

КОЛЛАПС И ПОПЯТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ В АККРЕЦИОННОМ ПОТОКЕ

Е. Ю. Банникова^{a,b}, В. М. Конторович^{a,b}, С. А. Пославский^b*

^a*Радиоастрономический институт национальной академии наук Украины
61002, Харьков, Украина*

^b*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61077, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 21 марта 2013 г.

Получено решение задачи о взаимодействии двух соосных противоположно вращающихся кольцевых вихрей при наличии сходящегося (аккреционного) потока со стоком в центре симметрии. Показано, что вихри, которые удалялись бы друг от друга в отсутствие потока (задача, обратная задаче Гельмгольца), сближаются потоком, а затем выбрасываются с ускорением вдоль оси симметрии. При этом скорость выброса возрастает с ростом мощности стока. Однако если мощность стока превосходит некоторое критическое значение, которое зависит от начальных условий, выброса не происходит и вихри захватываются потоком и коллапсируют. Аналогичный захват и коллапс возможен и при движении одиночного вихря в потоке. Существенно отличие от плоского случая, где коллапса не происходит. Обнаруженное явление может найти применение при изучении нелинейных процессов в атмосферных вихрях, а также в активных ядрах галактик и атмосферах планет.

DOI: 10.7868/S0044451013080208

деленной области значений параметров вихрь может совершать попятное движение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие кольцевых вихрей с потоками представляет значительный интерес и имеет многочисленные приложения (см. юбилейный выпуск журнала [1], посвященный 150-летию классической работы Гельмгольца [2], и приведенную там библиографию). В двумерной гидродинамике кольцевой вихрь, как известно, моделируется парой точечных вихрей с разными знаками циркуляции, расположенных симметрично относительно оси движения. В отсутствие потока движение пары происходит равномерно и прямолинейно вдоль оси симметрии [3]. При учете радиального потока характер движения становится существенно другим [4]. В расходящемся потоке расстояние между компонентами пары увеличивается, а скорость движения замедляется, а в сходящемся потоке ситуация меняется на противоположную: уменьшение расстояния между компонентами пары приводит к увеличению их скорости. В опре-

В связи с астрофизическими приложениями [5–10] представляет интерес также система из двух зеркально-симметричных кольцевых вихрей (дипольный тороидальный вихрь). В работе [11] исследовалась динамика дипольного тороидального вихря в радиальном потоке в $2D$ -описании. В этом приближении дипольный тороидальный вихрь можно представить четырьмя точечными вихрями. Хорошо известно, начиная с работы Гребли [12], что в результате лобового столкновения компоненты пар меняются местами, а новые пары разлетаются под прямым углом к направлению движения с исходными по величине скоростями. Присутствие центрального радиального потока приводит к эффекту либо замедления (расходящийся поток), либо ускорения (сходящийся поток) разлетающихся в противоположные стороны пар [11]. При этом скорость выбрасываемой пары в сходящемся (аккреционном) потоке зависит от отношения мощности потока к интенсивности вихря и может достигать больших значений. В работе [5] было показано, что эффект ускоренного выброса вихревой пары

*E-mail: vkont1001@yahoo.com

в определенном смысле сохраняется и для более сложного аккреционного течения: произведение скоростей выброшенных пар определяется только монополюсной составляющей потока.

Эти решения могут интерпретироваться как движение и распад на составляющие дипольного тороидального вихря. С этой точки зрения в работах [7, 11] в $2D$ -описании показано, что дипольный тороидальный вихрь в аккреционном потоке сжимается по большому радиусу и, распадаясь, порождает двусторонний выброс составляющих его кольцевых вихрей по оси симметрии системы.

В данной работе эта задача рассматривается на основании осесимметричного $3D$ -описания кольцевых (тороидальных) вихрей (см. обзоры [13–17]). Задача допускает гамильтонову формулировку и в рамках представления о тонких тороидальных вихрях [2] имеет точное решение. Существенно, что в определенной области параметров поведение $3D$ -вихрей существенно отличается от поведения их аналогов в плоской $2D$ -модели. А именно, в мощном сходящемся потоке возникает коллапс с затягиванием вихрей в область стока. Показано, что при параметрах, близких к параметрам, соответствующим условиям коллапса, возможно попятное движение вихрей между точками поворота.

2. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О ДИПОЛЬНОМ ТОРОИДАЛЬНОМ ВИХРЕ В ПОТОКЕ

Рассмотрим задачу о динамике дипольного тороидального вихря в радиальном потоке, представляя дипольный вихрь как систему двух кольцевых вихрей. Уравнения для большого радиуса $R(t)$ тонкого кольцевого вихря и координаты $Z(t)$ его центра на оси симметрии при наличии соосных ему вихрей были получены еще Гельмгольцем [2]. Дайсон показал [18], что этим уравнениям соответствует интеграл энергии, благодаря этому в последующих работах им была придана гамильтонова форма [13, 19]. При наличии потока уравнения по-прежнему остаются гамильтоновыми. Функция тока Стокса радиального потока, в котором движется дипольный вихрь, имеет вид

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (2.1)$$

Здесь Q — мощность источника, расположенного в начале координат. (В случае сходящегося «аккреционного» потока будем использовать также положительную мощность стока $P = -Q > 0$.) В силу сим-

метрии задачи достаточно рассмотреть уравнения движения в координатах R, Z для одного кольцевого вихря из пары в полупространстве $z > 0$:

$$\dot{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial Z}, \quad \dot{Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial R}, \quad (2.2)$$

с функцией Гамильтона H вида

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \frac{8R}{e^{7/4} a(R)} - \frac{\Gamma R}{4\pi} C(k) + \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}}. \quad (2.3)$$

Здесь $C(k)$ представляет собой введенную еще Гельмгольцем комбинацию эллиптических интегралов:

$$C(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \quad (2.4)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода, k — их модуль:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (2.5)$$

$$k^2 = \frac{R^2}{R^2 + Z^2}.$$

Выражение для гамильтониана (2.3) получено из (A.2) при учете, что соосные кольцевые вихри, составляющие дипольный тороидальный вихрь, имеют равные радиусы и противоположные, но равные по модулю циркуляции Γ (рис. 1). Мы предполагаем, что динамика вихря происходит с сохранением его объема при однородной завихренности [13], т. е. $Ra^2(R) = \beta^2 = \text{const}$, где a — малый радиус кольца, а константа β определяется начальным условием $\beta = a_0 \sqrt{R_0}$. Таким образом, мы не учитываем возможное изменение плотности в ядре вихря [20].

3. СВЯЗЬ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ ВЫБРОСА

Движению вихря по траектории соответствует постоянство функции Гамильтона $H = \text{const}$, которая и фиксирует выбранную траекторию. Начальным состоянием будем считать вихрь радиуса $R_0 \gg a_0$. Кольцевые вихри при этом находятся друг

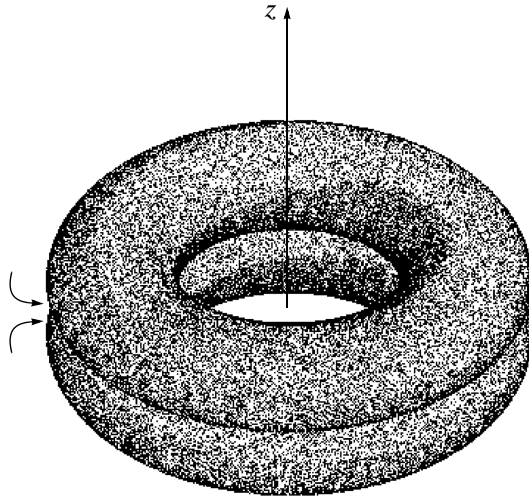


Рис. 1. Схема дипольного тороидального вихря. Две компоненты вихря являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости симметрии $z = 0$. Стрелками указано направление вихревого движения

от друга на малом расстоянии $2Z_0$, удовлетворяющем условию $R_0 \gg Z_0 > a_0$. Этому соответствуют асимптотики эллиптических интегралов [21], входящих в гамильтониан (2.3), при $k \rightarrow 1$:

$$K(k \rightarrow 1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2}, \quad E(1) = 1. \quad (3.1)$$

Компонента, выброшенная в положительном направлении оси симметрии z , на больших расстояниях $Z_\infty \gg R_\infty$ описывается асимптотиками интегралов при $k \rightarrow 0$:

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{K(k) - E(k)}{k} \rightarrow k \frac{\pi}{4} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

$$k \rightarrow 0.$$

Используя соотношения (3.1), (3.2), находим асимптотики функции Гамильтона для начального ($R \rightarrow \infty, k \rightarrow 1$) и конечного ($Z \rightarrow +\infty, k \rightarrow 0$) состояний кольцевого вихря ($z > 0$).

1) При $R \rightarrow \infty$ для $C(k \rightarrow 1)$ получаем

$$C(k) \rightarrow K(k) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2} \approx \ln \frac{4R_0}{Z_0}. \quad (3.3)$$

Соответственно, гамильтониан сводится к виду

$$H = \frac{\Gamma R_0}{4\pi} \ln \frac{2Z_0}{e^{7/4} a(R_0)} + \frac{P}{4\pi} \frac{Z_0}{R_0}. \quad (3.4)$$

Последнее слагаемое в силу малости $Z_0/R_0 \ll 1$ можно опустить. Связь R_0 и Z_0 координат кольца приобретает вид

$$Z_0 \approx \frac{e^{7/4}}{2} a(R_0) \exp \frac{4\pi H}{\Gamma R_0}.$$

2) При $Z \rightarrow \infty$ из асимптотик $K(k \rightarrow 0)$ и $E(k \rightarrow 0)$ согласно (3.2) следует, что $C(k) \rightarrow 0$.

После прохождения области стока для радиуса кольца R_∞ имеем

$$R_\infty \ln \frac{8R_\infty}{e^{7/4} a_\infty} = \frac{1}{\Gamma} (4\pi H - P), \quad Z_\infty \gg R_\infty. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) можно представить в виде $x \ln x = y$, которое при условии $\ln y \gg 1$ имеет приближенное аналитическое решение $x = y / \ln y$. Относительная погрешность этого решения $\ln(\ln y) / \ln y$ проходит через максимум при $y = e^e$ и стремится к нулю при $\ln y \rightarrow \infty$. Это дает возможность в рамках указанных ограничений привести явные выражения для радиуса вихря как функции его координаты и параметров, определяемые начальными условиями.

4. КРИТИЧЕСКАЯ МОЩНОСТЬ ПОТОКА

Из выражения (3.5) видно, что решения с уходом вихрей на бесконечность существуют, только если мощность потока не превышает критического значения

$$P_{cr} = 4\pi H. \quad (4.1)$$

Наибольшая скорость выбрасываемых колец достигается при $P \rightarrow P_{cr} - 0$. При превышении критического значения мощности стока $P > P_{cr}$ вихрь затягивается течением в сток и коллапсирует. Это качественно отличает рассматриваемые осесимметричные $3D$ -решения от решений ранее рассмотренных аналогичных плоских $2D$ -задач [4, 5, 11]. Природа этого отличия состоит в том, что расстояние между точечными вихрями, имитирующими кольцевой вихрь, может быть сколь угодно малым и, соответственно, собственная скорость вихря — сколь угодно большой. В $3D$ -случае наименьшее расстояние регулируется условием $R \geq a(R)$ (для тонкого вихря $R \gg a$) и, таким образом, оно всегда конечно (и определяется заданными начальными условиями). В то же время скорость течения вблизи стока возрастает неограниченно обратно пропорционально квадрату расстояния, благодаря чему вихрь затягивается в особенность в случае аккреционного потока (см. рис. 2). В плоском $2D$ -случае скорость течения и скорость вихря возрастают по одному и тому

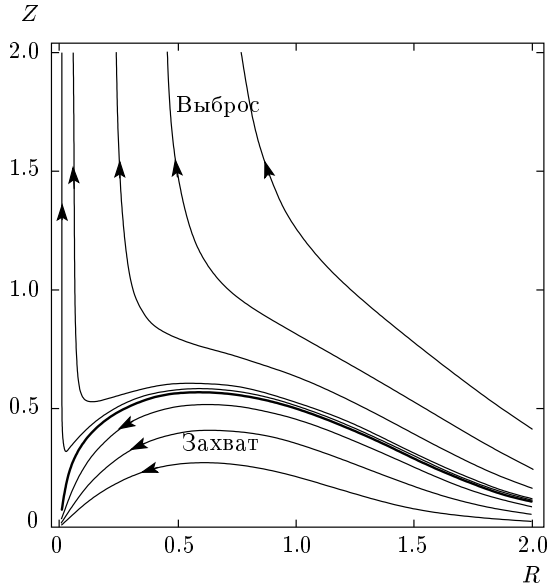


Рис. 2. Линии уровня гамильтониана, соответствующие траекториям одной из компонент дипольного тороидального вихря с $\Gamma = -2\pi$ и $\beta = 10^{-3}$, который движется в сходящемся потоке с мощностью стока $P = 2\pi$. Видна область захвата вихрем и сепаратриса, соответствующая критическому значению гамильтониана

же закону — обратно пропорционально расстоянию. Наличие в этом случае явно найденных точек поворота [4, 11] показывает, что собственная скорость вихря превышает скорость течения, что всегда приводит в $2D$ -случае к выбросу компонент.

В $3D$ -рассмотрении при мощности, приближающейся к критической, приближение тонкого вихря становится неприменимо. Для иллюстрации используем приближенное аналитическое решение (см. разд. 3). По мере роста мощности стока P радиус кольца на больших расстояниях от него уменьшается:

$$R_\infty \approx \frac{2}{3} \frac{L_\infty}{\ln \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{8}{e^{7/4} \beta} \right)^{2/3} L_\infty \right\}}, \quad (4.2)$$

$$L_\infty = \frac{1}{\Gamma} (4\pi H - P),$$

а его скорость растет:

$$\dot{Z}_\infty \approx \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty} \ln \frac{8R_\infty}{e^{1/4} a_\infty}.$$

При $P \rightarrow P_{cr} = 4\pi H$ величина $L_\infty \rightarrow 0$ и радиус кольца уменьшается настолько, что используемое приближение тонкого кольца не выполняется.

По-видимому, истинного коллапса при этом не происходит (ср. с обсуждением общей проблемы коллапса в гидродинамике в обзоре [22]). Естественно считать, что вихрь становится компактным. Аналитически этот переход описать не удастся, однако численно переход от тонкого вихря к вихрю Хилла был прослежен в работе [23] (см. также [24]).

5. ОДИНОЧНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ ВИХРЬ В РАДИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Для одиночного кольцевого вихря в потоке мощности $Q = \text{const}$, описываемом функцией тока (2.1), гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \frac{8R}{e^{7/4} a(R)} - \frac{Q}{4\pi} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}}. \quad (5.1)$$

Из уравнений движения вихревого кольца в канонической форме (2.2) находим:

$$\dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} + \frac{Q}{4\pi} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \quad (5.2)$$

$$\dot{R} = \frac{Q}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим движение вихревого кольца с $\Gamma < 0$ в сходящемся потоке ($P = -Q > 0$), см. рис. 3. Вдали от стока при положительных z кольцо движется в сторону убывающих значений z . Из формулы (5.2) видно, что в сходящемся потоке в течение всего времени движения радиус вихревого кольца уменьшается. На рис. 4 приведены уровни гамильтониана (5.1), соответствующие разным траекториям движения вихревого кольца в плоскости (Z, R) . Сепаратриса, на которой $H = -P/4\pi$, отделяет траектории, попадающие в сток (при $-4\pi H < P$), от траекторий,

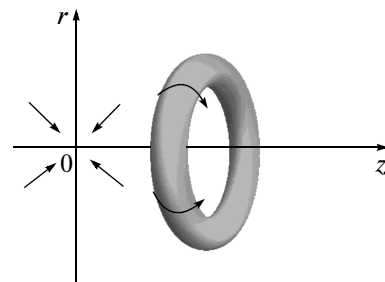


Рис. 3. Одиночный кольцевой вихрь в фоновом радиальном потоке, центр которого находится в начале координат. При $\Gamma < 0$ вихрь движется справа налево вдоль оси z

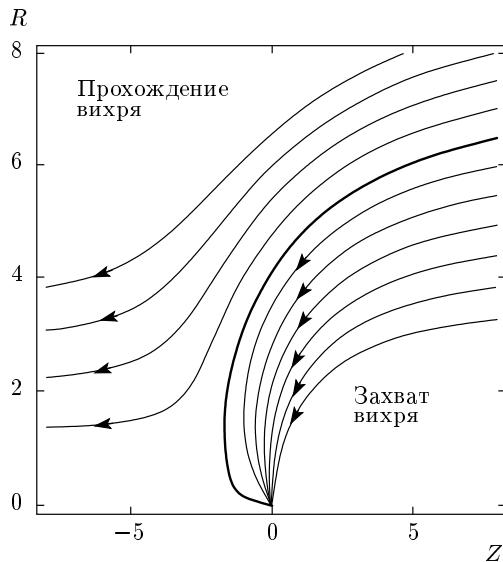


Рис. 4. Траектории одиночного кольцевого вихря (уровни гамильтониана $H = \text{const}$) в аккреционном потоке с параметрами $P = -Q = 4\pi$, $\Gamma = -0.02P$. Сепаратриса выделена жирной кривой

уходящих на бесконечность ($-4\pi H > P$). Такое поведение непосредственно следует из (5.1). В общем случае условие захвата имеет вид $-4\pi H \text{sgn} \Gamma < P$.

Рассмотрим асимптотики при $Z \rightarrow \pm\infty$ бесконечной в обе стороны траектории кольца с заданным значением гамильтониана H . Равенство (5.1) (с учетом условия сохранения объема кольца) при $Z \rightarrow +\infty$ и $R \rightarrow R_+$ принимает вид

$$H = \frac{\Gamma R_+}{4\pi} \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{7/4}} - \frac{Q}{4\pi}. \quad (5.3)$$

С другой стороны, при $Z \rightarrow -\infty$ и $R \rightarrow R_-$ получим

$$H = \frac{\Gamma R_-}{4\pi} \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{7/4}} + \frac{Q}{4\pi}. \quad (5.4)$$

Отсюда находим связь между R_+ и R_- в виде

$$R_- \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{7/4}} + \frac{Q}{\Gamma} = R_+ \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{7/4}} - \frac{Q}{\Gamma}. \quad (5.5)$$

Скорость центра кольцевого вихря, движущегося в сходящемся потоке, увеличивается от начального значения

$$\dot{Z}_+ \approx \frac{\Gamma}{4\pi R_+} \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{1/4}}$$

до значения на выходе из потока

$$\dot{Z}_- \approx \frac{\Gamma}{4\pi R_-} \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{1/4}}.$$

(Вклад от потока $\Delta \dot{Z}_\pm \approx \pm Q(4\pi Z_\pm^2)^{-1}$ на больших расстояниях пренебрежимо мал.) Таким образом, кольцо сжимается сходящимся потоком ($R_- < R_+$), а его скорость возрастает:

$$\frac{V_-}{V_+} \approx \frac{R_+}{R_-} \frac{\ln(8R_-^{3/2}/\beta e^{1/4})}{\ln(8R_+^{3/2}/\beta e^{1/4})}. \quad (5.6)$$

Из уравнений движения (5.2) следует, что на траекториях могут присутствовать точки возврата, в которых направление движения центра кольца меняется на противоположное. В этих точках $\dot{Z} = 0$, т. е.

$$\frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} + \frac{QZ}{4\pi(R^2 + Z^2)^{3/2}} = 0. \quad (5.7)$$

Последнее равенство можно переписать в виде кубического уравнения относительно $\zeta \equiv Z^2$:

$$(\zeta + R^2)^3 - \frac{Q^2 R^2}{\Gamma^2 \ln^2 \left(\frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} \right)} \zeta = 0. \quad (5.8)$$

Это уравнение имеет один отрицательный нефизический корень, а при выполнении условия

$$\frac{4Q^2}{27\Gamma^2} \geq R^2 \ln^2 \left(\frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} \right), \quad (5.9)$$

совпадающего с условием вещественности корней, — два положительных корня, что отвечает случаю существования точек поворота. Из рис. 5 видно, что область попятного движения примыкает к сепаратрисе. За ней вихревое кольцо затягивается в сток и коллапсирует. Этот эффект отсутствует при $2D$ -описании на плоскости. В этом случае область попятного движения занимает ограниченный по координатам интервал значений, вне ее продолжается движение кольца, ускоренного из-за его сжатия потоком, в прежнем направлении [4]. Отметим, что аналогичные точки возврата, в которых $\dot{Z} = 0$, имеются и в случае дипольного тороидального вихря.

6. КОЛЬЦЕВОЙ ВИХРЬ В ПОТОКЕ, СОЗДАВАЕМОМ СТОКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВДОЛЬ ЕГО ОСИ

Рассмотрим случай движения вихревого кольца во внешнем осесимметричном потоке. Пусть этот поток определяется функцией тока Стокса от источников (стоков), распределенных на отрезке $[-L; L]$ оси симметрии с линейной плотностью $q(z)$:

$$\psi(z; r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{(z-z')q(z')}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} dz'. \quad (6.1)$$

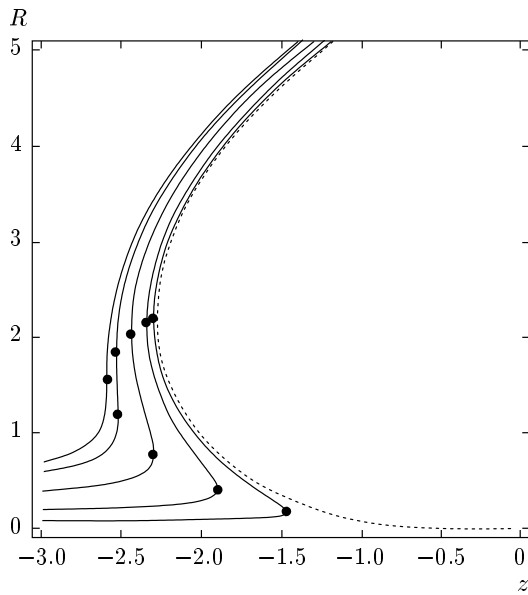


Рис. 5. Траектории движения вихря в расходящемся (сходящемся) потоке: $|Q| = 4\pi$, $\Gamma = 0.02Q$. Сепаратриса отмечена пунктирной линией. Выделены точки поворота. При движении вихря слева направо ($\Gamma > 0$) рисунок соответствует случаю источника ($Q > 0$), а при движении справа налево ($\Gamma < 0$) — случаю стока ($Q < 0$). Траектории, соответствующие коллапсу, не показаны (ср. с рис. 4)

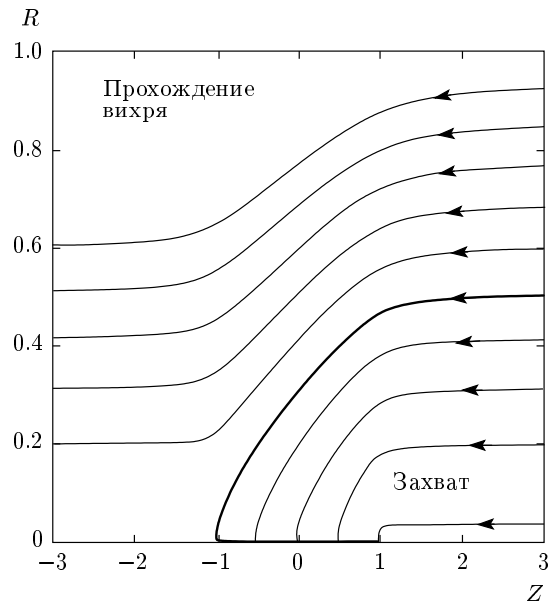


Рис. 6. Траектории движения одиночного кольцевого вихря $\Gamma = -4\pi$, $\beta = 0.01$ в аккреционном потоке к распределенному стоку длиной $2L = 2$ с полной мощностью $P = -Q = 4\pi$. Сепаратриса выделена жирной кривой. Вихрь движется справа налево. Показаны уровни гамильтониана $H = (k - 3)/2$, где $k = [0 \dots 10]$. Вблизи сепаратрисы имеются не показанные на рисунке области попятного движения

В случае равномерного распределения источников (стоков) на отрезке $[-L; L]$ с постоянной плотностью $q(z) \rightarrow q^0 = \text{const}$ функция тока приобретает простой вид:

$$\psi(z; r) = \frac{q^0}{4\pi} \times \left(\sqrt{r^2 + (z - L)^2} - \sqrt{r^2 + (z + L)^2} \right). \quad (6.2)$$

Уравнение, связывающее радиусы R_+ и R_- приходящего из бесконечности и уходящего на бесконечность кольца, по-прежнему, будет иметь вид (5.5), где

$$Q = \int_{-L}^L q(z) dz$$

— суммарная мощность источников (стоков), которая в случае их равномерного распределения на отрезке равна $Q = 2q^0L$. Так же, как и в случае точечного стока $P = -Q > 0$, траектория в плоскости (Z, R) , отвечающая критическому значению гамильтониана $H = -P/4\pi$, отделяет движения с захватом вихревого кольца (с $\Gamma < 0$) от движений, для которых такого захвата не происходит (рис. 6). При условии $-4\pi H < P$ траектории заканчиваются на отрезке $[-L; L]$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается динамика одиночного и дипольно-тороидального осесимметричных вихрей в центральном потоке. Получены точные решения и проанализированы их асимптотики. Показано, что существуют как аналогии, так и качественные отличия динамики таких вихрей от поведения моделирующих их систем плоских вихрей. В сходящемся (аккреционном) потоке кольцевые вихри, так же как и их плоские аналоги, ускоряются. В случае дипольного тороидального вихря это приводит к выбросу ускоренных компонент. В то же время, в отличие от плоского случая, при достаточной мощности потока происходит захват кольцевых вихрей потоком, сопровождающийся их коллапсом. Аналогичное явление должно иметь место и для распределенного стока. Обнаруженные особенности движения кольцевых вихрей в потоке могут найти применение в геофизических (атмосферные вихри, ураганы и торнадо) и астрофизических (активные ядра галактик и джеты, вихри в атмосферах планет) приложениях.

Авторы благодарны участникам XXI Научной сессии Совета РАН по нелинейной динамике за полезное обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения динамики системы кольцевых вихрей

Рассмотрим систему тонких соосных кольцевых вихрей с радиусами $a_i \ll R_i$, которые движутся в осесимметричном внешнем потоке. Уравнения динамики системы тонких соосных кольцевых вихрей [2] в осесимметричном внешнем потоке могут быть записаны в гамильтоновой форме:

$$\dot{Z}_i = \frac{1}{2\pi\Gamma_i R_i} \frac{\partial H}{\partial R_i}, \quad \dot{R}_i = -\frac{1}{2\pi\Gamma_i R_i} \frac{\partial H}{\partial Z_i}. \quad (A.1)$$

Для произвольного числа вихрей во внешнем потоке с функцией тока ψ гамильтониан системы имеет вид

$$H = 2\pi U + \sum_i \frac{\Gamma_i^2 R_i}{2} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + 2\pi \sum_i \Gamma_i \psi(Z_i, R_i), \quad (A.2)$$

где первое слагаемое описывает взаимодействие вихрей, а последнее слагаемое определяет влияние фонового потока на динамику колец [17]. Здесь [2, 13]

$$U = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \Gamma_i \Gamma_j \sqrt{R_i R_j} \times \left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) K(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} E(k_{ij}) \right], \quad (A.3)$$

$K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулями

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}, \quad (A.4)$$

Γ_i — интенсивность i -го вихря, Z_i — координата его центра. В интересующем нас случае дипольного тороидального вихря $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \rightarrow \Gamma$, таким образом, разделив (A.2) на $2\pi\Gamma$, приходим к (2.3). В случае одного вихря в потоке получаем (5.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Theor. Comp. Fluid Dyn. **24**, № 1–4 (2010).
2. Н. Helmholtz, J. Reine Angew. Math. **55**, 25 (1858); Г. Гельмгольц, *Основы вихревой теории*, ИКИ, Москва–Ижевск (2002).
3. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва (1947).
4. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, Г. М. Резник, ЖЭТФ **132**, 615 (2007).
5. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, Астрон. ж. **84**(4), 298 (2007).
6. М. Г. Абрамян, Астрофизика **51**, 201, 431, 617 (2008).
7. S. A. Poslavsky, E. Yu. Bannikova, and V. M. Kontorovich, Astrophysics **53**, 174 (2010).
8. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, Письма в Астрон. ж. **36**, 883 (2010) [N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, Astron. Lett. **36**, 835 (2010)].
9. Л. И. Матвеевко, С. В. Селезнев, Письма в Астрон. ж. **37**, 176, 563, (2011).
10. E. Churazov, M. Bruggen, C. R. Kaiser, H. Bohringer, and W. Forman, Astrophys. J. **554**, 261 (2001).
11. E. Yu. Bannikova and V. M. Kontorovich, Phys. Lett. A **373**, 1856 (2009).
12. W. Grobli, Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Geselsch. **22**, 37. 129 (1877).
13. В. В. Мелешко, М. Ю. Константинов, *Динамика вихревых структур*, Наук. думка, Киев (1990).
14. V. V. Meleshko, Theor. Comp. Fluid Dyn. **24**, 403 (2010).
15. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
16. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, *Распространение волн в сдвиговых потоках*, Наука, Москва (1996).
17. G. Reznik and Z. Kizner, Theor. Comp. Fluid Dyn. **24**, 65 (2010).
18. F. Dyson, Phil. Trans. Roy. Soc. A **184**, 43 (1892).
19. Н. С. Васильев, Записки матем. отд. новорос. общества естеств. **21**, 1 (1913).
20. О. К. Черемных, Нелинейная динамика **4**, 417 (2008).
21. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
22. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
23. J. Norbury, J. Fluid Mech. **57**, 417 (1973).
24. С. В. Алексеенко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов, *Введение в теорию концентрированных вихрей*, ИКИ, Москва–Ижевск (2005).