ЖЭТФ, 2013, том 144, вып. 5 (11), стр. 1107–1111

ОБТЕКАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ТЕЛ РАСТВОРОМ КОЛЛОИДНЫХ ЧАСТИЦ И «КРИЗИС» СОПРОТИВЛЕНИЯ

С. В. Иорданский *

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 21 мая 2013 г.

Рассмотрено движение коллоидных частиц в поле течения вязкой жидкости. Малые размеры коллоидных частиц по сравнению с характерным масштабом течения позволяют вычислить их скорость относительно жидкости. Если плотность коллоидной частицы больше плотности жидкости, то течение разбивается на области, где скорость коллоида совпадает со скоростью жидкости, и области торможения течения, где скорость коллоида больше скорости жидкости. Этот эффект используется для качественного объяснения снижения сопротивления при обтекании макроскопических тел и течений в трубах.

DOI: 10.7868/S0044451013110217

1. ВВЕДЕНИЕ

Более 60 лет тому назад [1] было обнаружено, что небольшая концентрация полимеров может существенно снизить сопротивление при протекании жидкостей в трубах. Это обстоятельство реально используется при прокачке нефти. Имеется большое количество публикаций, теоретических и экспериментальных, посвященных этому явлению. Однако в настоящее время нет единой точки зрения, объясняющей на качественном уровне физическую причину этого эффекта. Довольно подробная работа [2] оставляет в стороне происхождение движения полимеров относительно жидкости и в то же время использует весьма сложное описание связи деформаций полимера с напряжениями. Недавняя работа [3] показывает плохое согласие теоретических работ с экспериментом. Большое количество теоретических работ посвящено вязко-упругим свойствам концентрированных растворов полимеров (см., например, обзор [4] или книгу [5]). Мы не будем касаться этого вопроса, так как по нашему мнению основная проблема связана с взаимодействием отдельного полимера с полем течения, и рассмотрим более простую задачу о влиянии слабого раствора коллоидных частиц на сопротивление тел, движущихся в таком растворе. Более тонкие эффекты, связанные с деформациями полимеров, могут существенно влиять на величину эффекта.

В настоящей работе мы сначала рассмотрим более изученную задачу о течениях вязкой ньютоновской жидкости и ее модификацию, связанную со слабыми растворами сравнительно больших слабодеформируемых сферических коллоидных молекул. Описание больших полимерных молекул, состоящих из нескольких тысяч сочлененных звеньев, хорошо разработано (изложение можно найти в книгах [6, 7]). Равновесное состояние представляет собой клубок из полимерной нити, имеющий в среднем сферическую форму радиуса $l = \sqrt{(1/6)Na^2}$, где N — число звеньев длины a. Молекулярный вес такого клубка много больше молекулярного веса растворителя. Поэтому эффектами броуновского движения для коллоидных молекул можно пренебречь если их молекулярный вес совпадает с весом полимера, поскольку тепловые скорости будут много меньше интересующих нас скоростей течения.

Наибольший масштаб движения задается размером L обтекаемого макроскопического тела, который много больше среднего расстояния $c^{-1/3}$ между коллоидами, где c — малая объемная концентрация коллоидов. Это расстояние, в свою очередь, много больше радиуса коллоида,

$$L \gg c^{-1/3} \gg l. \tag{1}$$

*E-mail: iordansk@itp.ac.ru

2. ДВИЖЕНИЕ КОЛЛОИДОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЖИДКОСТИ

При малой концентрации коллоидов можно использовать линейное по концентрации приближение (см., например, [8]). Рассмотрим один коллоид в поле течения. На больших (по сравнению с размерами l коллоида) расстояниях течение можно считать однородным. Уравнения движения имеют вид обычных уравнений для вязкой несжимаемой жидкости. Будем считать несжимаемым и коллоид. На его сферической границе задано равенство скорости жидкости v_i^l и скорости коллоида w_i^p, а также непрерывность потока импульса. Макроскопическое движение жидкости, задаваемое масштабом L, для коллоида выглядит как некоторая внешняя сила, и мы можем воспользоваться известным результатом [9] для вычисления силы, действующей на погруженное в жидкость тело (коллоид). Если бы тело полностью увлекалось жидкостью, то эта сила была бы равна $\rho^l V_0 dv_i^l/dt$, где ρ^l — плотность жидкости, $V_0 = (4\pi/3)l^3$ — объем полимера. Однако оно не увлекается полностью, и необходимо учесть относительное движение $-m_{ik}d(w_i^p - v_i^l)/dt$, где m_{ik} — тензор присоединенных масс. Кроме того, движение коллоида относительно жидкости приводит к стоксовой силе трения $-6\pi\eta l(w_i^p - v_i^l)$, где η — коэффициент динамической вязкости. Суммируя, получим силу, действующую на коллоид:

$$\rho^p V_0 \frac{dw_i^p}{dt} = \rho^l V_0 \frac{dv_i^l}{dt} - m_{ik}\frac{d(w_k^p - v_k^l)}{dt} - 6\pi\eta l(w_i^p - v_k^l). \quad (2)$$

Стоксова сила пропорциональна первой степени l, поэтому при малых размерах коллоида члены, содержащие ускорения, малы и нулевое приближение для скорости полимера имеет вид $w_i^p = v_i^l$, где v_i^l — локальная скорость жидкости на расстоянии порядка l от коллоида. Следующее приближение получается подстановкой нулевого приближения в уравнение (2):

$$w_{i1} = -(\rho^p - \rho^l)\frac{2l^2}{9\eta}\frac{dv_i^l}{dt} \approx w_i^p - v_i^l. \quad (3)$$

Мы ограничимся этим приближением для относительной скорости коллоида. Это локальное «микроскопическое» движение коллоида относительно жидкости будет давать вклад в усредненные величины на расстояниях порядка $c^{-1/3}$. Наоборот, если им пренебречь, то коллоиды не могут дать никакого вклада в усредненные уравнения движения. Использование формулы Стокса предполагает, что время $l^2\rho^l/\eta$ «вязкой» релаксации много меньше «гидродинамического» времени L/U (где U — скорость обтекаемого тела относительно жидкости), так что коллоид успевает подстроиться под течение жидкости.

В стоксовом приближении на единицу площади сферического полимера действует одна и та же сила [9] $F_i = -3\eta/l(w_i^p - v_i^l)$, поэтому в этом приближении деформации отсутствуют. Для определения сил, вызывающих деформации, необходимо рассматривать озееновские поправки, связанные с инерционными членами.

Процедура учета поправок по числу Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{|\mathbf{w}^p - \mathbf{v}^l| l\rho^l}{\eta}$$

при обтекании сферы, впервые проведенная в работах [10, 11], изложена в [9]. Необходимо исследовать полное уравнение движения жидкости

$$\rho^l(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}^l = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v}^l, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}$ — относительная скорость, которую можно взять равной постоянному значению вдали от коллоида. Во внешнем течении вокруг шара имеются две зоны: ближняя ($r \ll l/\mathrm{Re}$) и дальняя ($r \gg l$), которые перекрываются при $l/\mathrm{Re} \gg r \gg l$. В ближней зоне исходным является стоксово приближение, а в дальней зоне — приближение Озеена — постоянная скорость u. Сшивка соответствующих решений в области перекрытия дает поправки к стоксову решению, имеющие вид

$$v_r^{(2)} = \frac{3\,\mathrm{Re}}{8}v_r^{(1)} + \frac{3\,\mathrm{Re}}{32}\left(1 - \frac{1}{r'}\right)^2 \times \left(2 + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2}\right)\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right), \quad (5)$$

$$v_\vartheta^{(2)} = \frac{3\,\mathrm{Re}}{8} + \frac{3\,\mathrm{Re}}{32}\left(1 - \frac{1}{r'}\right)\left(4 + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2}{r'^2}\right) \times \sin\vartheta\cos\vartheta, \quad (6)$$

где используются сферические координаты с полярной осью вдоль направления относительной скорости и введены безразмерные величины r' в единицах радиуса l шара и скорости в единицах относительной скорости u. Через $v_i^{(1)}$ обозначено стоксово решение, не приводящее к деформации клубка.

Вычисления в ближней зоне сильно упрощаются и дают на поверхности шара давление

$$p^{(2)} = -\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right)\frac{3\eta\,\mathrm{Re}}{8l}|\mathbf{v}^l - \mathbf{w}^p| \quad (7)$$

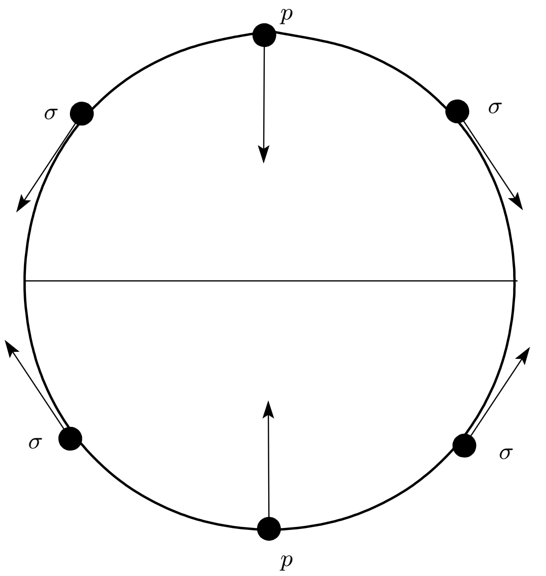

Рис. 1. Вертикальное направление по относительной скорости

и касательное напряжение

$$\sigma_{r\vartheta} = \eta \left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{3\eta \,\mathrm{Re}}{4l} |\mathbf{u}^l - \mathbf{w}^p| \sin\vartheta \cos\vartheta. \quad (8)$$

На рис. 1 изображено сечение коллоида и показаны точки на поверхности сферы, где имеются максимальные напряжения с указанием их направления. Мы видим, что имеется сжатие по направлению относительной скорости и растяжение вдоль меридианов, обращающееся в нуль на полюсах и экваторе. Эти напряжения вызывают деформацию коллоида. Для ее расчета необходимо знать связь деформаций с напряжениями внутри коллоида. Имеется общий принцип, впервые высказанный Максвеллом (см., например, работу [5]), что быстрые (кратковременные) напряжения соответствуют модели теории упругости, а медленные (длительные) напряжения — модели вязкой жидкости. В случае движения раствора при больших числах Рейнольдса коллоиды имеют скорость, близкую к скорости растворителя, что приводит к кратковременному воздействию течения на отдельный коллоид в области большого ускорения. Поэтому можно использовать модель теории упругости. В результате коллоид должен сплющиваться в направлении движения и растягиваться в перпендикулярном направлении. Таким образом, поперечное сечение коллоида возрастает, и он двигается в направлении с наибольшим сопротивлением, поэтому возможно возникновение неустойчивости движения типа кувыркания. Этот вопрос, однако, не имеет прямого отношения к падению сопротивления при обтекании макроскопического тела.

3. ОБТЕКАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ТЕЛА

Усредненные гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости и раствора слабодеформируемых коллоидов в линейном по их концентрации приближении имеют вид законов сохранения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^l = 0 \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} c\mathbf{w}^p = 0 \quad (10)$$

для числа коллоидов. Скорость коллоидов близка к скорости жидкости, $\mathbf{w}^p \approx \mathbf{v}^l$. В этом случае из двух последних уравнений следует, что $c = \mathrm{const}$ является решением. Остается закон сохранения полного импульса системы жидкости и коллоидов:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\langle\rho\rangle v_i^l + cm(w_i^p - v_i^l)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\Pi_{ik} - cm(w_i^p - v_i^l)v_k^l\right], \quad (11)$$

где

$$\langle\rho\rangle = \rho^l + cm, \quad m = \frac{4\pi}{3} l^3 \rho^p,$$

$$\Pi_{ik} = \langle\rho\rangle v_i^l v_k^l + p\delta_{ik} - \eta \frac{\partial v_i^l}{\partial x_k}.$$

Стоксово трение не входит в эти уравнения, так как полный импульс жидкости и коллоидов должен сохраняться.

Рассмотрим сначала случай отсутствия коллоидов. Общая картина течения вязкой жидкости вокруг неподвижного макроскопического тела хорошо изучена. При больших числах Рейнольдса UL/ν (где $\nu = \eta/\rho^l$ — кинематическая вязкость жидкости) имеется [9] дальняя зона на расстояниях, больших по сравнению с толщиной пограничного слоя от обтекаемого тела, где скорость жидкости можно считать безвихревой. На ее условной границе нормальная к поверхности тела скорость обращается в нуль. В ближней зоне порядка толщины пограничного слоя происходит обращение в нуль касательной к телу составляющей скорости. Пограничный слой начинается с передней критической точки, где скорость потенциального обтекания обращается в нуль, а толщина пограничного слоя имеет конечную величину. При движении в направлении течения касательная скорость и толщина пограничного

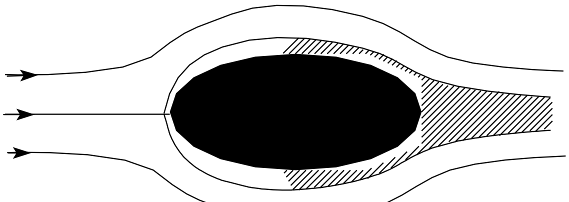

Рис. 2. Заштрихована область «застойной» зоны после «отрыва»

слоя медленно возрастают. Так происходит до тех пор, пока касательная скорость не достигнет максимума. Затем касательная скорость уменьшается, а ламинарный пограничный слой обязательно теряет устойчивость. Происходит резкое увеличение условной ширины пограничного слоя и одновременно резкое уменьшение касательной скорости, что интерпретируется как «отрыв» пограничного слоя от границы обтекаемого тела и образование турбулентной «застойной» зоны, примыкающей ко второй критической точке вниз по течению, как показано на рис. 2.

При наличии в обтекающей жидкости раствора коллоидов большая часть (ламинарная) пограничного слоя характеризуется небольшими ускорениями вдоль тела, что приводит к скорости коллоидов, близкой к скорости жидкости, и они фактически не влияют на среднее течение. Однако вблизи точки «отрыва» при больших числах Рейнольдса возникают большие ускорения (торможение), что приводит к потоку коллоидов вниз по течению, если плотность коллоидов больше плотности жидкости, согласно формуле (3).

Сила сопротивления при больших числах Рейнольдса в отсутствие коллоидов имеет вид [9]

$$F = C(\mathrm{Re})\frac{U^2\rho^l S}{2},$$

где S — поперечное сечение обтекаемого тела, C — постоянная, зависящая только от числа Рейнольдса. Экспериментально известно, что при больших числах Рейнольдса происходит существенное изменение функционального вида постоянной $C(\mathrm{Re})$, приводящее к резкому уменьшению силы сопротивления («кризис» сопротивления) при сравнительно малом увеличении числа Рейнольдса. Это обстоятельство интерпретируется как сдвиг точки «отрыва» вниз по течению и уменьшение эффективного поперечного сечения обтекаемого тела.

Согласно уравнению (11), влияние коллоидов вблизи точки «отрыва» аналогично увеличению числа Рейнольдса, так как эффективный поток импульса возрастает:

$$\Pi_{ik}^{(ef)} = \langle\rho\rangle v_i^l v_k^l + p\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial v_i^l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^l}{\partial x_i}\right) + \\ + cmv_k^l\frac{2l^2}{9\eta}\,\frac{dv_i^l}{dt}(\rho^p - \rho^l). \qquad (12)$$

Запишем дополнительный член в $\Pi_{ik}^{(ef)}$, связанный с коллоидами, в виде $\delta\Pi_{ik} = \rho^l v_k^l \delta v_i^l$, где

$$\delta v_i^l = cV_0\left(\frac{\rho^p}{\rho^l}\right)^2\left(1 - \frac{\rho^l}{\rho^p}\right)\frac{2l^2}{9\nu}v_n^l\frac{\partial v_i^l}{\partial x_n}. \qquad (13)$$

Оценим вклад в интеграл

$$\int\frac{\delta v_i^l}{\nu}dx \sim cV_0\left(\frac{\rho^p}{\rho^l}\right)^2\left(1 - \frac{\rho^l}{\rho^p}\right)\frac{2l^2U^2}{9\nu^2},$$

что дает оценку изменения числа Рейнольдса за счет вклада коллоидов. Если эта величина равняется экспериментальному значению $\delta\,\mathrm{Re}^* > 0$, то произойдет падение сопротивления такое же, как при кризисе сопротивления. Таким образом, условие падения сопротивления определяют концентрацию c коллоидов и знак разности $\rho^p - \rho^l > 0$. Это условие можно переписать в виде

$$\delta\,\mathrm{Re}^* = cV_0\left(\frac{\rho^p}{\rho^l}\right)^2\left(1 - \frac{\rho^l}{\rho^p}\right)\frac{2l^2}{9L^2}(\mathrm{Re}^*)^2.$$

По предположению $cV_0 \ll 1$, поэтому должно выполняться следующее требование к размеру коллоида:

$$\delta\,\mathrm{Re}^*\,\frac{L^2}{(\mathrm{Re}^*)^2} \ll l^2.$$

Эти соображения носят качественный характер, и дать реальную количественную оценку довольно трудно.

Можно провести аналогичную оценку для течений в протяженных трубах. Детали турбулентного течения в протяженных трубах при больших числах Рейнольдса менее изучены. Полуфеноменологическая теория Кармана – Прандтля, как показано в [9], состоит в использовании соображений размерности и результатов эксперимента для определения эмпирических констант. Основное утверждение (см. [9]) состоит в существовании в трубе центральной области (рис. 3) со слабой зависимостью средней скорости течения (вдоль трубы) от радиуса и примыкающего к стенкам вязкого подслоя с линейным уменьшением средней скорости по радиусу вплоть до нуля на стенках. Производная средней скорости

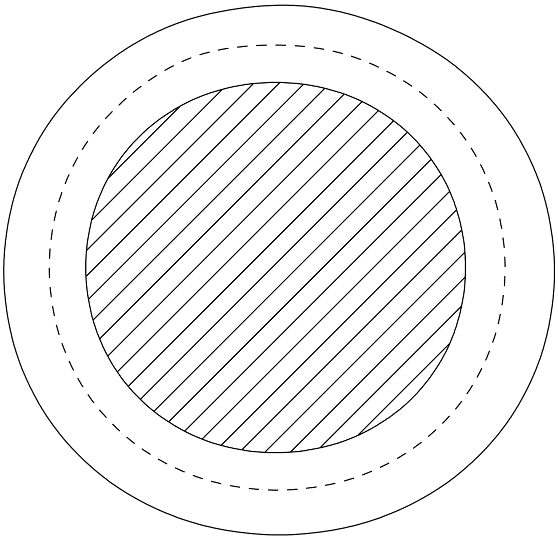

Рис. 3. Заштрихована центральная область с большой средней скоростью, слабо зависящей от радиуса. Штрихами показано ее уширение за счет движения коллоидов

по радиусу в вязком подслое велика по сравнению с производной в центральной области.

При наличии коллоидов течение в центральной турбулентной области мало меняется, поскольку средние скорости коллоидов относительно жидкости, согласно формуле (3), малы. Однако в вязком подслое с большой производной средней скорости, коллоиды могут иметь значительные скорости вдоль трубы в переходной области, согласно той же формуле (3), если $\rho^p > \rho^l$. Таким образом, центральная область за счет движения коллоидов должна расшириться, как показано на рис. 3, что соответствует падению полного сопротивления трубы. Количественные характеристики трудно получить, так как они связаны с эмпирическим характером констант, входящих в описание центральной области и вязкого подслоя.

Автор выражает благодарность Е. И. Кацу, И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за многочисленные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Федеральные целевые программы «Кадры» и «Исследования и разработка по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007–2013 гг.»).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. A. Toms, in Proc. of the Int. Rheological Congress, Holland (1948), p. 135.
2. I. Procaccia, V. Lvov, and R. Benzi, arXiv:nlin/ /0702034v1[nlin.CD].
3. Yu. Burnishev and V. Steinberg, Europhys. Lett. **100**, 24001 (2012); DOI:10.1209/0295-5075/100/ /24001.
4. S. M. Fielding, Softmatter **3**, 1262 (2007).
5. R. G. Larson, *Constitutive Equations for Polymer Melts*, Butterworth series in chemical engineering (1988).
6. М. Клеман, О. Д. Лаврентович, *Основы физики частично упорядоченных сред*, Физматлит Москва (2007).
7. М. Дой, С. Эдвардс, *Динамическая теория полимеров*, Мир, Москва (1988).
8. С. В. Иорданский, А. Г. Куликовский, Изв. АН СССР, МЖГ, вып. 4, 12 (1977).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2003).
10. S. Kaplun and P. A. Lagerstrom, J. Math. Phys. **6**, 585 (1957).
11. I. Proudman and J. R. A. Pearson, J. Fluid Mech. **2**, 237 (1957).