

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЬЮРИНГА В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

*Е. П. Земсков\**

*Вычислительный центр Российской академии наук  
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 марта 2013 г.

Исследуется неустойчивость Тьюринга в двухкомпонентных системах типа реакция–диффузия с нелинейными диффузионными членами. Определяются области в параметрическом пространстве, в которых возможно образование структур Тьюринга. Найдены границы между сверхкритической и подкритической бифуркациями. Вычисления проведены для одномерных моделей брюсселятора и орегонатора.

DOI: 10.7868/S0044451013100192

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пространственные стационарные диссипативные структуры в системах типа реакция–диффузия образуются в результате потери устойчивости однородного состояния системы при так называемой неустойчивости Тьюринга (Turing) [1]. При этом однородное состояние остается устойчивым в отсутствие диффузии, дестабилизируясь лишь в полной системе реакция–диффузия, что является характерным для диффузионных неустойчивостей. В качестве типичных физических причин потери устойчивости и образования структур могут выступать такие факторы как неоднородность среды, взаимодействие компонентов и/или частиц в системе и др. Влияние подобных эффектов частично может быть учтено с помощью нелинейных диффузионных членов в уравнениях реакция–диффузия [2]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}$  обозначают соответственно концентрации компонентов и реакционные функции, а  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  представляет собой матрицу коэффициентов диффузии.

Нелинейные механизмы диффузионного типа встречаются во многих физических, химических и

биологических системах, например, в процессах массопереноса в пористых средах и в популяционных моделях [3, 4]. Моделями с нелинейной диффузией описываются режимы с обострением и пространственной локализацией [5, 6] в открытых диссипативных системах. В последнее время также начали очень интенсивно исследоваться обобщенные системы с перекрестной диффузией (с ненулевыми недиагональными элементами матрицы диффузии) или кросс-диффузионные модели (см., например, обзоры [7, 8] и ссылки в них). В частности, было экспериментально установлено, что коэффициенты кросс-диффузии в многокомпонентных системах, описывающих химические реакции, принимают нулевое значение при стремлении к нулю концентрации другого компонента. Исследования соответствующих моделей с нелинейной кросс-диффузией показали [9], что образование структур Тьюринга (Turing patterns) может наблюдаться при отклонении от стандартного значения отношения диагональных коэффициентов диффузии, полагаемых постоянными. Данный эффект имеет место [10] также и при нелинейных диагональных элементах в отсутствие кросс-диффузии. Дальнейшему изучению и обсуждению этого явления и посвящена настоящая работа. В представленном здесь исследовании рассматривается двухкомпонентная реакционно-диффузионная система с нелинейной диффузией или более точно — с диагональной диффузионной матрицей, содержащей линейно зависящие от концентрации коэффициенты диффузии. Система опи-

\*E-mail: zemskov@ccas.ru

сывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u, v) + D_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left( u \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_2(u, v) + D_{22} \frac{\partial}{\partial r} \left( v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (2b)$$

где коэффициенты  $D_{ii}$ ,  $i = 1, 2$ , полагаются постоянными. Целью работы является получение условий возникновения неустойчивости Тьюринга на основе линейного анализа устойчивости и результатов слабо нелинейного анализа (амплитудных уравнений) с проведением параметрического анализа на примере моделей, относящихся к двум основным видам систем активатор–ингибитор: брюсселятора и двухкомпонентного орегонатора. Выбор этих моделей продиктован соображениями простоты и наглядности: брюсселятор является одной из наиболее часто исследуемых простейших моделей в структурообразовании, а орегонатор является упрощенной моделью реальной химической системы [11], описывающей динамику реакции Белоусова–Жаботинского [12]. Для реальных систем, в которых наблюдалось образование структур Тьюринга, таких как реакция хлорин-диоксид-йодин-малоновой кислоты (CDIMA), необходимо использовать соответствующие им более сложные модели, в данном примере для реакции CDIMA — модель Лендьела–Эпштейна (Lengyel–Epstein) [13]. Приведенные здесь результаты для брюсселятора и орегонатора отражают лишь качественное описание изучаемого феномена и являются примером приложения анализа системы реакция–диффузия общего вида, выполненного недавно в работе [14].

## 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Линейный анализ устойчивости двухкомпонентной системы (2) дает следующие два условия, при которых однородное состояние устойчиво в отсутствие диффузии: якобиан  $J$  в точке  $(u_0, v_0)$ , являющейся положением равновесия (равновесным однородным состоянием, steady state), таким что  $F_1(u_0, v_0) = F_2(u_0, v_0) = 0$ , должен иметь, во-первых, отрицательный след,  $\text{tr} J < 0$ , и, во-вторых, положительный детерминант,  $\det J > 0$ . Потеря устойчивости при неоднородных возмущениях в полной реакционно-диффузионной системе происходит при условии выполнения следующих неравенств [15]:

$$\hat{D}_{11} J_{22} + \hat{D}_{22} J_{11} > 0, \quad (3a)$$

$$(\hat{D}_{11} J_{22} + \hat{D}_{22} J_{11})^2 - 4 \det \hat{D} \det J \geq 0, \quad (3b)$$

где  $J_{ii}$ ,  $i = 1, 2$  — диагональные элементы якобиана, а  $\hat{D}_{ii}$ ,  $i = 1, 2$  — диагональные элементы эффективной диффузионной матрицы (матрицы, линеаризованной около положения равновесия системы)

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} u_0 & 0 \\ 0 & D_{22} v_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Неравенство (3a) является необходимым, но недостаточным условием возникновения неустойчивости Тьюринга, а из уравнения, по форме представляющего собой (3b) со знаком равенства, определяются критические значения модельных параметров при наступлении этой неустойчивости. Неравенства (3a) и (3b) определяют области в пространстве параметров модели, отвечающие возникновению неустойчивости Тьюринга и называемые поэтому тьюринговскими областями.

Определив критические значения модельных параметров, можно найти критическое значение  $k_c$  волнового числа  $k$ , при котором возникает неустойчивость Тьюринга

$$k_c^2 = \sqrt{\frac{\det J}{\det \hat{D}}} = \sqrt{\frac{\det J}{u_0 v_0 D_{11} D_{22}}}, \quad (5)$$

где якобиан и однородное состояние берутся при критических значениях модельных параметров. Величина  $k_c$  дает грубую оценку для размера возникающих структур. Для определения типа бифуркации Тьюринга необходимо провести нелинейный анализ системы (2). В результате анализа получается описывающее динамику системы в окрестности критической точки амплитудное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \eta W + g |W|^2 W + \mathcal{D} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \quad (6)$$

в котором функция  $W = W(t, r)$  является комплексной амплитудой, а  $\eta$ ,  $g$  и  $\mathcal{D}$  представляют собой коэффициенты, зависящие от параметров системы. Знак коэффициента  $g$  как раз и определяет тип бифуркации: сверхкритической при  $g < 0$  и подкритической при  $g > 0$ . В первом случае кубическое амплитудное уравнение вполне адекватно описывает динамику системы, в то время как во втором случае необходимо использовать как минимум амплитудное уравнение пятого порядка.

Рассмотрим возникновение неустойчивости Тьюринга более подробно для двух основных видов систем типа активатор–ингибитор: брюсселятора и двухкомпонентного орегонатора.

### 2.1. Брюсселятор

Брюсселятор описывается следующими реакционными функциями:

$$F_1(u, v) = A - (B+1)u + u^2v, \quad F_2(u, v) = Bu - u^2v,$$

в которых  $A$  и  $B$  — постоянные, такие что состояние равновесия  $(u_0, v_0) = (A, B/A)$  и, следовательно, якобиан и эффективная диффузионная матрица записываются соответственно как

$$J = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11}A & 0 \\ 0 & D_{22}B/A \end{pmatrix}.$$

Детерминант якобиана для брюсселятора,  $A^2$ , всегда положителен, и единственным условием стабильности однородного состояния является отрицательность следа, которая ограничивает значения параметра  $B$  следующим образом:

$$B < 1 + A^2 \equiv B_c^H.$$

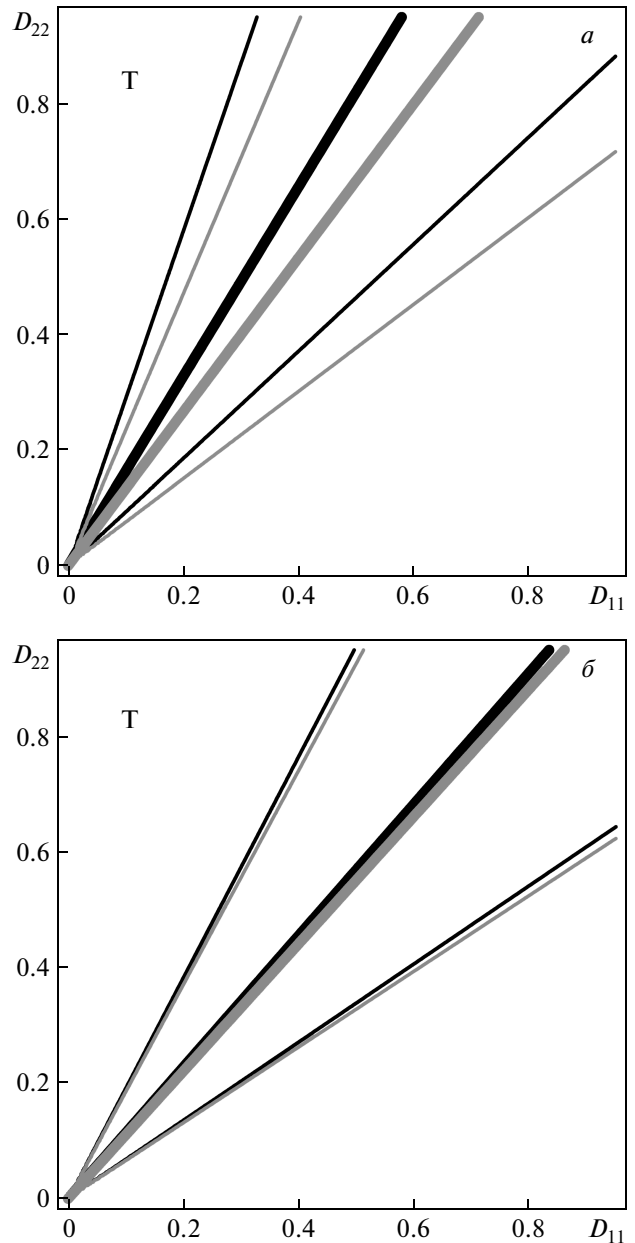
Здесь  $B_c^H$  — критическое значение, при достижении которого в системе происходит бифуркация Хопфа (Hopf) и возникают осцилляции.

С учетом выражений для  $J$  и  $\hat{D}$  из (7) неравенства (3) принимают вид

$$-A^3D_{11} + \frac{B}{A}(B-1)D_{22} > 0, \quad (8a)$$

$$\left[-A^3D_{11} + \frac{B}{A}(B-1)D_{22}\right]^2 - 4A^2BD_{11}D_{22} \geq 0. \quad (8b)$$

Определяемые неравенствами (8a) и (8b) тьюринговские области в параметрическом пространстве коэффициентов диффузии  $(D_{11}, D_{22})$  изображены на рис. 1 при обычных для брюсселятора значениях  $A$  и  $B$  (рис. 1a) и в случае, когда система находится в состоянии вблизи бифуркации Хопфа, т. е. при  $B$ , немного меньшем  $B_c^H$  (рис. 1б). В первом случае граница тьюринговской области с ростом отношения диффузионных коэффициентов значительно отклоняется от границы области для стандартной системы с обычной линейной диффузией, в то время как во втором случае она практически совпадает с ней. Из иллюстраций также следует, что возникновение неустойчивости и образование структур происходит при быстро диффундирующем ингибиторе  $v$  и медленно диффундирующем активаторе  $u$ , т. е. когда  $D_{11} < D_{22}$ , что соответствует стандартному значению отношения коэффициентов при неустойчивости



**Рис. 1.** Брюсселятор. Параметрическая плоскость  $(D_{11}, D_{22})$  при (a)  $A = 4, B = 13$  и (б)  $A = 4, B = 15.5$  ( $B_c^H = 16$ ) с тьюринговской областью, определяемой неравенствами (8a) и (8b), где жирная прямая линия — граница, соответствующая (8a), а две тонкие линии — (8b). Серые линии — границы для стандартного случая системы с линейной диффузией. T — тьюринговская область

Тьюринга в модели с обычной линейной диффузией. Действительно, как легко заметить, условие возникновения неустойчивости при нестандартном значении  $D_{11}/D_{22} > 1$  (см. формулу (43) в работе [10])

для системы (2) дает неравенство

$$A^2 < \frac{B-1}{1+1/\sqrt{B}},$$

которое не может выполняться одновременно с требованием отсутствия осцилляций из-за бифуркации Хопфа,  $A^2 > B-1$ , когда  $B > 1$ . Последнее условие (положительность  $B-1$ ) необходимо для сохранения правильной сигнатуры  $(++)$  якобиана для систем типа кросс-активатор-ингибитор, к которым относятся брюсселятор.

Критическое значение  $B_c^T$ , при котором возникает неустойчивость Тьюринга, определяется из (8b) со знаком равенства. Данное уравнение удобно представить в виде

$$\theta = \frac{1}{A^4} [B_c^T(B_c^T + 1) - 2(B_c^T)^{3/2}]. \quad (9)$$

Здесь введено обозначение  $\theta$  для отношения коэффициентов диффузии,  $\theta \equiv D_{11}/D_{22}$ , и перед членом  $2(B_c^T)^{3/2}$  выбран знак «минус» в соответствии с требованием (8a), отбирающим верхнюю левую линию на рис. 1 из двух границ, описываемых (8b), для порога бифуркации. Зная  $B_c^T$ , легко найти  $k_c^2$  как

$$k_c^2 = \frac{A}{\sqrt{B_c^T D_{11} D_{22}}}. \quad (10)$$

Вычисленные по (9) и (10) критические значения  $B_c^T$  и  $k_c^2$ , наряду с коэффициентами  $D_{11}, D_{22}$  и  $A$ , являются основными параметрами для слабо нелинейного анализа при получении амплитудных уравнений для данной реакционно-диффузионной системы.

Для выяснения характера неустойчивости необходимо вычислить коэффициент  $g$  (точнее, определить его знак) в амплитудном уравнении (6). Для этого воспользуемся результатами работы [14], в которых надо положить  $\hat{D}_{11} \rightarrow u_0 D_{11}$ ,  $\hat{D}_{22} \rightarrow v_0 D_{22}$  и  $Q_{11} \rightarrow D_{11}$ ,  $Q_{22} \rightarrow D_{22}$ . Тогда выражение для  $g$  запишется в виде

$$g = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left\{ \left[ 2(1-\beta) \left( \frac{B_c^T}{A} + \alpha A \right) - k_c^2 D_{11} \right] \hat{a}_2 + \left[ 2(1-\beta) A - \alpha\beta k_c^2 D_{22} \right] (\hat{b}_0 + \hat{b}_2) + 3\alpha(1-\beta) \right\}, \quad (11)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\alpha = -\frac{1}{A^2} (B_c^T - 1 - k_c^2 A D_{11}), \quad (12a)$$

$$\beta = \frac{1}{B_c^T} (B_c^T - 1 - k_c^2 A D_{11}), \quad (12b)$$

$$\hat{b}_0 = -\frac{2}{A^2} \left( \frac{B_c^T}{A} + 2\alpha A \right). \quad (13)$$

Выражения для  $\hat{a}_2$  и  $\hat{b}_2$  совпадают с выведенными в работе [14] и приводятся здесь с целью полноты набора формул для расчета:

$$\hat{a}_2 = -\frac{1}{\det \Phi} (G_1 \Phi_{22} - G_2 \Phi_{12}), \quad (14a)$$

$$\hat{b}_2 = -\frac{1}{\det \Phi} (G_2 \Phi_{11} - G_1 \Phi_{21}). \quad (14b)$$

В формулах (14a) и (14b)  $G_{1,2}$  вычисляются из соотношений

$$G_1 = B_c^T/A + 2\alpha A - 2k_c^2 D_{11}, \quad (15a)$$

$$G_2 = -B_c^T/A - 2\alpha A - 2k_c^2 D_{22}, \quad (15b)$$

а элементы  $\Phi_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , образуют матрицу вида

$$\Phi = \begin{pmatrix} B_c^T - 1 - 4k_c^2 A D_{11} & A^2 \\ -B_c^T & -A^2 - 4k_c^2 (B_c^T/A) D_{22} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Результат вычислений для границы между супер- и подкритической бифуркациями, определяемой нулевым значением  $g$  из (11), представлен графически на рис. 2 для двух наборов параметров, использованных при получении рис. 1, в сравнении с данными для стандартной модели с линейной диффузией, классического брюсселятора, взятыми из диссертации [16]. Приведенные здесь иллюстрации показывают, что в исследуемой в настоящей работе системе область отрицательных  $g$ , соответствующая сверхкритической бифуркации, покрывает всю зону тьюринговских структур, в то время как для модели со стандартной линейной диффузией тьюринговские структуры могут возникать как в суперкритической, так и в подкритической областях бифуркации.

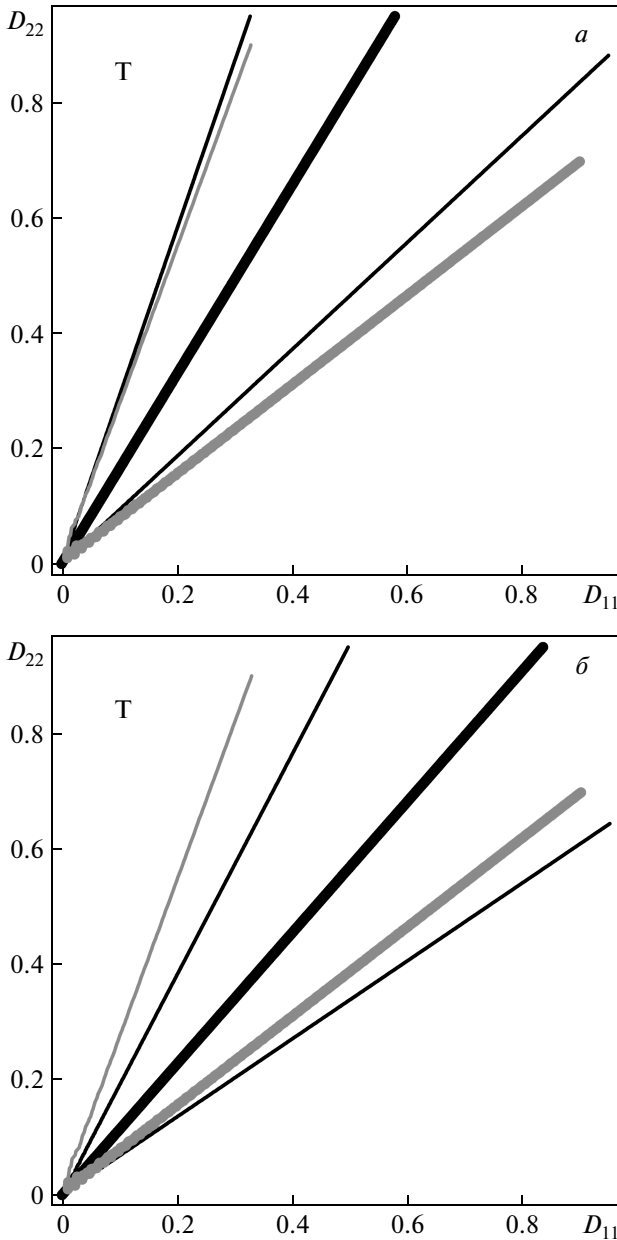
## 2.2. Орегонатор

Двухкомпонентный орегонатор имеет следующие реакционные функции:

$$F_1(u, v) = \frac{1}{\varepsilon} \left( u - u^2 - f v \frac{u-q}{u+q} \right), \quad F_2(u, v) = u - v$$

с положительными постоянными  $q, f$  и  $\varepsilon$ . Положение равновесия определяется равенством

$$u_0 = v_0 = \frac{1}{2} \left[ 1 - q - f + \sqrt{(1 - q - f)^2 + 4q(1 + f)} \right], \quad (17)$$



**Рис. 2.** Брюсселятор. Параметрическая плоскость  $(D_{11}, D_{22})$  при (а)  $A = 4, B = 13$  и (б)  $A = 4, B = 15.5$  ( $B_c^H = 16$ ) с границей  $g = 0$  (серые линии) между супер- и подкритической бифуркациями. Жирной серой линией отмечена граница, вычисленная для исследуемой в данной работе модели, а тонкой серой линией — граница для стандартного случая системы с линейной диффузией, вычисленная по формулам из [16]. Область отрицательных  $g$ , соответствующая сверхкритической бифуркации, расположена слева и выше жирной серой линии. Черные линии — границы (8а), (8б) с тьюринговской областью из рис. 1. Т — тьюринговская область

а якобиан — матрицей

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon_c^H / \varepsilon & -\varepsilon^* / \varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

в которой использованы обозначения

$$\varepsilon^* = f \frac{u_0 - q}{u_0 + q}, \quad \varepsilon_c^H = 1 - 2u_0 - \frac{2qfu_0}{(u_0 + q)^2} \quad (19)$$

для критического значения параметра  $\varepsilon$  при наступлении неустойчивости Хопфа. Для орегонатора условие  $\text{tr } J < 0$  ограничивает значения  $\varepsilon$  посредством неравенства  $\varepsilon > \varepsilon_c^H$ , а требование  $\det J > 0$  дает ограничение  $\varepsilon_c^H < \varepsilon^*$  на параметры  $q, f$  и  $\varepsilon$ .

С учетом эффективной матрицы диффузии (4) и якобиана (18) неравенства (3а), (3б) записываются в виде

$$-D_{11} + \frac{\varepsilon_c^H}{\varepsilon} D_{22} > 0, \quad (20a)$$

$$\left(-D_{11} + \frac{\varepsilon_c^H}{\varepsilon} D_{22}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon} D_{11} D_{22} (\varepsilon^* - \varepsilon_c^H) \geq 0. \quad (20b)$$

Тьюринговская область орегонатора сходна по форме и расположению с областью для брюсселятора и отдельно не показана. В отличие от случая брюсселятора она остается неизменной при восстановлении стандартной линейной диффузии, поскольку в силу  $u_0 = v_0$  в эффективной диффузионной матрице фактор  $u_0$  при коэффициентах диффузии в (3) исключается из неравенств (20а) и (20б).

Критическое значение  $\varepsilon_c^T$  параметра  $\varepsilon$  для неустойчивости Тьюринга находится из формулы (20b):

$$\varepsilon_c^T = \frac{1}{\theta} \left[ 2\varepsilon^* - \varepsilon_c^H - 2\sqrt{\varepsilon^*(\varepsilon^* - \varepsilon_c^H)} \right], \quad (21)$$

где выбран знак «минус» перед квадратным корнем в соответствии с требованием (20а). Определив критическое значение  $\varepsilon_c^T$ , можно вычислить  $k_c^2$  как

$$k_c^2 = \frac{1}{u_0 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \sqrt{\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_c^H}{\varepsilon_c^T}} \quad (22)$$

и, используя результаты слабо нелинейного анализа, найти коэффициент  $g$ , который в случае орегонатора может быть записан в форме

$$g = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \left[ (F_1^{uu} + \alpha F_1^{uv} - k_c^2 D_{11})(\hat{a}_0 + \hat{a}_2) + (F_1^{uv} - \alpha\beta k_c^2 D_{22})(\hat{a}_0 + \hat{b}_2) + \frac{F_1^{uuu} + 3\alpha F_1^{uuv}}{2} \right]. \quad (23)$$

Здесь выражения для  $\alpha$  и  $\beta$  принимают вид

$$\alpha = \frac{\varepsilon_c^H}{\varepsilon_c^*} - k_c^2 u_0 D_{11} \frac{\varepsilon_c^T}{\varepsilon_c^*}, \quad (24a)$$

$$\beta = k_c^2 u_0 D_{11} - \frac{\varepsilon_c^H}{\varepsilon_c^T}, \quad (24b)$$

в то время как

$$\hat{a}_0 = \frac{\varepsilon_c^T}{\varepsilon_c^* - \varepsilon_c^H} (F_1^{uu} + 2\alpha F_1^{uv}), \quad (25)$$

и  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{b}_2$  вычисляются по формулам (14a), (14b), в которых

$$G_1 = F_1^{uu}/2 + \alpha F_1^{uv} - 2k_c^2 D_{11}, \quad (26a)$$

$$G_2 = -2k_c^2 D_{22}, \quad (26b)$$

а матрица  $\Phi$  равна

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_c^H/\varepsilon_c^T - 4k_c^2 u_0 D_{11} & -\varepsilon_c^*/\varepsilon_c^T \\ 1 & -1 - 4k_c^2 u_0 D_{22} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В этих уравнениях использованы следующие выражения для вторых производных реакционных функций орегонатора, вычисленные в работе [17]:

$$F_1^{uu} = \left[ \frac{\partial^2 F_1(u, v)}{\partial u^2} \right]_{u_0, \varepsilon_c^T} = -\frac{2}{\varepsilon_c^T} \left[ 1 - \frac{2qfu_0}{(u_0 + q)^3} \right], \quad (28a)$$

$$F_1^{uv} = \left[ \frac{\partial^2 F_1(u, v)}{\partial u \partial v} \right]_{u_0, \varepsilon_c^T} = -\frac{2}{\varepsilon_c^T} \frac{qf}{(u_0 + q)^2}, \quad (28b)$$

$$F_1^{uuu} = \left[ \frac{\partial^3 F_1(u, v)}{\partial u^3} \right]_{u_0, \varepsilon_c^T} = -\frac{12}{\varepsilon_c^T} \frac{qfu_0}{(u_0 + q)^4}, \quad (28c)$$

$$F_1^{uuv} = \left[ \frac{\partial^3 F_1(u, v)}{\partial u^2 \partial v} \right]_{u_0, \varepsilon_c^T} = \frac{4}{\varepsilon_c^T} \frac{qf}{(u_0 + q)^3}. \quad (28d)$$

При вычислении по формулам (23)–(28) обнаруживается, что  $g < 0$  во всей параметрической области  $(D_{11}, D_{22})$  при типичных для орегонатора значениях параметров  $q$ ,  $f$  и  $\varepsilon$ , т. е. тьюринговская неустойчивость всюду имеет суперкритический характер и кубическое амплитудное уравнение является достаточным для описания системы. В этом кардинальное отличие результатов для этого случая от результатов, полученных выше для брюсселятора.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тьюринговские области, полученные в данной работе, обладают простой геометрией, обусловленной формой определяющих их неравенств. Более сложные по форме и расположению области

были обнаружены недавно [18] в пространстве кросс-диффузионных коэффициентов  $(D_{12}, D_{21})$  в реакционно-диффузионной системе с нелинейной кросс-диффузией. В такой системе вычисления для брюсселятора и орегонатора дают разные результаты, поскольку в условиях возникновения неустойчивости — обобщенных на этот случай неравенствах (3a), (3b) — учитываются недиагональные элементы в якобианах, которые различаются знаком. В более же общем случае системы с нелинейным диффузионным транспортом [19] даже линейный анализ устойчивости представляет собой нетривиальную процедуру.

Тьюринговские структуры, возникающие в системе в результате потери ее устойчивости, могут быть различного типа. В данной работе были рассмотрены одномерные реакционно-диффузионные уравнения, поэтому здесь уместно говорить об одномерных структурах, о полосах. Однако полосы являются протяженными структурами, т. е., строго говоря, двумерными, и должны описываться амплитудным уравнением типа уравнения Ньюэлла–Уайтхеда–Сегела (Newell–Whitehead–Segel) [20, 21]. Тем не менее, результаты выполненного анализа остаются справедливыми и в этом случае, поскольку уравнение Ньюэлла–Уайтхеда–Сегела может быть получено из одномерного амплитудного уравнения (6) путем простой трансформации пространственной производной, а все коэффициенты в нем остаются при этом неизменными [22] (в частности, коэффициент  $g$ , необходимый для определения характера неустойчивости Тьюринга).

Тьюринговская неустойчивость относится к диффузионным неустойчивостям, которые приводят к образованию диссипативных структур. Другой тип диффузионной неустойчивости, волновая неустойчивость [15], при выполнении условий [23] которой наблюдаются стоячие или бегущие волны [24, 25], может являться естественным продолжением исследований в этом направлении.

В заключение автор хотел бы искренне поблагодарить Вернера Хорстхемке (Werner Horsthemke) за предоставление работы [10], которая послужила темой для настоящего исследования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Turing, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. B **237**, 37 (1952).

2. N. Shigesada, K. Kawasaki, and E. Teramoto, *J. Theor. Biol.* **79**, 83 (1979).
3. A. Okubo and S. A. Levin, *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, Springer, Berlin (2001).
4. Г. Р. Иваницкий, А. В. Панфилов, М. А. Цыганов, *Биофизика* **32**, 354 (1987).
5. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва (1987).
6. Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский, *Структуры и хаос в нелинейных средах*, Физматлит, Москва (2007).
7. М. А. Цыганов, В. Н. Бикташев, Дж. Бриндли, А. В. Холден, Г. Р. Иваницкий, *УФН* **177**, 275 (2007).
8. V. K. Vanag and I. R. Epstein, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **11**, 897 (2009).
9. N. Kumar and W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **83**, 036105 (2011).
10. N. Kumar and W. Horsthemke, *Physica A* **389**, 1812 (2010).
11. В. К. Ванаг, *УФН* **174**, 991 (2004).
12. A. N. Zaikin and A. M. Zhabotinsky, *Nature* **225**, 535 (1970).
13. I. Lengyel and I. R. Epstein, *Science* **251**, 650 (1991).
14. Е. П. Земсков, *ЖЭТФ* **142**, 824 (2012).
15. В. К. Ванаг, *Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах*, РХД, Москва (2008).
16. A. De Wit, PhD Thesis, Université Libre de Bruxelles, Brussels (1993).
17. E. P. Zemskov, V. K. Vanag, and I. R. Epstein, *Phys. Rev. E* **84**, 036216 (2011).
18. E. P. Zemskov, K. Kassner, M. J. B. Hauser, and W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **87**, 032906 (2013).
19. V. Méndez, S. Fedotov, and W. Horsthemke, *Reaction-Transport Systems*, Springer, Berlin (2010).
20. A. C. Newell and J. A. Whitehead, *J. Fluid. Mech.* **38**, 279 (1969).
21. L. A. Segel, *J. Fluid. Mech.* **38**, 203 (1969).
22. M. Cross and H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009).
23. М. Ю. Боруна, А. А. Полежаев, *Компьютерные исследования и моделирование* **3**, 135 (2011).
24. *Автоволновые процессы в системах с диффузией*, Сб. научн. трудов, ИПФ АН СССР, Горький (1981).
25. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, Наука, Москва (1987).