \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{tg} \theta)K = -A \operatorname{tg} \theta,$$

элементарное интегрирование которого приводит к

$$K = -A(2 \operatorname{ctg}^2 \theta + 1) + 2B \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (27)$$

где B — постоянная интегрирования. Приравняв это выражение выражению для K , полученному в (26), приходим к уравнению, которое также может быть проинтегрировано, что дает

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 = \frac{4}{\rho^2} \left(C^2 - \frac{B - A \cos \theta}{\sin^2 \theta}\right), \quad (28)$$

где C^2 — еще одна постоянная интегрирования (как ясно из (28), она должна быть положительной). Наконец, подстановка полученных выражений для θ_ξ , $U = \Phi_\xi$, $v = \phi_\xi$ во второе уравнение системы (7) с учетом $\Phi_t = -2\mu - V\Phi_\xi$ приводит к выражению, которое после интегрирования дает уравнение для ρ :

$$\rho_\xi^2 = 4\mathcal{R}(\rho), \quad (29)$$

где

$$\mathcal{R}(\rho) = \sigma \rho^3 - (2\mu + V^2)\rho^2 + D\rho - (A^2 + C^2) \quad (30)$$

и D — последняя постоянная интегрирования в этой процедуре. Примечательно, что переменная ρ отделилась в уравнении (30) от остальных переменных. Это является следствием полной интегрируемости [4] случая Манакова (2) для двухкомпонентной системы уравнений Гросса–Питаевского, хотя явным образом этот факт в сведении решения к квадратурам не использовался. Дальнейшее рассмотрение удобно проводить для каждого значения σ по отдельности.

4.1. Конденсат с отталкиванием между атомами ($\sigma = 1$)

Решение уравнения (9) параметризуется тремя нулями многочлена

$$\mathcal{R}(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3), \quad \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$$

и стандартным образом может быть выражено через эллиптические функции Якоби:

$$\rho(\xi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{\rho_3 - \rho_1}(\xi + \xi_0), m), \quad (31)$$

где $m = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_1)$ — модуль эллиптической функции (мы следуем обозначениям справочника [33]). В этом решении полная плотность ρ осциллирует в интервале $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$; следовательно, ввиду положительности ρ все нули ρ_i ($i = 1, 2, 3$) должны быть тоже положительными. Их произведение, которое мы обозначим как $R^2 \equiv \rho_1 \rho_2 \rho_3$, равно $R^2 = A^2 + C^2$. Поэтому мы введем вместо постоянных A, B, C более удобные параметры β и γ следующим образом:

$$A = R \cos \gamma, \quad C = R \sin \gamma, \quad B = R \cos \beta. \quad (32)$$

Последнее определение подразумевает, что выполняется неравенство $|B| \leq R = \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3}$, которое может быть доказано следующим образом. Согласно уравнению (28), угол θ осциллирует между значениями θ_1, θ_2 , определяемыми условием, что правая сторона этого уравнения обращается в нуль. Следовательно, $B = A \cos \theta_{1,2} \pm C \sin \theta_{1,2} = R \cos(\gamma \mp \theta_{1,2})$, откуда получаем требуемое неравенство $|B| \leq R$. Углы θ_1, θ_2 можно определить следующим образом:

$$\theta_1 = \beta + \gamma, \quad \theta_2 = \beta - \gamma. \quad (33)$$

Для определенности будем предполагать, что параметры β и γ выбраны так, что $\cos \theta_1 \leq \cos \theta_2$. Тогда (28) сводится к уравнению

$$\pm \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_1)(\cos \theta_2 - \cos \theta)}} = 2R \frac{d\xi}{\rho(\xi)}, \quad (34)$$

интегрирование которого дает решение для $\theta(\xi)$:

$$\cos \theta(\xi) = \cos \theta_1 \sin^2 \frac{X(\xi)}{2} + \cos \theta_2 \cos^2 \frac{X(\xi)}{2}, \quad (35)$$

где

$$X(\xi) = 2R \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{\rho_3 - \rho_1} \xi', m)} + X_0, \quad (36)$$

X_0 — постоянная интегрирования. Хотя интеграл здесь может быть выражен через эллиптические функции (см., например, работу [34]), для дальнейшего удобнее оставить его в непроинтегрированном виде. Выражения (31) и (35), (36) определяют переменные $\rho(x, t)$ и $\theta(x, t)$. Их подстановка в (5) дает скорости течения компонент:

$$\begin{aligned} v_+ &= V - \frac{R}{2\rho} \frac{\cos \gamma + \cos \beta}{\cos^2(\theta/2)}, \\ v_- &= V - \frac{R}{2\rho} \frac{\cos \gamma - \cos \beta}{\sin^2(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Их интегрирование и учет выражения для химического потенциала

$$\mu = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - V^2) \quad (38)$$

дают выражения для фаз φ_{\pm} , что завершает вывод периодического решения системы (7) (сведения его к квадратурам). Решение зависит от шести постоянных параметров, $V, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \beta, \gamma$, имеющих ясный смысл, а также начальных значений ξ_0 и X_0 .

4.2. Конденсат с притяжением между атомами ($\sigma = -1$)

Формулы требуют лишь небольших изменений при переходе к случаю конденсата с притяжением между атомами. Теперь полная плотность колеблется в интервале $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_3$, так что $\rho_2, \rho_3 > 0$ и, поскольку $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = -(A^2 + C^2) < 0$, в этом случае $\rho_1 \leq 0$. Решение уравнения (29) имеет вид

$$\rho(\xi) = \rho_3 - (\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sn}^2(\sqrt{\rho_3 - \rho_1}(\xi + \xi_0), m), \quad (39)$$

где $m = (\rho_3 - \rho_2)/(\rho_3 - \rho_1)$, $\xi = x - Vt$. Остальные формулы остаются без изменений, если считать, что параметр R определен соотношением $R^2 = -\rho_1 \rho_2 \rho_3$, проведена замена $\sqrt{\rho_3} \rightarrow \sqrt{-\rho_1}$ и

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \\ &= 2R \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\rho_3 - (\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sn}^2(\sqrt{\rho_3 - \rho_1} \xi', m)} + X_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению предельных случаев, которые выявляют характерные свойства полученного решения.

5. ВОЛНА ПОЛЯРИЗАЦИИ

Как было отмечено выше, относительное движение компонент конденсата может быть представле-

но как динамика его вектора поляризации \mathbf{S} , характеризуемого углами θ и ϕ . Здесь мы рассмотрим случай чисто поляризационной динамики конденсата с отталкиванием между атомами ($\sigma = 1$), когда полная плотность постоянна и модуляционно устойчива. Это соответствует равенству значений ρ_1 и ρ_2 , между которыми происходят колебания полной плотности: $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho_0$, т. е. $R = \rho_0 \sqrt{\rho_3}$ и $\rho(\xi) \equiv \rho_0$. Следовательно, формула (36) переходит в

$$X(\xi) = 2\sqrt{\rho_3}(\xi - \xi_0) + X_0. \quad (41)$$

Это линейная функция x и t , так что волна поляризации, представленная выражением (35), меняется периодически в зависимости от пространственной координаты и времени. Вместо параметра ρ_3 удобно ввести другие параметры, имеющие более ясный физический смысл. Определим потоки компонент конденсата, усредненные по x или t : $j_{\pm} = \overline{\rho_{\pm} v_{\pm}}$. Простое вычисление дает

$$\begin{aligned} j_+ &= \frac{1}{2}\rho_0[V(1 + \cos\beta \cos\gamma) - \\ &\quad - \sqrt{\rho_3}(\cos\beta + \cos\gamma)], \\ j_- &= \frac{1}{2}\rho_0[V(1 - \cos\beta \cos\gamma) + \\ &\quad + \sqrt{\rho_3}(\cos\beta - \cos\gamma)]. \end{aligned} \quad (42)$$

Амплитуду волны поляризации можно охарактеризовать углом $(\theta_2 - \theta_1)/2 = \gamma$, на который изменяется θ при колебаниях вокруг значения β .

Рассмотрим сначала линейные волны, распространяющиеся по однородному фону, когда $\gamma = 0$ и $j_{\pm} = 0$. Последнее условие выполняется, если $\sqrt{\rho_3} = V$. Тогда в малоамплитудном пределе $\gamma \ll 1$ уравнение (35) принимает вид

$$\cos\theta \approx \cos\beta + \gamma \sin\beta \cos[2V(x - Vt)]. \quad (43)$$

Здесь волновое число и частота соответственно равны $k = 2V$ и $\omega = 2V^2$, и они удовлетворяют дисперсионному соотношению $\omega(k) = k^2/2$, совпадающему с (10).

В нелинейной волне поляризации оба потока обращаются в нуль, если $\cos\beta = 0$ или $\sqrt{\rho_3} = V$. Первый случай соответствует конденсату с равными средними плотностями компонент. В этом случае мы получаем нелинейную волну, описываемую выражением

$$\cos\theta = \sin\gamma \cos\left[\frac{2V}{\cos\gamma}(x - Vt)\right], \quad (44)$$

в котором волновое число и частота зависят от амплитуды γ , что соответствует нелинейному дисперсионному соотношению

$$k = 2V/\cos\gamma, \quad \omega(k) = \frac{1}{2}k^2 \cos\gamma. \quad (45)$$

Вторая возможность, $\sqrt{\rho_3} = V$, возвращает нас к линейному пределу $\gamma = 0$. Это означает, что в конденсатах с неравными плотностями компонент нелинейные волны поляризации существуют лишь в случае, когда имеются неравные друг другу потоки компонент. Такое течение компонент может быть реализовано различными способами, и здесь мы рассмотрим два типичных примера.

Пусть потоки равны по величине и направлены в противоположные стороны: $j_+ = -j_- = -j_0$. Тогда из (42) получаем

$$\sqrt{\rho_3} = \frac{V}{\cos\gamma} = \frac{j_0}{\cos\beta \sin^2\gamma}.$$

Волновое число и дисперсионное соотношение имеют вид

$$k = \frac{2j_0}{\cos\beta \sin^2\gamma}, \quad \omega(k) = \frac{1}{2}k^2 \cos\gamma. \quad (46)$$

Это обобщает решение (44), (45) на случай разнонаправленных и равных по величине потоков.

Стационарную волну с $V = 0$ можно получить, если взять неравные друг другу потоки, $j_+^2 \neq j_-^2$. В этом случае уравнения (42) дают

$$\sqrt{\rho_3} = \frac{j_-^2 - j_+^2}{4 \cos\beta \cos\gamma}.$$

Предположим, что эта волна возбуждается из состояния конденсата с покоящимися компонентами и отношением их плотностей, равным $\rho_-/\rho_+ = \text{tg}^2(\theta_0/2)$. Если эти параметры остаются постоянными в процессе возбуждения, то параметры возбужденной волны удовлетворяют соотношению

$$\cos\beta \cos\gamma = \cos\theta_0. \quad (47)$$

Следовательно, экспериментально наблюдаемое значение волнового числа стоячей нелинейной волны будет равно

$$k = 2\sqrt{\rho_3} = \sqrt{\left|\frac{j_-^2 - j_+^2}{\cos\theta_0}\right|}. \quad (48)$$

Итак, при постоянной полной плотности в двухкомпонентном конденсате возможно распространение волны поляризации, соответствующей противофазным колебаниям плотностей компонент. Обратимся теперь к так называемому солитонному пределу, когда решение для полной плотности имеет форму солитона.

6. КВАЗИСОЛИТОНЫ

Солитонный предел соответствует параметру эллиптической функции m в (31) или (39), равному единице. Поскольку параметр m в этих случаях определен по-разному, будем рассматривать их по отдельности.

6.1. Квазисолитоны в конденсате с отталкиванием атомов ($\sigma = 1$)

Параметр m обращается в единицу при $\rho_2 = \rho_3 = \rho_0$, когда решение (31) принимает вид

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left\{ 1 - \frac{1 - \rho_1/\rho_0}{\text{ch}^2 [\sqrt{\rho_0 - \rho_1}(x - Vt)]} \right\} \quad (49)$$

(чтобы упростить обозначения, предполагаем, что выбрана система отсчета с центром солитона, расположенным в момент времени t в точке $x = Vt$). Вдали от центра солитона полная плотность однородна и равна $\rho \approx \rho_0$. Однако при $\theta_1 \neq \theta_2$ компоненты конденсата здесь осциллируют и образуют рассмотренную выше волну поляризации. Переменная $X(x, t)$, определенная в (36), выражается в этом пределе через элементарные функции:

$$X(\xi) = 2\sqrt{\rho_1} \xi + 2 \arctg \left[\sqrt{\rho_0/\rho_1 - 1} \text{th}(\sqrt{\rho_0 - \rho_1} \xi) \right] \quad (50)$$

(для простоты мы опустили здесь X_0). Ясно, что при $|\xi| \rightarrow \infty$ переменная X становится линейной функцией ξ . Если мы потребуем, чтобы на бесконечности оба потока j_{\pm} были равны нулю, то получим

$$\sqrt{\rho_1} = V / \cos \gamma. \quad (51)$$

Таким образом, этот квазисолитон преобразуется здесь в волну поляризации с параметром $\rho_1 < \rho_0$, играющим роль ρ_3 в формулах предыдущего раздела. Мы называем это решение квазисолитоном, поскольку в этом случае волна не локализована в пространстве в отличие от обычных солитонных решений нелинейных волновых уравнений. Скорее, это решение представляет собой «дефект» в волне поляризации, проявляющийся в полной плотности в виде «солитонной ямки». Вся эта структура распространяется как целое со скоростью V . Уравнение (51) может быть записано в виде

$$V = V_s \cos \gamma, \quad (52)$$

где $V_s = \sqrt{\rho_1}$ — скорость солитона с минимальной плотностью ρ_1 в центре для случая однокомпонент-

ного конденсата. Таким образом, квазисолитон движется медленнее, чем обычный солитон с той же амплитудой. Когда амплитуда поляризационных колебаний обращается в нуль, $\gamma = 0$, квазисолитон становится хорошо известным темно-темным солитоном с постоянным отношением плотностей компонент конденсата (см., например, работу [17]).

Распределения плотностей в квазисолитонном решении проиллюстрировано на рис. 3, а распределения скоростей компонент — на рис. 4. Важно отметить, что при m , близких к единице, мы получаем цепочку квазисолитонов с периодическим распределением полной плотности, но параметры дефектов в ней будут меняться от дефекта к дефекту. В самом деле, по разные стороны от квазисолитона переменная $X(x, t)$ имеет асимптотики

$$X(x, t) \approx 2 \left[\sqrt{\rho_1}(x - Vt) \pm \arctg \sqrt{\rho_0/\rho_1 - 1} \right],$$

т. е. при прохождении через квазисолитон она получает приращение

$$\Delta X = 4 \arctg \sqrt{\rho_0/\rho_1 - 1}. \quad (53)$$

Соответственным образом будет изменяться фаза поляризационных колебаний при переходе от одного квазисолитона цепочки к другому, и симметрия относительно центра квазисолитона, имеющаяся на рис. 3 и 4, которая обусловлена выбором значения $X_0 = 0$, будет нарушена.

6.2. Квазисолитоны в конденсате с притяжением между атомами ($\sigma = -1$)

Поскольку $\rho_1 \leq 0$, $\rho_2 \geq 0$, параметр m может обратиться в единицу только при $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Полная плотность имеет форму яркого солитона. Параметр X становится постоянным, и его значение задает угол θ , определяющий соотношение между плотностями компонент. Если $1 - m = \varepsilon \ll 1$, то $X(\xi)$ является ступенчатой функцией

$$X(\xi) = 2R \int_0^{\xi} \frac{d\xi'}{\rho_3 - (\rho_3 - \rho_1) \text{sn}^2(\sqrt{\rho_3 - \rho_1} \xi', m)}, \quad (54)$$

график которой проиллюстрирован на рис. 5. Следует отметить, что величина ступенек зависит от соотношения между ρ_1 и ρ_2 . Например, если $\rho_1 = -(1 - \alpha)\varepsilon\rho_3$, $\rho_2 = \alpha\varepsilon\rho_3$, то при $\varepsilon \ll 1$ приращение $X(\xi)$ на каждой длине волны

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{\rho_3 - \rho_1}} \quad (55)$$

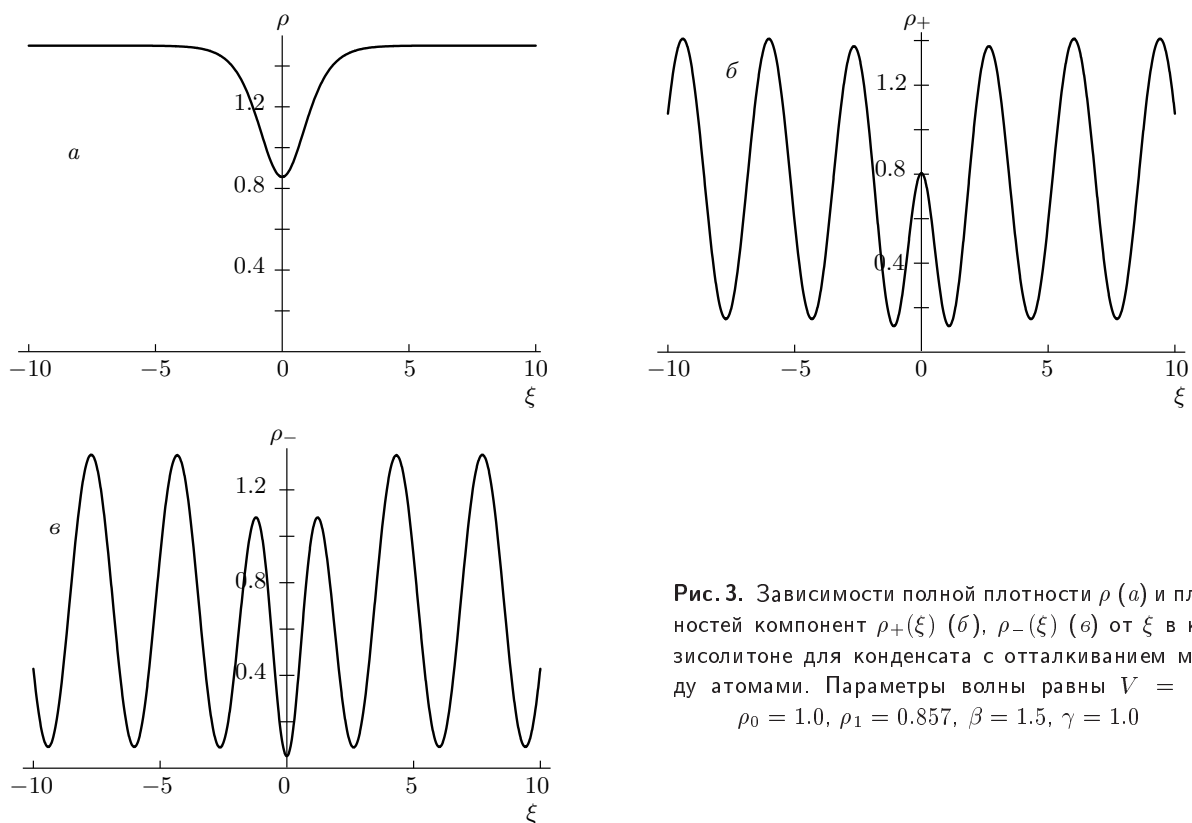


Рис. 3. Зависимости полной плотности ρ (а) и плотностей компонент $\rho_+(\xi)$ (б), $\rho_-(\xi)$ (в) от ξ в квазисолитоне для конденсата с отталкиванием между атомами. Параметры волны равны $V = 0.5$, $\rho_0 = 1.0$, $\rho_1 = 0.857$, $\beta = 1.5$, $\gamma = 1.0$

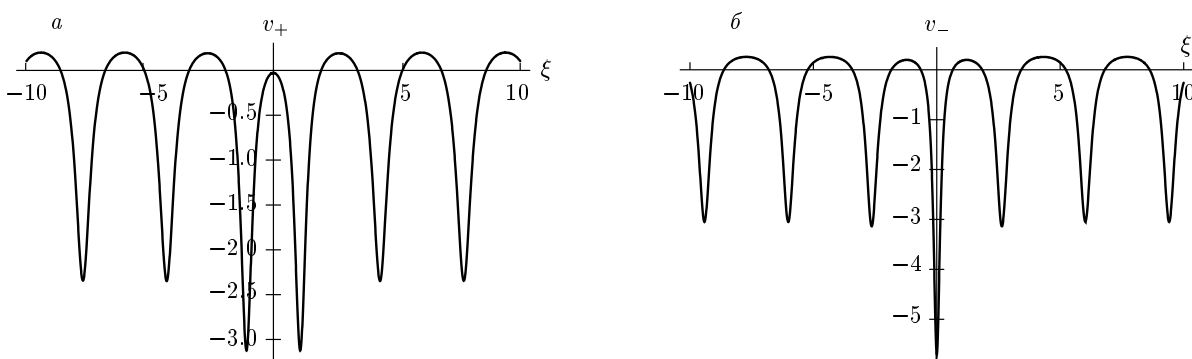


Рис. 4. Зависимости скоростей компонент v_+ (а) и v_- (б) от ξ в квазисолитоне для конденсата с отталкиванием между атомами. Параметры волны те же, что на рис. 3

(K — полный эллиптический интеграл первого рода) будет равно

$$\Delta X = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{(1 - \alpha)/\alpha} \quad (56)$$

(доказательство этого утверждения вынесено в Приложение; отметим сходство этой формулы с (53)). Поэтому в местах расположения солитонов угол θ , определяемый формулой (35), принимает ряд зна-

чений, соответствующих $X = X_0 + \Delta X \cdot n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. В результате при малых $1 - m \sim \varepsilon \ll 1$ волна представляет собой цепочку ярких солитонов с периодическим распределением полной плотности. Последовательность отношений плотностей компонент в последовательных солитонах задается отображением окружности $T: X \mapsto X + \Delta X \pmod{2\pi}$. Пример такой цепочки показан на

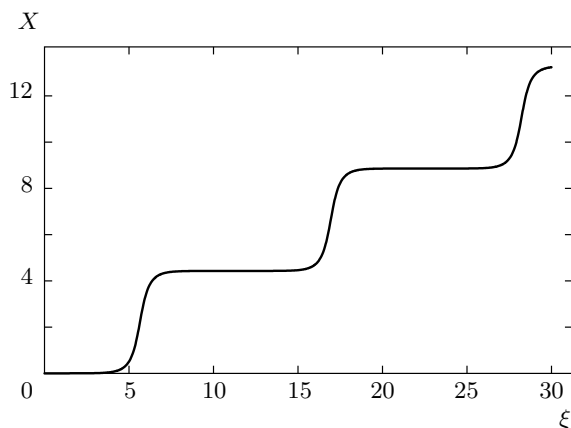


Рис. 5. Зависимость $X(\xi)$ при значениях параметров $\rho_1 = -0.0008$, $\rho_2 = 0.0002$, $\rho_3 = 1$, $\beta = 1.5$, $\gamma = 1.0$ в случае притягивающего взаимодействия между атомами в конденсате

рис. 6. Если ΔX соизмеримо с 2π , то цепочка становится периодической и для распределений плотностей компонент с периодом, кратным длине волны L . Например, если $\alpha = 0.5$, то $\Delta X = \pi$, угол θ принимает лишь два значения (θ_1 и θ_2) и распределения компонент в квазисолитонах чередуются с удвоенным периодом.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Можно предположить, что найденные в этой работе волны поляризации были реализованы экспериментально [22–24]. В работах [22, 23] относительное движение компонент конденсата, образованного из атомов ^{87}Rb , находящихся в двух электронных состояниях сверхтонкой структуры, было создано градиентом внешнего магнитного поля, направленного вдоль сигарообразной оптической ловушки. В работе [22] наблюдалась дисперсионная ударная волна с большой амплитудой осцилляций поляризационных переменных и очень малой амплитудой колебаний полной плотности. В работе [23] волна поляризации была создана вследствие модуляционной неустойчивости однородного состояния при наличии противотока компонент. Мы полагаем, что на нелинейной стадии развития этой неустойчивости образуется волна поляризации, описанная в настоящей работе. К сожалению, детальное количественное сравнение развитой теории с экспериментом пока невозможно из-за скудости экспериментальных данных. Тем не менее можно проверить согласие теоретических соотношений с экспериментом по порядку ве-

личины. Например, первая формула (45) связывает три экспериментально наблюдаемых величины: волновое число волны поляризации $k = 2\pi/\lambda$, (λ — длина волны), скорость V волны и ее амплитуду γ . Из представленных в работе [22] данных можно заключить, что скорость распространения волны равна $V \approx 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Амплитуда волны в [22] не указана, однако при не слишком больших ее значениях зависимость скорости от амплитуды слабая, и для грубой оценки ею можно пренебречь. Для перехода к размерным переменным вычисляем по экспериментальным параметрам длину когерентности

$$\xi_{1D} = \hbar / \sqrt{m g_{1D} \rho_{ch}} \approx 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ см}$$

и скорость звука

$$c_s = \sqrt{g_{1D} \rho_{ch} / m} \approx 0.3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

В результате получаем формулу для длины волны в размерных переменных:

$$\Lambda = \frac{\pi \xi_{1D} c_s}{V}, \quad (57)$$

которая при значениях параметров работы [22] дает величину $\Lambda \approx 13$ мкм. Насколько можно судить по представленным в [22] графикам, экспериментальное значение длины волны в дисперсионной ударной волне равно $\Lambda \approx 15$ – 18 мкм, что, с учетом грубости нашей оценки, неплохо согласуется с теоретическим значением.

Для более точного теоретического описания динамики нестационарных и неоднородных волн, образующихся в указанных экспериментах, необходимо развить теорию зависящих от времени модуляций волны (теорию Уизема [35, 36]). Кроме того, в работе [24] нелинейная эволюция была дополнена связью между компонентами, обусловленной наличием переменного электромагнитного поля на частоте перехода между состояниями сверхтонкой структуры. При этом снова возбуждалась волна поляризации с зависящими от времени параметрами, что также требует разработки теории Уизема, причем с учетом возмущающих членов [37]. Все эти проблемы выйдут за рамки настоящей работы.

В заключение отметим, что изложенная теория применима к конденсатам с неравными нелинейными постоянными взаимодействия g_{ij} , если их разность достаточно мала, что может быть актуальным для поляритонного конденсата. Условие применимости теории к этому случаю нетрудно вывести, если заметить, что при неравных константах взаимодействия квадратичный закон дисперсии (10) волн

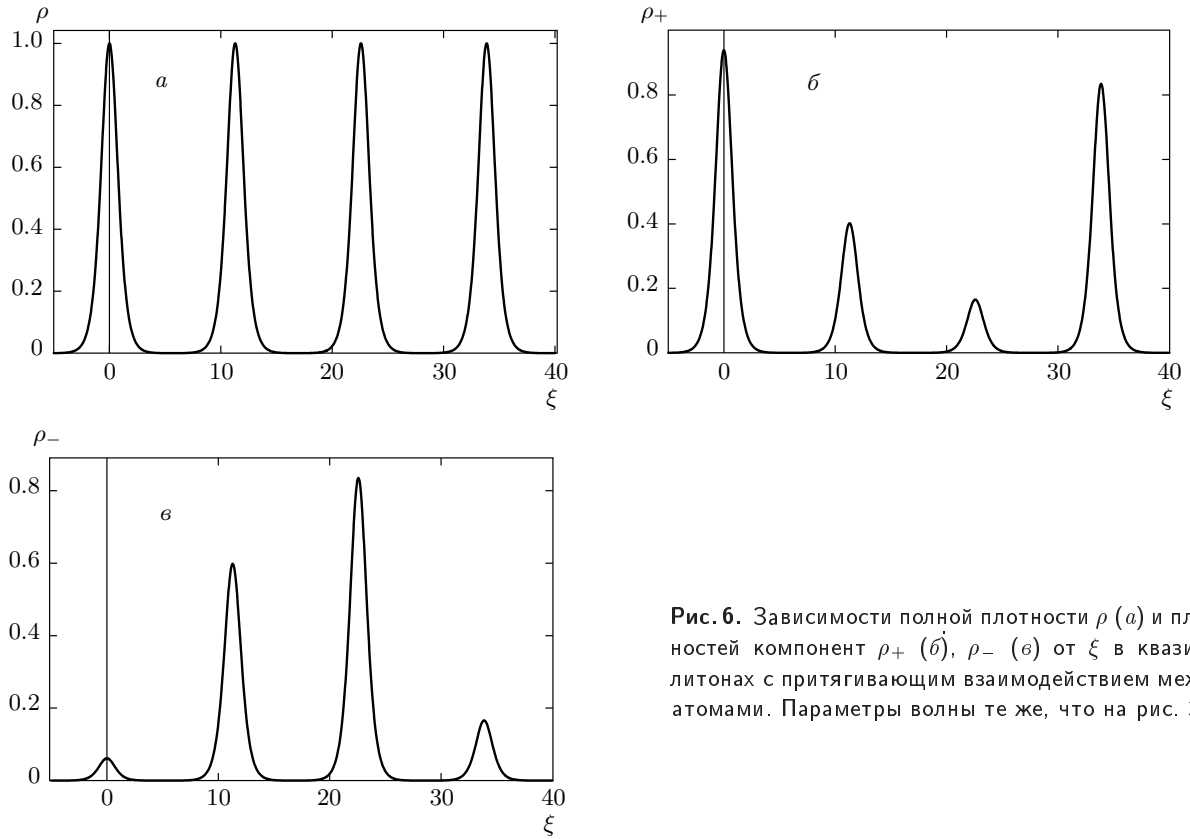


Рис. 6. Зависимости полной плотности ρ (а) и плотностей компонент ρ_+ (б), ρ_- (в) от ξ в квазисолитонах с притягивающим взаимодействием между атомами. Параметры волны те же, что на рис. 3

поляризации заменяется на боголюбовский (см., например, [32]), аналогичный закону (12), где параметр $\rho_0 = c_s^2$ должен быть заменен на квадрат скорости линейных волн поляризации,

$$c_p^2 = \frac{1}{2}\rho_0 \left(1 - \frac{g_{12}}{g_{11}} \right),$$

и мы предположили, что $g_{11} = g_{22} > g_{12}$ в соответствии с условием смешиваемости компонент конденсата и, кроме того, совершили переход к одномерным уравнениям Гросса–Питаевского для конденсата, удерживаемого в сигарообразной ловушке, и к безразмерным переменным. Переход к квадратичному закону дисперсии происходит при волновых числах $k^2 \gtrsim 2c_p^2$, т. е. при достаточно малых длинах волн. Переходя к размерным переменным и заменяя волновое число на длину волны (57), получаем условие применимости в виде

$$\frac{V}{c_s} \gtrsim \sqrt{1 - \frac{g_{12}}{g_{11}}}. \tag{58}$$

В случае противоположного неравенства $k^2 \lesssim 2c_p^2$, закон дисперсии Боголюбова можно разложить по степеням k^2 и учесть лишь главную

поправку к звуковому дисперсионному соотношению $\omega \approx c_p k$. Если амплитуда волны также мала, то стандартная теория возмущений приводит к модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза для волн поляризации [18, 32]. Это изменит количественные характеристики волны поляризации по сравнению со случаем, рассмотренным в настоящей работе, но качественно картина явления останется прежней — относительное движение компонент является неустойчивым относительно возбуждения поляризационной волны, что приводит к образованию периодической нелинейной структуры.

Работа выполнена при поддержке программы РАН «Квантовые мезоскопические и неупорядоченные структуры».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы докажем формулу (56). Если принять $\rho_1 = -(1 - \alpha)\varepsilon\rho_3$, $\rho_2 = \alpha\varepsilon\rho_3$, то, согласно формуле (55), приращение ΔX будет равно

$$\Delta X = 2\varepsilon \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \int_0^{2K(m)/\sqrt{1+(1-\alpha)\varepsilon}} \frac{dx}{1 - (1-\alpha\varepsilon) \operatorname{sn}^2(\sqrt{1+(1-\alpha)\varepsilon}x, m)}, \quad (\text{A.1})$$

где $m = (1-\alpha\varepsilon)/[1+(1-\alpha)\varepsilon]$. Для вычисления этого интеграла удобно перейти к эллиптическим функциям Вейерштрасса. Определим параметры

$$e_1 = \frac{1}{3}[1 + (2-\alpha)\varepsilon], \quad e_2 = \frac{1}{3}[1 - (1-\alpha)\varepsilon], \quad (\text{A.2})$$

$$e_3 = -\frac{2}{3} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right],$$

равные значениям \wp -функции Вейерштрасса в точках, где ее производная равна нулю. Эллиптический синус Якоби связан с \wp -функцией соотношением [38, 39]

$$\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_2}z) = \frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}.$$

Его подстановка в (A.1) и простые преобразования с учетом того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ полупериод $\omega \sim \ln(1/\varepsilon)$ стремится к бесконечности лишь логарифмически, дают

$$\Delta X = 2\varepsilon \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \int_0^{2\omega} \frac{dy}{\wp(y) - \wp(\kappa)}, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\wp(\kappa) = e_3 + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \approx \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-2\alpha)\varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

Соответствующая производная $\wp'(\kappa)$ равна

$$\wp'(\kappa) = -2i\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon. \quad (\text{A.5})$$

Решение этого уравнения в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ в главном приближении имеет вид

$$\kappa = \omega + i \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{A.6})$$

Теперь воспользуемся табличной формулой

$$\int_0^z \frac{dy}{\wp(y) - \wp(\kappa)} = \frac{1}{\wp(\kappa)} \left[2z\zeta(\kappa) + \ln \frac{\sigma(\kappa - z)}{\sigma(\kappa + z)} \right],$$

где ζ и σ — функции Вейерштрасса. Тогда (A.3) переходит в

$$\Delta X = i \left[4\omega\zeta(\kappa) + \ln \frac{\sigma(\kappa - 2\omega)}{\sigma(\kappa + 2\omega)} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Здесь требуется выделить нужную ветвь логарифма, но, поскольку разные ветви дают вклад, кратный 2π , мы сделаем этот выбор в конце вычисления, сравнив результат с численным расчетом. Таким образом, по модулю 2π находим с использованием формулы $\sigma(z + 2\omega) = -\sigma(z) \exp[2\eta(z + \omega)]$ выражение

$$\Delta X = 4i[\omega\zeta(\kappa) - \eta\kappa], \quad (\text{A.8})$$

где $\eta = \zeta(\omega)$. В нашем пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ параметры ω, η стремятся к бесконечности и, следовательно, в (A.8) требуется найти конечную разность двух больших членов. Воспользуемся для этого асимптотическими выражениями, справедливыми в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\wp(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}, \quad \zeta(z) = -\frac{1}{3}z + \operatorname{cth} z,$$

а также формулой

$$\zeta(\omega + z) = \eta + \zeta(z) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - e_1},$$

которые дают

$$\eta = 1 - \frac{1}{3}\omega, \quad \zeta(\kappa) = \eta + \frac{1}{3}(\kappa - \omega).$$

После их подстановки в (A.8) получаем ответ

$$\Delta X = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - 2\pi$$

с точностью, как было указано выше, до слагаемых, кратных 2π . Сравнение этого выражения с численным расчетом интеграла (A.1) показывает, что к этому результату следует прибавить 2π , что приводит к окончательной формуле (56). Стоит заметить, что кратные 2π слагаемые в X вообще не влияют на зависимость угла θ от ξ , определяемую формулой (35).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
2. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003).
3. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).

4. С. В. Манаков, ЖЭТФ **65**, 505 (1973).
5. M. Abad and A. Recati, *Eur. Phys. J. D* **67**, 148 (2013).
6. I. Carusotto, S. X. Hu, L. A. Collins, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 260403 (2006).
7. Yu. G. Gladush, G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **75**, 033619 (2007).
8. Ю. Г. Гладуш, А. М. Камчатнов, ЖЭТФ **132**, 589 (2007).
9. Yu. G. Gladush, L. A. Smirnov, and A. M. Kamchatnov, *J. Phys. B* **41**, 165301 (2008).
10. G. A. El and A. M. Kamchatnov, *Phys. Lett. A* **350**, 192 (2006).
11. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180405 (2006).
12. A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160402 (2008).
13. A. M. Kamchatnov and S. V. Korneev, *Phys. Lett. A* **375**, 2577 (2011).
14. A. Amo, S. Pigeon, D. Sunvitto et al., *Science* **332**, 1167 (2011).
15. G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 245301 (2011).
16. А. М. Камчатнов, С. В. Корнеев, ЖЭТФ **142**, 658 (2012).
17. Yu. G. Gladush, A. K. Kamchatnov, Z. Shi et al., *Phys. Rev. A* **79**, 033623 (2009).
18. A. M. Kamchatnov and Y. V. Kartashov, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 140402 (2013).
19. A. M. Kamchatnov, A. Gammal, and R. A. Kraenkel, *Phys. Rev. A* **69**, 063605 (2004).
20. M. A. Hofer, M. J. Ablowitz, I. Coddington et al., *Phys. Rev. A* **74**, 023623 (2006).
21. C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu, *Phys. Rev. A* **63**, 063612 (2001).
22. C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hofer, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 065302 (2011).
23. M. A. Hofer, J. J. Chang, C. Hamner, and P. Engels, *Phys. Rev. A* **84**, 041605(R) (2011).
24. C. Hamner, Y. Zhang, J. J. Chang et al., arXiv:1306.6102.
25. E. Timmermans, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5718 (1998).
26. P. Ao and S. T. Chiu, *Phys. Rev. A* **58**, 4836 (1998).
27. B. J. Verhaar, E. G. M. van Kempen, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, *Phys. Rev. A* **79**, 032711 (2009).
28. A. V. Porubov and D. F. Parker, *Wave Motion* **29**, 97 (1999).
29. H. J. Shin, *Phys. Rev. E* **69**, 067602 (2004).
30. J. N. Elgin, V. Z. Enolski, and A. R. Its, *Physica D* **225**, 127 (2007).
31. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **71**, 043611 (2005).
32. А. М. Камчатнов, Y. V. Kartashov, P.-É. Larré, and N. Pavloff, arXiv:1308.0784.
33. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
34. А. М. Камчатнов, *J. Phys. A* **23**, 2945 (1990).
35. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
36. А. М. Камчатнов, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations — an Introductory Course*, World Sci., Singapore (2000).
37. А. М. Камчатнов, *Physica D* **188**, 247 (2004).
38. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Москва (1970).
39. Г. Бейтмен, Ф. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе*, Наука, Москва (1967).