

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СКИРМИОНЫ $(2 + 1)$ -МЕРНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ СКИРМА СО СЛАГАЕМЫМ ЧЕРНА – САЙМОНСА

А. Ю. Логинов*

*Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.

Рассмотрена $(2 + 1)$ -мерная калибровочная модель Сирма со слагаемым Черна – Саймонса. Наличие слагаемого Черна – Саймонса приводит к возможности существования в данной модели двумерных скирмионов, несущих магнитный поток, обладающих электрическим зарядом и ненулевым угловым моментом. Показано, что модель также допускает существование двумерных скирмионов с ненулевой фазовой частотой вращения. Нетривиальные топологические свойства модели приводят к тому, что магнитный поток, электрический заряд и угловой момент вращающегося двумерного скирмиона оказываются связанными друг с другом. Выполнены аналитические и численные исследования свойств вращающихся двумерных скирмионов.

DOI: 10.7868/S0044451014020060

1. ВВЕДЕНИЕ

Топологические солитоны $(2 + 1)$ -мерных полевых моделей играют важную роль в различных областях теории поля, физике конденсированного состояния и астрофизике. Среди них прежде всего необходимо упомянуть вихри эффективной теории сверхпроводимости [1] и $(2 + 1)$ -мерной релятивистской абелевой модели Хиггса [2]. Другим важным примером является статическое солитонное решение $(2 + 1)$ -мерной нелинейной $O(3)$ σ -модели [3], эффективно описывающей поведение ферромагнетика в критической области. Это солитонное решение можно также рассматривать как инстантон $(1 + 1)$ -мерной нелинейной $O(3)$ σ -модели. Инвариантность функционала статической энергии σ -модели относительно масштабных преобразований координат приводит к наличию у солитона соответствующей нулевой моды. Это, в свою очередь, приводит к тому, что вместо солитонного решения фиксированного размера мы имеем в данном случае однопараметрическое семейство солитонных решений, в котором величина параметра определяет размер солитона.

В соответствии с теоремой Деррика [4] размер солитона исходной нелинейной $O(3)$ σ -модели может быть фиксирован несколькими способами. Один из них [5] заключается во введении в лагранжиан нелинейной σ -модели потенциала взаимодействия, нарушающего исходную $O(3)$ -симметрию модели до абелевой $U(1)$ -подгруппы, калибровке этой остаточной $U(1)$ -симметрии и включении в лагранжиан кинетического слагаемого калибровочного поля. Подобно вихрям, солитоны модели [5] несут магнитный поток. Однако топологические свойства этих солитонов существенно отличны от топологических свойств вихрей, в частности их магнитный поток не квантован на классическом уровне.

Другим способом фиксации размера солитона является включение в лагранжиан σ -модели, наряду с потенциалом, слагаемого четвертого порядка по производным ϕ -поля. Солитоны такой модели — так называемые baby-скирмионы, были впервые исследованы в работах [6, 7]. Они являются двумерными аналогами трехмерных скирмионов [8] — первых топологических солитонов, исследованных в рамках теории поля. Свойства двумерных скирмионов существенным образом зависят от используемого потенциала взаимодействия компонент ϕ -поля [9]. Таким образом, двумерные скирмионы не являются такими же универсальными объектами как трехмерные,

*E-mail: aloginov@tpu.ru

для которых наличие потенциала не является необходимым условием существования.

Потенциал взаимодействия в двумерной модели Скирма обычно выбирают инвариантным относительно $U(1)$ -подгруппы исходной группы симметрии $O(3)$. Вводя калибровочное поле и калибруя эту остаточную $U(1)$ -подгруппу, получим двумерную калибровочную модель Скирма. Солитоны этой модели, несущие магнитный поток, были исследованы в работе [10].

В отличие от (3 + 1)-мерного случая, (2 + 1)-мерная максвелловская электродинамика не допускает существование электрически заряженных пространственно локализованных решений, обладающих конечной энергией [10]. Поэтому все известные двумерные солитонные решения максвелловских калибровочных моделей являются электрически нейтральными и не обладают электрическим полем. Однако в (2 + 1) измерениях помимо обычного лоренц-инвариантного максвелловского слагаемого существует лоренц-инвариантное слагаемое Черна–Саймонса, которое можно включать в лагранжиан калибровочной модели [11–13]. В присутствии этого слагаемого калибровочное поле становится топологически массивным, что делает возможным существование солитонов двумерных калибровочных моделей, обладающих ненулевым электрическим зарядом [14, 15]. Наличие у этих солитонов электрического и магнитного полей приводит к тому, что они также обладают ненулевым угловым моментом.

Все перечисленные до сих пор двумерные солитоны являются топологическими и не имеют с точностью до калибровочных преобразований явной временной зависимости. В то же время известен широкий класс нетопологических солитонов [16–18], поля которых обладают явной временной зависимостью $\propto \exp(i\omega t)$. В этой связи представляет интерес исследование двумерного топологического солитона, обладающего электрическим и магнитным полями, причем его заряженные поля имеют временную зависимость $\propto \exp(i\omega t)$ в некоторой фиксированной калибровке. В настоящей работе рассмотрена (2 + 1)-мерная калибровочная модель Скирма со слагаемым Черна–Саймонса. Показано, что в этой модели существуют электрически заряженные скирмионы, несущие магнитный поток. Подобно нетопологическим солитонам, заряженные компоненты ϕ -поля этих скирмионов вращаются с постоянной фазовой частотой. Заметим, что вращающиеся скирмионы (2+1)-мерной некалибровочной модели Скирма были исследованы в работах [7, 19].

Работа построена следующим образом. В разд. 2

приведено краткое описание лагранжиана и полевых уравнений двумерной калибровочной модели Скирма со слагаемым Черна–Саймонса. Описана топологическая структура модели, приведена нижняя граница энергии полевой конфигурации, принадлежащей данному топологическому классу. В разд. 3 приведен анзац, используемый для решения нелинейных полевых уравнений модели. Получена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для функций анзаца и выражения функционалов энергии, электрического заряда и углового момента в терминах этих функций. Установлена связь между электрическим зарядом, магнитным потоком и угловым моментом двумерного скирмиона. Исследованы асимптотические свойства полей скирмиона при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. Получены асимптотические зависимости энергии, электрического заряда и углового момента двумерного скирмиона от фазовой частоты вращения. В разд. 4 описана процедура численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Получены кривые зависимостей энергии E , электрического заряда Q и углового момента J от фазовой частоты ω . Также построены кривые зависимостей $E(Q)$, $E(J)$ и $J(Q)$. Исследована зависимость свойств двумерного скирмиона от величины калибровочной константы связи. В Заключении приведено сравнение свойств двумерных вращающихся скирмионов и двумерных нетопологических солитонов. Рассмотрены необходимые условия существования вращающихся заряженных солитонов в (2 + 1)-мерных калибровочных моделях.

2. ЛАГРАНЖИАН И ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Плотность лагранжиана двумерной калибровочной модели Скирма со слагаемым Черна–Саймонса имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}A_\lambda + \frac{1}{2}D_\mu\phi \cdot D^\mu\phi - \frac{\kappa^2}{4}(D_\mu\phi \times D_\nu\phi) \cdot (D^\mu\phi \times D^\nu\phi) - V(\phi), \quad (1)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

— тензор напряженности калибровочного поля A_ν ,

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - gA_\mu\mathbf{n} \times \phi$$

— ковариантная производная триплета скалярных полей ϕ , удовлетворяющих условию

$$\phi \cdot \phi = H,$$

$\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор в изотопическом пространстве. Параметры μ и \varkappa определяют вклад слагаемых Черна–Саймонса и Скирма в лагранжиан модели. В силу теоремы Деррика [4] потенциал взаимодействия триплета скалярных полей $V(\phi)$ необходим для стабилизации размера статических солитонов. Конкретный вид этого потенциала не является фиксированным. В литературе встречаются различные формы потенциала $V(\phi)$, в данной работе используется наиболее распространенная форма [6, 7]:

$$V(\phi) = \nu^2 \left(|\phi|^2 - |\phi| \mathbf{n} \cdot \phi \right). \quad (2)$$

В дальнейшем будет использоваться система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка \hbar равны 1, а единицей измерения энергии является H — квадрат модуля триплета скалярных полей ϕ . В этой системе единиц имеют место соотношения

$$\phi \cdot \phi = 1,$$

$$V(\phi) = \nu^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \phi).$$

Слагаемое Черна–Саймонса

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\mu}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} A_\lambda$$

играет важную роль в определении свойств модели (1). Оно является топологически инвариантным, так как его вариационная производная по отношению к метрике обращается в нуль. Следовательно, слагаемое Черна–Саймонса не дает вклада в энергию полевых конфигураций модели. В то же время слагаемое Черна–Саймонса дает вклад в полевые уравнения, что приводит к существенному изменению свойств модели (1) по сравнению с классической электродинамикой. Важнейшим из этих изменений является то, что калибровочное поле модели (1) приобретает массу, равную параметру μ . Это делает возможным существование в модели (1) двумерных локализованных решений конечной энергии — солитонов, несущих магнитный поток и обладающих электрическим зарядом. Без наличия слагаемого Черна–Саймонса существование двумерных электрически заряженных солитонов невозможно [10]. Другим отличием от классической электродинамики является то, что плотность лагранжиана (1) не является инвариантной относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda(x), \\ \phi_\perp(x) &\rightarrow \exp(i\Lambda(x)) \phi_\perp(x), \quad \phi_3(x) \rightarrow \phi_3(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\phi_\perp(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x),$$

а изменяется на полную производную:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mu (4g)^{-1} \partial_\lambda (\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} \Lambda).$$

Действие

$$S = \int \mathcal{L} d^3x$$

является инвариантным относительно (3) при условии достаточно быстрого убывания калибровочных функций $\Lambda(x)$ на бесконечности.

Полевые уравнения модели (1) имеют вид

$$\begin{aligned} D_\alpha (\phi \times D^\alpha \phi - \varkappa^2 D_\beta \phi (D^\beta \phi \cdot \phi \times D^\alpha \phi)) + \\ + \nu^2 \mathbf{n} \times \phi = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^* F^\nu = \\ = g \mathbf{n} \cdot (\phi \times D^\nu \phi - \varkappa^2 D_\beta \phi (D^\beta \phi \cdot \phi \times D^\nu \phi)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$*F^\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Интегрируя левую и правую части уравнения (5) с индексом $\nu = 0$ по двумерной пространственной плоскости, получим важное соотношение между электрическим зарядом и магнитным потоком:

$$Q = -\mu \Phi. \quad (6)$$

Таким образом, решение полевых уравнений модели (1), несущее ненулевой магнитный поток, с необходимостью обладает ненулевым электрическим зарядом и наоборот. Это свойство модели обусловлено слагаемым Черна–Саймонса и не имеет аналога в классической электродинамике. Симметричный тензор энергии–импульса модели и соответствующее выражение энергии полевой конфигурации имеют вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} + D_\mu \phi \cdot D_\nu \phi - \\ & - \varkappa^2 (D_\mu \phi \times D_\rho \phi) \cdot (D_\nu \phi \times D^\rho \phi) - \\ & - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} D_\rho \phi \cdot D^\rho \phi - \right. \\ & \left. - \frac{\varkappa^2}{4} (D_\rho \phi \times D_\sigma \phi) \cdot (D^\rho \phi \times D^\sigma \phi) - V(\phi) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$E = \frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2 + B^2) d^2x + \int \left(\frac{1}{2} D_0 \phi \cdot D_0 \phi + \frac{\varkappa^2}{2} (D_0 \phi \times D_i \phi) \cdot (D_0 \phi \times D_i \phi) \right) d^2x + \int \left(\frac{1}{2} D_i \phi \cdot D_i \phi + \frac{\varkappa^2}{4} \times (D_i \phi \times D_j \phi) \cdot (D_i \phi \times D_j \phi) + V(\phi) \right) d^2x, \quad (8)$$

где \mathbf{E} , B — электрическое и магнитное поле (2 + 1)-мерной полевой конфигурации.

Полевые конфигурации модели (1), обладающие конечной энергией, можно разделить на топологические классы, соответствующие гомотопической группе

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Эта группа соответствует отображению двумерной пространственной плоскости с включенной бесконечностью

$$\mathbb{R}^2 \cup \infty \sim S^2$$

на единичную сферу

$$\phi \cdot \phi = 1$$

в изотопическом пространстве. Топологический заряд полевой конфигурации, принадлежащей данному топологическому классу, сохраняется во времени, является целым числом и определяется формулой:

$$\text{deg}(\phi) = -\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) d^2x, \quad (10)$$

где ϵ_{ij} — двумерный антисимметричный тензор. Аналогично [5, 10] можно показать, что нетривиальная топология (9) приводит к ограничению снизу на энергию полевых конфигураций, имеющих топологический заряд $\text{deg}(\phi) \in \mathbb{Z}$:

$$E \geq 4\pi |\text{deg}(\phi)|, \quad \left| \frac{\nu}{g} \right| \geq 1, \quad (11)$$

$$E \geq 4\pi \frac{\nu^2}{g^2} |\text{deg}(\phi)|, \quad \left| \frac{\nu}{g} \right| < 1.$$

При дискретных преобразованиях C , P , T слагаемое Черна–Саймонса \mathcal{L}_{CS} ведет себя следующим образом:

$$C(\mathcal{L}_{CS}) = \mathcal{L}_{CS}, \quad P(\mathcal{L}_{CS}) = -\mathcal{L}_{CS}, \quad (12)$$

$$T(\mathcal{L}_{CS}) = -\mathcal{L}_{CS}.$$

Из (12) следует, что слагаемое Черна–Саймонса нарушает P - и T -инвариантность лагранжиана модели

(1). Нарушение T -инвариантности приводит к тому, что энергия двумерных скирмионов модели, вращающихся с постоянной фазовой частотой ω , не является инвариантной при изменении знака фазовой частоты.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКИРМИОНОВ МОДЕЛИ

Для решения полевых уравнений (4), (5) используем следующий анзац:

$$\phi(r, \theta, t) = (\sin(f(r)) \cos(n\theta + \omega t), \sin(f(r)) \sin(n\theta + \omega t), \cos(f(r))), \quad (13)$$

$$A_0(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{gr}, \quad A_i(r, \theta) = -\epsilon_{ij} n_j \frac{A(r)}{gr},$$

где

$$n_i = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

— единичный вектор в двумерной плоскости. Подобный анзац с

$$A_0(r, \theta) = 0$$

и без временной зависимости триплета ϕ был использован в работах [5, 10]. Анзац (13) инвариантен относительно комбинации вращений на угол χ в двумерном пространстве и на угол $-\chi$ в изотопической плоскости. Подставляя анзац (13) в полевые уравнения (4), (5), получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $A_0(r)$, $A(r)$, $f(r)$:

$$A_0''(r) - \frac{A_0'(r)}{r} + \left(\frac{1}{r^2} - g^2 \sin^2(f(r)) (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) \right) A_0(r) - \mu A'(r) + g^2 \omega r \sin^2(f(r)) (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) = 0, \quad (14)$$

$$A''(r) - \frac{A'(r)}{r} - g^2 (\sin^2(f(r)) (1 + \varkappa^2 f'(r)^2)) A(r) - \mu A_0'(r) + \mu \frac{A_0(r)}{r} + g^2 n \sin^2(f(r)) \times (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) = 0, \quad (15)$$

$$f''(r) (1 + \varkappa^2 \sin^2(f(r)) \alpha(r)^2) + \frac{f'(r)}{r} (1 + \varkappa^2 \sin^2(f(r)) (r \alpha(r)^2)') + \frac{f'(r)^2}{2} \varkappa^2 \sin(2f(r)) \alpha(r)^2 - \frac{\sin(2f(r))}{2} \alpha(r)^2 - \nu^2 \sin(f(r)) = 0, \quad (16)$$

где

$$\alpha(r)^2 = \frac{(n - A(r))^2}{r^2} - \left(\omega - \frac{A_0(r)}{r} \right)^2.$$

Отсутствие сингулярности решения системы (14)–(16) при $r \rightarrow 0$ приводит к граничным условиям

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} A(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} A_0(r) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \pi k, \end{aligned} \quad (17)$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в уравнения (14)–(16) степенные разложения функций $A_0(r)$, $A(r)$, $f(r)$, удовлетворяющие граничным условиям (17), получим асимптотику решения при $r \rightarrow 0$:

$$A_0(r) = b_1 r + b_3 r^3 + \dots, \quad (18)$$

$$A(r) = a_2 r^2 + a_{2n+2} r^{2n+2} + \dots, \quad (19)$$

$$f(r) = \pi k + f_n r^n + f_{n+2} r^{n+2} + \dots \quad (20)$$

Коэффициенты b_3 , a_{2n+2} , f_{n+2} могут быть выражены в терминах начальных коэффициентов b_1 , a_2 , f_n и параметров модели:

$$\begin{aligned} b_3 = \frac{a_2 \mu}{2}, \quad a_{2n+2} = -g^2 \frac{f_n^2 (1 + \varkappa^2 f_n^2 \delta_n^1)}{4(1+n)}, \\ f_{n+2} = -f_n \left[2a_2 n - (-1)^k \nu^2 + (b_1 - \omega)^2 - \right. \\ \left. - 2\varkappa^2 f_n^2 \left((2a_2 + (b_1 - \omega)^2) \delta_n^1 - 8\delta_n^2 \right) \right] \times \\ \times [4(1+n + 2\varkappa^2 f_n^2 \delta_n^1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие конечности энергии решения приводит к следующей асимптотике при $r \rightarrow \infty$:

$$A_0(r) \sim \beta r - \gamma \sqrt{\mu r} \exp(-\mu r) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu r}\right) \right), \quad (22)$$

$$A(r) \sim A_\infty + \gamma \sqrt{\mu r} \exp(-\mu r) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu r}\right) \right), \quad (23)$$

$$f(r) \sim \frac{\delta}{\sqrt{\Delta r}} \exp(-\Delta r) \left(1 + O\left(\frac{1}{\Delta r}\right) \right), \quad (24)$$

где

$$\Delta = \sqrt{\nu^2 - \omega^2},$$

β , γ , δ , A_∞ — некоторые константы. Заметим, что анзац (13) и уравнения (14)–(16) остаются инвариантными относительно калибровочных преобразований $\Lambda(x) = \epsilon t$, при которых

$$\begin{aligned} A_0(r) \rightarrow A_0(r) + \epsilon r, \quad \omega \rightarrow \omega + \epsilon, \\ \omega - \frac{A_0(r)}{r} \rightarrow \omega - \frac{A_0(r)}{r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Мы фиксируем эту остаточную калибровочную свободу условием $\beta = 0$ в асимптотике (22) функции A_0 . После этого граничные условия на бесконечности принимают вид

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = A_\infty, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

После фиксации калибровки число независимых параметров, определяющих поведение системы при $r \rightarrow \infty$, равно трем. Число независимых параметров, определяющих поведение системы при $r \rightarrow 0$, также равно трем. Согласно [20], это является аргументом в пользу существования решения системы (14)–(16), удовлетворяющего граничным условиям (17), (26). Такое решение будет иметь топологический заряд

$$\text{deg}(\phi) = \frac{n}{2} \left(1 - (-1)^k \right). \quad (27)$$

Решение системы (14)–(16), удовлетворяющее граничным условиям (17), (26), может быть найдено с помощью численных методов. В следующем разделе будет численно исследовано невозбужденное решение с единичным топологическим зарядом $\text{deg}(\phi)$ и ненулевой фазовой частотой ω — вращающийся двумерный скирмион.

Плотность энергии и плотность электрического заряда решения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r) = \frac{A'(r)^2}{2g^2 r^2} + \frac{1}{2g^2} \left(\left(\frac{A_0(r)}{r} \right)' \right)^2 + \frac{f'(r)^2}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sin^2(f(r)) (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) \times \\ \times \left(\left(\omega - \frac{A_0(r)}{r} \right)^2 + \frac{(n - A(r))^2}{r^2} \right) + \\ + \nu^2 (1 - \cos(f(r))), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} j^0(r) = g \sin^2(f(r)) (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) \times \\ \times \left(\omega - \frac{A_0(r)}{r} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Решение обладает ненулевым радиальным электрическим полем

$$E_r(r) = - \left(\frac{A_0(r)}{gr} \right)',$$

магнитным полем

$$B(r) = - \frac{A'(r)}{gr}$$

и несет магнитный поток

$$\Phi = 2\pi \int B(r) r dr = -\frac{2\pi}{g} A_\infty. \quad (30)$$

В отличие от вихревых решений, магнитный поток (30) скирмионных решений не является квантованным на классическом уровне и может принимать произвольные значения. В силу (6) электрический заряд решения может быть представлен в виде

$$Q = 2\pi \int j^0(r) r dr = -\mu\Phi = \mu \frac{2\pi}{g} A_\infty, \quad (31)$$

он также не квантован на классическом уровне. Наличие электрического и магнитного полей приводит к тому, что решение будет иметь ненулевой угловой момент

$$J = 2\pi \int \mathcal{J}(r) r dr,$$

где

$$\mathcal{J}(r) = \frac{A'(r)(A_0(r) - rA_0'(r))}{g^2 r^2} - \sin^2(f(r)) \times \\ \times (1 + \varkappa^2 f'(r)^2) (n - A(r)) \left(\omega - \frac{A_0(r)}{r} \right). \quad (32)$$

Используя полевые уравнения (14), (15), граничные условия (17), (26) и выражения (29), (31), (32), можно показать с помощью интегрирования по частям, что угловой момент решения удовлетворяет важному соотношению:

$$J = \mu \frac{\pi}{g^2} (A_\infty - 2n) A_\infty. \quad (33)$$

В силу (31) выражение (33) может быть также представлено в виде

$$J = -\frac{nQ}{g} + \frac{Q^2}{4\pi\mu}. \quad (34)$$

Из (31) и (33) следует, что электрический заряд и угловой момент двумерного скирмиона, пропорциональные константе μ , обусловлены слагаемым Черна–Саймонса.

Временная зависимость дублета скалярных полей ϕ_1, ϕ_2 в анзаце (13) аналогична временной зависимости $\propto \exp(i\omega t)$ заряженного поля нетопологического солитона. В моделях с глобальной [16, 17, 21] или локальной [22] калибровочной инвариантностью такая временная зависимость приводит к тому, что производная энергии солитонного решения по нетеровскому заряду, соответствующему фазовому вращению, пропорциональна частоте этого вращения. В нашем случае такое соотношение имеет вид

$$\frac{dE}{d(Q/g)} = \omega. \quad (35)$$

Подставляя асимптотику (22)–(24) функций $A_0(r)$, $A(r)$, $f(r)$ в выражение плотности энергии (28), получим ведущий член асимптотики $E(\omega)$ при $|\omega| \rightarrow \nu$:

$$E(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\nu} a_\pm \Delta^{-2}, \quad (36)$$

где a_-, a_+ — некоторые положительные константы. Таким образом, фазовая частота вращения двумерного скирмиона ω лежит в интервале $(-\nu, \nu)$. Из выражения (36) следует, что при $|\omega| \rightarrow \nu$ энергия двумерного скирмиона стремится к бесконечности. Это, очевидно, связано с тем, что показатель экспоненциального убывания Δ в асимптотике (24) функции $f(r)$ стремится в этом пределе к нулю. Из выражений (31), (34), (35), (36) получим ведущие члены асимптотик $Q(\omega)$, $J(\omega)$, $A_\infty(\omega)$ при $|\omega| \rightarrow \nu$:

$$Q(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\nu} \pm g\nu^{-1} a_\pm \Delta^{-2}, \quad (37)$$

$$J(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\nu} \frac{g^2 a_\pm^2}{4\pi\mu\nu^2} \Delta^{-4}, \quad (38)$$

$$A_\infty(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\nu} \pm \frac{g^2}{2\pi\mu\nu} a_\pm \Delta^{-2}. \quad (39)$$

Из выражений (37), (38) следует, что электрический заряд и угловой момент двумерного скирмиона, так же как и его энергия, стремятся к бесконечности при $|\omega| \rightarrow \nu$. Характерной особенностью двумерного скирмиона данной модели является то, что предельное значение A_∞ также стремится к бесконечности при $|\omega| \rightarrow \nu$. Напомним, что в моделях, допускающих вихревые решения, функция $A(r)$ стремится при $r \rightarrow \infty$ к одному из целочисленных значений [23].

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из формулы (27) следует, что топологический заряд $\deg(\phi)$ равен нулю при четном k , и равен n при нечетном k . Топологический заряд можно интерпретировать как аналог барионного заряда, поэтому в зависимости от его значения можно говорить о мезонных, барионных, дибарионных и т. д. состояниях модели [24]. В то же время, при данном значении n четные k характеризуют степень возбуждения мезонных состояний, а нечетные k — n -барионных состояний. В настоящей работе выполнено численное исследование свойств двумерного скирмиона — решения с $n = 1, k = 1, \deg(\phi) = 1$, соответствующего невозбужденному барионному состоянию.

Система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (14)–(16) вместе с граничными условиями (17), (26) представляет собой смешанную краевую задачу на интервале $r \in [0, \infty)$. Эта краевая задача может быть решена только с помощью численных методов. В данной работе краевая задача (14)–(16), (17), (26) решалась с помощью пакета Maple методом конечных разностей и ньютоновских итераций. Для ускорения сходимости численной процедуры к точному решению использовалась экстраполяция Рундсона. Поскольку точка $r = 0$ является регулярной особой точкой системы (14)–(16), при численном решении применялись разностные схемы, не использующие граничных значений функций. Для проверки правильности численного решения использовались формулы (30), (31), (33), (34).

Система дифференциальных уравнений (14)–(16) и граничные условия (17), (26) включают в себя семь параметров: $\omega, g, \kappa, \mu, \nu, n, k$. В настоящей работе исследована зависимость свойств двумерного скирмиона ($n = 1, k = 1$) от фазовой частоты ω для нескольких значений калибровочной константы связи g . Также исследована зависимость свойств двумерного скирмиона от величины калибровочной константы связи g для нескольких значений фазовой частоты ω . Значения остальных параметров фиксированы и выбраны равными единице: $\kappa = 1, \mu = 1, \nu = 1$. Напомним, что в работе используется система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка \hbar равны 1, а единицей измерения энергии является H — квадрат модуля триплета скалярных полей ϕ .

На рис. 1 представлены зависимости энергии E , электрического заряда Q и углового момента J двумерного скирмиона от фазовой частоты ω для значений калибровочной константы связи $g = 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0$. Для каждого значения калибровочной константы связи g зависимости $E(\omega), Q(\omega)$ и $J(\omega)$ представлены в максимально широких интервалах ω , которых удалось достичь численными методами. Трудность численного решения при дальнейшем увеличении $|\omega|$ связана с тем, что при $|\omega| \rightarrow 1$ краевая задача становится жесткой — малым изменениям ω соответствуют большие изменения в решении краевой задачи.

Из рис. 1а следует, что зависимость $E(\omega)$ является несимметричной: $E(\omega) \neq E(-\omega)$. Эта асимметрия связана с T -неинвариантностью слагаемого Черна–Саймонса. В соответствии с (35) каждая кривая $E(\omega)$ достигает своего минимума при $\omega = 0$. При $|\omega| \rightarrow 1$ энергия $E(\omega)$ неограниченно возрастает в

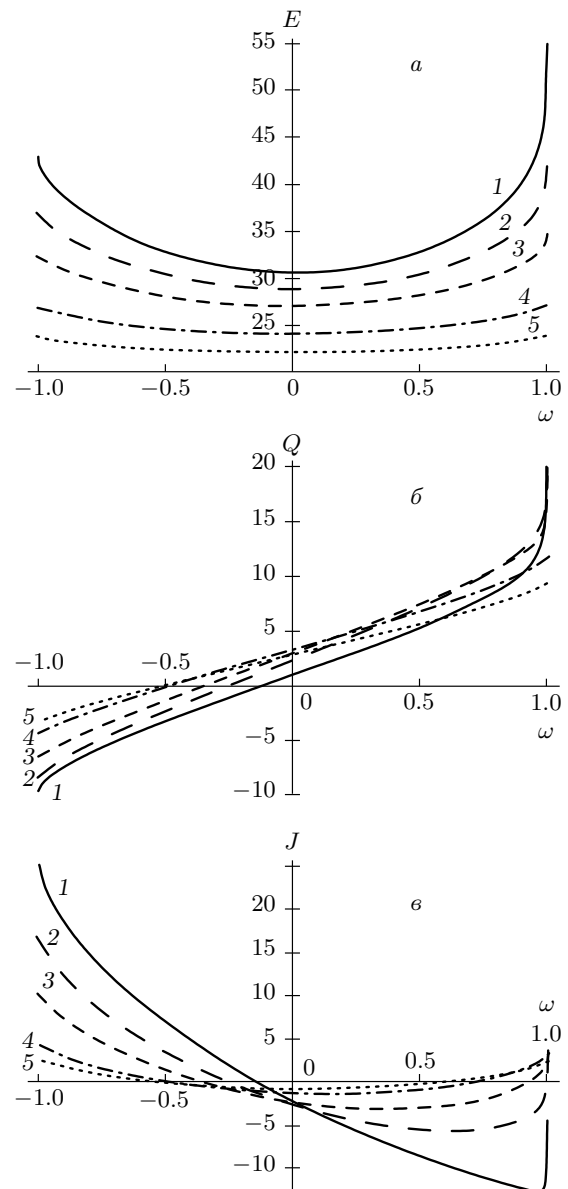


Рис. 1. Зависимости энергии E (а), электрического заряда Q (б) и углового момента J скирмиона от фазовой частоты ω при различных значениях калибровочной константы связи $g = 0.5$ (1), 0.75 (2), 1.0 (3), 1.5 (4), 2.0 (5)

соответствии с (36). С ростом калибровочной константы связи энергия двумерного скирмиона уменьшается.

Электрический заряд Q на рис. 1б монотонно возрастает с ростом фазовой частоты ω . При $|\omega| \rightarrow 1$ электрический заряд неограниченно возрастает по модулю в соответствии с (37). Электрический заряд остается ненулевым при $\omega = 0$, что в силу (31) обусловлено слагаемым Черна–Саймонса.

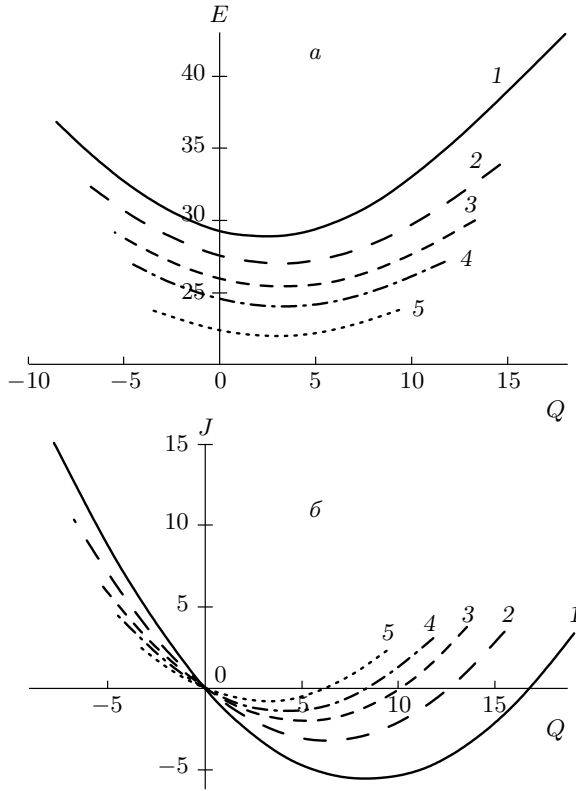


Рис. 2. Зависимости энергии E (а) и углового момента J (б) скирмиона от электрического заряда Q при различных значениях калибровочной константы связи $g = 0.75$ (1), 1.0 (2), 1.25 (3), 1.5 (4), 2.0 (5)

Угловой момент J на рис. 1 в также неограниченно возрастает при $|\omega| \rightarrow 1$. Однако в отличие от электрического заряда, знаки углового момента при $\omega \rightarrow \pm 1$ совпадают, что согласуется с формулой (34). Заметим, что угловой момент вращающегося скирмиона, не связанного при $g = 0$ с электромагнитным полем, является нечетной функцией фазовой частоты ω . Таким образом, включение электромагнитного поля резко изменяет характер поведения зависимости $J(\omega)$. Для каждого g зависимость $J(\omega)$ достигает минимума в некоторой точке внутри интервала $(-1, 1)$. С уменьшением калибровочной константы связи g точка минимума углового момента стремится к $\omega = 1$. Подобно электрическому заряду, угловой момент остается ненулевым при $\omega = 0$, что согласуется с (34).

Имея зависимости $E(\omega)$, $Q(\omega)$, $J(\omega)$ и рассматривая ω как параметр, можно построить зависимости $E(Q)$, $J(Q)$ и $E(J)$. Они представлены на рис. 2, 3 для значений калибровочной константы

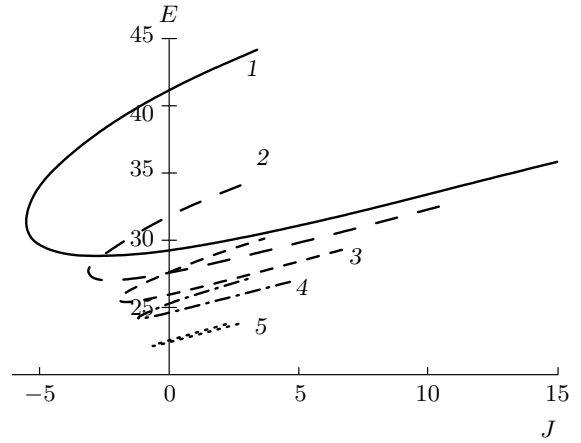


Рис. 3. Зависимости энергии скирмиона E от углового момента J . Обозначения кривых такие же, как на рис. 2

связи $g = 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0$. Из рис. 2а следует, что зависимость $E(Q)$ является несимметричной: $E(-Q) \neq E(Q)$. Для каждого значения g кривая $E(Q)$ достигает минимума в некоторой точке Q . В соответствии с выражением (35) это значение Q соответствует нулевому значению фазовой частоты ω . Из выражения (35) также следует, что для достаточно больших $|Q|$ имеет место соотношение

$$E \approx \frac{\nu}{g} |Q|. \tag{40}$$

Таким образом, зависимость $E(Q)$ становится линейной при достаточно больших $|Q|$, что согласуется с рис. 2а. С ростом g при фиксированном значении Q энергия скирмиона уменьшается.

Зависимость углового момента J от электрического заряда Q , показанная на рис. 2б, имеет квадратичный характер в полном соответствии с формулой (34). Угловой момент достигает своего минимального значения

$$J_{min} = -\frac{\pi\mu}{g^2}$$

при

$$Q = \frac{2\pi\mu}{g}.$$

Кривая $J(Q)$ пересекает ось абсцисс в точках $Q = 0$ и $Q = 2\pi\mu/g$. Квадратичная зависимость $J(Q)$ приводит к тому, что зависимость $E(J)$ на рис. 3 является двузначной. Следовательно, в модели (1) возможно существование скирмионов с одинаковыми угловыми моментами и разными энергиями. С ростом g при фиксированном значении J энергии скирмионов, лежащие на верхней и нижней ветвях кривой

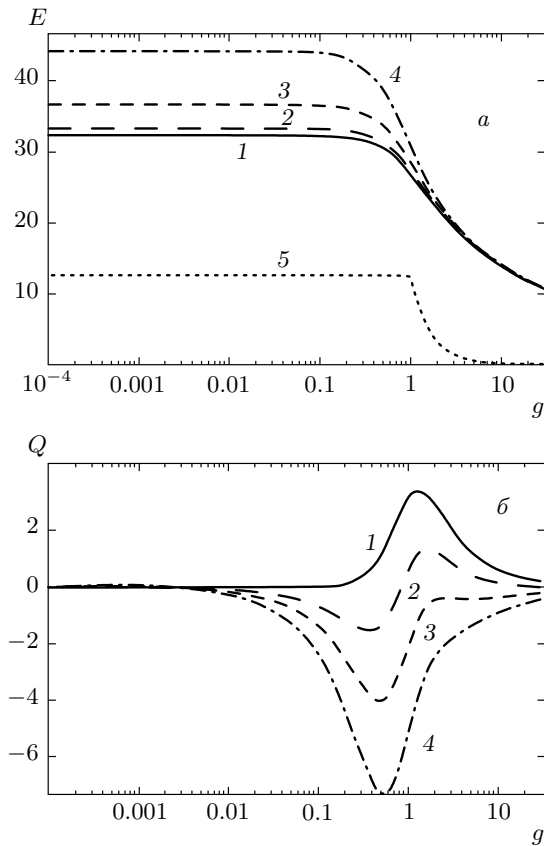


Рис. 4. Зависимости энергии E (а) и электрического заряда Q (б) скирмиона от величины калибровочной константы связи g при различных значениях фазовой частоты $\omega = 0$ (1), 0.3 (2), 0.6 (3), 0.9 (4). Кривая (5) соответствует топологической границе (11)

$E(J)$, уменьшаются. Также уменьшается разность энергий, лежащих на верхней и нижней ветвях кривой $E(J)$.

До сих пор мы исследовали свойства скирмиона при фиксированных значениях калибровочной константы связи g . Исследуем теперь зависимость свойств скирмиона от величины g при фиксированных значениях фазовой частоты ω . На рис. 4а показаны зависимости энергии скирмиона $E(g)$ для нескольких значений ω . Из этого рисунка следует, что при малых значениях g энергия скирмиона слабо зависит от g . С дальнейшим увеличением g энергии скирмионов с различными ω начинают быстро уменьшаться, при этом зависимости с различными ω фактически сливаются в одну линию. При еще больших g скорость убывания энергии начинает снижаться. Аналогично [10] можно сделать предположение, что при $g \rightarrow \infty$ энергии скирмионов с фиксиро-

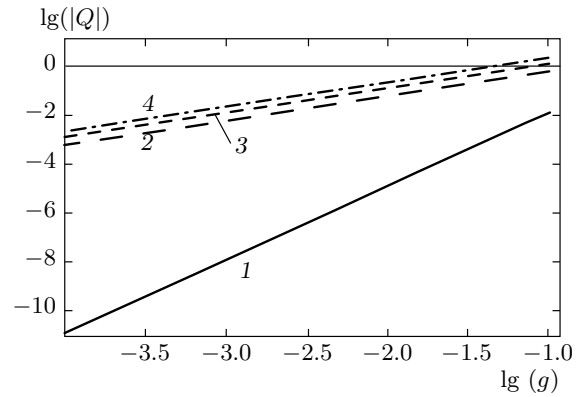


Рис. 5. Зависимости логарифма модуля электрического заряда скирмиона $\lg(|Q|)$ от величины логарифма калибровочной константы связи $\lg(g)$ для малых значений g . Обозначения кривых такие же, как на рис. 4

ванными ω стремятся к некоторому общему предельному значению.

На рис. 4б показаны зависимости электрического заряда $Q(g)$ скирмиона для нескольких значений ω . При малых g электрический заряд также мал в соответствии с (29). С увеличением g электрический заряд возрастает по модулю для всех значений ω . При дальнейшем увеличении g электрический заряд начинает уменьшаться по модулю для всех значений ω , стремясь к нулю при $g \rightarrow \infty$. Такое необычное поведение зависимости $Q(g)$ согласуется с формулой (31). Из рис. 4б и формул (6), (34) следует, что при $g \rightarrow \infty$ магнитный поток и угловой момент скирмиона также стремятся к нулю при любом фиксированном ω .

На рис. 5 приведена зависимость десятичного логарифма модуля электрического заряда скирмиона $\lg(|Q|)$ от величины десятичного логарифма калибровочной константы связи $\lg(g)$ для малых значений g . Из этого рисунка следует, что $Q \sim g^3$ при $\omega = 0$ и $Q \sim g$ при $\omega \neq 0$. В силу формулы (6) такое же поведение при малых g имеет и магнитный поток Φ . Такое поведение Q и Φ при малых g имеет следующее объяснение. Система дифференциальных уравнений (14)–(16) зависит только от квадрата калибровочной константы связи, поэтому решение этой системы также зависит от g^2 . При $g = 0$ электромагнитное поле отщепляется от триплета ϕ и система (14)–(16) имеет тривиальные решения $A_0 = 0$, $A = 0$. В то же время решение f остается нетривиальным при $g = 0$, так как в силу теоремы Деррика [4] двумерный скирмион может существовать и

без взаимодействия с электромагнитным полем. Из формулы (29) следует порядок малости Q по g при $\omega \neq 0$:

$$Q \sim g,$$

что согласуется с рис. 5. Из этой же формулы следует порядок малости Q по g при $\omega = 0$:

$$Q \sim gA_0.$$

С другой стороны, из формулы (31) получим другое выражение порядка малости Q по g :

$$Q \sim A_\infty g^{-1}.$$

Эти два выражения будут согласованы, если при $\omega = 0$ имеют место соотношения

$$A_0 \sim g^2, \quad A \sim g^4.$$

Из них следует, что $Q \sim g^3$ в соответствии с рис. 5.

Рассмотрим кратко вопрос о стабильности двумерного скирмиона. Полное исследование этого вопроса требует изучения спектра оператора квадратичных флуктуаций в окрестности скирмиона в секторе с фиксированным электрическим зарядом Q и угловым моментом J . Другой способ заключается в численном исследовании поведения малых возмущений в окрестности скирмиона. Такое исследование для некалибровочного двумерного скирмиона с потенциалом (2) было выполнено в работе [6]. Из нее следует, что в секторах с топологическими зарядами $\text{deg}(\phi) = 1, 2$ конфигурация ϕ наименьшей энергии имеет вращательно-симметричную форму (13). В то же время для $\text{deg}(\phi) \geq 3$ конфигурации наименьшей энергии не являются вращательно-симметричными.

Аналогично работе [10] мы полагаем, что в нашем случае конфигурация полей ϕ, A_0, A_i наименьшей энергии в секторе с $\text{deg}(\phi) = 1$ также имеет вращательно-симметричную форму (13). Это утверждение довольно очевидно для случая $\omega = 0$, поэтому мы рассмотрим возможность распада скирмиона с $\omega \neq 0$. Скирмион с $\omega \neq 0$ принадлежит к нетривиальному топологическому классу с $\text{deg}(\phi) = 1$. Поэтому он не может распадаться на расходящиеся волны — топологически тривиальную полевую конфигурацию с $\text{deg}(\phi) = 0$ в окрестности вакуума $\phi = (0, 0, 1), A_0 = 0, A_i = 0$. Остается возможность распада скирмиона с $\omega \neq 0$ на скирмион с $\omega = 0$ и расходящиеся волны. В процессе распада должны выполняться законы сохранения энергии—импульса, углового момента и электрического заряда. При распаде скирмиона расходящиеся волны должны унести энергию

$$\Delta E = E(\omega) - E(0)$$

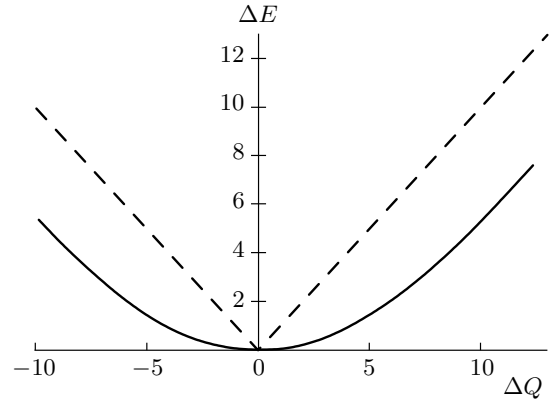


Рис. 6. Зависимость разности энергий скирмионов $\Delta E = E(\omega) - E(0)$ от разности их электрических зарядов $\Delta Q = Q(\omega) - Q(0)$ (сплошная кривая). Зависимость минимально возможной энергии волновой конфигурации от ее электрического заряда (штриховая кривая). Представленные кривые соответствуют калибровочной константе связи $g = 1$

и электрический заряд

$$\Delta Q = Q(\omega) - Q(0).$$

Далее, минимально возможная энергия волн с электрическим зарядом ΔQ равна $\nu |\Delta Q/g|$, так как масса заряженных компонент триплета ϕ в окрестности вакуума равна ν . На рис. 6 показана зависимость ΔE от ΔQ для значения калибровочной константы связи $g = 1$. На этом же рисунке показана минимально возможная энергия волновой конфигурации с электрическим зарядом ΔQ . Из рисунка видно, что распад скирмиона с $\omega \neq 0$ на скирмион с $\omega = 0$ и расходящиеся волны энергетически запрещен. Аналогичная ситуация имеет место и для всех других значений g , использованных в данной работе. Из этого следует, что существует область значений параметров модели (1), в которой скирмион с $\omega \neq 0$ устойчив к распаду на скирмион с $\omega = 0$ и расходящиеся волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко остановимся на сравнении свойств двумерного скирмиона модели (1) и двумерного нетопологического солитона модели комплексного самодействующего скалярного поля [21] в зависимости от фазовой частоты ω . В случае двумерного нетопологического солитона его фазовая частота лежит в некотором интервале

$$|\omega| \in (\omega_{min}, m),$$

где m — масса скалярного мезона модели. При $|\omega| \rightarrow \omega_{min}$ двумерный нетопологический солитон переходит в так называемый режим тонкой стенки. В этом режиме энергия и нетеровский заряд нетопологического солитона стремятся к бесконечности, а амплитуда комплексного скалярного поля становится приближенно постоянной внутри солитона. Ничего подобного не происходит в случае скирмиона модели (1), где при любом ω , лежащем внутри интервала $(-\nu, \nu)$, энергия и электрический заряд скирмиона остаются конечными и режим тонкой стенки отсутствует.

С другой стороны, при $|\omega| \rightarrow m$ энергия и нетеровский заряд двумерного нетопологического солитона модели [21] стремятся к некоторым конечным значениям. В то же время, согласно (36), (37), энергия и электрический заряд скирмиона модели (1) стремятся в аналогичном режиме $|\omega| \rightarrow \nu$ к бесконечности. Таким образом, ω -зависимости свойств этих двух солитонов являются в некотором смысле противоположными. Такое различие в поведении ω -зависимостей двух солитонных решений связано с тем, что сравнительно простое нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее нетопологический солитон, допускает механическую аналогию. Оно описывает одномерное движение частицы единичной массы в вязкой среде, в силовом поле некоторого потенциала. С помощью этой аналогии можно легко объяснить поведение двумерного нетопологического солитона как в режиме тонкой стенки, так и в режиме $|\omega| \rightarrow m$. В частности, при $|\omega| \rightarrow m$ в асимптотике скалярного поля модели [21] появляется дополнительный множитель $\Delta = \sqrt{m^2 - \omega^2}$ по сравнению с (24). Заметим, что появление этого множителя связано с тем, что потенциал модели [21] является аналитической функцией квадрата модуля комплексного скалярного поля. Наличие этого дополнительного множителя, стремящегося к нулю при $|\omega| \rightarrow m$, объясняет конечность энергии и нетеровского заряда двумерного нетопологического солитона в данном режиме. В то же время существенно более сложная система уравнений (14)–(16) не допускает интерпретации в терминах какой-либо механической аналогии.

Наконец, рассмотрим вопрос о возможности существования электрически заряженных вращающихся солитонов в $(2 + 1)$ -мерных калибровочных моделях. Как уже отмечалось, двумерные электрически заряженные солитоны возможны лишь в тех $(2 + 1)$ -мерных калибровочных моделях, лагранжиан которых содержит слагаемое Черна–Саймонса. Калибровочные поля таких моделей становятся массив-

ными, что улучшает их асимптотическое поведение на бесконечности и приводит к сходимости интеграла плотности энергии электрического поля.

Нас интересует возможность существования солитонов, электрически заряженные поля которых вращаются с постоянной фазовой частотой. Следует отметить, что временная зависимость электрически заряженных полей $\propto \exp(i\omega t)$ не является калибровочно инвариантной. Поэтому говорить о какой-либо определенной временной зависимости полей имеет смысл лишь при фиксированной калибровке. В нашем случае такая фиксация осуществляется выбором анзаца (13) и граничным условием $\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0$.

Калибровочные модели со слагаемым Черна–Саймонса можно разделить на два класса в зависимости от того, нарушает ли вакуум модели калибровочную симметрию или нет. Легко видеть, что двумерные калибровочные модели со спонтанно нарушенной симметрией вакуума не могут иметь вращающихся двумерных солитонов с конечной энергией и электрическим зарядом. Это связано с тем, что после фиксации калибровки условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0,$$

калибровочное поле $A_0(r)$ не может компенсировать кинетическую энергию и электрический заряд вращающихся полей на бесконечности. В результате энергия и электрический заряд такой полевой конфигурации будут бесконечными. Если же вакуум модели не нарушает калибровочную симметрию, то электрически заряженные поля обращаются в нуль на бесконечности. Их вклад в энергию и электрический заряд оказывается конечным даже при условии

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что необходимыми условиями существования электрически заряженных вращающихся солитонов в $(2 + 1)$ -мерной калибровочной модели являются наличие слагаемого Черна–Саймонса и отсутствие спонтанного нарушения симметрии вакуума. К таким $(2 + 1)$ -мерным моделям относятся, например, модель (1), калибровочная $O(3)$ σ -модель с $U(1)$ -инвариантным потенциалом и слагаемым Черна–Саймонса и калибровочная модель комплексного самодействующего скалярного поля со слагаемым Черна–Саймонса. Те же $(2 + 1)$ -мерные калибровочные модели, которые допускают наличие вихрей (т. е. решений с квантованным магнитным потоком), не могут иметь вращающихся солитонных решений, так как их вакуум нарушает калибровочную симметрию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00560-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. Н. В. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
3. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
4. G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
5. B. J. Schroers, Phys. Lett. B **356**, 291 (1995).
6. B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, and W. J. Zakrzewski, Z. Phys. C **65**, 165 (1995).
7. B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, and W. J. Zakrzewski, Nucl. Phys. B **439**, 205 (1995).
8. T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. A **260**, 127 (1961).
9. T. Weidig, Nonlinearity **12**, 1489 (1999).
10. J. Gladikowski, B. M. A. G. Piette, and B. J. Schroers, Phys. Rev. D **53**, 844 (1996).
11. R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. D **23**, 2291 (1981).
12. J. F. Schonfeld, Nucl. Phys. B **185**, 157 (1981).
13. S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).
14. S. K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B **174**, 420 (1986).
15. P. K. Ghosh and S. K. Ghosh, Phys. Lett. B **366**, 199 (1996).
16. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Phys. Rev. D **13**, 2739 (1976).
17. S. Coleman, Nucl. Phys. B **262**, 263 (1985).
18. K. Lee, J. A. Stein-Schabes, R. Watkins, and L. W. W. Draw, Phys. Rev. D **39**, 1665 (1989).
19. I. Hen and M. Karliner, Phys. Rev. D **77**, 116002 (2008).
20. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля. Бозонные теории*, URSS, Москва (1999).
21. T. D. Lee and Y. Pang, Phys. Rep. **221**, 251 (1992).
22. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Nucl. Phys. B **115**, 1 (1976).
23. F. A. Shaposnik, arXiv:hep-th/0611028v1.
24. A. Kudryavtsev, B. M. A. G. Piette, and W. J. Zakrzewski, Eur. Phys. J. C **1**, 333 (1998).