

ГАМИЛЬТОНОВ ПОТОК, ПОРОЖДАЕМЫЙ СИЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ ВБЛИЗИ ТОРОИДАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*A. A. Сковорода**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 сентября 2012 г.

Описан метод получения гамильтониана вакуумного магнитного поля внутри заданной трехмерной тороидальной магнитной поверхности (сверхпроводящего кожуха). Этот метод использован для получения выражения для интегрируемого приповерхностного гамильтониана, который имеет вид разложения вращательного преобразования силовых линий на вложенных приповерхностных магнитных поверхностях в ряд Тейлора по удалению от границы. В это разложение вошли значения вращательного преобразования и его шири на граничной поверхности. Показано, как эти величины связаны с компонентами первой и второй квадратичных форм граничной поверхности.

DOI: 10.7868/S0044451013070183

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что магнитное поле порождает гамильтонов поток силовых линий, который может содержать магнитные поверхности (инвариантные КАМ-торы) — важнейшие элементы термоядерных ловушек плазмы. При иррациональном вращательном преобразовании силовых линий на гладкой магнитной поверхности (нерезонансный случай на базовом (master) торе) вблизи от нее согласно теории КАМ [1] имеется положительная мера других, близких к базовой (slave) магнитных поверхностей, что обосновывает, вообще говоря, перспективность долговременного удержания термоядерной плазмы в магнитных ловушках. Более того, относительная мера, покрытая близкими к базовой (slave) поверхностями в малой, но макроскопической окрестности базового (master) тора, близка к единице и быстро стремится к единице при уменьшении окрестности («липкость» торов, stickiness phenomenon) [2, 3].

В настоящей работе мы рассматриваем внутреннюю задачу с фиксацией граничной базовой (master) трехмерной тороидальной магнитной поверхности, например, в виде сверхпроводящего кожуха. В вакууме при задании гладкой тороидаль-

ной замкнутой поверхности S в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_S(\theta, \zeta)$ и требовании ее магнитности $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S = 0$ приходим к внутренней граничной задаче Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_S = 0, \quad (1)$$

имеющей единственное решение. Здесь $\mathbf{B} = \nabla\varphi$ — потенциальное магнитное поле с многозначным потенциалом φ , \mathbf{n}_S — вектор единичной нормали к поверхности, θ и ζ — произвольные полоидальная и тороидальная координаты с периодом 2π .

Заметим, что мы рассматриваем магнитную геометрию, характерную для тороидальных термоядерных ловушек, в которых модуль магнитного поля нигде не обращается в нуль и все силовые линии идут вдоль тора, огибая главную ось тора, $\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta > 0$. Общее представление такого потенциального поля имеет вид

$$2\pi\mathbf{B} = F\nabla(\zeta + \tilde{\varphi}), \quad (2)$$

где F — положительная размерная константа, $\tilde{\varphi}$ — безразмерная периодическая с нулевым средним значением часть потенциала φ . Таким образом, геометрия поверхности S определяет геометрию магнитного поля \mathbf{B} во всем объеме внутри поверхности.

Знание \mathbf{B} , полученное из численного решения задачи (1), позволяет трассировкой силовых линий рассчитать их динамику в объеме, ограниченном ко-

*E-mail: skovorod@nfi.kiae.ru

жухом, но не дает явной связи с геометрией границы. В работе [4] в общем случае с использованием гамильтониана магнитного поля показано, что наличие граничной магнитной поверхности в общем трехмерном случае не определяет наличие магнитных поверхностей во всем внутреннем объеме. Внутри области, ограниченной сверхпроводящим кожухом, возможны острова и стохастичность. Поскольку геометрия гладкой поверхности полностью определяется первой и второй квадратичными формами, представляют интерес установить их связь с гамильтонианом и свойствами магнитного поля.

В разд. 2 на основе работы [5] мы получаем выражения для гамильтониана вакуумного магнитного поля \mathbf{B} , значение которого известно из решения задачи (1). Связь с геометрией можно установить, преобразуя гамильтониан к координатам действие–угол. В настоящей статье мы ограничиваемся изучением гамильтониана вблизи границы, используя хорошо развитую технику теории возмущений (см., например, [6]).

В разд. 3, следуя конструкции Колмогорова [7], мы вводим подходящие переменные действие–угол $\Phi, \bar{\theta}$, чтобы возле граничной магнитной поверхности $\Phi = 0$ представить гамильтониан в нормальной колмогоровской форме

$$H(\Phi, \bar{\theta}) = \omega\Phi + O(\Phi^2)f(\bar{\theta}),$$

где роль частоты ω в нашем случае играет вращательное преобразование силовых линий на граничной магнитной поверхности (см. формулу (30) ниже). Колмогоровская форма показывает, что в окрестности базового (master) тора возмущающим параметром является расстояние $|\Phi|$ от границы. Следовательно, в интервале $|\Phi| < \rho$ можно ввести новые переменные действие–угол $\hat{\Phi}, \hat{\theta}$ так, чтобы уменьшить локальное возмущение до экспоненциально малого по ρ^{-1} значения $\varepsilon_\rho \sim \exp(1/\rho)$,

$$H(\hat{\Phi}, \hat{\theta}) = \omega\hat{\Phi} + H_0(\hat{\Phi}) + \varepsilon_\rho H_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$$

(см. формулу (37) ниже). Полагая ρ достаточно малым, получаем, что ε_ρ меньше границы применимости КАМ-теоремы [1] для области $|\hat{\Phi}| < \rho$. Следовательно, это позволяет доказать существование бесконечного числа магнитных поверхностей в окрестности границы. С геометрией границы оказываются связанными выражения для ω и H_0 (разд. 4).

2. ГАМИЛЬТОНИАН МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Сolenоидальность любого магнитного поля позволяет представить его в виде [4, 5]

$$2\pi\mathbf{B} = \nabla\phi \times \nabla\theta + \nabla\psi \times \nabla\zeta. \quad (3)$$

Здесь $\phi = \phi(a, \theta, \zeta)$, $\psi = \psi(a, \theta, \zeta)$, a — радиальная координата. Потенциальность магнитного поля (2) устанавливает связь между функциями ϕ и ψ . В численных расчетах эта связь определяется, исходя из найденного при решении задачи (1) магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}(a, \theta, \zeta)$, по формулам

$$\begin{aligned} \phi(a, \theta, \zeta) &= 2\pi \int_0^a \sqrt{g} \mathbf{B} \cdot \nabla\zeta da, \\ \psi(a, \theta, \zeta) &= \Psi_0 - 2\pi \int_0^a \sqrt{g} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta da, \end{aligned} \quad (4)$$

где Ψ_0 — константа, $\sqrt{g} = (\nabla a(\nabla\theta \times \nabla\zeta))^{-1}$ — якобиан однозначной системы координат a, θ, ζ .

Следуя работе [5], для получения гамильтониана магнитного поля $\psi = \psi(\phi, \theta, \zeta)$ необходимо использовать функцию ϕ в качестве новой радиальной координаты. В этом случае уравнения силовых линий принимают гамильтонову форму:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\zeta} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta} = - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right)_{\theta, \zeta=\text{const}}, \\ \frac{d\phi}{d\zeta} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right)_{\phi, \zeta=\text{const}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Роль импульса играет функция ϕ , канонически-сопряженный угол равен θ , время соответствует циклическому углу ζ . Важно отметить, что в дальнейшем мы будем изменять вид гамильтониана $\psi = \psi(\phi, \theta, \zeta)$ путем преобразования координат, что, естественно, не повлияет на факт потенциальности магнитного поля, гарантированного самой процедурой получения первичного гамильтониана.

Выбор координат a, θ, ζ произволен. В частности, произвольно положение координатной оси ($a = 0$) внутри рассматриваемой области $a \leq a_S$, где $a_S = \text{const}$ соответствует граничной магнитной поверхности S . Покажем, что подбором угловой координаты θ всегда можно добиться, чтобы $\phi = \phi(a)$ (см. (4)), и тем самым упростить процедуру получения гамильтониана и обеспечить совпадение граничной координаты $\phi_S = \text{const}$ с заданной поверхностью S .

В одной и той же точке пространства при преобразовании только одной координаты θ справедливо равенство

$$2\pi\mathbf{B} = \nabla\phi \times \nabla\theta + \nabla\psi \times \nabla\zeta = \nabla\bar{\phi} \times \nabla\bar{\theta} + \nabla\bar{\psi} \times \nabla\zeta. \quad (6)$$

Умножая (6) скалярно на $\nabla\zeta$, получим

$$2\pi\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\phi}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a}. \quad (7)$$

Следовательно, в одной и той же точке пространства радиальная производная от ϕ преобразуется по формуле

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a}\right)_{\bar{\theta},\zeta} = \frac{\sqrt{\bar{g}}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)_{\theta,\zeta}. \quad (8)$$

При использовании преобразования полоидального угла вида

$$\bar{\theta} = \theta + f(a, \theta, \zeta), \quad (9)$$

где f — периодическая по угловым координатам функция с нулевым средним значением, преобразование (8) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a}\right)_{\bar{\theta},\zeta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_{a,\zeta}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)_{\theta,\zeta}. \quad (10)$$

Функцию ϕ всегда можно представить в виде

$$\phi(a, \theta, \zeta) = \Phi(a) + \tilde{\phi}(a, \theta, \zeta), \quad (11)$$

где функция $\Phi(a)$ отражает угловое усреднение по координатной поверхности $a = \text{const}$, а периодическая по угловым координатам функция $\tilde{\phi}(a, \theta, \zeta)$ имеет нулевое среднее значение. Соотношение (10) принимает при этом следующую форму:

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a}\right)_{\bar{\theta},\zeta} = \frac{1 + \left(\frac{\partial\tilde{\phi}/\partial a}{d\Phi/da}\right)_{\theta,\zeta}}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_{a,\zeta}} \frac{d\Phi}{da}. \quad (12)$$

Ясно, что, выбирая функцию f из соотношения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_{a,\zeta} = \frac{\left(\frac{\partial\tilde{\phi}/\partial a}{d\Phi/da}\right)_{\theta,\zeta}}{d\Phi/da}, \quad (13)$$

получаем

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a}\right)_{\bar{\theta},\zeta} = \frac{d\Phi}{da}. \quad (14)$$

Следовательно, $\bar{\phi} = \Phi(a)$ и координатные поверхности $\bar{\phi} = \text{const}$ совпадают с координатными поверхностями $a = \text{const}$, в том числе и на границе.

Поэтому выражение для гамильтониана $\psi = \psi(\phi, \theta, \zeta)$ при сохранении старых обозначений всегда можно представить в виде, см. (4),

$$\psi(\phi, \theta, \zeta) = \Psi_0 - 2\pi \int_0^\phi \sqrt{g_\phi} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta d\phi, \quad (15)$$

где

$$\sqrt{g_\phi} = \frac{1}{\nabla\phi \cdot [\nabla\theta \times \nabla\zeta]} = \frac{1}{2\pi\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta}.$$

По аналогии с (11) выделим в гамильтониане среднюю часть:

$$\psi = \Psi(\phi) + \tilde{\psi}(\phi, \theta, \zeta). \quad (16)$$

Границное условие $\mathbf{B} \cdot \nabla\phi_S = 0$, где ϕ_S — обычный торoidalный магнитный поток внутри граничной магнитной поверхности S , выполняется при

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_{\phi=\phi_S} = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}\right)_{\phi=\phi_S} = 0.$$

Поскольку добавление к гамильтониану произвольной функции только от ζ не влияет на магнитное поле, принимаем на границе $\tilde{\psi}_S = 0$ и получаем $\psi_S = \Psi(\phi_S)$ — обычный полоидальный магнитный поток. На граничной магнитной поверхности уравнение силовой линии, см. (5), принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)_S &= - \left(\frac{d\Psi}{d\phi}\right)_S - \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\phi}\right)_S = \\ &= \mu_S - \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\phi}\right)_S, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mu_S = -(d\Psi/d\phi)_S$ — вращательное преобразование силовой линии на граничной поверхности. Отметим, что радиальная производная $(\partial\tilde{\psi}/\partial\phi)_S$ не равна нулю при обращении в нуль самой функции $\tilde{\psi}_S$ на граничной поверхности и силовые линии на поверхности S в этих координатах не выпрямлены.

3. ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Разложим гамильтониан (16) в ряд Тейлора по удалению от границы, $|\phi - 1| \ll 1$, и удержим только первый член:

$$\psi = \Psi(1) - \left(\mu_S - \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\phi}\right)_S\right)(\phi - 1). \quad (18)$$

Здесь координата ϕ и гамильтониан ψ нормированы на полный торoidalный поток ϕ_S . Уравнения силовых линий (5) с гамильтонианом (18) принимают вид

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \mu_S - \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\phi}\right)_S, \quad \frac{d\phi}{d\zeta} = (\phi - 1) \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\phi}\right)_S. \quad (19)$$

Следуя Морозову и Соловьеву [8], найдем интегралы этой системы. Переписав первое уравнение (19) в виде

$$\lambda(\theta, \zeta) d\theta - \lambda(\theta, \zeta) \left[\mu_S - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)_S \right] d\zeta = dW(\theta, \zeta) = 0, \quad (20)$$

где λ — интегрирующий множитель, $W(\theta, \zeta) = \text{const}$ — интеграл силовой линии, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \lambda, \\ \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= -\lambda \left[\mu_S - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)_S \right] \end{aligned} \quad (21)$$

и уравнение для интегрирующего множителя

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \lambda \left[\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)_S - \mu_S \right] \right\}. \quad (22)$$

Переписав второе уравнение (19) с использованием (21),

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi - 1)}{\phi - 1} &= d\zeta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)_S = d\zeta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) - \\ &- d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) = -\lambda d \left(\frac{1}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

получаем интеграл

$$\Phi = \frac{\phi - 1}{\lambda} = \text{const}. \quad (24)$$

Принимая в качестве «импульса» $p = \phi - 1$, убеждимся, что полученная величина Φ является действием

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \oint p d\theta.$$

Действительно, представляя интеграл W в виде

$$W = \theta - \mu_S \zeta + \eta_S(\theta, \zeta),$$

где η_S — периодическая функция с нулевым средним значением, получаем из (21) следующие соотношения:

$$\lambda = 1 + \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)_S = \frac{\frac{\partial \eta_S}{\partial \zeta} + \mu_S \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta}}{1 + \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta}}. \quad (25)$$

Не составляет труда убедиться, что формула (22) выполняется и Φ в (24) является действием.

Совершим переход к новым координатам действие Φ — угол $\bar{\theta}$ с использованием производящей функции $P(\Phi, \theta, \zeta) = \Phi[\theta + \eta_S(\theta, \zeta)]$ [6]. В результате получаем следующее преобразование полоидального угла и гамильтониана¹⁾:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{\partial P}{\partial \Phi} = \theta + \eta_S, \\ \bar{\psi} &= \psi - \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \Psi(1) - \mu_S \Phi. \end{aligned} \quad (26)$$

В дальнейшем в выражении для гамильтониана будем опускать постоянную $\Psi(1)$.

Мы получили известную процедуру выпрямления силовых линий на магнитной поверхности:

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\zeta} = \mu_S, \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} = 0, \quad (27)$$

которая, как известно, осуществима всегда [7, 9].

Полученное выражение (24) соответствует однаковому вращательному преобразованию μ_S на каждой приповерхностной интегральной поверхности. Отсутствие шара силовых линий явно указывает на недостаточность только первого приближения для получения реальных приповерхностных магнитных поверхностей.

Второй порядок разложения гамильтониана будем искать в новых координатах $\Phi, \bar{\theta}, \zeta$, полученных выше в линейном приближении. Представление магнитного поля (3) у поверхности в этих координатах имеет следующий вид:

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla \Phi \times \nabla \bar{\theta} + \nabla \bar{\psi} \times \nabla \zeta, \quad (28)$$

где гамильтониан $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\Phi, \bar{\theta}, \zeta)$ в первом порядке разложения по $|\Phi| \ll 1$ имеет вид (26). Полезно убедиться в этом непосредственной подстановкой преобразований (18), (24) и (26) в (3):

$$\begin{aligned} 2\pi \mathbf{B} &= \nabla \left[\Phi \left(1 + \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta} \right) \right] \times \nabla \theta + \\ &+ \nabla \left(\bar{\psi} + \Phi \frac{\partial \eta_S}{\partial \zeta} \right) \times \nabla \zeta = \nabla \Phi \times \nabla (\bar{\theta} - \eta_S) + \\ &+ \nabla \bar{\psi} \times \nabla \zeta + \nabla \left(\Phi \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta} \right) \times \nabla \theta + \\ &+ \nabla \left(\Phi \frac{\partial \eta_S}{\partial \zeta} \right) \times \nabla \zeta = \nabla \Phi \times \nabla \bar{\theta} + \\ &+ \nabla \bar{\psi} \times \nabla \zeta + \Phi \nabla \frac{\partial \eta_S}{\partial \theta} \times \nabla \theta + \Phi \nabla \frac{\partial \eta_S}{\partial \zeta} \times \nabla \zeta. \end{aligned} \quad (29)$$

¹⁾ Гамильтониан изменяется из-за явойной зависимости от «времени» ζ в производящей функции [6].

Разложение в ряд Тейлора гамильтониана $\bar{\psi}$ до второго порядка имеет вид

$$\bar{\psi} = -\mu_S \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S. \quad (30)$$

Будем искать производящую функцию канонического преобразования к координатам действие $\hat{\Phi}$ – угол $\hat{\theta}$ в виде [6]

$$P = \hat{\Phi} \bar{\theta} + \varepsilon P_1(\hat{\Phi}, \bar{\theta}, \zeta), \quad (31)$$

где ε отмечает второй порядок малости в разложении (30). Старый импульс Φ и новая угловая переменная $\hat{\theta}$ получаются из производящей функции (31):

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial P}{\partial \theta} = \hat{\Phi} + \varepsilon \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \bar{\theta}, \zeta)}{\partial \bar{\theta}}, \\ \hat{\theta} &= \frac{\partial P}{\partial \hat{\Phi}} = \bar{\theta} + \varepsilon \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \bar{\theta}, \zeta)}{\partial \hat{\Phi}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из-за явной зависимости от времени в (31) гамильтониан (30) изменится:

$$\psi_2(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta) = \bar{\psi}(\Phi, \bar{\theta}, \zeta) - \varepsilon \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \bar{\theta}, \zeta)}{\partial \zeta}. \quad (33)$$

Чтобы получить новое выражение для него, необходимо выразить старые переменные через новые с помощью соотношений (32). В первом порядке по ε это сделать просто:

$$\begin{aligned} \Phi &= \hat{\Phi} + \varepsilon \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta)}{\partial \hat{\theta}}, \\ \bar{\theta} &= \hat{\theta} - \varepsilon \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta)}{\partial \hat{\Phi}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), найдем выражение для нового гамильтониана²⁾:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= -\mu_S \hat{\Phi} - \frac{1}{2} \hat{\Phi}^2 \mu'_S + \frac{1}{2} \hat{\Phi}^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S - \\ &- \left[\frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta)}{\partial \zeta} + \mu_S \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta)}{\partial \hat{\theta}} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\mu'_S = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S d\hat{\theta} d\zeta$$

— шир магнитных силовых линий,

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S = \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S + \mu'_S.$$

Выбираем производящую функцию P_1 из условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \bar{\theta}, \zeta)}{\partial \zeta} + \mu_S \frac{\partial P_1(\hat{\Phi}, \hat{\theta}, \zeta)}{\partial \hat{\theta}} &= \\ = \frac{1}{2} \hat{\Phi}^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \Phi^2} \right)_S & \end{aligned} \quad (36)$$

так, чтобы получить интегрируемый гамильтониан в виде разложения вращательного преобразования $\mu = \mu(\hat{\Phi})$ в ряд Тейлора

$$\psi_2 = -\mu_S \hat{\Phi} - \frac{1}{2} \hat{\Phi}^2 \mu'_S(\hat{\Phi}). \quad (37)$$

Возможность получения такого гамильтониана следует из КАМ-теоремы (см. Введение).

Приводимые ниже численные примеры приповерхностных гамильтонианов демонстрируют высокую живучесть (stickiness) приграничных магнитных поверхностей. На рис. 1 показан пример сохранения приповерхностных магнитных поверхностей при достаточно сильных нерезонансных возмущениях при иррациональном вращательном преобразовании и шире на граничной магнитной поверхности. Нам не удалось найти возмущение, которое смогло бы изменить топологию вложенных поверхностей или создать приповерхностную эргодичность.

Поэтому мы решили существенно уменьшить шир, максимально приблизиться к рациональному вращательному преобразованию на граничной поверхности и использовать во втором порядке разложения резонансное возмущение. На рис. 2 показан пример структуры приповерхностных поверхностей при граничном вращательном преобразовании 0.332 при резонансном возмущении $-0.005(\Phi - 1)^2 \times \cos(\zeta - 3\theta)$. Хорошо видно образование приповерхностного острова, но приповерхностные вложенные магнитные поверхности сохраняются.

Известно, что наличие двух и более пространственно-близких островов приводит к эргодизации.

²⁾ В ответе полагаем $\varepsilon = 1$.

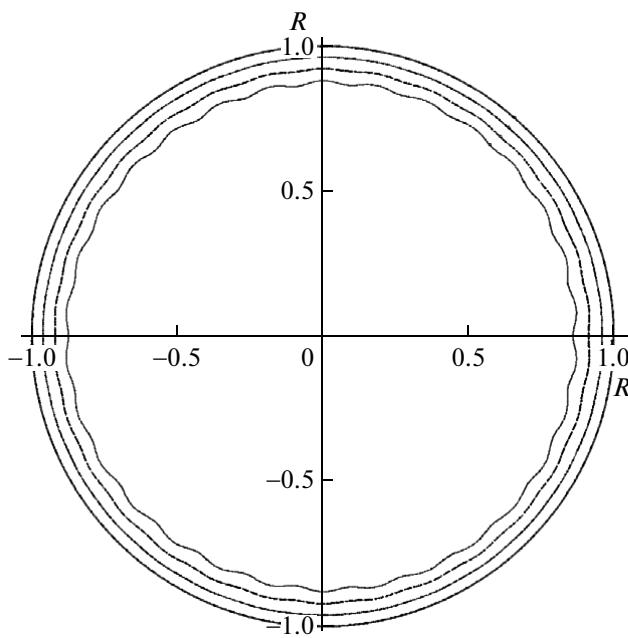


Рис. 1. Приповерхностные сечения Пуанкаре для гамильтониана силовых линий магнитного поля $\psi_2 = -\mu_s(\Phi - 1) + 0.5(\Phi - 1)^2\mu'_s$ с $\mu_s = \sqrt{2}$, $\mu'_s = 0.2$ при наложении возмущения $-0.05(\Phi - 1)^2 [\cos(\zeta - 3\theta) + 2 \cos(7\zeta - 30\theta)]$

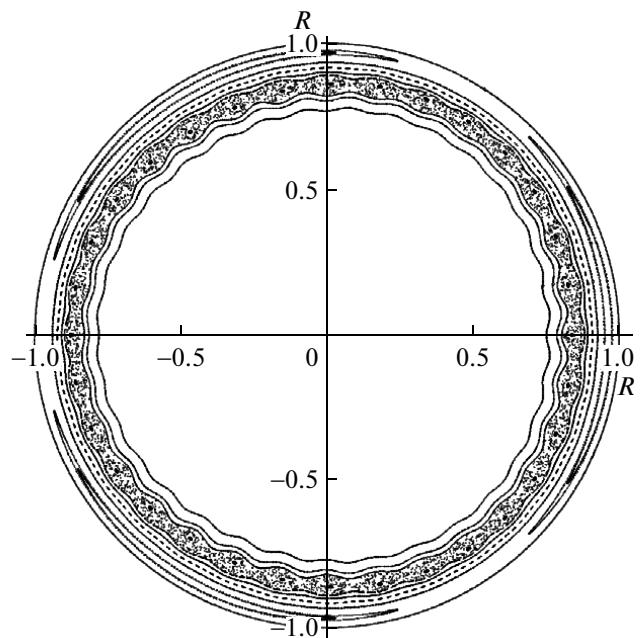


Рис. 3. То же, что на рис. 1 с $\mu_s = 0.33$, $\mu'_s = 0.1$ при наложении резонансного возмущения $-0.005(\Phi - 1)^2 [\cos(\zeta - 3\theta) + 0.2 \cos(11\zeta - 32\theta)]$

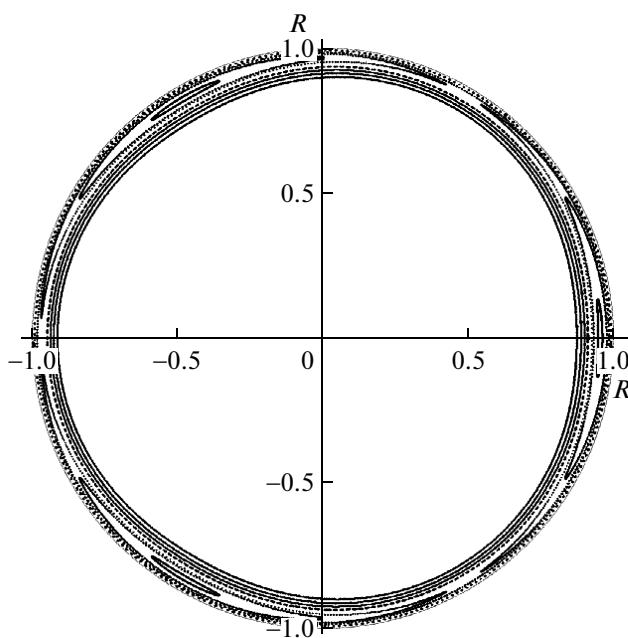


Рис. 2. То же, что на рис. 1 с $\mu_s = 0.332$, $\mu'_s = 0.04$ при наложении резонансного возмущения $-0.005(\Phi - 1)^2 \cos(\zeta - 3\theta)$

Поэтому мы добавили второе резонансное возмущение для создания острова с вращательным преобразованием $11/32$ в непосредственной близости от приповерхностного острова $1/3$. Результаты расчета показаны на рис. 3. Хорошо видно, что внутренний остров демонстрирует объемную эргодизацию в виде слоя (cantori) при сохранении приповерхностных вложенных магнитных поверхностей. Рост амплитуды второго резонансного возмущения не изменяет ситуации у поверхности, но область объемной эргодизации распространяется на все большее расстояние внутрь, см. рис. 4. В последнем случае надо помнить, что приведенные гамильтонианы основаны в непосредственной близости от граничной поверхности.

Живучесть (stickiness) можно еще связать с обращением в нуль возмущений от внутренних островов, вызванным используемым условием существования базовый (master) магнитной поверхности. В работе [10] было показано, что обращение в нуль возмущения от других островов в данном резонансе (острове) при сохранении градиента радиальной зависимости этих возмущений эффективно устраниет эргодизацию данного острова.

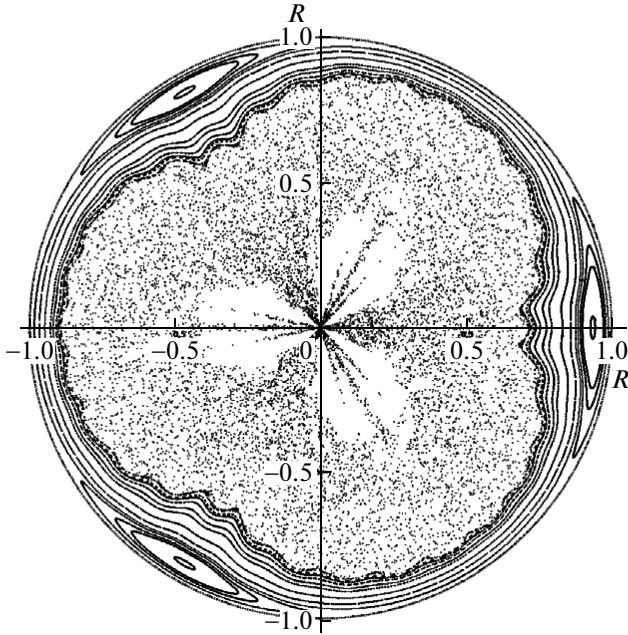


Рис. 4. То же, что на рис. 1 с $\mu_S = 0.33$, $\mu'_S = 0.15$ при наложении резонансного возмущения $-0.05(\Phi - 1)^2 [\cos(\zeta - 3\theta) + 0.1 \cos(11\zeta - 30\theta)]$

4. ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ГАМИЛЬТОНИАН

Воспользуемся представлением магнитного поля в вакууме (2). Будем использовать в качестве тороидальных координатных поверхностей эквипотенциальные поверхности $\bar{\zeta} = \zeta + \tilde{\varphi} = \text{const}$. Проводя преобразование полоидальной координаты, описанное в разд. 1, приходим к выражению (15) для гамильтониана. Подставляя в (15) магнитное поле (2), получим

$$\begin{aligned} \psi(\phi, \theta, \bar{\zeta}) &= \Psi_0 - F \int_0^\phi \sqrt{g_\phi^*} g^{23} d\phi = \\ &= \Psi_0 - \int_0^\phi \frac{g^{23}}{g^{33}} d\phi = \Psi_0 + \int_0^\phi \frac{g_{13}g_{12} - g_{11}g_{23}}{g_{12}^2 - g_{11}g_{22}} d\phi, \quad (38) \end{aligned}$$

где

$$\sqrt{g_\phi^*} = \frac{1}{\nabla\phi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\bar{\zeta})} = \frac{1}{Fg^{33}} = \frac{F^2}{4\pi^2 B^2}$$

— якобиан и использованы стандартные обозначения для контр- и ковариантных компонент метрического тензора. Будем далее нормировать ϕ, ψ на ϕ_S ,

модуль магнитного поля на F^2/ϕ_S , геометрические размеры на ϕ_S/F .

На граничной магнитной поверхности

$$g_S^{13} = (\nabla\bar{\zeta} \cdot \nabla\phi)_S = 0.$$

Это соотношение в ковариантных компонентах метрического тензора принимает вид

$$(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})_S = 0.$$

Умножая его на $g_{12}S$, добавляя и вычитая $g_{11}Sg_{22}Sg_{23}S$, имеем

$$\left(\frac{g_{13}g_{12} - g_{11}g_{23}}{g_{12}^2 - g_{11}g_{22}} \right)_S = \left(\frac{g_{23}}{g_{22}} \right)_S.$$

Используя это выражение в (38), получим в первом порядке разложения гамильтониана (18)

$$\psi = \Psi(1) + \left(\frac{g_{23}}{g_{22}} \right)_S (\phi - 1). \quad (39)$$

Для вращательного преобразования магнитной силовой линии на граничной магнитной поверхности получаем известное выражение [9]

$$\mu_S = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{23}S}{g_{22}S} d\theta d\bar{\zeta}. \quad (40)$$

Таким образом, первый порядок гамильтониана определяется первой квадратичной формой поверхности с определяющей ролью перекрестного члена.

Для получения второго порядка разложения гамильтониана надо использовать первое разложение метрики по удалению от поверхности, что приводит к появлению в выражениях кривизны поверхности, т. е. компонент второй квадратичной формы (см., например, Приложение). Мы не будем приводить здесь рутинные разложения подынтегрального выражения в гамильтониане (38). Используем известное выражение для ширины вращательного преобразования μ'_S на магнитной поверхности [9]

$$\mu'_S = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s_S}{|\nabla\phi|_S^2} d\theta d\bar{\zeta}, \quad (41)$$

где s_S — локальный шир. В вакууме локальный шир на магнитной поверхности $s_S = -2\tau_{nS}$, где τ_{nS} — кручение силовой линии на поверхности S [9]. Воспользовавшись общим выражением для кручения линии на поверхности (см., например, [9])

$$\tau_n = \frac{(g_{22S}\kappa_{23S} - g_{23S}\kappa_{22S}) \left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 + (g_{22S}\kappa_{33S} - g_{33S}\kappa_{22S}) \frac{d\theta}{d\zeta} + g_{23S}\kappa_{33S} - g_{33S}\kappa_{23S}}{\sqrt{g_{22S}g_{33S} - g_{23S}^2} \left(g_{22S} \left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 + 2g_{23S} \frac{d\theta}{d\zeta} + g_{33S} \right)} \quad (42)$$

с учетом равенства $d\theta/d\bar{\zeta} = -g_{23S}/g_{22S}$, приходим к соотношению

$$s_S = \frac{2 \left(\kappa_{23S} - \frac{g_{23S}}{g_{22S}} \kappa_{22S} \right)}{\sqrt{g_{22S}g_{33S} - g_{23S}^2}}. \quad (43)$$

Воспользуемся общим соотношением базисных векторов

$$\nabla\phi = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\sqrt{g_\phi^*}}, \quad \sqrt{g_\phi^*} = (g_S^{33})^{-1},$$

чтобы получить соотношения

$$\sqrt{g_{22S}g_{33S} - g_{23S}^2} = |\nabla\phi|_S \frac{1}{4\pi^2 B^2} = \frac{g_{22S}}{|\nabla\phi|_S}. \quad (44)$$

Подставив (44) в (43), приходим к формуле

$$\frac{s_S |\nabla\phi|_S}{B^2} = 8\pi^2 \left(\kappa_{23S} - \frac{g_{23S}}{g_{22S}} \kappa_{22S} \right), \quad (45)$$

которая демонстрирует зависимость на магнитной поверхности базовых магнитных функций B , s_S , $|\nabla\phi|_S$ [11].

Таким образом, компоненты первой и второй квадратичной форм граничной поверхности определяют характеристики пристеночного гамильтониана.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Знание вектора магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}(a, \theta, \zeta)$ позволяет всегда получить его гамильтониан по методу [5]. Мы рассмотрели простейший случай вакуума, когда для получения \mathbf{B} достаточно решить уравнение Лапласа с граничным условием в форме известной тороидальной магнитной поверхности. Такая задача интересна, например, для бестоковых стеллараторов со сверхпроводящим кожухом. Для получения \mathbf{B} при наличии плазмы и токов необходимо решать задачу равновесия, которая в трехмерной геометрии сложна и, вообще говоря, даже может не иметь точного решения.

По методу [5] при получении гамильтониана необходимо переходить к новой радиальной координате $\phi = \phi(a, \theta, \zeta)$. Мы применили преобразование угловой полоидальной координаты θ для упрощения этой процедуры и получения $\phi = \phi(a)$.

Используя удаление от граничной поверхности в качестве параметра возмущения гамильтониана и проводя преобразования к новым координатам действие—угол, мы получили выражение для интегрируемого приповерхностного гамильтониана. В него вошли значения вращательного преобразования и его шири на граничной поверхности. Мы показали, как эти величины связаны с компонентами первой и второй квадратичных форм граничной магнитной поверхности.

Автор благодарит М. И. Михайлова и И. А. Тайманова за продуктивное обсуждение статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-4361.2012.2 Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Первый порядок разложения метрических компонент в направлении нормали к поверхности

Для примера разложим компоненту метрического тензора g_{23} в ряд Тейлора по нормали к поверхности и проведем с учетом

$$\mathbf{e}_{1S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right)_S = \frac{\mathbf{n}_S}{|\nabla\phi|_S}$$

следующие преобразования:

$$\begin{aligned} g_{23} &= g_{23S} + (\phi - 1) \frac{\partial(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)}{\partial \phi} = \\ &= g_{23S} + 2(\phi - 1)\mathbf{e}_2 \frac{\partial(\mathbf{e}_3)}{\partial \phi} = \\ &= g_{23S} + 2(\phi - 1)\mathbf{e}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \bar{\zeta} \partial \phi} = \\ &= g_{23S} + 2(\phi - 1)\mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \bar{\zeta}} = g_{23S} + 2 \frac{\phi - 1}{|\nabla\phi|_S} \mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{n}_S}{\partial \bar{\zeta}} = \\ &= g_{23S} - 2 \frac{(\phi - 1)\kappa_{23}}{|\nabla\phi|_S}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{n}_S}{\partial \bar{\zeta}} = -\kappa_{23}$$

— перекрестная кривизна, одна из трех компонент второй квадратичной формы поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Арнольд, УМН **18**, 9 (1963).
2. A. D. Perry and S. Wiggins, Physica D **71**, 102 (1994).
3. A. Morbidelli and A. Giorgilli, J. Stat. Phys. **78**, 1607 (1995).
4. В. И. Ильгисонис, А. А. Сковорода, ЖЭТФ **157**, 1018 (2010).
5. A. H. Boozer, Phys. Fluids **26**, 1288 (1983).
6. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).
7. А. Н. Колмогоров, ДАН **98**, 469 (1954).
8. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтovichа, Госатомиздат, Москва (1963), с. 77.
9. А. А. Сковорода, *Магнитные ловушки для удержания плазмы*, Физматлит, Москва (2009).
10. А. А. Сковорода, Физика плазмы **37**, 691 (2011).
11. А. А. Сковорода, Физика плазмы **35**, 121 (2009).