

ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ В ЭКСИТОННОЙ ОБЛАСТИ СПЕКТРА

П. И. Хаджи^{a,b}, В. В. Васильев^{b*}^a Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
MD2800, Кишинев, Молдова^b Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
MD3300, Тирасполь, Молдова

Поступила в редакцию 28 марта 2013 г.

В приближении среднего поля изучено явление оптической нутации в экситонной области спектра при учете экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий. Показано, что особенности протекания явления нутации определяются начальными плотностями экситонов и фотонов, расстройкой резонанса, параметром нелинейности и начальной разностью фаз. При отличных от нуля начальных концентрациях экситонов и фотонов имеют место три режима временной эволюции экситонов и фотонов: режим периодического превращения экситонов в фотоны и обратно, режим аperiodического превращения фотонов в экситоны и режим покоя. В условиях покоя начальные плотности экситонов и фотонов отличны от нуля и со временем не изменяются. Найдены амплитуды и периоды колебаний плотностей частиц, которые определяются параметрами системы. Предсказано существование явлений самозахвата экситонов и пленения фотонов в системе, которые возникают при пороговых значениях параметра нелинейности. С ростом этого параметра в системе возникает резкое, скачкообразное изменение амплитуд колебаний плотностей экситонов и фотонов при критическом значении параметра нелинейности. Показано, что оба эти явления обусловлены упругим экситон-экситонным взаимодействием, которое приводит к динамическому концентрационному сдвигу экситонного уровня.

DOI: 10.7868/S0044451013080063

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптическая нутация относится к явлениям когерентного взаимодействия света с веществом. Она состоит в периодическом изменении начального состояния системы под действием поля электромагнитной волны, которое приводит к соответствующей модуляции излучения среды [1]. При теоретическом описании явления нутации обычно используется полуклассическое приближение, в рамках которого среда описывается квантовомеханически, а поле — классически с помощью уравнений Максвелла. В работе [2] представлена теория оптической нутации в системе двухуровневых атомов, взаимодействующих с конечным числом фотонов в резонаторе. Теория оптической нутации в экситонной области спектра развита в ряде работ [3–9]. Под явлением нутации в этом случае понимают процесс периодического превращения экситонов в фотоны и обрат-

но. Такие превращения продолжаются до тех пор, пока не вступят в силу релаксационные процессы. Прямое наблюдение квантового когерентного явления оптической нутации на экситонах возможно путем зондирования состояния экситонов при условии, что время дефазировки экситонов больше периода нутации. При низких уровнях возбуждения среды в пределах линейной кристаллооптики частота нутации определяется константой экситон-фотонного взаимодействия, т.е. не зависит от амплитуды поля волны, а при высоких уровнях возбуждения она начинает зависеть от плотности экситонов. Было показано [7], что с ростом уровня возбуждения частота нутации может как возрастать, так и убывать.

Отметим, что детальное исследование особенностей оптической нутации и нелинейного поведения ее частоты от уровня возбуждения до сих пор отсутствует. Кроме того, представляет интерес установление возможности фазового управления процессом нутации и возможности существования явления самозахвата в экситонной области спектра. В работах [10] было показано, что особенности двухфо-

*E-mail: vasscorp@mail.ru

тонной нутации в системе когерентных биэкситонов определяются не только уровнем возбуждения, но и начальной разностью фаз биэкситонов и фотонов. Поэтому установление закономерностей протекания явления оптической нутации в экситонной области спектра при больших уровнях возбуждения является актуальным.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим явление оптической нутации в системе когерентных фотонов и экситонов в полупроводниках под действием ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения. Предполагается, что длительность τ_p импульсов намного меньше времени релаксации τ_{rel} экситонов. В этом случае процессами релаксации можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за время действия импульса. Будем считать, что все фотоны и экситоны в кристалле являются когерентными, имеют одни и те же волновые векторы, энергии, поляризации и фазы. Явление нутации рассматривается при больших уровнях возбуждения кристалла, когда возникает необходимость учета нелинейных процессов взаимодействия в системе экситонов и фотонов. В этих условиях основной нелинейностью является упругое экситон-экситонное взаимодействие [7, 8, 11]. Поэтому далее явление оптической нутации в экситонной области спектра рассматривается при учете экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий.

Гамильтониан однородно распределенных в кристалле когерентных экситонов и фотонов без учета антирезонансных членов запишем в виде

$$\frac{1}{\hbar}H = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + g(\hat{a}^\dagger \hat{c} + \hat{c}^\dagger \hat{a}) + \frac{1}{2} \nu \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}, \quad (1)$$

где $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{c}$ и $\hat{c}^\dagger$) — операторы уничтожения и рождения экситона (фотона), ω_0 (ω) — собственная частота экситона (фотона), g — константа экситон-фотонного взаимодействия, ν — константа упругого экситон-экситонного взаимодействия.

Используем далее приближение среднего поля, в котором среднее значение операторов отлично от нуля: $\langle \hat{a} \rangle = a \neq 0$, $\langle \hat{c} \rangle = c \neq 0$. Здесь a и c считаются комплексными амплитудами материального и электромагнитного полей. Усредняя гейзенберговские уравнения движения для операторов $\hat{a}$ и $\hat{c}$, в этом приближении получаем уравнения движения для соответствующих амплитуд a и c . Тогда в условиях полной когерентности системы среднее значе-

ние от произведения нескольких операторов факторизуется в виде произведения средних значений каждого из операторов. Получающаяся таким образом с использованием гамильтониана (1) система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая временную эволюцию амплитуд материального и электромагнитного полей, имеет вид

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \omega_0 a + gc + \nu a^* a a, \\ i\dot{c} &= \omega c + ga. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) дополним начальными условиями

$$a|_{t=0} = a_0 \exp(i\varphi_0), \quad c|_{t=0} = c_0 \exp(i\psi_0), \quad (3)$$

где каждая функция характеризуется своей начальной амплитудой (a_0, c_0) и фазой (φ_0, ψ_0).

Введем далее в рассмотрение плотности экситонов $n = a^* a$ и фотонов $f = c^* c$, а также функции $Q = i(a^* c - c^* a)$ и $R = a^* c + c^* a$. Используя (2), легко получить следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= gQ, \quad \dot{f} = -gQ, \\ \dot{Q} &= -(\Delta - \nu n)R + 2g(f - n), \quad \dot{R} = (\Delta - \nu n)Q, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta = \omega - \omega_0$ — расстройка резонанса. Используя (3), начальные условия для введенных функций можно представить в виде

$$\begin{aligned} n|_{t=0} &\equiv n_0 = |a_0|^2, \quad f|_{t=0} \equiv f_0 = |c_0|^2, \\ Q|_{t=0} &\equiv Q_0 = 2\sqrt{n_0 f_0} \sin \theta_0, \\ R|_{t=0} &\equiv R_0 = 2\sqrt{n_0 f_0} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\theta_0 = \psi_0 - \varphi_0$ — начальная разность фаз.

Решая систему уравнений (4) с учетом (5), получим интеграл движения

$$n + f = n_0 + f_0 \quad (6)$$

и выражение для функции Q :

$$\begin{aligned} Q^2 &= 4n(n_0 + f_0 - n) - \left\{ \frac{1}{g}(n - n_0) \times \right. \\ &\quad \times \left[\Delta - \frac{1}{2} \nu(n + n_0) \right] + 2\sqrt{n_0 f_0} \cos \theta_0 \left. \right\}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (6) представляет собой закон сохранения полного числа частиц в системе. Используя далее уравнение $\dot{n} = gQ$ и выражения (6) и (7), можно получить решение для плотности экситонов $n(t)$ в зависимости от времени. Далее будем интересоваться временной эволюцией плотности экситонов $n(t)$ при различных значениях параметров системы. Временную эволюцию плотности фотонов $f(t)$ легко найти, используя (6).

Дальнейшее исследование удобнее провести для нормированных величин

$$\begin{aligned} N &= \frac{n}{n_0 + f_0}, & F &= \frac{f}{n_0 + f_0}, & \tau &= gt, & \delta &= \frac{\Delta}{g}, \\ N_0 &= \frac{n_0}{n_0 + f_0}, & F_0 &= \frac{f_0}{n_0 + f_0}, & \alpha &= \frac{\nu(n_0 + f_0)}{g}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда интеграл движения (6) приводится к виду

$$N + F = N_0 + F_0 = 1, \quad (9)$$

а основное уравнение, описывающее временную эволюцию нормированной плотности экситонов $N(t)$, можно записать в виде

$$\left(\frac{dN}{d\tau}\right)^2 + W(N) = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} W(N) &= -4N(1-N) + \left[\delta(N-N_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2}(N^2 - N_0^2) + 2\sqrt{N_0 F_0} \cos \theta_0\right]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (10) можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора, где $(dN/d\tau)^2$ и $W(N)$ играют роль соответственно кинетической и потенциальной энергий. Качественно поведение $N(\tau)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии $W(N)$ нелинейного осциллятора от N при различных значениях параметров. Функция $N(\tau)$ может изменяться в той области

значений N , где $W(N) \leq 0$. Действительные корни уравнения $W(N) = 0$ определяют точки поворота классической траектории движения нелинейного осциллятора.

Из (4) и (5) можно получить начальное условие для скорости изменения $(dN/d\tau)_{\tau=0} \equiv \dot{N}_0$ функции $N(t)$. Знак производной $\dot{N}_0$ определяется только начальной разностью фаз θ_0 . При $2k\pi \leq \theta_0 \leq (2k+1)\pi$ получаем $\dot{N}_0 > 0$, а при $(2k+1)\pi \leq \theta_0 \leq 2(k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеем $\dot{N}_0 < 0$. Из (11) видно, что особенности временной эволюции определяются начальными плотностями частиц N_0 и F_0 , начальной разностью фаз θ_0 , расстройкой резонанса δ и параметром нелинейности α . Отметим, что если в начальный момент времени в системе присутствует только одна из компонент (только фотоны или экситоны), то особенности эволюции системы не зависят от начальной разности фаз θ_0 .

3. ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ В УСЛОВИЯХ ТОЧНОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим нелинейную эволюцию системы в условиях точного резонанса ($\delta = 0$). Из (11) следует, что в этом случае потенциальная энергия $W(N)$ имеет вид параболической ямы. Уравнение $W(N) = 0$ при $\delta = 0$ имеет только два действительных корня, которые мы обозначим через N_m и N_M ($N_m < N_M$), и два комплексно-сопряженных корня $N_{1,2} = u \pm iv$, где $u = -(N_M + N_m)/2$,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(N_M - N_m)^2 + \frac{8}{3} \left(N_M N_m - N_0^2 - \frac{4}{\alpha} \sqrt{N_0 F_0} \cos \theta_0 + \frac{8}{\alpha^2} \right)}.$$

Корни N_M и N_m имеют смысл наибольшей и наименьшей плотностей экситонов, которые они могут иметь в процессе эволюции. Амплитуду A_0 изменения плотности экситонов можно определить выражением $A_0 = N_M - N_m$. Зная корни N_M и N_m (которые могут быть получены численным либо аналитическим решением уравнения $W(N) = 0$), легко найти решение эволюционного уравнения $dN/d\tau = \pm \sqrt{-W(N)}$ для плотности экситонов, которое имеет вид

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}(N_M + N_m) - \frac{1}{2}(N_M - N_m) \times \\ &\times \frac{(n' + n'') \operatorname{cn}[(1/2)\alpha\sqrt{m}\tau \pm F(\varphi_0, k)] + n' - n''}{(n' - n'') \operatorname{cn}[(1/2)\alpha\sqrt{m}\tau \pm F(\varphi_0, k)] + n' + n''}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} n' &= \sqrt{(u - N_M)^2 + v^2}, & n'' &= \sqrt{(u - N_m)^2 + v^2}, \\ m &= \\ &= \sqrt{[(u - N_M)(u - N_m) + v^2]^2 + (N_M - N_m)^2 v^2}, \\ \varphi_0 &= \arccos \left[\frac{N_M n'' + N_m n' - N_0(n' + n'')}{N_M n'' - N_m n' + N_0(n' - n'')} \right], \\ k^2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(u - N_M)(u - N_m) + v^2}{m} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$\operatorname{cn}(\varphi)$ — эллиптический косинус с модулем k [12, 13], $F(\varphi_0, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода с параметром φ_0 и модулем k [12, 13]. Отсюда видно, что эволюция системы представляет собой периодическое изменение плотности экситонов и фотонов с периодом T , равным

$$T = \frac{8K(k)}{\alpha\sqrt{m}}, \quad (14)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [12, 13]. Таким образом, особенности явления оптической нутации определяются параметром нелинейности α и зависят от способа приготовления начального состояния, т. е. от начальных плотностей частиц и начальной разности фаз. Рассмотрим ряд частных случаев эволюции, определяемых конкретными значениями параметров.

3.1. Оптическая нутация при $F_0 = 1$, $N_0 = 0$

Пусть в начальный момент времени в системе имеются только фотоны с плотностью f_0 ($F_0 = 1$, $N_0 = 0$). Уравнение $W(N) = 0$ в этом случае имеет два действительных корня, $N_m = 0$ и N_M , между которыми $W < 0$, где N_M — максимальная нормированная плотность экситонов, которая может быть достигнута в процессе эволюции, и два комплексно-сопряженных корня $N_{1,2}$, которые определяются выражениями

$$N_M = A + B, \quad N_{1,2} = -\frac{1}{2} N_M \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (A - B), \quad (15)$$

где

$$A = \frac{4}{\sqrt{3}\alpha} \sqrt[3]{\sqrt{1 + \frac{27}{64}\alpha^2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha}, \quad (16)$$

$$B = -\frac{4}{\sqrt{3}\alpha} \sqrt[3]{\sqrt{1 + \frac{27}{64}\alpha^2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha}.$$

Решение уравнения для $N(t)$ в этом случае имеет вид

$$N = N_M \frac{1 - \operatorname{cn}[(1/2)\sqrt{m}\alpha\tau]}{1 - n'/n'' - [1 - (n'/n'')] \operatorname{cn}[(1/2)\sqrt{m}\alpha\tau]}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} n' &= \sqrt{3(A^2 + B^2 + AB)}, \\ n'' &= \sqrt{3(A^2 + B^2 - AB)}, \\ m &= \sqrt{3(A^4 + B^4 + A^2B^2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$\operatorname{cn}(\varphi)$ — эллиптический косинус с модулем k [12, 13], равным

$$k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^4 + B^4 + A^2B^2}} \right). \quad (19)$$

Из выражения (17) и рис. 1 видно, что функция $N(t)$ периодически изменяется во времени. Период T колебаний выражается формулой (14). Особенности временной эволюции системы определяются единственным параметром — параметром нелинейности $\alpha = \nu f_0/g$. Из рис. 1 видно, что максимальная плотность экситонов N_M зависит от параметра нелинейности α и монотонно убывает с ростом α , тогда как минимальная плотность экситонов N_m , т. е. меньший действительный корень уравнения $W(N) = 0$, не зависит от α и равен нулю при любом α . Поэтому амплитуда колебаний A_0 , равная в этом случае N_M , также монотонно убывает с ростом α (рис. 1а).

Из рис. 1 также видно, что период T колебаний плотности экситонов $N(t)$ монотонно убывает с ростом α . Это обусловлено тем, что в нелинейном режиме упругое экситон-экситонное взаимодействие приводит к голубому сдвигу экситонного уровня. В соответствии с этим возникает индуцированная полем расстройка резонанса, которая растет с ростом α . Увеличение расстройки резонанса ведет к уменьшению амплитуды колебаний, т. е. к уменьшению максимальной плотности экситонов в динамическом режиме. Это означает, что не все исходные фотоны превращаются в экситоны. В принципе при больших значениях параметра нелинейности α лишь малая доля фотонов превращается в экситоны. Как следует из (11), только при $\alpha = 0$ имеет место полное превращение исходных фотонов в экситоны и наоборот в течение периода колебаний.

3.2. Оптическая нутация при $N_0 = 1$, $F_0 = 0$

Рассмотрим теперь эволюцию системы в другом предельном случае, когда в начальный момент времени имеются только экситоны с плотностью n_0 ($N_0 = 1$, $F_0 = 0$). Уравнение $W(N) = 0$ в этом случае также имеет два действительных корня, N_M и N_m , и два комплексно-сопряженных корня $N_{1,2} = u \pm iv$, которые выражаются формулами

$$\begin{aligned} N_M &= 1, \quad N_m = A + B - \frac{1}{3}, \\ u &= -\frac{1}{2}(1 + N_m), \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}(A - B), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}}, \quad B = -\sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}}, \\ Q &= \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}, \quad p = 4 \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{\alpha^2} \right), \\ q &= -\frac{16}{27} \left(1 + \frac{9}{\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

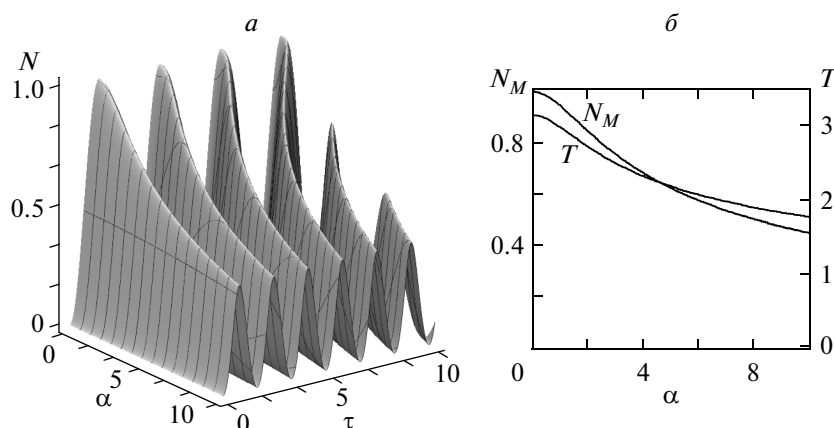


Рис. 1. Временная эволюция (а), амплитуда N_M и период T колебаний (б) плотности экситонов $N(\tau)$ в зависимости от величины параметра нелинейности α при начальном условии $N_0 = 0$, $F_0 = 1$ и нулевой расстройке резонанса

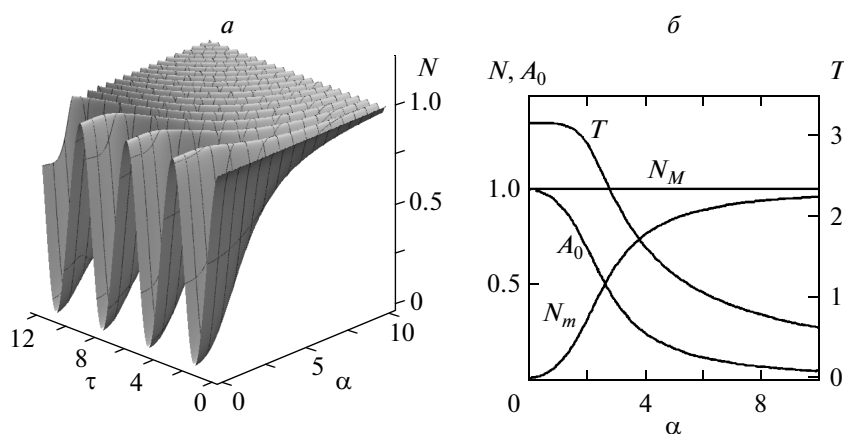


Рис. 2. Временная эволюция (а), максимальная N_M и минимальная N_m плотности экситонов, амплитуда A_0 и период T колебаний (б) плотности экситонов $N(\tau)$ в зависимости от величины параметра нелинейности α при начальном условии $N_0 = 1$, $F_0 = 0$ и нулевой расстройке резонанса

Решение для функции $N(t)$ и периода колебаний T выражается по-прежнему формулами (12)–(14). Как и в предыдущем случае, здесь также имеется единственный параметр — это параметр нелинейности $\alpha = \nu n_0/g$, который определяется начальной плотностью экситонов n_0 . Особенности временной эволюции системы представлены на рис. 2. Видно, что плотность экситонов периодически изменяется в пределах от $N = 1$ до $N = N_m$ (рис. 2а). Максимальная плотность экситонов N_M не зависит от параметра α , тогда как минимальная плотность N_m монотонно растет с ростом α (рис. 2б). Из рис. 2 видно, что с ростом параметра нелинейности α амплитуда A_0 и период T колебаний плотности экситонов монотонно убывают. При больших α амплитуда колебаний оказывается намного меньше единицы и,

как следует из рис. 2, плотность экситонов испытывает малоамплитудные колебания, подобные мелкой ряби, относительно начальной плотности экситонов. Так же как и в предыдущем случае, эти особенности эволюции объясняются фиолетовым сдвигом экситонного уровня с увеличением плотности экситонов и возникновением расстройки резонанса в динамическом режиме, которая и определяет уменьшение амплитуды и периода колебаний.

3.3. Оптическая нутация при произвольных N_0 и F_0

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени плотности экситонов и фотонов n_0 и f_0 отличны от нуля ($N_0 \neq 0$, $F_0 \neq 0$). Теперь кроме параметра нелинейности $\alpha = \nu(n_0 + f_0)/g$ динамику

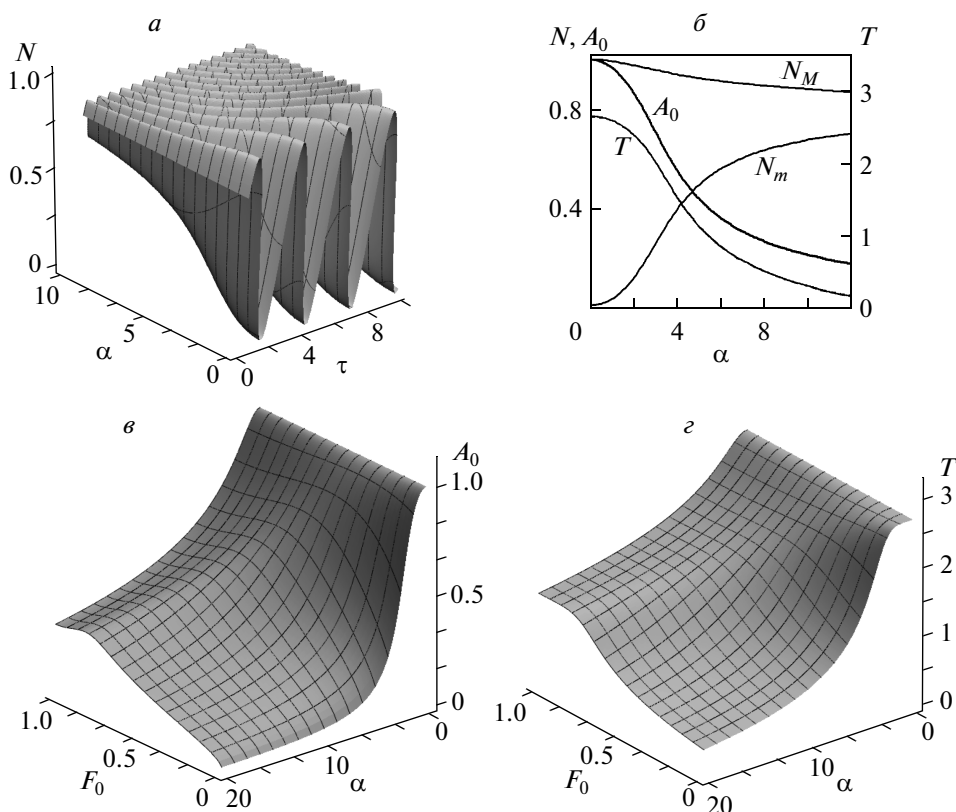


Рис. 3. Временная эволюция (а), максимальная N_M и минимальная N_m плотности экситонов, амплитуда A_0 и период T колебаний (б) плотности экситонов $N(\tau)$ в зависимости от величины параметра нелинейности α при начальных условиях $N_0 = 0.8$, $F_0 = 0.2$, $\theta_0 = \pi/2$ и нулевой расстройке резонанса, а также зависимости амплитуды A_0 (в) и периода T колебаний (з) плотности экситонов от параметра нелинейности α и начальной плотности фотонов F_0

системы определяют еще два параметра: F_0 (либо $N_0 = 1 - F_0$) и начальная разность фаз θ_0 . Пусть начальная разность фаз $\theta_0 = \pi/2$. Тогда решение уравнения $W(N) = 0$ при $\theta_0 = \pi/2$ показывает, что оба действительных корня, N_M и N_m , зависят от α . При этом больший корень, N_M , монотонно убывает, а меньший, N_m , растет с ростом α (рис. 3б). Это обстоятельство объясняет монотонное уменьшение амплитуды колебаний плотности экситонов A_0 с ростом α (рис. 3а-в). На рис. 3а представлена временная эволюция плотности экситонов в зависимости от α для решения (12) со знаком «+» в аргументе эллиптического косинуса. Плотность экситонов сразу же после начального момента времени растет со временем от значения N_0 до максимального значения N_M , после чего убывает до значения N_m и далее осциллирует в пределах от N_m до N_M . Решение со знаком «-» в аргументе эллиптического косинуса отличается от решения со знаком «+» только сдвигом по фазе, равным $F(\varphi_0, k)$, и сразу же после началь-

ного момента времени растет. На рис. 3в,з представлены зависимости амплитуды A_0 и периода T колебаний плотности экситонов от параметров α и F_0 . Видно, что обе функции в окрестности малых значений α незначительно уменьшаются с ростом F_0 , тогда как при $\alpha \gg 1$, наоборот, они растут с ростом F_0 . Отсюда также следует, что амплитуда колебаний плотности экситонов $A_0 = N_M - N_m < 1$. Хотя $N_0 + F_0 = 1$, однако невозможно установление такого режима, при котором в некоторые моменты времени в системе существуют только экситоны (либо только фотоны). В процессе колебаний всегда существует суперпозиция экситонов и фотонов с отличными от нуля либо единицы плотностями.

Рассмотрим теперь поведение системы в случае $\theta_0 = 0$. Из (11) видно, что $N = N_0$ является одним из действительных корней уравнения $W(N) = 0$. Значение второго действительного корня определяется величиной N_0 и параметром α . На рис. 4 представлены графики поведения этого корня уравне-

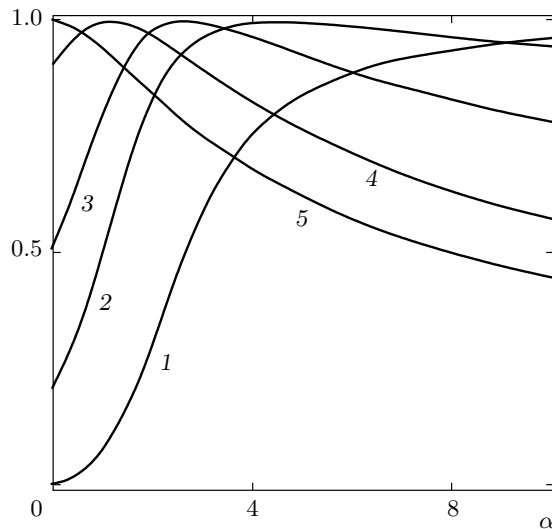


Рис. 4. Зависимости действительного корня уравнения $W(N) = 0$ от параметра нелинейности α при $\theta_0 = 0$ в условиях точного резонанса и при значениях плотностей фотонов $F_0 = 0$ (1), 0.2 (2), 0.5 (3), 0.9 (4), 1.0 (5)

ния $W(N) = 0$ в зависимости от α для различных значений F_0 . Видно, что с ростом α этот корень сначала растет, достигает своего максимума, затем убывает. При этом если $N_0 \geq F_0$ и параметр нелинейности α удовлетворяет условию $\alpha = \alpha_{cr}$, где $\alpha_{cr} = (N_0 - F_0)/N_0\sqrt{N_0 F_0}$, то и второй действительный корень также равен N_0 . С ростом F_0 точка пересечения обоих корней смещается в сторону меньших значений α и при $F_0 = N_0 = 1/2$ она оказывается при $\alpha = 0$. Далее с ростом F_0 при $F_0 > N_0$ пересечение корней отсутствует. При $\alpha < \alpha_{cr}$ второй корень меньше N_0 , а при $\alpha > \alpha_{cr}$ он больше N_0 . Если же $N_0 < F_0$, то второй корень всегда больше N_0 . Это поведение действительных корней обусловлено поведением профиля потенциальной энергии нелинейного осциллятора $W(N)$ в зависимости от параметра N_0 . При $N_0 > F_0$ имеет место постепенное уменьшение глубины и ширины потенциальной ямы, которые при $\alpha = \alpha_{cr}$ обращаются в нуль. На фазовой плоскости $(\dot{N}, N)$ этому соответствует фазовый центр. Так как амплитуда колебаний плотности экситонов равна абсолютному значению разности этих действительных корней, она обращается в нуль при $\alpha = \alpha_{cr}$.

На рис. 5а–в представлена временная эволюция плотности экситонов при различных соотношениях между параметрами. Если эти рисунки рассматривать совместно с рис. 1а и рис. 2а, то можно полу-

чить полную картину изменения характера эволюции системы при изменении параметра F_0 от единицы до нуля. Видно, что при $\alpha < \alpha_{cr}$ плотность экситонов колеблется под фоном, а при $\alpha > \alpha_{cr}$ — над фоном, равным начальной плотности N_0 . Поэтому минимум (максимум) функции $N(t)$ при $\alpha < \alpha_{cr}$ переходит в максимум (минимум) при $\alpha > \alpha_{cr}$. Соответственно, функция $N(t)$ сразу же после начального момента времени убывает при $\alpha < \alpha_{cr}$ и возрастает при $\alpha > \alpha_{cr}$. Так как $N_M = N_m = N_0$ при $\alpha = \alpha_{cr}$, из (12) следует, что $N(t) = (N_M + N_m)/2 = N_0 (= \text{const})$, т. е. плотность экситонов (и плотность фотонов) не изменяется со временем. Хотя начальные плотности экситонов при $\alpha = \alpha_{cr}$ отличны от нуля, тем не менее система не эволюционирует, она покоится. Таким образом, важной особенностью временной эволюции системы экситонов и фотонов является то обстоятельство, что при начальной разности фаз $\theta_0 = 0$ амплитуда осцилляций плотности экситонов обращается в нуль при определенных значениях параметров системы, что обусловлено особенностями поведения профиля потенциальной энергии $W(N)$ и равенством обоих действительных корней уравнения $W(N) = 0$.

Из рис. 5г видно, что на кривой $\alpha = (1 - 2F_0)/\sqrt{F_0(1 - F_0)^3}$ амплитуда колебаний обращается в нуль и в зависимости от параметров α и F_0 изменяется немонотонно. Вместе с тем следует также отметить, что при выполнении условия $4\sqrt{N_0 F_0} \cos \theta_0 = \alpha(1 + N_0)$ максимальная плотность экситонов оказывается равной единице, т. е. в динамическом режиме в определенные моменты времени все фотоны превращаются в экситоны за период. Что касается периода колебаний T (рис. 5д), то он плавно изменяется в зависимости как от α , так и от F_0 . Видно, что с ростом F_0 период монотонно растет, а с ростом α он в целом убывает, однако в окрестности $\alpha = 0$ он слегка возрастает, достигая своего максимума, затем монотонно убывает.

Из анализа результатов, полученных для $\theta_0 = \pi/2$ и $\theta_0 = 0$, можно сделать вывод о том, что закономерности оптической нутации экситонов определяются также и начальной разностью фаз θ_0 наряду с начальными плотностями частиц N_0 , F_0 и параметром нелинейности α . Поэтому представляет интерес выяснить особенности явления оптической нутации в зависимости от начальной разности фаз θ_0 . Из формулы (11) следует, что при произвольных значениях θ_0 уравнение $W(N) = 0$ по-прежнему имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня. Значения этих корней зависят от α и F_0 и периодически изменяются в зависимости от θ_0 . Поэто-

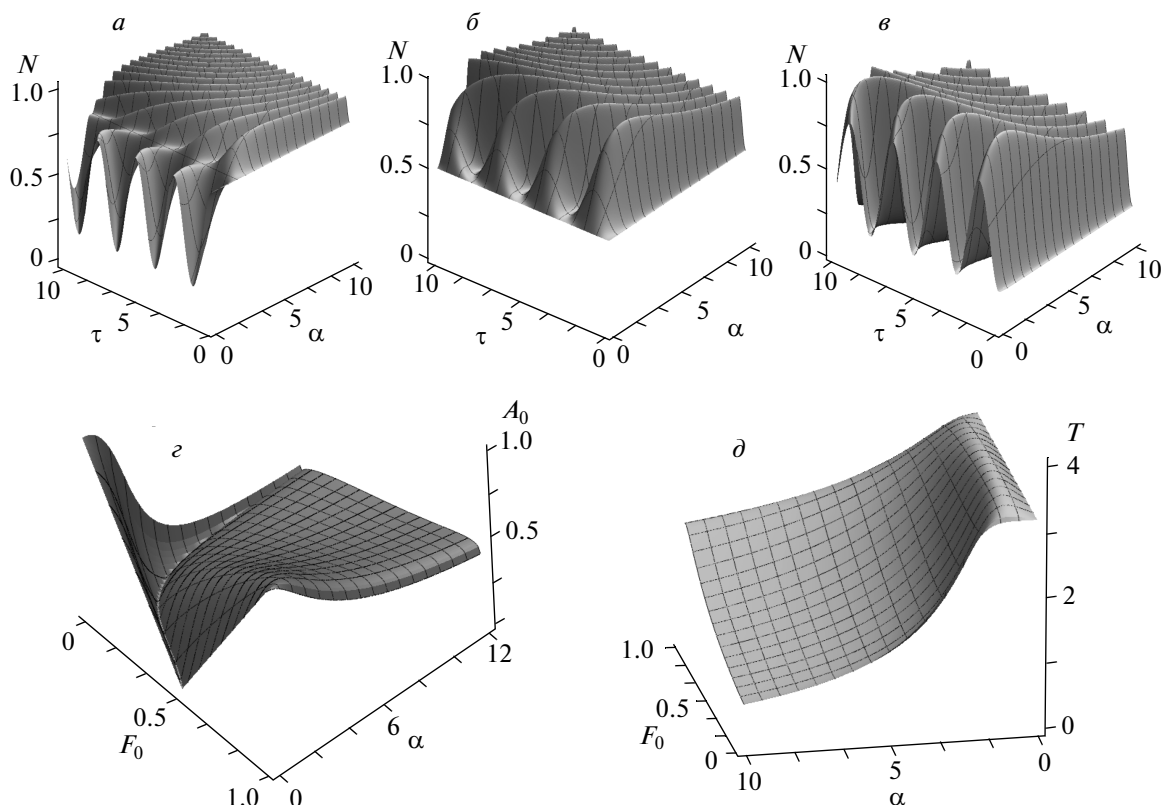


Рис. 5. Временные эволюции плотности экситонов $N(\tau)$ в зависимости от величины параметра нелинейности α при $\theta_0 = 0$ и значениях начальной плотности фотонов $F_0 = 0.2$ (а), 0.5 (б), 0.8 (в) и зависимости амплитуды A_0 (г) и периода T колебаний (д) от параметра нелинейности α и начальной плотности фотонов F_0

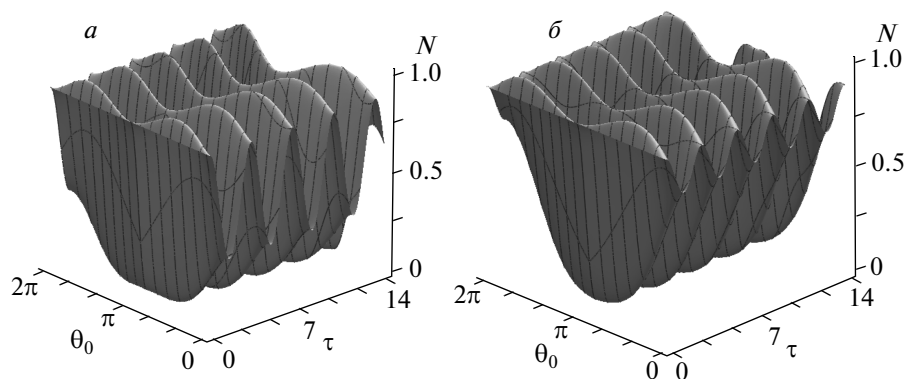


Рис. 6. Временные эволюции плотности экситонов $N(\tau)$ в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при начальной плотности фотонов $F_0 = 0.1$ и параметрах нелинейности $\alpha = 1$ (а), 2 (б)

му решение (12) справедливо также и при произвольных значениях параметра θ_0 . На рис. 6 представлены результаты исследования временной эволюции плотности экситонов в зависимости от начальной разности фаз θ_0 для нескольких значений парамет-

ра нелинейности α . Из рис. 6 следует, что имеет место периодическое превращение фотонов в экситоны и обратно. При этом существует периодичность эволюции также и в зависимости от θ_0 с периодом 2π . На рис. 7 представлены зависимости амплитуды

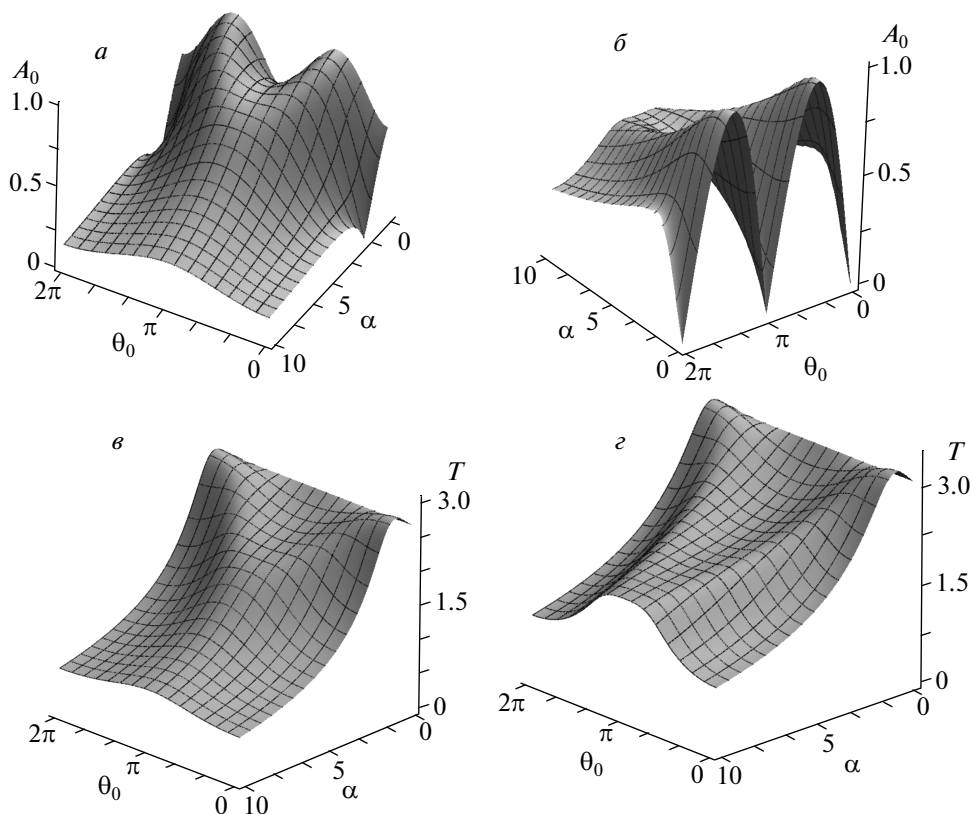


Рис. 7. Зависимости амплитуды A_0 (а, б) и периода T (в, г) колебаний плотности экситонов от параметра нелинейности α и начальной разности фаз θ_0 при начальной плотности фотонов $F_0 = 0.2$ (а, в), 0.5 (б, г)

и периода колебаний плотности экситонов от значений параметров α и θ_0 . Видно, что обе функции также периодически зависят от θ_0 . Как амплитуда, так и период колебаний немонотонно изменяются в зависимости от параметра α . Таким образом, зависимость параметров оптической нутации от начальной разности фаз θ_0 свидетельствует о возможности управления процессом нутации с помощью начальной разности фаз.

4. НУТАЦИЯ ПРИ ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ РАССТРОЙКЕ РЕЗОНАНСА. СЛУЧАЙ $\alpha = 2\delta$

Изучим теперь влияние расстройки резонанса δ на процесс оптической нутации экситонов. Пусть в начальный момент времени в системе имеются только фотоны с плотностью $F_0 = 1$, а экситоны отсутствуют ($N_0 = 0$). Рассмотрим сначала явление оптической нутации в наиболее простом и наглядном случае, когда параметры α и δ связаны соотноше-

нием $\alpha = 2\delta$. Потенциальная энергия нелинейного осциллятора $W(N)$ в этом случае выражается формулой

$$W(N) = -4N(1 - N) + \frac{1}{4}\alpha^2 N^2(1 - N)^2. \quad (22)$$

Единственным параметром, определяющим особенность временной эволюции системы, является параметр нелинейности α . Из рис. 8 видно, что независимо от величины параметра α уравнение $W(N) = 0$ имеет два действительных корня, $N = 0$ и $N = 1$, которые являются точками поворота классической траектории. При $\alpha = 0$ кривая $W(N)$ (кривая 1 на рис. 8) представляет собой квадратичную параболу, которая пересекает ось N в точках $N = 0$ и $N = 1$ и имеет минимум при $N = 1/2$. С ростом параметра α кривая $W(N)$ деформируется, ее середина постепенно поднимается вверх, при $\alpha = 2\sqrt{2}$ минимум в точке $N = 1/2$ превращается в максимум (кривая 2 на рис. 8), который монотонно растет с ростом α . При $\alpha = 8$ центральный максимум принимает значение $W = 0$ (кривая 3 на рис. 8) и далее, с рос-

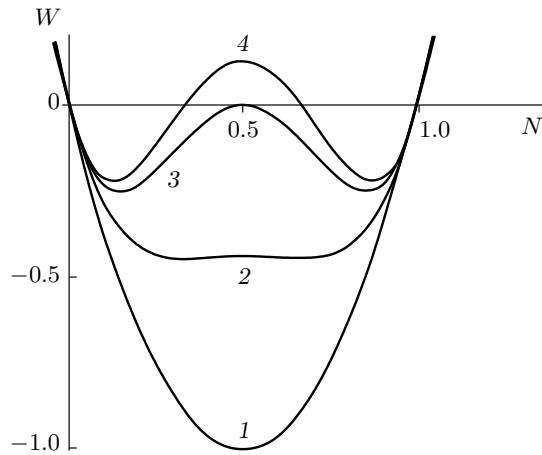


Рис. 8. Потенциальная энергия W нелинейного осциллятора в зависимости от плотности экситонов N при начальной плотности фотонов $F_0 = 1$ и параметрах нелинейности $\alpha = 0$ (1), 6 (2), 8 (3), 8.5 (4)

том α , возникают два новых действительных корня уравнения $W(N) = 0$, которые располагаются симметрично относительно центра кривой ($N = 1/2$) в точках

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{64}{\alpha^2}} \right). \quad (23)$$

Следовательно, значение параметра нелинейности $\alpha = 8$ является бифуркационным. Тогда аналитическое решение уравнения для функции $N(t)$ при $\alpha < 8$ получается в виде

$$N = \frac{1}{2} [1 - \text{cn}(2\tau)], \quad k = \frac{\alpha}{8}. \quad (24)$$

При этом период T и амплитуда A колебаний определяются выражениями

$$T = 2K(k), \quad A = 1. \quad (25)$$

В линейном пределе ($\alpha \rightarrow 0$) из выражения (24) получаем $N = \sin^2 \tau$, а период колебаний T оказывается равным $T = T_0 = \pi$. Отсюда видно, что хотя расстройка резонанса $\delta \neq 0$, тем не менее в процессе нелинейной эволюции при $\alpha < 8$ все исходные фотоны превращаются в экситоны и наоборот, как и в линейном режиме в случае точного резонанса. С другой стороны, при $\alpha > 8$ решение имеет вид

$$N = \frac{N_- \text{sn}^2(\alpha N_+ \tau/4)}{1 - N_- \text{cn}^2(\alpha N_+ \tau/4)}, \quad k = \frac{N_-}{N_+}. \quad (26)$$

Период T и амплитуда A колебаний в этом случае равны

$$T = 8K(k)/\alpha N_+, \quad A = N_-. \quad (27)$$

Из выражений (24) и (26) при $\alpha = 8$ получаем

$$N = \text{sh}^2 \tau / (1 + 2 \text{sh}^2 \tau). \quad (28)$$

Из соотношений (24), (25) и рис. 9а следует, что при $\alpha < 8$ все исходные фотоны полностью превращаются в экситоны и обратно за период, тогда как при $\alpha > 8$ функция $N(t)$ также изменяется периодически, но в пределах от нуля до $N = N_-$, причем амплитуда и период колебаний функции $N(t)$ монотонно уменьшаются с ростом α (рис. 9а). При $\alpha = 8$ имеет место скачкообразное изменение амплитуды колебаний функции $N(t)$ на величину, равную $1/2$ (рис. 9а). Период колебаний в этом случае обращается в бесконечность, т.е. процесс превращения фотонов в экситоны становится аperiodическим, плотность экситонов со временем монотонно растет, асимптотически приближаясь к значению $1/2$, чем процесс эволюции и завершается.

Из полученных результатов следует, что при $\alpha = 8$ возникает эффект пленения исходных фотонов или эффект концентрационного подавления процесса экситон-фотонного взаимодействия, который усиливается при увеличении параметра нелинейности α . Это обусловлено перестройкой профиля потенциальной энергии $W(N)$ нелинейного осциллятора при изменении α . При $\alpha = 8$ имеет место бифуркация превращения двух комплексно-сопряженных корней уравнения $W(N) = 0$ в действительные, ответственная за возникновение аperiodического режима.

В другом предельном случае, когда в начальный момент времени имеются только экситоны ($N_0 = 1$, $F_0 = 0$), решение уравнения для функции $N(t)$ имеет вид

$$N = \frac{1}{2} (1 + \text{cn}(2\tau)), \quad k = \frac{\alpha}{8}, \quad (29)$$

$$A_0 = 1, \quad T = 2K(k)$$

при $\alpha < 8$,

$$N = \left[1 + k \text{sn}^2 \left(\frac{\alpha N_+ \tau}{4} \right) \right]^{-1}, \quad k = \frac{N_-}{N_+}, \quad (30)$$

$$A = N_-, \quad T = \frac{8K(k)}{\alpha N_+}$$

при $\alpha \geq 8$ и

$$N = \frac{\text{ch}^2 \tau}{1 + 2 \text{sh}^2 \tau} \quad (31)$$

при $\alpha = 8$, где $N_{\pm}$ определяются выражениями (23). Здесь также имеют место периодические колебания плотности экситонов при $\alpha \neq 8$ и аperiodическая

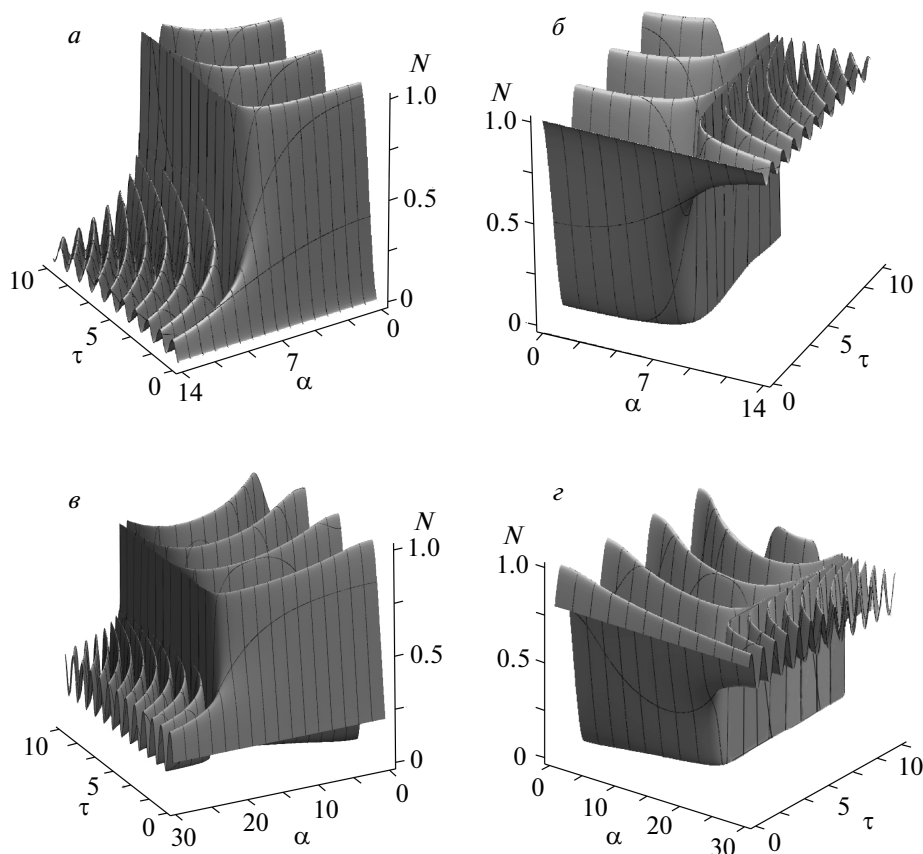


Рис. 9. Временные эволюции плотности экситонов N в зависимости от параметра нелинейности α при начальной разности фаз $\theta_0 = \pi/2$ и начальной плотности фотонов $F_0 = 1$ (а), 0 (б), 0.8 (в), 0.2 (г)

эволюция при $\alpha = 8$ (рис. 9б). В последнем случае плотность экситонов монотонно убывает со временем, асимптотически стремясь к значению $1/2$. При $\alpha < 8$ все экситоны превращаются в фотоны и обратно за период (рис. 9в). В линейном пределе ($\alpha = 0$) из (29) получаем $N = \cos^2 \tau$. При $\alpha > 8$ возникает эффект самозахвата, состоящий в том, что с ростом α все меньшая и меньшая доля исходных экситонов превращается за период в фотоны (рис. 9в). Этот эффект проявляется тем ярче, чем больше параметр нелинейности α . Он подобен эффекту пленения фотонов, полученный для случая $F_0 = 1$.

Таким образом, мы предсказываем возможность существования нового эффекта, а именно эффекта самозахвата экситонов. Физической причиной его возникновения является упругое экситон-экситонное взаимодействие, которое приводит к фиолетовому смещению экситонного уровня при увеличении плотности экситонов. Отметим, что этот эффект имеет место при $\delta > 0$, т. е. при $\omega > \omega_0$.

С ростом уровня возбуждения экситонный уровень поджимается под дно зоны проводимости, уменьшая возникающую таким образом динамическую расстройку резонанса.

Отметим, что это явление по существу аналогично явлению самозахвата в системе бозе-конденсированных атомов при их туннелировании через барьер в двухъямной ловушке. Оно сводится к тому, что с ростом параметра нелинейности, обусловленной упругим межатомным взаимодействием, возникает резкое изменение характера заселения ям при критическом значении этого параметра. Если ямы идентичны и бозе-конденсат был локализован в одной яме, то при значениях параметра нелинейности меньших критического имеет место полная перекачка атомов из одной ямы в другую и обратно за период осцилляций. Если же параметр нелинейности превышает критическое значение, то лишь малая доля атомов переходит из заполненной ямы в пустую.

Таким образом, бозе-конденсированные атомы в симметричной двухъямной ловушке имеют асимметричное распределение: большая часть атомов захватывается одной из ям даже в условиях отталкивательного взаимодействия между атомами. Это явление, называемое самозахватом, изучено в ряде работ [14–18] и экспериментально наблюдалось в системе бозе-конденсированных атомов [19]. В работе [20] было показано, что явление самозахвата имеет место также и в процессе атомно-молекулярной конверсии в условиях бозе-эйнштейновской конденсации. Поэтому представляет интерес поиск аналогичных эффектов и в других симметричных системах, например в экситонной области спектра. Пред-

ставленные выше результаты о самозахвате экситонов и пленении фотонов в условиях оптической экситон-фотонной нутации при критическом значении параметра нелинейности можно интерпретировать как проявление эффекта самозахвата, так как причиной их возникновения является упругое межчастичное взаимодействие.

В общем случае, когда $F_0 \neq 0$ и $N_0 \neq 0$, т. е. когда в начальный момент времени имеются как экситоны, так и фотоны, эволюция системы определяется также и начальной разностью фаз θ_0 . Пусть $\theta_0 = \pi/2$. Тогда уравнение $W(N) = 0$ при $\alpha \geq 8/(F_0 - N_0)^2$ имеет четыре действительных корня:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{(N_0 - F_0)^2 + \frac{32}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2 N_0 F_0} - 1 \right)} \right], \\ N_2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{(N_0 - F_0)^2 - \frac{32}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2 N_0 F_0} + 1 \right)} \right], \\ N_3 &= 1 - N_2, \quad N_4 = 1 - N_1, \end{aligned} \quad (32)$$

где $N_1 > N_2 > N_3 > N_4$. Если $N_0 = 1/2$, то решение уравнения для $N(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} N &= \left\{ N_4(N_1 - N_3) + N_1(N_3 - N_4) \operatorname{sn}^2 \left[\alpha \sqrt{(N_1 - N_3)(N_2 - N_4)} \tau/4 \pm F(\varphi_0, k) \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ N_1 - N_3 + (N_3 - N_4) \operatorname{sn}^2 \left[\alpha \sqrt{(N_1 - N_3)(N_2 - N_4)} \tau/4 \pm F(\varphi_0, k) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(N_1 - N_2)(N_3 - N_4)}{(N_2 - N_4)(N_1 - N_3)}, \\ \varphi_0 &= \arcsin \sqrt{\frac{N_1 - N_3}{N_3 - N_4} \frac{N_0 - N_4}{N_1 - N_0}}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом амплитуда A_0 и период колебаний T определяются выражениями

$$A_0 = N_3 - N_4, \quad T = \frac{8K(k)}{\alpha \sqrt{(N_1 - N_3)(N_2 - N_4)}}. \quad (35)$$

Если $N_0 > 1/2$, то решение имеет вид

$$\begin{aligned} N &= \left\{ N_2(N_1 - N_3) - N_3(N_1 - N_2) \operatorname{sn}^2 \left[\alpha \sqrt{(N_1 - N_3)(N_2 - N_4)} \tau/4 \pm F(\varphi_0, k) \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ N_1 - N_3 - (N_1 - N_2) \operatorname{sn}^2 \left[\alpha \sqrt{(N_1 - N_3)(N_2 - N_4)} \tau/4 \pm F(\varphi_0, k) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_1 - N_3}{N_3 - N_4} \frac{N_0 - N_2}{N_0 - N_3}}.$$

Модуль эллиптической функции k , а также амплитуда и период колебаний определяются выражениями (34) и (35).

В случае $\alpha < 8/(F_0 - N_0)^2$ уравнение $W(N) = 0$ имеет два действительных корня, $N_M = N_1$ и $N_m = N_4$, которые определены в (32), и два комплексно-сопряженных корня

$$N_{2,3} = u \pm iv, \quad u = 1/2, \\ v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N_0 F_0}{4}} + 1 \right) - (N_0 - F_0)^2}. \quad (37)$$

$$\varphi_0 = \arccos \left(\frac{F_0 - N_0}{\sqrt{(N_0 - F_0)^2 + \frac{32}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N_0 F_0}{4}} - 1 \right)}} \right), \quad m = \frac{4}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N_0 F_0}{4}}. \quad (39)$$

Отсюда при $\alpha = 8/(N_0 - F_0)^2$ получаем аperiodический режим нутации:

$$N = \frac{1}{2} \left\{ 1 + (N_0 - F_0) \sqrt{1 + 4N_0 F_0} \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{ch} \left(\alpha |N_0 - F_0| \sqrt{1 + 4N_0 F_0} \frac{\tau}{4} \pm \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \pm \operatorname{arch} \sqrt{1 + 4N_0 F_0} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (40)$$

Из выражения (40) следует, что при $N_0 > F_0$ решение со знаком «+» в аргументе гиперболического косинуса монотонно убывает со временем от значения N_0 , асимптотически приближаясь к $N = 1/2$, т. е. в системе устанавливается стационарное состояние с равным количеством фотонов и экситонов. Решение со знаком «-» сначала растет от значения N_0 до $N = [1 + (N_0 - F_0) \sqrt{1 + 4N_0 F_0}] / 2$, после чего монотонно убывает, стремясь к значению $N = 1/2$. Таким образом, в обоих случаях при больших временах устанавливается стационарное состояние с одинаковым количеством экситонов и фотонов.

Эволюция системы при $N_0 \neq 0$ и $F_0 \neq 0$ представлена на рис. 9а,г. Плотность экситонов при $\alpha < 8/(F_0 - N_0)^2$ периодически изменяется в пределах $N_4 < N < N_1$. При этом с ростом α минимальная плотность экситонов N_4 растет, а максимальная плотность N_1 убывает. Следовательно, не все исходные фотоны за период превращаются в экситоны (и наоборот). При $\alpha = 8/(F_0 - N_0)^2$ плотно-

Решение в этом случае имеет вид

$$N = \frac{1}{2} \times \\ \times \left[1 - \sqrt{(N_0 - F_0)^2 + \frac{32}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N_0 F_0}{4}} - 1 \right)} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{cn} \left(\frac{\alpha \sqrt{m} \tau}{4} \pm F(\varphi_0, k) \right) \right], \quad (38)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - \alpha^2 (N_0 - F_0)^2 / 32}{\sqrt{1 + \alpha^2 N_0 F_0 / 4}} \right),$$

сти экситонов и фотонов аperiodически стремятся к значению $1/2$, чем эволюция и завершается. При $\alpha > 8/(F_0 - N_0)^2$ система эволюционирует периодически и плотность экситонов изменяется в пределах $N_4 < N < N_3$ при $N_0 = 1/2$ (рис. 9б), и $N_2 < N < N_1$ при $N_0 > 1/2$ (рис. 9з). При $\alpha < 8/(F_0 - N_0)^2$ амплитуда и период колебаний экситонов больше, чем при $\alpha > 8/(F_0 - N_0)^2$. Отсюда можно сделать вывод, что при $F_0 \neq 0$ и $N_0 \neq 0$ в процессе эволюции также проявляется самозахват экситонов при $F_0 < 1/2$ и эффект пленения исходных фотонов при $F_0 > 1/2$.

5. НУТАЦИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ α И δ

Рассмотрим теперь поведение системы при произвольных значениях параметров α и δ . Будем считать, что $F_0 = 1$ ($N_0 = 0$). В этом случае потенциальная энергия системы $W(N)$ выражается формулой

$$W = -4N(1 - N) + N^2(\delta - \alpha N/2)^2. \quad (41)$$

Динамика системы при изменении параметров α и δ полностью определяется изменениями профиля потенциальной энергии $W(N)$. При фиксированном значении $\delta < 2\sqrt{3}$ кривая $W(N)$ имеет один минимум и уравнение $W(N) = 0$ имеет только два действительных корня, $N = 0$ и $N = N_M$, и два комплексно-сопряженных корня

$$N_{1,2} = u \pm iv, \quad u = 2\frac{\delta}{\alpha} - \frac{1}{2}N_M, \quad (42)$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(N_M - \frac{4}{3}\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 + \frac{16}{9\alpha^2}(12 - \delta^2)}.$$

Здесь N_M играет роль максимальной плотности экситонов и представляет собой одну из точек поворота классической траектории. С ростом α значение корня N_M сначала быстро растет, достигает максимально возможной величины $N_M = 1$ при $\alpha = 2\delta$, после чего монотонно убывает. Решение уравнения для $N(t)$ выражается формулой

$$N = \frac{N_M [1 - \operatorname{cn}(\alpha\sqrt{m}\tau/2)]}{1 + p - (1 - p) \operatorname{sn}(\alpha\sqrt{m}\tau/2)}, \quad (43)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u(u - N_M) + v^2}{m} \right),$$

где

$$p = \sqrt{\frac{(u - N_M)^2 + v^2}{u^2 + v^2}},$$

$$m = \sqrt{[u(u - N_M) + v^2]^2 + N_M^2 v^2}.$$

Для амплитуды A и периода T колебаний получаем

$$A = N_M, \quad T = 8K(k)/\alpha\sqrt{m}. \quad (44)$$

Отсюда при $\alpha = 2\delta < 8$ и $N_M = 1$ снова получаем решение (24).

Из выражений (43) и рис. 10а видно, что при $\delta < 2\sqrt{3}$ имеет место режим периодической эволюции экситонов и фотонов при любом значении параметра нелинейности α . При этом как амплитуда, так и период колебаний сначала монотонно растут с ростом α , достигают своих максимальных значений при $\alpha = 2\delta$, затем монотонно убывают (рис. 11). Отметим, что при $\alpha = 2\delta$ имеет место полное превращение исходных фотонов в экситоны и обратно за период. Немонотонное поведение амплитуды колебаний в зависимости от α обусловлено тем, что при фиксированной расстройке резонанса δ индуцированная полем динамическая расстройка растет с ростом α , уменьшая таким образом суммарную расстройку $\delta - \alpha N/2$, что приводит к увеличению амплитуды колебаний. Это продолжается до значения α , равного 2δ , после чего амплитуда колебаний плотности экситонов начинает убывать. Отметим здесь, что при критическом значении $\delta = 2\sqrt{3}$ существует такое критическое значение параметра $\alpha = \alpha_c = 2^5 \cdot 3^{-3/2}$, при котором уравнение $W(N) = 0$ имеет трехкратный действительный

корень $N = 3/4$. В этом случае эволюция системы является аperiodической и описывается формулой $N = \tau^2(1 + 4\tau^2/3)^{-1}$. Отсюда видно, что плотность экситонов монотонно растет со временем и асимптотически стремится к значению $N = N_M = 3/4$. Если сравнить это предельное значение плотности экситонов в нелинейном режиме с плотностью $N_M = 1/4$ в линейном режиме при $\delta = 2\sqrt{3}$ и $\alpha = 0$, то мы увидим, что они различаются в три раза. Увеличение предельной плотности в нелинейном режиме по сравнению с линейным обусловлено тем, что индуцированная полем нелинейная расстройка резонанса, обусловленная фиолетовым концентрационным смещением экситонного уровня, компенсирует нулевую (линейную) расстройку резонанса δ , что способствует увеличению амплитуды колебаний. Отметим, что в случае $\alpha = 2\delta$ эта компенсация является полной и максимальная плотность экситонов за период равна единице, т.е. как и в линейном случае в условиях точного резонанса все исходные фотоны превращаются в экситоны и обратно.

При $\delta > 2\sqrt{3}$ ситуация усложняется. В этом случае при фиксированном δ и при изменении параметра α в областях $\alpha < \alpha_-$ и $\alpha > \alpha_+$ также существуют два действительных корня, нуль и N_M , и два комплексно-сопряженных корня $N_{1,2}$ уравнения $W(N) = 0$, где

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{27} \left[\delta(\delta^2 + 36) \pm (\delta^2 - 12)^{3/2} \right]. \quad (45)$$

В области $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ имеются четыре действительных корня. На рис. 12 на плоскости (δ, α) представлены бифуркационные области, в которых существуют только два действительных корня (незаштрихованные участки) либо четыре (заштрихованный участок). Обе кривые в виде острия исходят из точки с координатами $\delta = 2\sqrt{3}$ и $\alpha = 2^5 \cdot 3^{-3/2}$. При больших значениях δ ($\delta \gg 2\sqrt{3}$) кривая $\alpha = \alpha_+$ растет с ростом δ пропорционально δ^3 , а кривая $\alpha = \alpha_-$ асимптотически стремится снизу к прямой $\alpha = 2\delta$. Прямая $\alpha = 2\delta$ пересекает кривую $\alpha = \alpha_+$ в точке $\delta = 4$, где $\alpha_+ = 8$. При $\alpha < \alpha_-$ корень N_M медленно растет с ростом α (рис. 13). Из рис. 13 видно, что при произвольных α и $\delta > 2\sqrt{3}$ область существования четырех действительных корней $N_1 > N_2 > N_3 > N_4 = 0$ ограничена с обеих сторон по параметру α . Поэтому в области $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ существуют четыре действительных корня: $N_1 > N_2 > N_M > 0$, где N_1 и N_2 — корни, возникающие при $\alpha = \alpha_-$ (из двукратно вырожденного корня при $\alpha = \alpha_-$), которые выражаются формулами

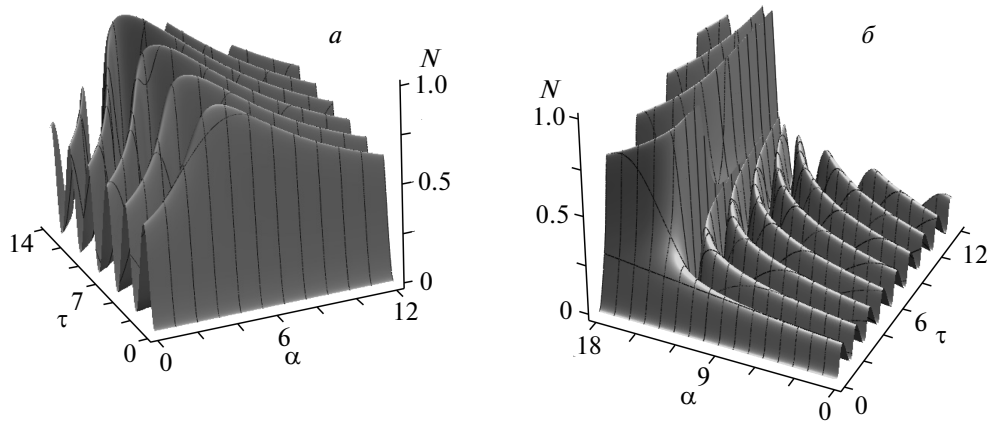


Рис. 10. Временные эволюции плотности экситонов N в зависимости от параметра нелинейности α при начальной плотности фотонов $F_0 = 1$ и расстройках резонанса $\delta = 2$ (а), 5 (б)

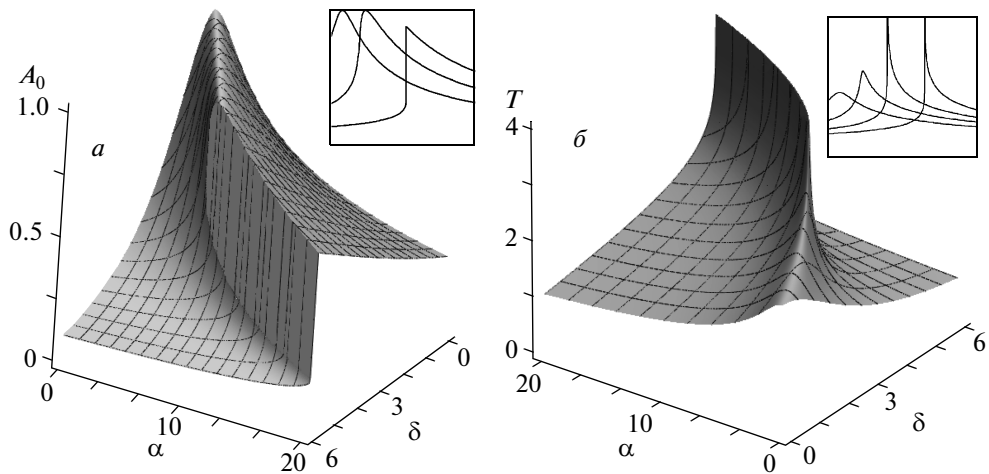


Рис. 11. Зависимости амплитуды A_0 (а) и периода T (б) колебаний плотности экситонов от параметра нелинейности α и расстройки резонанса δ при начальной плотности фотонов $F_0 = 1$. На вставках представлен ряд сечений графиков для нескольких значений δ

$$N_{1,2} = 2\frac{\delta}{\alpha} - \frac{1}{2}N_M \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{16}{9\alpha^2}(\delta^2 - 12) - \left(N_M - \frac{4}{3}\frac{\delta}{\alpha}\right)^2}. \quad (46)$$

С ростом α корни N_1 и N_M медленно растут, а корень N_2 убывает (рис. 13). При $\alpha = \alpha_+$ вырожденными становятся корни N_2 и N_M . Далее с ростом α они становятся комплексно-сопряженными, а корень N_1 принимает смысл максимальной плотности экситонов. В области $\alpha_+ < \alpha < 2\delta$ корень N_1 продолжает расти по величине, при $\alpha = 2\delta$ он оказывается равным единице и затем медленно убывает с ростом α . Возникающий при $\alpha = \alpha_+$ скачок в значении максимальной плотности экситонов при изме-

нении параметра нелинейности α растет с ростом δ и может оказаться больше 1/2. Таким образом, при $\delta > 2\sqrt{3}$ возникают две последовательные бифуркации рождения и гибели двух действительных корней уравнения $W(N) = 0$ при изменении параметра α .

Решение основного уравнения для плотности экситонов $N(t)$ при $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$, когда четыре действительных корня уравнения $W(N) = 0$ упорядочены так, что $N_1 > N_2 > N_M > 0$, имеет вид

$$N = \frac{N_1 N_M \operatorname{sn}^2 \left[\alpha \sqrt{N_2(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right]}{N_1 - N_M \operatorname{cn}^2 \left[\alpha \sqrt{N_2(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right]}, \quad (47)$$

$$k^2 = \frac{N_M}{N_2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 - N_M}.$$

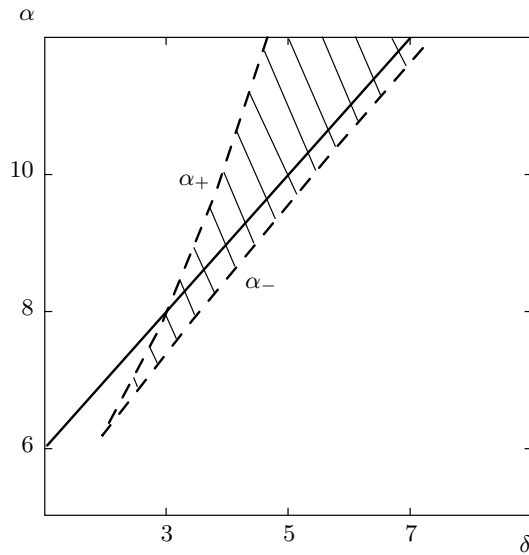


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма существования двух (незаштрихованная область) или четырех (заштрихованная область) действительных корней уравнения $W(N) = 0$. Сплошная линия соответствует $\alpha = 2\delta$

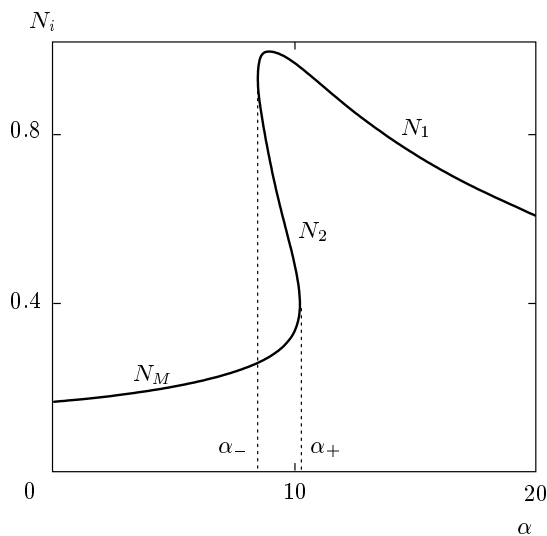


Рис. 13. Поведение действительных корней $N_1 > N_2 > N_M > 0$ уравнения $W(N) = 0$ в зависимости от α при $\delta = 5$

Амплитуда колебаний плотности экситонов равна N_M , а период колебаний T определяется формулой

$$T = 8K(k)/\alpha\sqrt{N_2(N_1 - N_M)}. \quad (48)$$

На границе этой области при $\alpha = \alpha_-$, где $N_1 = N_2$, решение принимает вид

$$N = \frac{N_1 N_M \sin^2 \left[\alpha \sqrt{N_1(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right]}{N_1 - N_M \cos^2 \left[\alpha \sqrt{N_1(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right]}, \quad (49)$$

$$T = \frac{4\pi}{\alpha \sqrt{N_1(N_1 - N_M)}}.$$

На правой границе, при $\alpha = \alpha_+$, где $N_2 = N_M$, получаем

$$N = \frac{N_1 N_M \operatorname{sh}^2 \left[\alpha \sqrt{N_1(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right]}{N_1 \operatorname{ch}^2 \left[\alpha \sqrt{N_1(N_1 - N_M)} \tau / 4 \right] - N_M}. \quad (50)$$

Из выражений (47)–(50) и рис. 10 видно, что при $\delta > 2\sqrt{3}$ также имеет место периодическая эволюция плотностей экситонов и фотонов при любых значениях α , кроме $\alpha = \alpha_+$, при котором эволюция становится аperiodической и описывается выражением (50). Плавное изменение максимальной плотности экситонов в зависимости от α прерывается скачкообразным ее увеличением при $\alpha = \alpha_+$.

Из рис. 10б видно, что в зависимости от значений параметра α при фиксированном $\delta > 2\sqrt{3}$ существуют две области периодического изменения плотности экситонов. При малых значениях параметра α имеют место колебания плотности экситонов с малым периодом и малой амплитудой, что объясняется относительно большой расстройкой резонанса δ (см. рис. 11). Однако при достижении критического значения $\alpha = \alpha_+$ два действительных корня уравнения $W(N) = 0$ превращаются в комплексно-сопряженные, что обуславливает резкое, практически скачкообразное, увеличение как амплитуды, так и периода колебаний (см. рис. 11). При $\alpha = \alpha_+$ период колебаний обращается в бесконечность, что свидетельствует о наступлении аperiodического режима эволюции системы. В этом случае плотность экситонов монотонно растет со временем, асимптотически стремясь к значению $N = N_M$, чем процесс эволюции и завершается. Обратное превращение экситонов в фотоны отсутствует. Максимум периода монотонно растет с ростом δ вплоть до $\delta = 2\sqrt{3}$, где возникает расходящаяся, которая существует при $\delta > 2\sqrt{3}$. При $\alpha > \alpha_+$ имеет место медленное монотонное уменьшение амплитуды и периода колебаний (см. рис. 10б и рис. 11). Из рис. 11а видно, что функция $A_0(\alpha, \delta)$ характеризуется наличием резкой ступеньки в зависимости от α и δ в области $\delta > 2\sqrt{3}$ на кривой $\alpha = \alpha_+$. Наличие ступеньки у функции $A_0(\alpha, \delta)$ соответствует расходящейся функции $T(\alpha, \delta)$.

Таким образом, можно утверждать, что и при $\delta \neq 0$ существуют условия для проявления эффекта

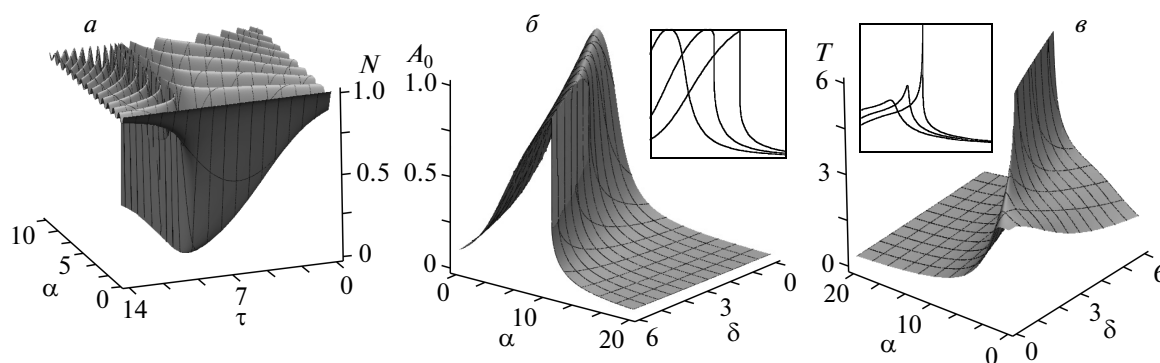


Рис. 14. Временная эволюция плотности экситонов N в зависимости от параметра нелинейности α при начальной плотности фотонов $F_0 = 0$ и расстройке резонанса $\delta = 5$ (а) и зависимости амплитуды A_0 (б) и периода T (в) колебаний плотности экситонов от значений параметра нелинейности α и расстройки резонанса δ . На вставках представлен ряд сечений основных графиков для нескольких значений δ

пленения (самозахвата) фотонов в системе при $\alpha < \alpha_+$ и практически полная ликвидация этого эффекта при $\alpha > \alpha_+$. Это объясняется поведением потенциальной энергии нелинейного осциллятора $W(N)$ при различных значениях α . При $\alpha < \alpha_+$ колебания происходят в потенциальной яме в области малых значений N . С ростом α кривая $W(N)$ деформируется, и при $\alpha = \alpha_+$ формируется потенциальная яма на всем протяжении N от нуля до единицы, которая далее, с ростом α , медленно уменьшает свою протяженность. При $\alpha = \alpha_+$ как потенциальная энергия, так и производная от нее по N оказываются равными нулю в определенной точке по N , соответствующей вырождению двух действительных корней, N_2 и N_M (см. рис. 13), и возникновению двух комплексно-сопряженных корней уравнения $W(N) = 0$, что и объясняет расходимость периода колебаний при $\alpha = \alpha_+$.

Эволюция системы в обратном пределе, когда $N_0 = 1$, $F_0 = 0$, представлена на рис. 14. Видно, что при фиксированном значении $\delta > 2\sqrt{3}$ с ростом параметра α амплитуда и период колебаний плотности экситонов изменяются немонотонно: существуют области роста и уменьшения плотности экситонов по параметру α (рис. 14б, в). Более того, имеет место скачкообразное изменение амплитуды A_0 (рис. 14б) с одновременным обращением периода T колебаний в бесконечность (рис. 14в) при определенных значениях α и δ . Следовательно, и в этом случае имеет место самозахват экситонов, который проявляется в виде резкого уменьшения амплитуды колебаний с ростом α . И в этом пределе явление самозахвата также обусловлено упругим экситон-экситонным взаи-

модействием. В отличие от случая, представленного на рис. 9б, где амплитуда колебаний при $\alpha < 8$ является постоянной величиной, равной единице, эволюция при $\delta > 2\sqrt{3}$ характеризуется переменной амплитудой колебаний плотности экситонов в зависимости от α .

Явления самозахвата экситонов и пленения фотонов имеют место и при ненулевых значениях N_0 и F_0 и различных значениях параметров α и δ в условиях, когда возникают бифуркации исчезновения либо появления двух действительных корней уравнения $W(N) = 0$. Такие бифуркации появляются в тех случаях, когда графики зависимости действительных корней уравнения $W(N) = 0$ от α имеют вертикальные касательные. В этом случае вырождение пары действительных корней приводит к скачкообразному изменению амплитуды и к расходимости периода колебаний плотности экситонов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приближении среднего поля изучено явление оптической нутации в экситонной области спектра при учете экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий. Показано, что при отличных от нуля начальных концентрациях экситонов и фотонов имеют место три режима временной эволюции экситонов и фотонов: режим периодического превращения экситонов в фотоны и обратно, режим аperiodического превращения фотонов в экситоны и режим покоя. Найдены амплитуды и периоды колебаний плотностей частиц, которые определяются начальными плотностями

экситонов и фотонов, расстройкой резонанса, параметром нелинейности и начальной разностью фаз. Предсказано существование явлений самозахвата экситонов и пленения фотонов в системе, которые возникают при пороговых значениях параметра нелинейности. С ростом этого параметра в системе возникает резкое, скачкообразное изменение амплитуд колебаний плотностей экситонов и фотонов. Показано, что оба эти явления обусловлены упругим экситон-экситонным взаимодействием, которое приводит к динамическому концентрационному сдвигу экситонного уровня.

Авторы выражают глубокую благодарность С. А. Москаленко за обсуждение ряда вопросов, затронутых в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Апанасевич, *Основы взаимодействия света с веществом*, Наука и техника, Минск (1977).
2. А. И. Бурштейн, А. Ю. Пусеп, ЖЭТФ **69**, 1927 (1975).
3. A. S. Davidov and A. A. Sericov, Phys. Stat. Sol. (b) **56**, 351 (1973).
4. V. V. Samartsev, U. E. Sheibut, and U. S. Ivanov, Spectrosc. Lett. **9**, 57 (1976).
5. С. Н. Белкин, С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, П. И. Хаджи, Изв. АН СССР, серия физ. **43**, 355 (1979); ФТТ **22**, 1961 (1980).
6. П. И. Хаджи, С. А. Москаленко, С. Н. Белкин, Письма в ЖЭТФ **29**, 223 (1979).
7. С. А. Москаленко, П. И. Хаджи, А. Х. Ротару, *Солитоны и нутация в экситонной области спектра*, Штиинца, Кишинев (1979).
8. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1985).
9. Е. С. Киселева, П. И. Хаджи, ФТТ **22**, 3409 (1980).
10. П. И. Хаджи, В. В. Васильев, ЖЭТФ **131**, 922 (2007); Опт. и спектр. **104**, 392 (2008); КЭ **40**, 907 (2010).
11. S. A. Moskalenko and D. W. Snoke, *Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
12. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1978).
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
14. G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **55**, 4318 (1997).
15. A. Smerzi, S. Fantony, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **79**, 4950 (1997).
16. S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantony, and S. R. Shenoy, Phys. Rev. A **59**, 620 (1999).
17. T. Anker, M. Albiez, R. Gati et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 020403 (2005).
18. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, J. Nanoelectr. and Optoelectr. **6**, 119 (2011).
19. M. Albiez, R. Gati, J. Fölling et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 010402 (2005).
20. А. П. Зинган, П. И. Хаджи, Опт. и спектр. **113**, 659 (2012).