

РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*В. Ф. Елесин**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 2013 г.

В рамках когерентной модели туннелирования, включающей систему уравнений Шредингера и Пуассона с открытыми граничными условиями, решена задача о влиянии межэлектронного взаимодействия на статические и динамические свойства двухбарьерной наноструктуры (резонансно-туннельного диода — РТД). В квазиклассическом приближении получены явные аналитические выражения для постоянного и переменных потенциалов и приведенных токов (активных и реактивных) в широком интервале частот. Они позволяют провести анализ частотных характеристик РТД. Показано, что учет взаимодействия может радикально менять вид этих зависимостей, особенно при наличии гистерезиса ВАХ. В этом случае активный ток и переменные потенциалы могут резко увеличиваться как на низких, так и на высоких частотах. Для этого необходимо выполнение условий квантового режима и выбор соответствующей рабочей точки на ВАХ РТД. Предсказывается возможность возникновения специфических плазменных колебаний, улучшающих высокочастотные характеристики РТД. Показано, что активный ток может достигать величины, сравнимой со значением резонансного постоянного тока РТД.

DOI: 10.7868/S0044451013110199

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая пространственная интерференция электронов лежит в основе резонансного туннелирования, которое было обнаружено экспериментально в двухбарьерной наноструктуре (так называемый резонансно-туннельный диод — РТД) в работах [1, 2].

Резонансная зависимость коэффициента прохождения от энергии приводит к отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП) РТД, а следовательно, к возможности усиления и генерации электромагнитного поля.

В последующие годы было выполнено много экспериментальных работ (см., например, [3–8]), доказавших перспективность РТД вплоть до терагерцевого диапазона. К сожалению, достигнутые на высоких частотах мощности невелики. Поэтому остается острым вопрос о предельных параметрах и, в частности, о высокочастотных характеристиках РТД.

Хотя теоретическому исследованию статических свойств РТД посвящено множество работ, динамическому поведению — гораздо меньше. При этом боль-

шинство из них выполнены с применением приближенных феноменологических моделей (см., например, [9–14] и ссылки там).

Поскольку РТД является квантовым прибором, наиболее последовательной моделью является так называемая когерентная модель, основанная на уравнении Шредингера и открытых граничных условиях. Здесь следует отметить пионерские работы [15, 16], выполненные численными методами, а также аналитические работы [17–19]. В работах [18, 19] был развит эффективный квазиклассический метод для исследования РТД в сильных полях.

Новым результатом, полученным в рамках когерентной модели, был предсказанный так называемый квантовый режим [20], обусловленный резонансными переходами электронов с испусканием фотонов между квазиуровнями (уровни в переменном поле [21]) и резонансным уровнем с энергией ε_R . В этом режиме активный приведенный ток \bar{I}_c достигает максимума на конечной частоте ω при условии

$$\varepsilon - \varepsilon_R = \hbar\omega > \Gamma,$$

т. е. вне области максимальной ОДП. Здесь ε — энергия электронов эмиттера, ε_R и Γ — соответственно энергия и ширина резонансного уровня. В слу-

*E-mail: VFElesin@mephi.ru

чае обычного классического режима (по терминологии [20]), в котором «рабочая точка» находится в области максимальной ОДП, ток \bar{I}_c стремится к нулю как $1/\omega^4$. Результаты, полученные в работе [20] для слабого поля, были обобщены в [22]. В этой работе, используя оригинальный метод теории возмущений, а также квазиклассическое приближение, удалось найти волновые функции и приведенные токи в широком интервале частот и амплитуд полей. Полученные выражения для тока учитывают переходы электронов с излучением и поглощением любого числа фотонов. Было показано, что в квантовом режиме активный ток может достигать очень большой величины, примерно равной постоянному резонансному току. Это происходит, когда импульс, набранный электроном в поле eE/ω (e — заряд, E — амплитуда поля), кратен импульсу пространственного квантования $\hbar\pi/a$ (a — размер ямы). При этом зависимость тока от амплитуды поля совпадает с распределением интенсивности при дифракции света Фраунгофера. Таким образом, имеет место эффект совместного частотного и пространственного квантования. Очевидно, что такой эффект характерен только для когерентной модели.

Важным аспектом теории РТД является корректный учет межэлектронного взаимодействия, ввиду высокой чувствительности к нему резонансного туннелирования. Действительно, сдвиг резонансного уровня на величину, малую по сравнению с ϵ_R , но сопоставимую с шириной резонансного уровня $\Gamma \ll \epsilon_R$, резко изменяет резонансный ток. Учет взаимодействия электронов приводит к гистерезисной вольт-амперной характеристике (ВАХ). Впервые теория гистерезиса РТД в рамках феноменологической модели была опубликована в работе [23]. Более строгая задача решалась в [24], где в рамках модели некогерентного туннелирования и приближения Хартри с локальным взаимодействием численно определены ток и концентрация электронов в квантовой яме. В работе [25] в модели когерентного туннелирования локально взаимодействующих электронов были найдены аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера с открытыми граничными условиями и проведен анализ ВАХ, условий появления гистерезиса и его особенностей в зависимости от параметров РТД. Было впервые показано, что гистерезис реализуется, если ток превышает некоторое критическое значение, пропорциональное квадрату ширины резонансного уровня Γ . В недавно опубликованной работе [26] с помощью компьютерного моделирования детально исследованы вклады квантового и классического режимов в активный

ток РТД для слабого поля и невзаимодействующих электронов.

Цель настоящей работы — найти волновые функции, потенциалы и токи взаимодействующих электронов в переменных полях, т.е. построить последовательную теорию РТД в когерентной модели с учетом важнейших факторов.

В работе в квазиклассическом приближении получены явные выражения для постоянного и переменных потенциалов, активный и реактивный ток для широкого интервала частот и амплитуд полей. Показано, что взаимодействие приводит к значительному увеличению активного тока (т.е. росту усиления РТД) в низкочастотном пределе и высокочастотной области квантового режима. Наиболее интересный результат состоит в предсказании возможности возникновения при определенных условиях специфических плазменных колебаний, улучшающих высокочастотные характеристики РТД.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 дана постановка задачи и приведены основные уравнения. В разд. 3 найдены волновые функции РТД в квазиклассическом приближении. Резонансное туннелирование и гистерезисная ВАХ в отсутствие переменного поля рассматриваются в разд. 4. Раздел 5 посвящен нахождению переменных потенциалов на основе уравнения Пуассона. Приведенные токи РТД в переменном поле с учетом взаимодействия вычислены в разд. 6. В разд. 7 анализируется влияние взаимодействия на активный ток в широком интервале частот. Учет нелинейных эффектов проведен в разд. 8.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель когерентного туннелирования, использованную нами ранее в работах [20, 22]. Для простоты ограничимся одномерной квантовой ямой с δ -функциональными барьерами в точках $x = 0$ и $x = a$ (см. рис. 1). Слева ($x = -\infty$) к квантовой яме подводится стационарный поток электронов, пропорциональный q^2 , с энергией ϵ , приблизительно равной энергии резонансного уровня ϵ_R . В области квантовой ямы действует переменное электрическое поле E с потенциалом $V(x, t)$ и частотой ω :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V(x) \cos(\omega t), \\ V(x) &= \begin{cases} 2xV, & 0 < x < a, \\ 2Va, & x > a, \end{cases} \\ V &= -eE/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Взаимодействие электронов в самосогласован-

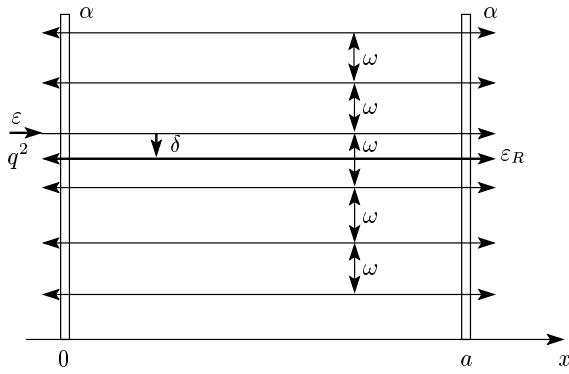


Рис. 1. Схема двухбарьерной структуры (РТД)

ном приближении учитывается с помощью потенциала $\varphi(x, t)$, удовлетворяющего уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{4\pi e^2}{\kappa} |\psi(x, t)|^2. \quad (2)$$

В свою очередь волновая функция электронов $\psi(x, t)$ находится из уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha [\delta(x) + \delta(x - a)] \psi + V(x, t) \psi + \varphi(x, t) \psi. \quad (3)$$

Здесь положено $\hbar = 2m = 1$ и введены обозначения: κ — диэлектрическая проницаемость, α — «мощность барьеров».

Граничные условия для волновых функций $\psi_1(x, t)$ (в области 1, $x \leq 0$), $\psi_2(x, t)$ (в области 2, $0 \leq x \leq a$) и $\psi_3(x, t)$ (в области 3, $x \geq a$) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1(0, t) &= \psi_2(0, t), \\ \frac{\partial \psi_2(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1(0, t)}{\partial x} &= \alpha \psi_1(0, t); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(a, t) &= \psi_2(a, t), \\ \frac{\partial \psi_3(a, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(a, t)}{\partial x} &= \alpha \psi_3(a, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Они учитывают непрерывность функций и скачок их производных при $x = 0, a$ (см. [22]).

Ток дается выражением

$$I(x, t) = -ie \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \text{c.c.} \right] \quad (6)$$

и может быть представлен в виде

$$I(x, t) = I_0(x) + I_c(x) \cos(\omega t) + I_s(x) \sin(\omega t). \quad (7)$$

Плотность электронов и потенциал также зависят от времени:

$$|\psi|^2 = |\psi_0(x)|^2 + n_c(x) \cos(\omega t) + n_s(x) \sin(\omega t), \quad (8)$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \varphi_c(x) \cos(\omega t) + \varphi_s(x) \sin(\omega t). \quad (9)$$

Индексами «с» и «s» обозначены соответственно синфазные с полем компоненты и сдвинутые по фазе.

В формулах (7)–(9) опущены высшие гармоники ($n\omega$, $n = 2, 3, \dots$). Причина состоит в следующем. Все приведенные далее в работе конкретные результаты (кроме (132)–(135)) получены для слабого поля $\bar{V}/\Gamma \ll 1$. Поэтому высшие гармоники малы по сравнению с первой, они имеют порядок $(\bar{V}/\Gamma)^n$, $n = 2, 3, \dots$ (так как вместо функций Бесселя $J_1(z)$ появляются $J_n(z)$). Случай сильного поля рассматривается только при оценке амплитуды плазменных колебаний (формулы (132)–(135)). Поскольку в квантовом режиме условие резонанса (107) выполняется только для основной частоты, уже вторая гармоника имеет малость $(\Gamma/\omega)^3$ (как в нерезонансном классическом режиме, см., например, [22]).

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для отыскания волновых функций воспользуемся квазиклассическим приближением, следуя подходу, развитому в работах [18, 19, 22]. Условия применимости даются неравенствами

$$\omega \ll \varepsilon_R, \quad Va \ll \varepsilon_R, \quad \varphi \ll \varepsilon_R, \quad (10)$$

которые заведомо могут быть выполнены в РТД. Полученные результаты применимы при достаточно больших полях $Va \gg \Gamma$, $Va \gg \omega$ и частотах $\omega \gg \Gamma$.

Установившееся решение (3) в области 2 ($0 \leq x \leq a$) представим в виде суммы:

$$\begin{aligned} \psi_2(x, t) &= \exp \{-i\varepsilon t + ipx + iS_p(x, t)\} + \\ &+ \exp \{-i\varepsilon t - ipx + iS_{-p}(x, t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое слагаемое описывает электроны в квантовой яме,двигающиеся в положительном направлении x , второе — в обратном. Пренебрегая в духе квазиклассического приближения вторыми производными от действия $S_{\pm p}(x, t)$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} -2p \frac{\partial S_p(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial S_p(x, t)}{\partial t} + \varphi_0(x) + \\ &+ W(x) \cos(\omega t) + \varphi_s(x) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$2p \frac{\partial S_{-p}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial S_{-p}(x, t)}{\partial t} + \varphi_0(x) + W(x) \cos(\omega t) + \varphi_s(x) \sin(\omega t), \quad (13)$$

$$W(x) = V(x) + \varphi_c(x). \quad (14)$$

Решение уравнения (12) можно записать в форме (см. [19, 22])

$$S_p(x, t) = S_p^{(0)}(x) + S_p^U(x, t) + S_p \left(\frac{x}{2p} - t \right), \quad (15)$$

$$S_p^{(0)}(x) = -\frac{1}{2p} \int_x^x \varphi_0(x') dx', \quad (16)$$

$$S_p^U(x, t) = \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{2p} \right) \right] \times \left[-\int dx' \frac{U(x')}{4p} \exp \frac{i\omega x'}{2p} \right] + \text{c.c.} \right\}, \quad (17)$$

$$U(x) = W(x) + i\varphi_s(x), \quad (18)$$

где $S_p^{(0)}(x)$ и S_p^U — неоднородные решения, а $S_p(x/2p - t)$ — решение однородного уравнения (12). Последнее выбирается так, чтобы удовлетворить граничным условиям (4), (5). Для нахождения S_{-p} следует в формулах (16), (17) заменить p на $-p$.

Выбирая начало отсчета координат в точке $x = a$ и вводя функции туннелирования $f_p(z)$ и $f_{-p}(\tilde{z})$, запишем волновую функцию (11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_2(x, t) &= \\ &= \exp \left\{ -i\varepsilon t + ipx + iS_p^{(0)}(x) + iS_p^U(x, t) \right\} f_p(z) + \\ &+ \exp \left\{ -i\varepsilon t - ipx + iS_{-p}^{(0)}(x) + iS_{-p}^U(x, t) \right\} f_{-p}(\tilde{z}), \quad (19) \end{aligned}$$

$$S_p^U(x, t) = \frac{1}{4p} \left\{ \exp(i\omega z) \int_x^a dx' U(x') \times \exp \left[-\frac{i\omega(x' - a)}{2p} \right] + \text{c.c.} \right\}, \quad (20)$$

$$z = \frac{x - a}{2p} - t, \quad \tilde{z} = -\frac{x - a}{2p} - t. \quad (21)$$

Волновые функции в областях 1 и 3 будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= q \exp(-i\varepsilon t + ipx) + \\ &+ \exp(-i\varepsilon t - ipx) f_1(\tilde{z}), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\psi_3(x, t) = \exp(-i\varepsilon t + ipx) f(z). \quad (23)$$

Первое слагаемое в правой части (22) описывает поток электронов из $x = -\infty$, второе — отражение от квантовой ямы, характеризующееся функцией $f_1(\tilde{z})$. Функция $\psi_3(x, t)$ соответствует электронам, выходящим из ямы в направлении $x = +\infty$ с функцией туннелирования $f(z)$.

Из граничных условий (5) при $x = a$ находим, что

$$f_p(-t) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\alpha}{ip} \right) f(-t), \quad (24)$$

$$f_{-p}(-t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{ip} \exp(2ipa) f(-t). \quad (25)$$

Исключая функцию $f_1(\tilde{z})$ с помощью граничных условий при $x = 0$ (4) и воспользовавшись выражениями (24), (25), приходим к уравнению со сдвинутыми аргументами для функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{\alpha}{ip} \right)^2 \exp \left[iS_p^{(0)}(x) + iS_p^U \left(-\frac{a}{2p} - t \right) \right] \times \\ \times f \left(-\frac{a}{2p} - t \right) - \left(\frac{\alpha}{ip} \right)^2 \times \\ \times \exp \left[2ipa + iS_{-p}^{(0)}(x) + iS_{-p} \left(\frac{a}{2p} - t \right) \right] \times \\ \times f \left(\frac{a}{2p} - t \right) = 4q. \quad (26) \end{aligned}$$

Вводя новую функцию

$$F(z) = f(z - T), \quad T = \frac{a}{2p}, \quad (27)$$

получаем уравнение для $F(z)$:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{\alpha}{ip} \right)^2 F(z) - \left(\frac{\alpha}{ip} \right)^2 F(z + 2T) \times \\ \times \exp(2i\tilde{p}a) A(z) = Y(z). \quad (28) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{p} = p - \frac{\overline{\varphi}_0}{2p}, \quad \overline{\varphi}_0 = \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_0(x) dx, \quad (29)$$

$$A(z) = \exp \{ i [S_{-p}(z + T) - S_p(z - T)] \}, \quad (30)$$

$$Y(z) = 4q \exp \left\{ -i \left[\frac{a\overline{\varphi}_0}{p} + S_p(z - T) \right] \right\}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} S_p(z) &= \frac{1}{4p} \left\{ \exp(i\omega z) \int_0^a U(x') dx' \times \right. \\ &\left. \times \exp \left[-\frac{i\omega(x' - a)}{2p} \right] + \text{c.c.} \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

Уравнения (28)–(32) отличаются от соответствующих уравнений в [22] тем, что в них вместо функции $V(x)$ стоит комплексная функция $U(x) = W(x) + i\varphi_s(x)$ (18), а также присутствием постоянного потенциала $\bar{\varphi}_0$ в (28) и (31).

Уравнение (28) допускает точное решение. Следуя подходу, использованному в работах [19, 22], ищем решение (28) в виде

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(z), \quad (33)$$

$$\phi_k = \exp(-ikz\omega)\phi_0(z),$$

где $\phi_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi_0(z) = \phi_0(z + 2T)A(z). \quad (34)$$

Соответственно коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k = \frac{Y_k}{\Delta_k}, \quad Y_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{Y(z) \exp(ik\omega z) dz}{\phi_0(z)}, \quad (35)$$

$$\Delta_k = \left(2 - \frac{\alpha}{ip}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{ip}\right)^2 \exp(2ia\tilde{p} - 2ik\omega T). \quad (36)$$

Здесь Δ_k — резонансные определители, которые для сильных барьеров ($\alpha/p \gg 1$) можно записать в форме (см. [20])

$$\Delta_k = \frac{4}{\Gamma} [i(\delta + k\omega) - \Gamma], \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon_R - \bar{\varphi}_0, \quad (37)$$

$$\varepsilon_R = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{\alpha a} - \frac{12}{\alpha^2 a^2}\right), \quad \Gamma = \frac{4p^3}{\alpha^2 a}, \quad (38)$$

ε_R и Γ — энергия и ширина резонансного уровня.

Поступая аналогично [22], после громоздких вычислений с точностью до малых членов $(\omega a/2p)^2$ получим

$$\phi_0(z) \approx \exp\left\{\frac{i}{\omega} \sqrt{W^2 + \bar{\varphi}_s^2} \sin(\omega z + \chi)\right\}, \quad (39)$$

$$Y_k = 4q \exp(-ik\chi) J_k \left(\frac{\sqrt{W^2 + \bar{\varphi}_s^2}}{\omega}\right) \times \exp\left(-\frac{ia\bar{\varphi}_0}{p}\right), \quad (40)$$

$$\sin \chi = \frac{\bar{\varphi}_s}{\sqrt{W^2 + \bar{\varphi}_s^2}}, \quad \cos \chi = \frac{\bar{W}}{\sqrt{W^2 + \bar{\varphi}_s^2}}, \quad (41)$$

$$\bar{\varphi}_s = \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_s(x) dx, \quad (42)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{a} \int_0^a [V(x) + \varphi_c(x)] dx,$$

где J_k — функция Бесселя. Если положить $\bar{\varphi}_s = \bar{\varphi}_c = 0$, $\chi = 0$, то формулы (39) и (40) совпадают с соответствующими формулами [22].

Собирая результаты, записываем $F(z)$ в виде ряда:

$$F(z) = 4q\phi_0(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-ik(\omega z + \chi)] \times \frac{J_k\left(\sqrt{|\bar{U}|^2/\omega}\right)}{\Delta_k(\omega)}, \quad (43)$$

или в интегральном представлении:

$$F(z) = \Gamma q \phi_0(z) \exp[(\Gamma + i\delta)z] \times \int_{-\infty}^{-(z+\chi/\omega)} dz' \exp\left[(\Gamma + i\delta)z' + \frac{i|\bar{U}|}{\omega} \sin(\omega z')\right]. \quad (44)$$

Воспользовавшись формулами (19), (24), (25), (27), (44), квадрат модуля волновой функции в области 2 в рамках принятых приближений можно представить в виде

$$|\psi_2(x, t)|^2 \approx \frac{4q^2 \alpha^2}{p^2} \sin^2(px) \left|\tilde{f}(z)\right|^2. \quad (45)$$

Квадрат модуля функции туннелирования запишем в следующей форме (имея в виду, что $|\phi_0(z)|^2 = 1$):

$$\left|\tilde{f}(z)\right|^2 = \Gamma^2 \int_0^{\infty} d\tau_1 \exp[-(\Gamma - i\delta)\tau_1] \int_0^{\infty} d\tau_2 \times \exp[-(\Gamma + i\delta)\tau_2] \times \exp\left[i\tilde{A} \sin(\omega z) + i\tilde{B} \cos(\omega z)\right], \quad (46)$$

$$\tilde{A} = \frac{A\bar{W} - B\bar{\varphi}_s}{\omega}, \quad \tilde{B} = \frac{B\bar{W} + A\bar{\varphi}_s}{\omega}, \quad (47)$$

$$A = -2 \sin \frac{\omega(\tau_2 - \tau_1)}{2} \sin \frac{\omega(\tau_2 + \tau_1)}{2}, \quad (48)$$

$$B = 2 \sin \frac{\omega(\tau_2 - \tau_1)}{2} \cos \frac{\omega(\tau_2 + \tau_1)}{2}. \quad (49)$$

Мы опустили в выражении для $f(z)$ малую добавку к z , пропорциональную $T = a/2p$ (см. о добавке ниже в разд. 6).

Важно отметить, что потенциалы φ_c , φ_s и φ_0 входят в выражения для $|\tilde{f}|^2$ и $|\psi(x, t)|^2$ как средние значения $\bar{\varphi}_c$, $\bar{\varphi}_s$ и $\bar{\varphi}_0$.

**4. РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ
В ОТСУТСТВИЕ ПЕРЕМЕННОГО ПОЛЯ**

В этом случае $\bar{V} = 0$, и функция $F(z)$ (43) принимает вид

$$F_0(z) = \frac{4q}{\Delta_0}, \quad \Delta_0 = \frac{4}{\Gamma} [i(\varepsilon - \varepsilon_R - \bar{\varphi}_0) - \Gamma]. \quad (50)$$

Согласно (2) и (8) статический потенциал $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = -\frac{4\pi e^2}{\kappa} |\psi_0(x)|^2, \quad (51)$$

где $|\psi_0(x)|^2$ находим из (45), (46):

$$|\psi_0(x)|^2 \approx \frac{4\alpha^2}{p^2} \frac{4q^2}{|\Delta_0|^2} \sin^2(px). \quad (52)$$

В квазиклассическом приближении $|\psi_0(x)|^2$ зависит только от среднего потенциала $\bar{\varphi}_0$. Поэтому, полагая $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ (или $\varphi(0) = 0, \varphi'(a) = -\varphi'(0)$), легко получаем

$$\bar{\varphi}_0(\varepsilon) = \frac{8\pi e^2 a^2}{\kappa} n_0(\varepsilon) \gamma_0, \quad \gamma_0 \approx \frac{0.18}{\pi}, \quad (53)$$

где

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{a} \int_0^a dx |\psi_0(x)|^2 = \frac{Q\Gamma}{2a [(\varepsilon - \varepsilon_R - \bar{\varphi}_0)^2 + \Gamma^2]} \quad (54)$$

— концентрация электронов в яме, $Q = 4q^2 p$.

Из формулы (54) видно, что взаимодействие электронов приводит к сдвигу резонансной энергии ε_R на величину среднего потенциала $\bar{\varphi}_0$, удовлетворяющего уравнению

$$\bar{\varphi}_0 = \tilde{Q} \frac{\Gamma^3}{(\varepsilon - \varepsilon_R - \bar{\varphi}_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (55)$$

$$\tilde{Q} = \frac{4\pi e^2 \gamma_0}{\kappa} \frac{Qa}{\Gamma^2}. \quad (56)$$

Ввиду прямой связи $\bar{\varphi}_0$ и $n_0(\varepsilon)$ (53) можно сформулировать уравнение для $n_0(\varepsilon)$, аналогичное (55):

$$n_0 = \frac{Q\Gamma}{2a \left[\left(\varepsilon - \varepsilon_R - \frac{3}{2} g n_0 \right)^2 + \Gamma^2 \right]}, \quad (57)$$

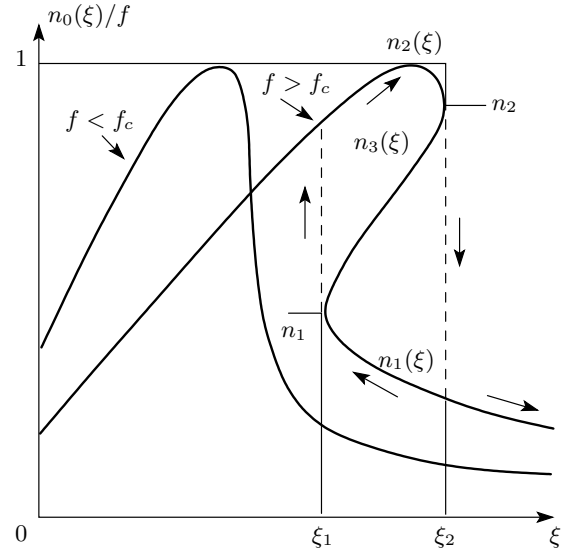


Рис. 2. Нормированная постоянная концентрация электронов РТД в зависимости от энергии электронов эмиттера

если ввести величину

$$g = \frac{16\pi e^2 a^2 \gamma_0}{3\kappa}. \quad (58)$$

Уравнение (57) было получено ранее автором в работе [25] в приближении локального межэлектронного взаимодействия $g\psi_0|\psi_0|^2$, а g играла роль постоянной взаимодействия. В работе [25] был проведен анализ уравнения (57), которое описывает гистерезисное поведение концентрации $n_0(\varepsilon)$ и постоянного тока

$$I_0(\varepsilon) = e\Gamma a n_0(\varepsilon). \quad (59)$$

Мы приведем основные результаты, необходимые для дальнейшего. Удобно записать уравнение (57) в безразмерном виде:

$$n = \frac{f}{1 + (\xi - n)^2}, \quad (60)$$

$$n = \frac{3gn_0}{2\Gamma}, \quad \xi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{\Gamma}, \quad f = \frac{3Qg}{4a\Gamma^2} \equiv \tilde{Q}. \quad (61)$$

Уравнение типа (60) хорошо известно в теории нелинейных колебаний (см. [27]). В нашем случае уравнение дает зависимость концентрации электронов $n(\xi)$ от тока «накачки» f и «расстройки» ξ .

Уравнение представляет собой кубическое уравнение относительно n . При малых f , когда сдвиг уровня мал, концентрация n является симметричной функцией ξ . С увеличением f кривая $n(\xi)$ деформируется. При значении f , большем некоторой

критической величины f_c , появляются три решения $n(\xi)$ (см. рис. 2), соответствующие одному и тому же значению ξ . Одно из решений n_3 , растущее при увеличении ξ , неустойчиво. Второе решение $n_2(\xi)$, достигнув максимума с ростом ξ , начинает уменьшаться и при $\xi = \xi_2$ скачком переходит в решение n_1 . Если теперь уменьшать ξ , концентрация скачком переходит в «верхнее» решение $n_2(\xi)$ при $\xi = \xi_1$ ($n_1(\xi_1) = n_1$). Таким образом, имеет место гистерезис.

Область гистерезиса, т.е. значения $n_2(\xi_2)$ и $n_1(\xi_1)$ (ξ_1 и ξ_2) в экстремумах, найдем из условия $d\xi/dn = 0$. Функцию $\xi(n)$ определим из уравнения (60), записанного в форме

$$\xi^2 - 2\xi n + n^2 + 1 - \frac{f}{n} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = n \pm \sqrt{\frac{f}{n} - 1}. \quad (62)$$

Производная равна нулю:

$$\frac{d\xi}{dn} = 1 - \frac{f}{2n^2 \sqrt{\frac{f}{n} - 1}} = 0, \quad (63)$$

если n удовлетворяет уравнению

$$n^3 f - n^4 = \frac{f^2}{4}, \quad n \leq f, \quad (64)$$

или

$$y^3 - y^4 = \frac{1}{4f^2}, \quad y < 1, \quad n = fy. \quad (65)$$

Из (65) легко видеть, что решения появляются, если f превосходит величину f_c , равную

$$f_c = \frac{8}{3\sqrt{3}}. \quad (66)$$

Таким образом, экстремумы, а следовательно, и гистерезис, появляются только при выполнении условия [25]

$$Q > Q_c, \quad Q_c = \frac{a\Gamma^2}{g} \frac{32}{9\sqrt{3}}. \quad (67)$$

Если $f = f_c$ решения n_2 и n_1 сливаются:

$$n_2 = n_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \xi_c = \sqrt{3}, \quad \tilde{\delta}_c = \xi_c - n_c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Приведем значения $n_2(\xi_2)$ и $n_1(\xi_1)$ в предельных случаях $f \rightarrow \infty$ и $f \rightarrow f_c$:

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= f \left(1 - \frac{1}{4f^2}\right), & \tilde{\delta}_2 &= \frac{1}{2f}, \\ n_1 &= \left(\frac{f}{4}\right)^{1/3}, & \tilde{\delta}_1 &= (2f)^{1/3} \end{aligned} \right\} f \rightarrow \infty, \quad (68)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{2,1} &\approx f \frac{3}{4} \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{f}{f_c} - 1}\right], \\ \tilde{\delta}_{2,1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mp \frac{2}{3} \sqrt{\frac{f}{f_c} - 1} \end{aligned} \right\} f \geq f_c. \quad (69)$$

5. ПОТЕНЦИАЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

Для нахождения потенциалов φ_c , φ_s и φ_0 из уравнения (2) следует подставить в него квадрат модуля $|\psi(x, t)|^2$ согласно (45). Поскольку функция туннелирования $|\tilde{f}(z)|^2$ (46) зависит только от средних значений потенциалов, решения для φ_s и φ_c аналогичны (53), т.е. вклад координатной зависимости учитывается коэффициентами γ_0 . Чтобы выделить вклады синфазного $\varphi_c(t)$, противофазного $\varphi_s(t)$ и постоянного потенциала, применим фурье-преобразование к уравнению (2). В результате получим для средних значений выражения

$$\bar{\varphi}_c = \tilde{Q}\Gamma \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} |\tilde{f}(z)|^2 \cos(\omega t) dt, \quad (70)$$

$$\bar{\varphi}_s = \tilde{Q}\Gamma \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} |\tilde{f}(z)|^2 \sin(\omega t) dt, \quad (71)$$

$$\bar{\varphi}_0 = \tilde{Q}\Gamma \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} |\tilde{f}(z)|^2 dt. \quad (72)$$

Выполняя интегрирование с помощью формулы

$$\begin{aligned} &\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \exp(i\omega kt) \times \\ &\times \exp [i \exp(i\omega t)a^+ + i \exp(-i\omega t)a^-] = \\ &= (i)^k \left(\frac{a^-}{a^+}\right)^{k/2} J_k \left(2(a^+ a^-)^{1/2}\right), \end{aligned} \quad (73)$$

где J_k — функция Бесселя, получим

$$\bar{\varphi}_c = Z [\bar{W}b_- - \bar{\varphi}_s b_+], \quad (74)$$

$$\bar{\varphi}_s = -Z [\bar{W}b_+ + \bar{\varphi}_s b_-], \quad (75)$$

$$\bar{\varphi}_0 = \tilde{Q}\Gamma 2I_0(|\bar{U}|). \quad (76)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b_+ = \omega \tilde{I}_c + 2\Gamma \tilde{I}_s, \quad b_- = \tilde{I}_c 2\Gamma - \omega \tilde{I}_s, \quad (77)$$

$$Z = \frac{4\Gamma^2\tilde{Q}}{\omega^2 + 4\Gamma^2}, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_c = \frac{\Gamma}{|\bar{U}|} \int_0^\infty dt \exp(-\Gamma t) J_1 \left(\frac{2|\bar{U}|}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \right) \times \\ \times \sin(\delta t) \cos \frac{\omega t}{2}, \quad (79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s = \frac{\Gamma}{|\bar{U}|} \int_0^\infty dt \exp(-\Gamma t) J_1 \left(\frac{2|\bar{U}|}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \right) \times \\ \times \sin(\delta t) \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0(|\bar{U}|) = \frac{\Gamma}{2} \int_0^\infty dt \exp(-\Gamma t) J_0 \left(\frac{2|\bar{U}|}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \right) \times \\ \times \cos(\delta t). \quad (81) \end{aligned}$$

Приведенные токи \tilde{I}_c и \tilde{I}_s совпадают по виду с приведенными токами не взаимодействующих электронов [22], деленными на $|\bar{U}|$ и Q .

В линейном приближении по $|\bar{U}|$ из формул (74)–(76) получаем неоднородную систему уравнений для $\bar{\varphi}_c$ и $\bar{\varphi}_s$:

$$\bar{\varphi}_c \left[\frac{1}{Z} - b_-^{(0)} \right] + \bar{\varphi}_s b_+^{(0)} = \bar{V} b_-^{(0)}, \quad (82)$$

$$\bar{\varphi}_c b_+^{(0)} + \left[\frac{1}{Z} + b_-^{(0)} \right] \bar{\varphi}_s = -\bar{V} b_+^{(0)}, \quad (83)$$

решение которой имеет вид

$$\bar{\varphi}_c = \frac{\bar{V}}{\Omega} \left[\frac{b_-^{(0)}}{Z} + b_-^{(0)2} + b_+^{(0)2} \right], \quad (84)$$

$$\bar{\varphi}_s = -\frac{\bar{V} b_+^{(0)}}{Z\Omega}, \quad \bar{W} = \bar{V} + \bar{\varphi}_c = \frac{\bar{V}}{\Omega Z} \left(\frac{1}{Z} + b_-^{(0)} \right), \quad (85)$$

$$\Omega = \frac{1}{Z^2} - (\omega^2 + 4\Gamma^2) \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right). \quad (86)$$

В выражениях для $b_-^{(0)}$ и $b_+^{(0)}$ вместо \tilde{I}_c и \tilde{I}_s стоят токи в линейном приближении, полученные ранее в работе [22]:

$$\tilde{I}_c^{(0)} = \frac{\Gamma^2 \delta}{[\Gamma^2 + (\omega + \delta)^2][\Gamma^2 + (\omega - \delta)^2]}, \quad (87)$$

$$\tilde{I}_s^{(0)} = \frac{\Gamma \delta \omega [\delta^2 - \omega^2 - 3\Gamma^2]}{[\Gamma^2 + (\omega + \delta)^2][\Gamma^2 + (\omega - \delta)^2][\Gamma^2 + \delta^2]}. \quad (88)$$

6. ТОКИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА В ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Воспользовавшись волновой функцией (45), найдем ток в области квантовой ямы $0 \leq x \leq a$:

$$I(x, t) = 2pe \left[|f_p(z)|^2 - |f_{-p}(\tilde{z})|^2 \right], \quad (89)$$

опуская малые члены порядка ω/ε_R , Ua/ε_R , φ/ε_R в рамках точности квазиклассического приближения. Подставляя в (89) f_p и f_{-p} из (24) и (25), выражаем ток через функции туннелирования $f(z)$ и $f(\tilde{z})$:

$$I(x, t) = 2ep \left\{ |f(z)|^2 + \frac{a^2}{4p^2} \left[|f(z)|^2 - |f(\tilde{z})|^2 \right] \right\}. \quad (90)$$

Первое слагаемое дает вклад в ток, слабо зависящий от координат, так как координатная поправка в $f(z)$ пропорциональна малой величине

$$\omega \frac{x-a}{2p} \approx \frac{\omega}{\varepsilon_R}.$$

Второе слагаемое в правой части (90) также пропорционально $\omega(x-a)/2p$, но умножается на большой множитель $(a/p)^2$, возникающий из-за конструктивной интерференции электронов в яме.

Как отмечалось выше (разд. 3), мы опустили в выражении для $f(z)$ добавку к z , пропорциональную $T = a/2p$. Это не изменит окончательных результатов для тока, так как в первом слагаемом (90) T является малой поправкой, а в разности добавка T сокращается.

Постоянный ток, синфазный (активный) I_c и реактивный I_s выделим из $I(x, t)$ с помощью фурье-преобразований

$$I_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(x, t) dt,$$

$$I_c(x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) I(x, t) dt, \quad (91)$$

$$I_s(x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) I(x, t) dt \quad (92)$$

и, используя формулу (73).

После весьма громоздких вычислений получаем для приведенных токов \bar{I}_c и \bar{I}_s выражения

$$\bar{I}_c = \frac{1}{a} \int_0^a dx I_c(x) = eQ \left[\tilde{I}_c \bar{W} - \tilde{I}_s \bar{\varphi}_s \right], \quad (93)$$

$$\bar{I}_s = \frac{1}{a} \int_0^a dx I_s(x) = eQ \left[\tilde{I}_c \bar{\varphi}_s + \tilde{I}_s \bar{W} \right], \quad (94)$$

где приведенные токи \tilde{I}_c и \tilde{I}_s для невзаимодействующих электронов даются формулами (79), (80) и (87), (88).

Таким образом, приведенные токи взаимодействующих электронов представляют суперпозицию токов \tilde{I}_c и \tilde{I}_s с весовыми вкладками \bar{W} и $\bar{\varphi}_s$. В свою очередь, средние потенциалы \bar{W} и $\bar{\varphi}_s$ зависят от амплитуды переменного поля \bar{V} согласно (84) и (85). Подставляя \bar{W} и $\bar{\varphi}_s$ в (93) и (94), выразим токи \bar{I}_c и \bar{I}_s через \bar{V} :

$$\frac{\bar{I}_c}{eQ} = \frac{\bar{V}}{\Omega Z} \left[\frac{\tilde{I}_c^{(0)}}{Z} + 2\Gamma \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right) \right], \quad (95)$$

$$\frac{\bar{I}_s}{eQ} = \frac{\bar{V}}{\Omega Z} \left[\frac{\tilde{I}_s^{(0)}}{Z} - \omega \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right) \right], \quad (96)$$

$$\Omega = \frac{1}{Z^2} - (\omega^2 + 4\Gamma^2) \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right). \quad (97)$$

Выражения (95)–(97) дают частотную зависимость токов \bar{I}_c и \bar{I}_s в широком интервале частот для различных режимов, включая гистерезисный. При выключении взаимодействия ($\tilde{Q} \rightarrow 0$) (95) и (96) переходят в токи без учета взаимодействия [22].

Удобно представить (95) и (96) в другой форме, используя явный вид Ω и Z :

$$\frac{\bar{I}_c}{Q} = \frac{\bar{V}}{\Pi(\omega)} \times \left[\tilde{I}_c^{(0)} \left(\frac{\omega^2}{4\Gamma^2} + 1 \right) + \tilde{Q}(2\Gamma) \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right) \right], \quad (98)$$

$$\Pi(\omega) = \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{4\Gamma^2} \right) - \Phi^2(\omega, \delta) \right], \quad (99)$$

$$\Phi^2(\omega, \delta) = \tilde{Q}^2 (2\Gamma)^2 \left[\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right], \quad (100)$$

$$\bar{I}_s = \frac{\bar{V}}{\Pi(\omega)} \times \left[\tilde{I}_s^{(0)} \left(1 + \frac{\omega^2}{4\Gamma^2} \right) - \omega \tilde{Q} \left(\tilde{I}_c^{(0)2} + \tilde{I}_s^{(0)2} \right) \right]. \quad (101)$$

Важной особенностью выражений для токов \bar{I}_c и \bar{I}_s взаимодействующих электронов является наличие резонансного знаменателя $\Pi(\omega)$. Ниже будет показано, что он может при определенных условиях обращаться в нуль.

7. ВЛИЯНИЕ МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ТОКИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

Для низких частот $\omega \ll \Gamma$ реактивный ток $\tilde{I}_s^{(0)}$ мал по сравнению с $\tilde{I}_c^{(0)}$, так что согласно (98)

$$\bar{I}_c = \frac{eQ\bar{V}\tilde{I}_c^{(0)}}{\Pi_0}, \quad \Pi_0 = 1 - \Phi(0), \quad (102)$$

$$\Phi(0) = f2\Gamma\tilde{I}_c^{(0)}(0) = \frac{2f\tilde{\delta}}{(\tilde{\delta}^2 + 1)^2}, \quad \tilde{\delta} = \xi - n. \quad (103)$$

Учет взаимодействия приводит к появлению в знаменателе величины Π_0 , уменьшающейся с ростом накачки f . Таким образом, взаимодействие увеличивает активный ток \bar{I}_c РТД.

Покажем, что величина Π_0 обращается в нуль в экстремумах гистерезисной зависимости концентрации $n_0(\xi)$ (57) (см. разд. 4). Уравнение (63) для экстремумов после подстановки $n(\xi)$ из (60) принимает вид

$$f \left\{ 2f\tilde{\delta} - [1 + \tilde{\delta}^2]^2 \right\} = 0. \quad (104)$$

Таким образом, нули знаменателя появляются в экстремумах $n_2(\xi_2)$ и $n_1(\xi_1)$ при условии $f > f_c$ (см. рис. 2). Это приводит к резкому увеличению \bar{I}_c , т. е. к улучшению условий генерации и усиления РТД. Конечно, бесконечного роста не происходит из-за нелинейных эффектов (см. ниже разд. 8). Причина резкого увеличения тока связана с бесконечным значением дифференциальной проводимости РТД в экстремальных точках $n(\xi)$. Действительно, вычислив дифференциальную проводимость РТД с использованием (59) и (60),

$$\frac{dI_0}{d\xi} = -\frac{e\Gamma a \tilde{I}_c^{(0)}}{1 - \Phi(0)}, \quad (105)$$

видим появление резонансного знаменателя Π_0 .

Итак, функция $\Phi(0)$ (103) достигает максимального значения, равного единицы в экстремумах гистерезисной кривой, в частности при $f = f_c$, $\tilde{\delta} = 1/\sqrt{3}$. При отклонении $\tilde{\delta}$ от экстремальных значений $\Phi(0, \delta, f)$ оказывается меньше единицы.

Основной интерес при исследовании частотной зависимости токов вызывает поведение величины $\Pi(\omega)$, пропорциональной определителю Ω :

$$\Omega(\omega) = \frac{\omega^2 + 4\Gamma^2}{(2\Gamma\tilde{Q})^2} \Pi(\omega). \quad (106)$$

Как показано выше, при $\omega = 0$ функция $\Phi(0) \leq 1$. Возникает вопрос о поведении $\Phi(\omega, \delta, f)$ с ростом частоты при различных δ и f . А именно, сможет

ли $\Phi(\omega)$ превысить единицу, чтобы величина $\Pi(\omega)$ обращалась в нуль при конечной частоте?

Частотная зависимость $\Phi(\omega)$ определяется частотными зависимостями \tilde{I}_c и \tilde{I}_s . Как было показано в [20], частотная зависимость тока \tilde{I}_c принципиально зависит от величины расстройки δ , определяющей «рабочую точку» РТД. Если $\delta < \Gamma$, \tilde{I}_c имеет максимум при нулевой частоте ($\omega = 0$) и с ростом частоты уменьшается как $1/\omega^4$ (так называемый классический режим). При $\delta > \Gamma$ (квантовый режим) ток достигает максимума при частоте

$$\omega_0^2 = \delta^2 - \Gamma^2, \quad (107)$$

растущей с увеличением δ и отвечающей квазирезонансным переходам электронов с излучением кванта поля (см. [20]). Следовательно, в квантовом режиме есть интервал частот, в котором \tilde{I}_c возрастает. Таким образом, можно ожидать резонанса (т. е. $\Pi(\omega) = 0$) при конечных частотах. Что касается тока \tilde{I}_s , то в квантовом режиме он мал по сравнению с \tilde{I}_c , поэтому его опускаем.

Будем искать решение уравнения $\Pi(\omega) = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega^2}{4\Gamma^2} + 1} &= \frac{2\tilde{\delta}f}{\left[1 + \left(\delta + \frac{\omega}{\Gamma}\right)^2\right] \left[1 + \left(\delta - \frac{\omega}{\Gamma}\right)^2\right]} \equiv \\ &\equiv \frac{2\tilde{\delta}f}{1 + \left(\tilde{\delta}^2 - \frac{\omega^2}{\Gamma^2}\right)^2 + 2\left(\tilde{\delta}^2 + \frac{\omega^2}{\Gamma^2}\right)}. \end{aligned} \quad (108)$$

При выполнении условий квантового режима — $\tilde{\delta} > 1$ и (107) — уравнение (108) принимает вид

$$\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} + 4} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} + 1} = f. \quad (109)$$

Отсюда находим частоту ω_0 , при которой $\Pi(\omega_0) = 0$:

$$\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{9} f^2} - \frac{5}{2}. \quad (110)$$

Критическое значение тока «накачки» f_p , начиная с которого $\omega_0 \geq 0$, вычисляется как

$$3\sqrt{1 + \frac{4}{9} f_p^2} = 5, \quad f_p = 2. \quad (111)$$

Следовательно, ω_0 становится отличной от нуля при $f > f_p > f_c$, т. е. после появления гистерезиса.

При больших $f = \tilde{Q} \gg 1$ из (110) имеем

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 = \tilde{Q}\Gamma^2 = \frac{16\pi e^2 q^2 \pi}{\kappa} \gamma_0. \quad (112)$$

Поскольку q^2 — концентрация электронов (коллектора), выражение для частоты ω_p совпадает с выражением для плазменной частоты. Поэтому обращение $\Omega(\omega)$ в нуль означает раскачку специфических плазменных колебаний. Действительно, если положить $\bar{V} = 0$ в системе уравнений (82) и (83), то условием их решения является обращение Ω в нуль, что в свою очередь дает частоту возникающих плазменных колебаний.

Условие (111) соответствует порогу, при котором энергия поля, передаваемая при резонансных электронных переходах плазменным колебаниям, превосходит затухание Γ . Посмотрим, где должна находиться рабочая точка (т. е. $\tilde{\delta}(\xi)$), чтобы выполнялись условия резонанса. Очевидно, что на верхней ветви это невозможно. Действительно, согласно (62) $\tilde{\delta}_2 = \sqrt{f/n_2 - 1}$, и при $n_2 > 3f/4$ (см. (64)) $\tilde{\delta}_2 \leq 1/\sqrt{3}$, т. е. $\tilde{\delta}_2 < 1$ — а это соответствует классическому режиму. Отметим, что при $f \gg 1$, имеем $\tilde{\delta}_2 = 1/2f \rightarrow 0$ (68).

На нижней ветви условие $\tilde{\delta} > 1$ может быть выполнено. Например, согласно (68), $\tilde{\delta}_1 \sim f^{1/3} \gg 1$ при $f \gg 1$. При этом можно добавить еще любое $\Delta\xi$, так что

$$\tilde{\delta}_1 \approx (2f)^{1/3} + \Delta\xi \approx \frac{\omega}{\Gamma}. \quad (113)$$

8. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Обращение определителя Ω в нуль приводит потенциалы $\bar{\varphi}_c$ и $\bar{\varphi}_s$ (84), (85) и токи \tilde{I}_c и \tilde{I}_s (98), (101) в линейном приближении ($\bar{V} \ll \Gamma$) к бесконечному росту. Поэтому необходимо учесть нелинейные эффекты, устраняющие расходимости. Это можно сделать, исходя из точных уравнений (74)–(76).

Начнем с низкочастотного предела ($\omega \ll \Gamma$). В этом случае система (74)–(76) сводится к уравнениям

$$\bar{\varphi}_c = \tilde{Q} [\bar{V} + \bar{\varphi}_c] 2\Gamma \tilde{I}_c (|\bar{U}|, \tilde{\delta}), \quad (114)$$

$$\bar{\varphi}_0 = \tilde{Q} 2\tilde{I}_0 (|\bar{U}|), \quad \bar{\varphi}_s \approx 0, \quad \tilde{\delta} = \xi - \frac{\bar{\varphi}_0}{\Gamma}, \quad (115)$$

где \tilde{I}_c и \tilde{I}_0 даются формулами (79) и (81). Полагая $|\bar{U}| \equiv \bar{W}$ малым по сравнению с Γ , найдем с точностью до $|\bar{W}|^2$:

$$\bar{\varphi}_0 = \tilde{Q}\Gamma \left\{ \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \delta^2} + \frac{\bar{W}^2 \Gamma^2 (3\delta^2 - \Gamma^2)}{2(\delta^2 + \Gamma^2)^3} \right\}, \quad (116)$$

$$\overline{W} \left\{ 1 - \tilde{Q} 2\Gamma \tilde{I}_c^{(0)} + \frac{\overline{W}^2 \Gamma^2 \tilde{Q}}{(\delta^2 + \Gamma^2)^4} \times \right. \\ \left. \times \left[3\delta(\Gamma^2 - \delta^2) + \frac{\tilde{Q} \Gamma^3 (\Gamma^2 - 3\delta^2)^2}{(\delta^2 + \Gamma^2)^2} \right] \right\} = \overline{V}. \quad (117)$$

Уравнения (114), (115) дают возможность найти потенциал \overline{W} и низкочастотный ток \overline{I}_c (102). Мы ограничимся расчетом максимального значения \overline{W} , когда $\Pi_0 = 0$, $\Phi_0^{(0)} = 1$. В этом случае получаем

$$\overline{W} = \left[\frac{\overline{V} 4\delta^2 (\delta^2 + \Gamma^2)^2}{\Gamma^4 + 3\delta^4} \right]^{1/3}, \quad (118)$$

причем в предельных ситуациях

$$\overline{W} = [4\Gamma^2 \overline{V}]^{1/3}, \quad \delta \leq \Gamma, \quad (119)$$

$$\overline{W} = \left[\frac{4\overline{V} \delta^2}{3} \right]^{1/3}, \quad \delta \gg \Gamma. \quad (120)$$

Отсюда следует, что потенциал $\overline{\varphi}_c$ значительно превосходит внешнее поле \overline{V} :

$$\frac{\overline{\varphi}_c}{\overline{V}} \approx \left(\frac{2\Gamma}{\overline{V}} \right)^{2/3} \gg 1, \quad \delta \leq \Gamma, \quad (121)$$

$$\frac{\overline{\varphi}_c}{\overline{V}} \approx \left(\frac{4\delta}{3\overline{V}} \right)^{2/3}, \quad \delta \gg \Gamma \gg \overline{V}.$$

Найдем из (102) низкочастотный ток \overline{I}_c , воспользовавшись (117) и (118):

$$\overline{I}_c \approx Q \tilde{I}_c^{(0)} \overline{W} = \overline{I}_c^{(0)} \left[\frac{4\delta^2 (\delta^2 + \Gamma^2)^2}{\overline{V}^2 (\Gamma^2 + 3\delta^4)} \right]^{1/3}, \quad (122)$$

где $\overline{I}_c^{(0)}$ — приведенный ток РТД в отсутствие взаимодействия. Нетрудно видеть значительное увеличение тока за счет взаимодействия, а именно, в $(4\delta/3\overline{V})^{2/3}$ раз при $\delta \gg \Gamma$ или в $(4\Gamma/\overline{V})^{2/3}$ раз при $\delta \leq \Gamma$.

Теперь рассмотрим ситуацию для конечных частот, удовлетворяющих условию квантового режима (107). В этом случае $\tilde{I}_s \ll \tilde{I}_c$ и $b_+ \approx \omega \tilde{I}_c$, $b_- \approx 2\Gamma \tilde{I}_c$, так что вместо (74) и (75) имеем

$$\frac{\overline{\varphi}_c}{Z} = (2\Gamma \overline{W} - \omega \overline{\varphi}_s) \tilde{I}_c, \quad (123)$$

$$\frac{\overline{\varphi}_s}{Z} = -(\omega \overline{W} + 2\Gamma \overline{\varphi}_c) \tilde{I}_c. \quad (124)$$

При больших частотах, $\omega \gg \Gamma$, можно опустить члены порядка $2\Gamma/\omega$ и исключить из (123) и (124) $\overline{\varphi}_s$:

$$\overline{W} [1 - \omega^2 Z^2 \tilde{I}_c^2] = \overline{V}. \quad (125)$$

Разлагая \tilde{I}_c (79) по $|\overline{U}|^2/\omega^2 \ll 1$:

$$\tilde{I}_c = \frac{1}{4\omega} \left[1 - \left(\frac{|\overline{U}|}{4\omega} \right)^2 \right], \quad (126)$$

и полагая

$$\Phi^{(0)}(\omega) = \omega Z \tilde{I}_c^{(0)} = 1,$$

получим соответственно для потенциалов и тока следующие выражения:

$$\overline{\varphi}_c^2 = \overline{\varphi}_s^2 = \frac{1}{2} (4\omega^2 \overline{V})^{2/3}, \quad (127)$$

$$\overline{I}_c = \overline{I}_c^{(0)} \sqrt{2} \left(\frac{\omega}{\overline{V}} \right)^{2/3}. \quad (128)$$

Таким образом, потенциалы и ток с учетом взаимодействия превосходят поле \overline{V} и ток $\overline{I}_c^{(0)}$ примерно в $(\omega/\overline{V})^{2/3}$ раз.

При конечной частоте система уравнений для $\overline{\varphi}_c$ и $\overline{\varphi}_s$ (74), (75), а также (123), (124) имеет решения в отсутствие внешнего поля \overline{V} . Для случая больших частот, $\omega \gg \Gamma$, в условиях квантового режима имеем

$$\overline{\varphi}_c = -\overline{\varphi}_s, \quad 1 - \omega Z \tilde{I}_c(|\overline{U}|) = 0, \quad (129)$$

так что при малых $|\overline{U}|/\omega$ находим:

$$\overline{\varphi}_c^2 \approx 8\Gamma^2 [\tilde{Q} - \delta^2]. \quad (130)$$

Решения (129), (130) описывают плазменные колебания.

Рассмотрим решения (129) при больших \tilde{Q} и $|\overline{U}|$. Согласно [22], ток $\tilde{I}_c(|\overline{U}|)$ в квантовом режиме и при больших $|\overline{U}|$ и ω имеет вид

$$\tilde{I}_c = \frac{\omega}{|\overline{U}|^2} J_1^2 \left(\frac{|\overline{U}|}{\omega} \right). \quad (131)$$

С ростом $|\overline{U}|$ ток осциллирует, достигая максимумов, когда импульс, набранный электроном в переменном поле eE/ω , кратен импульсу квантования в яме $1/a$. С учетом (131) уравнение (129) запишем в форме

$$|\overline{U}|^2 = 4\Gamma^2 \tilde{Q} J_1^2 \left(\frac{|\overline{U}|}{\omega} \right), \quad \omega = \delta. \quad (132)$$

Первый максимум J_1 достигается при $|\overline{U}|/\omega \approx 1.8$ и $J_1(1.8) \approx 0.58$, так что

$$\overline{\varphi}_c \approx \delta \zeta, \quad \zeta \leq 1. \quad (133)$$

Согласно (93) активный ток равен

$$\bar{I}_c \approx eQ\tilde{I}_c\bar{\varphi}_c, \quad (134)$$

если опустить второе слагаемое с $\tilde{I}_s \ll \tilde{I}_c$. Подставляя \tilde{I}_c из (131) и $\bar{\varphi}_c$ из (133), находим

$$\bar{I}_c \approx eQ\zeta_1, \quad \zeta_1 \leq 1. \quad (135)$$

Таким образом, активный высокочастотный ток может достигнуть величины, сравнимой с значением резонансного постоянного тока $I_0(\varepsilon_R) = eQ$ (см. (59)).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена довольно сложная задача о влиянии межэлектронного взаимодействия на статические и высокочастотные динамические свойства РТД в рамках когерентной модели, включающей систему уравнений Шредингера и Пуассона с открытыми граничными условиями. Модель описывает неравновесную систему когерентных взаимодействующих электронов в переменном электрическом поле.

Главная особенность задачи, позволившая описать существенное влияние взаимодействия на резонансные токи, заключается в том, что требуемая для этого концентрация электронов невелика. Действительно, уже при сравнительно малых концентрациях взаимодействие вызывает сдвиг энергии резонансного уровня квантовой ямы на величину, равную ширине уровня Γ (малую по сравнению с ε_R , $\Gamma \ll \varepsilon_R$), что приводит к значительному изменению резонансного тока РТД (см. (59) и (54)). Таким образом, потенциал φ (см. (55)), который описывает сдвиг энергии, оказывается малым по сравнению с ε_R и появляется возможность применить квазиклассический метод [19, 22] для отыскания волновой функции (см. критерии (10)).

Мы ограничиваемся приближением Хартри, что можно сделать при определенных условиях для параметров задачи. В приближении локальной плотности [28] отношение обменного вклада и энергии Хартри равно

$$\frac{1}{16\pi^2\gamma_0} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{a^2n^{2/3}}$$

и при $a^2n^{2/3} \geq 1$ (например, $a = 10$ нм, $n \approx 10^{18}$ см⁻³) меньше 0.1. Следует отметить, что предсказываемые результаты не претендуют на количественную точность, но имеют ясный физический смысл. Речь идет о сдвиге (увеличении) энергии резонансного уровня за счет отталкивания элек-

тронов и плазменных колебаниях, которые существуют и без учета обменного взаимодействия.

Квазиклассический метод позволяет найти решения уравнения Шредингера (3) для слабого потенциала $\varphi(x, t)$. Соответствующая квазиклассическая волновая функция $\psi(x, t)$ дается выражениями (45)–(49). В отсутствие взаимодействия она совпадает с найденной в работе [22]. Важно отметить, что внешнее поле и потенциал входят в выражение для ψ как усредненные по ширине квантовой ямы. Это обстоятельство позволяет найти универсальные решения уравнения Пуассона.

Как следует из результатов работы, особенности статических характеристик РТД, в частности ВАХ (т. е. $I_0(\varepsilon)$ (59)), оказывают радикальное влияние на активный \bar{I}_c и реактивный \bar{I}_s токи. Поэтому в разд. 4 детально изучена ВАХ РТД взаимодействующих электронов в отсутствие переменного поля. Из формул (59), (54) видно, что взаимодействие вызывает сдвиг энергии на величину усредненного потенциала $\bar{\varphi}_0$. Резонансный ток $I_0(\varepsilon)$ резко меняется, а зависимость $I_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ от энергии становится гистерезисной. Квазиклассическая волновая функция (45), (46) позволяет найти переменные токи \bar{I}_c и \bar{I}_s , а также высокочастотные потенциалы $\bar{\varphi}_c$ и $\bar{\varphi}_s$ (84)–(86), вызываемые перераспределением электронов под действием переменного электрического поля $V(t)$. Они выражаются через приведенные (т. е. усредненные по координате) токи \tilde{I}_c и \tilde{I}_s в отсутствие взаимодействия. Токи \bar{I}_c и \bar{I}_s (93), (94) взаимодействующих электронов становятся суперпозицией токов \tilde{I}_c и \tilde{I}_s с весовыми вкладами \bar{W} и $\bar{\varphi}_s$. Окончательные выражения для токов в линейном приближении по полю даются формулами (95)–(97) или в другой форме — (98)–(101). Они показывают частотную зависимость токов РТД в широком интервале частот ($0 < \omega \ll \varepsilon_R$, $\omega \gg \Gamma$) для различных режимов, включая гистерезисный. Важной особенностью является наличие резонансного знаменателя $\Pi(\omega)$ (99).

В разд. 7 проанализированы наиболее интересные эффекты, вытекающие из полученных общих выражений и реализующиеся при гистерезисной ВАХ. В линейном по полю приближении знаменатель $\Pi(\omega)$ может обращаться в нуль. Для низких частот ($\omega \ll \Gamma$) это происходит в экстремумах ВАХ $n_2(\xi_2)$ и $n_1(\xi_1)$ (см. (104)) при накачке f , большей критической f_c . Причина резкого увеличения тока связана с бесконечным значением дифференциальной проводимости РТД (см. (105) и рис. 2). При учете нелинейности (при малом отношении \bar{V}/Γ) рассчитанный ток \bar{I}_c (122) демонстрирует значительное

увеличение в $(\delta/V)^{2/3}$ и $(\Gamma/V)^{2/3}$ раз ($V \ll \Gamma$, $\delta \gg \Gamma$) за счет межэлектронного взаимодействия.

Наиболее интересным предсказанием является возможность увеличения тока на конечной частоте ω (которая может превышать Γ , т.е. в области терагерц). Для этого необходимо выполнить условие квантового режима (см. (107)) (при котором происходят резонансные переходы между резонансным уровнем и квазиуровнем) и выбрать рабочую точку на нижней ветви гистерезиса (113) (т.е. $\tilde{\delta} > 1$). Эффект возрастания тока на конечной частоте объясняется раскачкой специфических плазменных колебаний за счет передачи им энергии при резонансных электронных переходах. Учитывая нелинейные ограничения (снова $\bar{V}/\omega \ll 1$), находим увеличение высокочастотного тока в $(\omega/\bar{V})^{2/3}$ раз (см. (128)). Нетрудно понять, что обращение резонансного знаменателя $\Pi(\omega)$ в нуль означает возбуждение плазменных колебаний в отсутствие внешнего поля V . Для малых амплитуд потенциал $\bar{\varphi}_c^2$ дается выражением (130). Расчет амплитуды потенциала для больших $\bar{\varphi}_c^2$ опирается на формулу (131) для тока в сильном внешнем поле в квантовом режиме ($\delta \approx \omega$) в отсутствие взаимодействия [22]. Согласно (131) высокочастотный ток достигает значения 0.41 от постоянного тока в резонансе I_0 . Оценка (135) показывает, что возбуждаемый плазменными колебаниями активный высокочастотный ток сравним с I_0 . Отсюда следует возможность высокочастотной генерации РТД весьма большой мощности.

В размерной форме параметры \tilde{Q} и ω_p имеют вид

$$\tilde{Q} = \left(\frac{\hbar\omega_p}{\Gamma} \right)^2, \quad \omega_p^2 = \frac{16\pi\epsilon^2 q^2 \pi}{m\kappa} \gamma_0, \quad (136)$$

$$\Gamma = \frac{\hbar^3 p^3}{2m^3 \alpha^2 a}, \quad (137)$$

причем их типичные значения равны $\omega_p = 10^{13}-10^{14}$ с⁻¹, $\Gamma/\hbar = 10^{12}-10^{13}$ с.

Автор выражает благодарность Ю. В. Копаеву за обсуждения и К. С. Гришакову за помощь в подготовке рукописи к публикации.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ в 2012 г., проект № 2.5808.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1973).
2. L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **24**, 593 (1974).
3. T. C. L. Sollner, P. E. Tannenwald et al., Appl. Phys. Lett. **45**, 1319 (1984).
4. E. R. Brown, T. C. L. Solner, C. D. Parker et al., Appl. Phys. Lett. **55**, 1977 (1989).
5. E. R. Brown, J. R. Södestrom, C. D. Parker et al., Appl. Phys. Lett. **58**, 2291 (1991).
6. N. Orihashi, S. Suzuki, and M. Asada, Appl. Phys. Lett. **87**, 233501 (2005).
7. S. Suzuki et al., Appl. Phys. Lett. **2**, 54501 (2009).
8. S. Suzuki, M. Asada et al., Appl. Phys. Lett. **97**, 242102 (2010).
9. S. Luryi, Appl. Phys. Lett. **47**, 490 (1985).
10. E. R. Brown, C. D. Parker, and T. C. L. Solner, Appl. Phys. Lett. **54**, 934 (1989).
11. M. Asada, S. Suzuki, and N. Kishimoto, Jpn. J. Appl. Phys. **47**, 4375 (2008).
12. M. Büttiker, A. Prêtre, and H. Thomas, Phys. Rev. Lett. **70**, 4114 (1993).
13. M. P. Antram and S. Datta, Phys. Rev. B **51**, 7632 (1995).
14. M. Feiginov, C. Sydio, O. Cojocan et al., Appl. Phys. Lett. **99**, 133501 (2011).
15. R. K. Mains and C. I. Haddad, J. Appl. Phys. **64**, 3564 (1988).
16. R. K. Mains and C. I. Haddad, J. Appl. Phys. **64**, 504 (1988).
17. H. C. Liu, Phys. Rev. B **43**, 12538 (1991).
18. D. Sokolovski and M. Yu. Sumetsij, ТМФ **64**, 233 (1985).
19. D. Sokolovski, Phys. Rev. B **37**, 4201 (1988).
20. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **116**, 704 (1999).
21. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **51**, 1492 (1964).
22. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **124**, 379 (2003).
23. F. W. Sheard and C. A. Tooms, Appl. Phys. Lett. **52**, 1228 (1988).
24. Jun Zang and J. L. Birman, Phys. Rev. B **46**, 5020 (1992).
25. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **119**, 816 (2001).
26. В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, С. А. Савинов и др., ЖЭТФ **143**, 569 (2013).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Гостехиздат, Москва (1958).
28. E. A. B. Cole, T. Boettcher, and C. M. Snowden, Semicond. Sci. Technol. **12**, 100 (1997).