

СУБДИФфуЗИЯ СМЕШАННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ

*В. П. Шкилев**

*Институт химии поверхности Национальной академии наук Украины
03164, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 12 мая 2013 г.

Выведено уравнение субдиффузии–реакции, учитывающее наличие в реальных средах двух микроскопических механизмов, обуславливающих субдиффузию. Показано, что при одной и той же химической кинетике концентрационные профили в средах с одинаковыми показателями субдиффузии, но разной микроскопической структурой могут различаться существенным образом.

DOI: 10.7868/S0044451013120092

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения субдиффузии–реакции используются при решении разнообразных задач, представляющих как теоретический, так и практический интерес. В качестве примеров можно назвать вычисление скорости субдиффузионно–реакционного фронта [1–4], нахождение условий возникновения субдиффузионной неустойчивости [5–10], расчет концентрационных профилей [11, 12], определение скорости субдиффузионно–контролируемой реакции [13].

До настоящего времени уравнения субдиффузии–реакции были выведены в рамках модели случайных блужданий с непрерывным временем (СБНВ) [14–21] и эквивалентной ей модели случайных ловушек [4, 22, 23]. Эти модели описывают субдиффузию, обусловленную «старением» частиц, т. е. снижением со временем их подвижности. Однако существует и другая причина, обуславливающая появление субдиффузии — это корреляции между направлениями диффузионных скачков. К моделям, в которых субдиффузия обуславливается этой причиной, относятся модель случайных блужданий на фракталах [24], модель фрактального броуновского движения [25], модель Лоренца [26] и модель случайных барьеров [27]. В рамках этих моделей макроскопические уравнения, описывающие субдиффузию с реакцией, получены не были.

В реальных средах субдиффузия, как правило,

имеет смешанное происхождение, т. е. обуславливается одновременно и корреляциями между направлениями скачков, и «старением» частиц [28–30].

В данной работе уравнение субдиффузии–реакции выводится в рамках ранее предложенной в работах Ширмахера с соавторами модели, представляющей собой комбинацию модели случайных барьеров с моделью многократного захвата [31–33]. Благодаря наличию ловушек эта модель учитывает «старение» частиц, а благодаря наличию барьеров разной высоты — корреляции между направлениями скачков. Сравнение концентрационных профилей, найденных с помощью уравнений, соответствующих моделям СБНВ и случайных барьеров, показывает, что в некоторых случаях они могут различаться существенным образом. В частности, высказанное авторами работы [12] предположение, что найденное ими в рамках модели СБНВ явление, заключающееся в немонотонности концентрационных профилей, должно быть общим для всех моделей, оказывается несправедливым. Это означает, что для успешного моделирования процессов в неупорядоченных средах уравнений субдиффузии–реакции, выведенных в рамках моделей СБНВ и случайных ловушек, недостаточно.

Следует подчеркнуть, что исследования в рассматриваемой области находятся на начальной стадии. По существу, в настоящее время идет апробация различных подходов к проблеме. В этом русле находится и данная работа. Ее новизна состоит в том, что при выводе макроскопического уравнения учтены два микроскопических механизма, обуслов-

*E-mail: shkilev@ukr.net

ливающих субдиффузию, и показано, что разные механизмы приводят к разным уравнениям, поведение решений которых качественно различается. Отсюда, в частности, следует, что получить реалистичное уравнение субдиффузии–реакции в рамках простых стохастических моделей без рассмотрения микроскопической структуры среды нельзя.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

В рассматриваемой модели субдиффузионный процесс на микроскопическом уровне описывается уравнениями [31–33]

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = - \sum_m W_{nm} P_n(t) + \sum_m W_{mn} P_m(t) - \kappa_n P_n(t) + \nu_n Q_n(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q_n(t)}{\partial t} = \kappa_n P_n(t) - \nu_n Q_n(t), \quad (2)$$

где P_n — вероятность того, что частица находится в транспортном состоянии n ; Q_n — вероятность того, что частица находится в ловушке n ; W_{nm} — скорость перехода частицы из транспортного состояния n в транспортное состояние m ; κ_n и ν_n — скорости перехода частицы из n -го транспортного состояния в n -ю ловушку и обратно. В результате усреднения и перехода к континуальному пределу авторы работ [31–33] получили следующее уравнение:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{h^2}{2} \int_0^t \Theta(t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Функция $\Theta(t)$ в пространстве изображений Лапласа представляется в виде $\Theta(s) = \Psi(s)\Phi(s)$, где

$$\Psi(s) = \Lambda \left(s + \sum_{i=1}^N \frac{s\omega_i}{s + \nu_i} \right), \quad (4)$$

$$\Phi(s) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{s + \nu_i} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $\omega_i = \alpha_i \kappa_i$, α_i — доля ловушек i -го типа (для которых скорости переходов равны κ_i и ν_i), N — число типов ловушек, $\Lambda(s)$ — функция памяти, которая получается в результате усреднения уравнения (1) при равных нулю параметрах κ_n и ν_n , т. е. в отсутствие ловушек.

Вначале обобщим эту модель на тот случай, когда субдиффузия сопровождается мономолекулярной реакцией с постоянной константой скорости. Добавляя в правую часть уравнения (1) член $-kP_n(t)$,

в правую часть уравнения (2) — член $-kQ_n(t)$ и проводя усреднение, получаем уравнение, которое ранее неоднократно выводилось различными способами [14, 21, 22]:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -k\rho(x, t) + \frac{h^2}{2} \int_0^t \Theta(t - \tau) \times \exp(-k(t - \tau)) \frac{\partial^2 \rho(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим случай, когда скорость реакции зависит от пространственной переменной: $k = k(x)$. Введем на оси x решетку узлов $x_i = il$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и аппроксимируем скорость реакции $k(x)$ функцией, принимающей на интервале $x_i - 0.5l < x < x_i + 0.5l$ значение $k(x_i)$. При такой кусочно-постоянной функции $k(x)$ внутри каждого интервала уравнение (6) будет справедливо. Переходя от времени к переменной Лапласа, запишем это уравнение для i -го интервала в виде

$$s\rho(x, s) - \rho^0(x) = -k_i \rho(x, s) + \frac{h^2}{2} \Theta_i \frac{\partial^2 \rho(x, s)}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где $k_i = k(x_i)$, $\Theta_i = \Theta(s + k_i)$. Проинтегрируем уравнение (7) по длине интервала:

$$\int_{x_i - 0.5l}^{x_i + 0.5l} [s\rho(x, s) - \rho^0(x) + k_i \rho(x, s)] dx = J_{i-0.5} - J_{i+0.5}. \quad (8)$$

Здесь $J_{i-0.5}$ и $J_{i+0.5}$ — потоки частиц на границах интервала:

$$J_{i-0.5} = -\frac{h^2}{2} \Theta_i \frac{\partial \rho(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=x_i-0.5l}, \quad (9)$$

$$J_{i+0.5} = -\frac{h^2}{2} \Theta_i \frac{\partial \rho(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=x_i+0.5l}, \quad (10)$$

Предполагая, что длина интервала мала, аппроксимируем интеграл в (8) квадратурной формулой, а производные в (9) и (10) — разностными отношениями:

$$\int_{x_i - 0.5l}^{x_i + 0.5l} [s\rho(x, s) - \rho^0(x) + k_i \rho(x, s)] dx = l [s\rho_i - \rho_i^0 + k_i \rho_i], \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=x_i-0.5l} = \frac{2(\rho_i - \rho_{i-0.5})}{l}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial \rho(x, s)}{\partial x} \right|_{x=x_i+0.5l} = \frac{2(\rho_{i+0.5} - \rho_i)}{l}, \quad (13)$$

где

$$\rho_i = \rho(x_i, s), \quad \rho_i^0 = \rho^0(x_i),$$

$$\rho_{i-0.5} = \rho(x_i - 0.5l, s), \quad \rho_{i+0.5} = \rho(x_i + 0.5l, s).$$

Чтобы получить уравнение субдиффузии–реакции, поступим следующим образом. Исключим из выражений (12) и (13) значения концентраций на границах интервалов при помощи граничных условий. Подставляя выражение (11) и дискретизированные выражения для потоков в уравнение (8), получим разностную схему для искомого уравнения. Устремляя затем длину интервала l к нулю, в пределе получим и само уравнение.

В рассматриваемом случае на границах интервалов должны ставиться условия непрерывности потока частиц и произведения $\Phi(s+k)\rho(s)$ (см. Приложение). Дискретизированные выражения потока $J_{i-0.5}$ через величины, относящиеся к i -му и $(i-1)$ -му интервалам, имеют следующий вид:

$$J_{i-0.5} = -h^2 \Psi_i \Phi_i \frac{\rho_i - \rho_{i-0.5}^+}{l}, \quad (14)$$

$$J_{i-0.5} = -h^2 \Psi_{i-1} \Phi_{i-1} \frac{\rho_{i-0.5}^- - \rho_{i-1}}{l}. \quad (15)$$

Здесь $\rho_{i-0.5}^+$ и $\rho_{i-0.5}^-$ — предельные значения концентрации с правой и левой сторон границы. Второе граничное условие записывается в виде

$$\Phi_i \rho_{i-0.5}^+ = \Phi_{i-1} \rho_{i-0.5}^-. \quad (16)$$

Исключая из уравнений (14)–(16) величины $\rho_{i-0.5}^+$ и $\rho_{i-0.5}^-$, получаем следующее выражение для потока $J_{i-0.5}$:

$$J_{i-0.5} = -h^2 \frac{\Psi_i \Psi_{i-1}}{\Psi_i + \Psi_{i-1}} \frac{\Phi_i \rho_i - \Phi_{i-1} \rho_{i-1}}{l}. \quad (17)$$

Аналогично находим поток $J_{i+0.5}$:

$$J_{i+0.5} = h^2 \frac{\Psi_i \Psi_{i+1}}{\Psi_i + \Psi_{i+1}} \frac{\Phi_i \rho_i - \Phi_{i+1} \rho_{i+1}}{l}. \quad (18)$$

Подстановка этих выражений и соотношения (11) в (8) и переход к пределу $l \rightarrow 0$ дают

$$s\rho(x, s) - \rho^0(x) = -k(x)\rho(x, s) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \times \left\{ \Psi(s+k(x)) \frac{\partial (\Phi(s+k(x))\rho(x, s))}{\partial x} \right\}. \quad (19)$$

Возвращаясь от переменной Лапласа к переменной t , находим искомое уравнение:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -k(x)\rho(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \times \left[\int_0^t \Psi^*(x, t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} \times \left[\int_0^\tau \Phi^*(x, \tau-\zeta) \rho(x, \zeta) d\zeta \right] d\tau \right], \quad (20)$$

где

$$\Psi^*(x, t) = \Psi(t) \exp(-tk(x)), \\ \Phi^*(x, t) = \Phi(t) \exp(-tk(x)).$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Из выражений (4) и (5) следует, что функцию памяти $\Theta(s)$ можно записать в виде

$$\Theta(s) = \Lambda \left(\frac{s}{\Phi(s)} \right) \Phi(s), \quad (21)$$

где $\Lambda(s)$ — функция памяти, соответствующая чистой модели случайных барьеров, а $\Phi(s)$ — функция памяти, соответствующая чистой модели многократного захвата. Отсюда видно, что если обе эти функции соответствуют асимптотической субдиффузии с некоторыми показателями α и β :

$$\Lambda(s) = C_1 s^{1-\alpha}, \quad \Phi(s) = C_2 s^{1-\beta}, \quad (22)$$

то эффективная функция памяти также будет соответствовать асимптотической субдиффузии с показателем, равным произведению α на β :

$$\Theta(s) = C_3 s^{1-\alpha\beta}. \quad (23)$$

Это свойство наблюдается также в некоторых экспериментах [28], что может служить подтверждением реалистичности рассматриваемой модели. Следует отметить, что, хотя степенные функции (22) играют важную роль в теоретических исследованиях, с практической точки зрения — это аппроксимации, справедливые в ограниченном диапазоне изменения переменной. Более точные выражения для функций памяти должны определяться в каждом конкретном случае на основании экспериментальной информации.

В уравнение (20) функции Ψ и Φ входят по отдельности, а не в виде комбинации

$$\Theta(t) = \int_0^t \Psi(t-\tau)\Phi(\tau) d\tau,$$

как в уравнения (3) и (6). Следовательно, при одной и той же функции Θ решения этого уравнения могут быть разными, в зависимости от того, какой вклад в субдиффузию дает «старение» частиц, характеризуемое функцией Φ , а какой — корреляции, характеризуемые функцией Ψ . Данный факт позволяет, в принципе, использовать это уравнение для извлечения информации о микроскопической структуре среды из экспериментальных профилей концентрации.

В стационарном состоянии уравнение (20) приобретает вид

$$\frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A(x) \frac{\partial}{\partial x} [B(x)\rho(x)] \right\} = k(x)\rho(x), \quad (24)$$

где

$$A(x) = \Psi(s)|_{s=k(x)}, \quad B(x) = \Phi(s)|_{s=k(x)}.$$

Если ловушки отсутствуют (т. е. если $\Phi(s) = 1$), то это уравнение записывается как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right] = k(x)\rho(x), \quad (25)$$

а если отсутствуют барьеры (если $\Psi(s) = \text{const}$), то принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)\rho(x)] = k(x)\rho(x), \quad (26)$$

где

$$D(x) = \frac{h^2}{2} \Theta(s)|_{s=k(x)}.$$

Чтобы на качественном уровне пояснить, почему в моделях случайных барьеров и случайных ловушек должны получаться уравнения (25) и (26), напомним, что эти уравнения описывают процессы диффузии–реакции в макроскопически неоднородных средах [34]. Уравнение (25) описывает процессы в среде, у которой все минимумы потенциальной энергии находятся на одном уровне, а ее макроскопическая неоднородность состоит в систематической зависимости от x высоты потенциальных барьеров (значений потенциальной энергии в седловых точках). Уравнение (26) описывает процессы в неоднородной среде другого вида, у которой все потенциальные барьеры находятся на одном уровне, а ее неоднородность состоит в зависимости от x глубины потенциальных минимумов. Различие между этими двумя видами макроскопически неоднородных сред проявляется, в частности, в том, что в первой равновесная концентрация (при $k(x) = 0$) не зависит от x , а в другой — зависит.

В данной работе рассматриваются микроскопически неоднородные, но макроскопически однородные среды. Зависимость коэффициента диффузии $D(x)$ от пространственной переменной в этом случае обуславливается не макроскопической неоднородностью среды, а зависимостью от пространственной переменной константы скорости химической реакции. Объясняется это явление тем, что химическая реакция изменяет соотношение между количествами частиц, находящихся на участках неоднородности разного типа, вследствие чего изменяется средняя подвижность частиц. В местах с разными скоростями химической реакции средняя подвижность частиц, а также и коэффициент диффузии, оказываются разными. В модели случайных барьеров все минимумы потенциальной энергии находятся на одном уровне. Изменение средней подвижности частиц происходит за счет изменения эффективной (отвечающей средней подвижности) высоты преодолеваемых ими потенциальных барьеров. Поэтому в этой модели получается уравнение (25), дающее независимую от x равновесную концентрацию. В модели случайных ловушек все потенциальные барьеры находятся на одном уровне. Изменение средней подвижности частиц происходит за счет изменения эффективной глубины потенциальных ям, в которые они захватываются. Как следствие, в этой модели получается уравнение (26), дающее зависящую от x равновесную концентрацию.

Используем уравнения (25) и (26) при решении конкретной задачи. Пусть требуется найти стационарный профиль концентрации в области $x \in (0, \infty)$ при условиях заданной концентрации в нуле и исчезающего потока на бесконечности. В модели случайных барьеров искомая концентрация должна удовлетворять уравнению (25), которое является обычным уравнением диффузии–реакции с переменными коэффициентом диффузии и скоростью реакции. Не прибегая к его решению, можно сказать, что в рассматриваемом случае концентрация будет монотонно убывающей функцией x . Это следует из того, что в любой точке поток частиц будет направлен слева направо и, следовательно, первая производная концентрации должна быть отрицательной. В моделях СБНВ и случайных ловушек соответствующее уравнение совпадает с уравнением (26). Решение этого уравнения при указанных граничных условиях не обязательно будет монотонным. В работе [12] показано, что при $k(x) = A \exp(-\lambda x)$ и $\Theta(s) = B s^{1-\alpha}$ концентрация вначале убывает, достигает минимума, а затем неограниченно растет по экспоненциальному закону. Как видим, в этой задаче профили кон-

центрации, полученные в рамках модели случайных барьеров и в рамках моделей СБНВ и случайных ловушек, различаются кардинальным образом. Отсюда следует, что структура неупорядоченной среды оказывает существенное влияние на ход процессов субдиффузии–реакции и что для адекватного моделирования этих процессов недостаточно уравнений, полученных в рамках моделей СБНВ и случайных ловушек.

Использованный в данной работе подход можно применить и к более общим случаям: 1) когда константа скорости реакции зависит не только от пространственной переменной, но и от времени, $k = k(x, t)$, 2) когда частицы не только поглощаются, но и выделяются со скоростью $g(x, t)$, 3) когда имеется изменяющееся в пространстве и времени силовое поле $F(x, t)$. При наличии всех этих факторов уравнение субдиффузии–реакции имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = & -k(x, t)\rho(x, t) + g(x, t) + \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \times \\ & \times \int_0^t \left[\Psi^*(x, t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau \Phi^*(x, \tau, \zeta) \rho(x, \zeta) d\zeta \right] d\tau - \\ & - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left[\Psi^*(x, t, \tau) \frac{F(x, \tau)}{kT} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^\tau \Phi^*(x, \tau, \zeta) \rho(x, \zeta) d\zeta \right] d\tau, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\Psi^*(x, t, \tau) = \Psi(t - \tau) \exp \left(- \int_\tau^t k(x, y) dy \right), \quad (28)$$

$$\Phi^*(x, t, \tau) = \Phi(t - \tau) \exp \left(- \int_\tau^t k(x, y) dy \right). \quad (29)$$

Если случайные барьеры отсутствуют, т. е. если $\Psi(t)$ равна дельта-функции, то это уравнение сводится к уравнению, недавно выведенному в работе [35] в рамках модели СБНВ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

На границах между интервалами отсутствуют поверхностные состояния и межфазные барьеры, поэтому первое граничное условие будет состоять в непрерывности результирующего потока, а второе — в непрерывности однонаправленного потока [36]. Однонаправленный поток с точностью до постоянного

множителя равен числу скачков, совершаемых частицами в единицу времени в единице объема. Поскольку среда по обе стороны границы одна и та же, упомянутые множители по обе стороны будут одинаковы. Следовательно, второе граничное условие сводится к непрерывности числа скачков, совершаемых частицами в единицу времени в единице объема, как функции x . Число скачков в рассматриваемой модели можно найти с использованием приближения среднего поля аналогично тому, как это сделано в работе [36]. В результате получается следующее выражение:

$$\int_0^t \Phi(t - \tau) \exp(-(t - \tau)k) \rho(x, \tau) d\tau. \quad (A.1)$$

Отсюда находим граничное условие в пространстве изображений Лапласа:

$$\Phi(s + k^+) \rho^+ = \Phi(s + k^-) \rho^-, \quad (A.2)$$

где k^+ , ρ^+ — значения с одной стороны границы, а k^- , ρ^- — с другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Yadav, S. Fedotov, V. Mendez, and W. Horsthemke, Phys. Lett. A **371**, 374 (2007).
2. D. Froemberg, H. Schmidt-Martens, I. M. Sokolov, and F. Sagues, Phys. Rev. E **78**, 011128 (2008).
3. Y. Nec, V. A. Volpert, and A. A. Nepomnyashchy, Discrete and Continuous Dynamical Systems **27**, 827 (2010).
4. В. П. Шкилев, ЖЭТФ **135**, 403 (2009).
5. T. A. M. Langlands, B. I. Henry, and S. I. Wearne, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 065115 (2007).
6. V. V. Gafiychuk and B. Y. Datsko, Phys. Rev. E **77**, 066210 (2008).
7. Y. Nec and A. A. Nepomnyashchy, Europ. J. Appl. Math. **19**, 329 (2008).
8. A. Yadav and W. Horsthemke, Phys. Rev. E **74**, 066118 (2006).
9. D. Hernandez, C. Varea, and R. A. Barrio, Phys. Rev. E **79**, 026109 (2009).
10. В. П. Шкилев, ЖЭТФ **137**, 183 (2010).
11. D. Froemberg and I. M. Sokolov, Acta Phys. Polon. B **12**, 1199 (2008).

12. S. B. Yuste, E. Abad, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **82**, 061123 (2010).
13. E. Abad, S. B. Yuste, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **86**, 061120 (2012).
14. I. M. Sokolov, M. G. W. Schmidt, and F. Sagues, *Phys. Rev. E* **73**, 031102 (2006).
15. M. G. W. Schmidt, F. Sagues, and I. M. Sokolov, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 06511 (2007).
16. F. Sagues, V. P. Shkilev, and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. E* **77**, 032102 (2008).
17. B. I. Henry, T. A. M. Langlands, and S. I. Wearne, *Phys. Rev. E* **74**, 031116 (2006).
18. T. A. M. Langlands, B. I. Henry, and S. I. Wearne, *Phys. Rev. E* **77**, 021111 (2008).
19. M. O. Vlad and J. Ross, *Phys. Rev. E* **66**, 061908 (2002).
20. S. Fedotov, *Phys. Rev. E* **81**, 011117 (2010).
21. A. Yadav and W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **74**, 066118 (2006).
22. В. П. Шкилев, *ЖЭТФ* **136**, 984 (2009).
23. В. П. Шкилев, *ЖЭТФ* **139**, 1221 (2011).
24. A. Blumen, J. Klafter, B. S. White, and G. Zumofen, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1301 (1984).
25. B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968).
26. M. Spanner, F. Hoffling, G. Schroder-Turk et al., *J. Phys.: Condens. Matter* **23**, 234120 (2011).
27. J. W. Haus and K. W. Kehr, *Phys. Rep.* **150**, 264 (1987).
28. A. V. Weigel, B. Simon, M. M. Tamkun, and D. Krapf, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **108**, 6438 (2011).
29. S. D. Baranovskii and H. Cordes, *J. Chem. Phys.* **111**, 7546 (1999).
30. N. Kopidakis, K. D. Bengsten, J. van de Lagemaat et al., *Phys. Rev. B* **73**, 045326 (2006).
31. W. Schirmacher, *Sol. St. Comm.* **39**, 893 (1981).
32. B. Movaghar, M. Grunewald, B. Pohlmann et al., *J. Stat. Phys.* **30**, 315 (1983).
33. K. Godzik and W. Schirmacher, *J. de Phys. (Paris)* **42**, 127 (1981).
34. H. G. Othmer and A. Stevens, *SIAM J. Appl. Math.* **57**, 1044 (1997).
35. C. N. Angstmann, I. C. Donnelly, and B. I. Henry, *Math. Model. Nat. Phenom.* **8**, 32 (2013).
36. В. П. Шкилев, *ЖЭТФ* **143**, 804 (2013).