

# ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯРОНА (БИПОЛЯРОНА) И ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

*В. Д. Лакно\**

*Институт математических проблем биологии Российской академии наук  
142290, Пущино, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 12 ноября 2012 г.

Дается физическая интерпретация трансляционно-инвариантных поляронов и биполяронов и анализируются различные следствия, вытекающие из их существования. Получена самая низкая вариационная оценка для энергии биполярона  $E(\eta)$  с  $E(0) = -0.440636\alpha^2$ , где  $\alpha$  — константа электрон-фононной связи,  $\eta$  — параметр ионной связи. Обсуждается проблема квантования в окрестности классического решения в квантовой теории поля.

DOI: 10.7868/S0044451013060025

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В основе квантовой теории поля лежит представление о существовании классических решений, в окрестности которых осуществляется квантование полей [1]. Такими классическими решениями могут быть обычные плоские волны, солитоны, кинки и др. В частности, квантовополевые теории частицы, взаимодействующей с полем, исходят из предположения о существовании полуклассического решения (т. е. когда квантовая частица движется в классическом поле), к которому должно сходиться решение квантовополевой задачи в пределе, когда константа взаимодействия  $\alpha \rightarrow \infty$ . В окрестности такого решения можно проводить квантование поля и искать решения получаемой таким образом квантовой задачи.

В работе [2] на примере квантовополевой теории полярона сильной связи было продемонстрировано невыполнение такого соответствия, т. е. отсутствие перехода к полуклассическому описанию при предельном переходе. Этот результат влечет за собой многочисленные следствия, наиболее важные из которых обсуждаются в данной работе.

## 2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛЯРОНОВ

Квантовополевая трансляционно-инвариантная (ТИ) теория полярона была построена в работе [3]. Согласно [3], основное состояние ТИ-полярона представляет собой делокализованное состояние электрон-фононной системы: вероятность нахождения электрона в любой точке пространства одинакова. Делокализованы как электронная плотность, так и амплитуды фононных мод (перенормированные взаимодействием с электроном). Понятие поляронная потенциальная яма (образованная локальными фононами [4]), в которой локализован электрон, т. е. samozaxваченное состояние, в ТИ-теории отсутствует. Соответственно, индуцированный поляризационный заряд для ТИ-полярона равен нулю. Отсутствие локализованной «фононной шубы» у ТИ-полярона позволяет предположить, что его эффективная масса не слишком сильно отличается от эффективной массы электрона. Энергия основного состояния ТИ-полярона меньше энергии полярона Пекара и равна  $E_0 = -0.1257520\alpha^2$  [2] (для полярона Пекара  $E_0 = -0.10851128\alpha^2$  [5]).

Таким образом, при  $P = 0$ , где  $P$  — полный импульс полярона, имеется энергетическая щель между ТИ-поляронным состоянием и пекаровским состоянием (т. е. состоянием с нарушенной трансля-

\*E-mail: lak@impb.psn.ru

ционной инвариантностью). ТИ-полярон является бесструктурной частицей (результаты исследований структуры пекаровского полярона суммированы в работе [4]). Согласно ТИ-теории полярона, термины полярон большого радиуса (ПБР) и полярон малого радиуса (ПМР) являются условными, так как в обоих случаях состояние электрона делокализовано по кристаллу. Различие между ПБР и ПМР в ТИ-теории состоит в том, что для ПБР выполняется неравенство  $k_{char}a < \pi$ , а для ПМР  $k_{char}a > \pi$ , где  $a$  — постоянная решетки,  $k_{char}$  — характерное значение фоновых волновых векторов, которые дают основной вклад в энергию полярона. Сделанное утверждение справедливо не только для полярона Пекара–Фрелиха, но и для всего класса поляронов, у которых константа связи не зависит от волнового вектора электрона, как это имеет место, например, в случае холстейновского полярона. В классе поляронов с константой связи, зависящей от волнового вектора электрона, указанные критерии могут не выполняться (как это имеет место, например, в модели Си–Шриффера–Хигера [6]).

Указанные особенности ТИ-поляронов определяют их физические свойства, качественно отличные от свойств пекаровских поляронов. При наличии в кристалле небольших локальных нарушений ТИ-полярон остается в делокализованном состоянии. Так, например, в ионном кристалле с вакансиями образование  $F$ -центров делокализованными поляронными состояниями будет происходить только при некотором критическом значении статической диэлектрической постоянной  $\epsilon_{0c}$ . При  $\epsilon_0 > \epsilon_{0c}$  в кристалле будут присутствовать делокализованные ТИ-поляроны и свободные вакансии. При  $\epsilon_0 = \epsilon_{0c}$  будет происходить переход из делокализованного состояния в локализованное на вакансии состояние (коллапс волновой функции). Такое поведение ТИ-поляронов качественно отличается от поведения пекаровских поляронов, которые локализуются на вакансиях при любом значении  $\epsilon_0$ . Это объясняет, в частности, отсутствие наблюдений поглощения (т. е. структуры) свободным поляроном Пекара, так как в этом случае реализуется ТИ-полярон. Поглощение появляется только при образовании связанного полярона Пекара, т. е.  $F$ -центра. Сделанные утверждения подтверждаются также рядом последних работ, рассматривающих полярон Холстейна [7–9].

Отметим, что изменениям должна подвергнуться только физическая интерпретация свободных поляронов сильной связи. Подавляющее большинство результатов по физике поляронов сильной связи относятся к связанным (на вакансиях или дефектах

решетки) поляронным состояниям пекаровского типа и не требуют какой-либо коррекции.

Учет трансляционной инвариантности в случае полярона приводит к небольшому изменению в оценке основного состояния и, на первый взгляд, кажется неактуальным для физических приложений. Такому выводу, однако, препятствуют два обстоятельства. Во-первых, оценка энергии, полученная для ТИ-полярона, будучи вариационной, дает лишь верхнее значение для энергии основного состояния. Во-вторых, известны случаи, когда учет трансляционной инвариантности приводит к гораздо большему изменению энергии основного состояния. К их числу относится важный в практическом отношении случай биполярона, рассмотренный в следующем разделе. В качестве наглядной иллюстрации к сказанному можно привести пример оценки для энергий ТИ-состояния, автолокализованного состояния и состояния, локализованного на статическом дефекте, которые могут быть близкими, что, однако, совсем не свидетельствует о тождественности этих состояний. Подтверждением является сравнение свойств локализованного на статическом дефекте полярона и свойств легкого электрон-полярона, локализованного на тяжелой дырке (рис. 6 в [10]). Свойства двух таких состояний очень похожи, но одно из них является трансляционно-инвариантным, а другое — нет.

### 3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ БИПОЛЯРОНЫ

Квантовополевая ТИ-теория биполярона была построена в работе [11] на основе поляронной ТИ-теории [3]. Согласно [11], основное состояние ТИ-биполярона представляет собой делокализованное состояние. В этом разделе мы покажем, что оценка основного состояния, найденная в работах [11, 12] с использованием одно- и двухпараметрических пробных волновых функций, может быть улучшена, если использовать трехпараметрическую волновую функцию, и обсудим вытекающие из такой оценки следствия.

Согласно [11], гамильтониан Фрелиха для биполярона имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M_e}\Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu_e}\Delta_r + U(|\mathbf{r}|) + \sum_k \hbar\omega a_k^\dagger a_k + \sum_k 2 \cos \frac{kr}{2} (V_k a_k e^{ikR} + \text{H.c.}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$  — координаты соответственно центра масс

и относительного движения электронов;  $M_e = 2m$ ,  $\mu_e = m/2$ ,  $m$  — масса электрона;  $a_k^\dagger, a_k$  — операторы фононного поля;  $V_k = (e/k)\sqrt{2\pi\hbar\omega/\tilde{\epsilon}V}$ ,  $\tilde{\epsilon}^{-1} = \epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_0^{-1}$ ,  $\omega$  — фононная частота,  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_\infty$  и  $\epsilon_0$  — высокочастотная и статическая диэлектрические постоянные,  $V$  — объем системы,  $U(r) = e^2/\epsilon_\infty|\mathbf{r}|$ . Для минимизации полной энергии  $E = \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle$  в [11] была выбрана волновая функция

$$\Psi_0 = \Psi(r) \exp \left\{ -i \sum_k \mathbf{k} a_k^\dagger a_k \mathbf{R} \right\} \times \exp \left\{ \sum_k f_k (a_k - a_k^\dagger) \right\} \Lambda_0. \quad (2)$$

Явный вид  $\Lambda_0 = \Lambda_0(f_k, a_k)$  приведен в работе [11]. Выберем пробную волновую функцию  $\Psi(r)$  и вариационные параметры  $f_k$  в виде

$$\begin{aligned} f_k &= -N\bar{V}_k \exp \left( -\frac{k^2}{2\mu} \right), \\ \psi(r) &= \left( \frac{2}{\pi l^2} \right)^{3/4} \exp \left( -\frac{r^2}{l^2} \right), \\ \bar{V}_k &= 2V_k \langle \Psi | \cos \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{2} | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N, \mu, l$  — вариационные параметры. При  $N = 1$  выражение (3) воспроизводит результаты работы [12], а при  $N = 1$  и  $\mu \rightarrow \infty$  — результаты работы [11].

Подстановка (2), (3) в выражение для полной энергии после минимизации по параметру  $N$  приводит к следующему выражению для  $E$ :

$$E(x, y; \eta) = \phi(x, y; \eta)\alpha^2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y; \eta) &= \frac{6}{x^2} + \frac{20.25}{x^2 + 16y} - \\ &\quad - \frac{16\sqrt{x^2 + 16y}}{\sqrt{\pi}(x^2 + 8y)} + \frac{4\sqrt{2/\pi}}{x(1-\eta)}. \end{aligned}$$

Здесь  $x, y$  — варьируемые параметры:  $x = l\alpha$ ,  $y = \alpha^2/\mu$ ,  $\alpha = (e^2/\hbar\tilde{\epsilon})\sqrt{m/2\hbar\omega}$  — константа электрон-фононной связи,  $\eta = \epsilon_\infty/\epsilon_0$  и положено, что  $\hbar = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $M_e = 1$  (соответственно  $\mu_e = 1/4$ ). Обозначим  $\Phi_{min}$  минимальное значение функции  $\phi$  от параметров  $x$  и  $y$ . На рис. 1 приведена зависимость  $\Phi_{min}$  от параметра  $\eta$ . На рис. 2 показана зависимость  $x_{min}, y_{min}$  от параметра  $\eta$ .

Из рис. 1 следует, что  $E_{min}(\eta = 0) = -0.440636\alpha^2$  — самое низкое из всех ранее

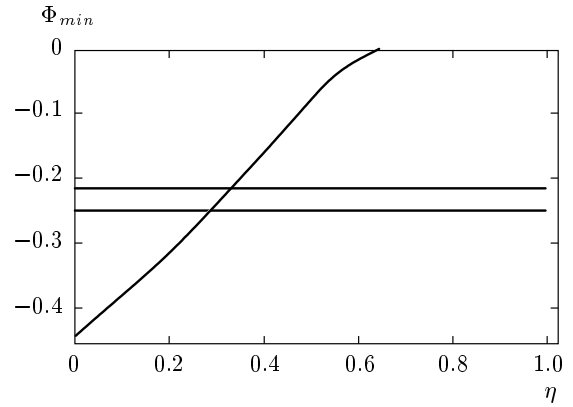


Рис. 1. Функция  $\Phi_{min}(\eta) = \min_{x,y} \phi(x, y, \eta)$  и горизонтальные линии  $-0.217, -0.2515$ ;  $\Phi_{min}(0) = -0.440636$

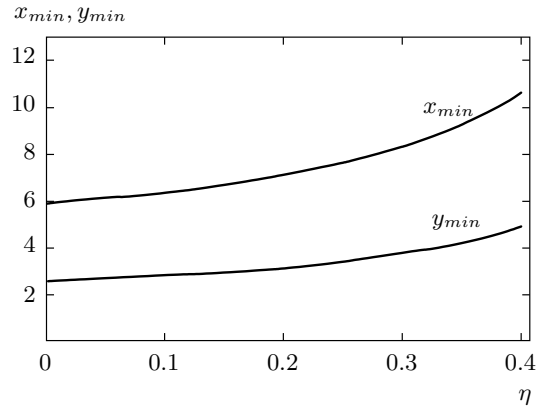


Рис. 2. Координаты  $x_{min}(\eta), y_{min}(\eta)$ , на которых достигается минимум  $\phi$  при  $0 \leq \eta \leq 0.4$

полученных вариационным способом значение энергии основного состояния биполярона. Горизонтальные линии на рис. 1 соответствуют энергиям:  $E_1 = -0.217\alpha^2$  и  $E_2 = -0.2515\alpha^2$ , где  $E_1 = 2E_{P1}$ ,  $E_{P1}$  — энергия основного состояния Пекара [5];  $E_2 = 2E_{P2}$ ,  $E_{P2}$  — энергия основного состояния ТИ-полярона [2]. Пересечение этих линий с кривой  $E_{min}(\eta)$  дает критические значения параметров  $\eta = \eta_{C1} = 0.3325$  и  $\eta = \eta_{C2} = 0.289$ . При  $\eta > \eta_{C2}$  происходит распад биполярона на два ТИ-полярона, при  $\eta > \eta_{C1}$  происходит распад биполярона на пекаровские поляроны. Значения минимизирующих параметров  $x_{min}$  и  $y_{min}$  для этих значений  $\eta$  равны:  $x_{min}(0) = 5.87561$ ;  $y_{min}(0) = 2.58537$ ,  $x_{min}(0.289) = 8.16266$ ,  $y_{min}(0.289) = 3.68098$ ,  $x_{min}(0.3325) = 8.88739$ ,  $y_{min}(0.3325) = 4.03682$ .

Критическое значение константы электрон-фо-

нонной связи  $\alpha$  для образования ТИ-биполярона равно  $\alpha_C = 4.54$  и является самым низким из оценок, сделанных вариационным методом.

Отметим, что для полученного основного состояния ТИ-биполярона выполняется теорема вириала [13]:

$$\frac{\phi_{kin}}{\phi} = -1, \quad \frac{\tilde{\phi}_{el}}{\phi} = 3, \quad \frac{\tilde{\phi}_{int}}{\phi} = 4, \quad (5)$$

где

$$\phi_{kin} = \frac{20.25}{x^2 + 16y} + \frac{6}{x^2}, \quad \phi_{int} = -\frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{x^2 + 16y}}{x^2 + 8y},$$

$$\tilde{\phi}_{int} = \phi_{int} + 2\bar{U}, \quad \bar{U} = 4 \frac{\sqrt{2/\pi}}{x(1-\eta)}, \quad \tilde{\phi}_{el} = \phi_{kin} + \tilde{\phi}_{int}.$$

Входящие в (5) величины

$$E_{kin} = \phi_{kin}\alpha^2, \quad E_{int} = \phi_{int}\alpha^2,$$

$$E_{el} = (\phi_{kin} + \phi_{int} + \bar{U})\alpha^2$$

имеют смысл соответственно кинетической энергии, энергии взаимодействия электрона с фоновым полем и электронной энергии:

$$E_{kin} = \sum_{i=1,2} \left\langle \Psi \left| -\frac{\hbar}{2m} \Delta_i \right| \Psi \right\rangle,$$

$$E_{int} = \sum_{k,i=1,2} \left\langle \Psi \left| \sum_k [V_k a_k e^{ikr_i} + \text{H.c.}] \right| \Psi \right\rangle,$$

$$E_{el} = E_{kin} + E_{int} + \langle \Psi | U(r) | \Psi \rangle, \quad \bar{U} = \frac{\langle \Psi | U(r) | \Psi \rangle}{\alpha^2}.$$

Соотношения (5) выполняются с точностью до шести знаков. Большая энергия связи ТИ-биполярона приводит к важным физическим следствиям. В частности, при наличии в кристалле небольших локальных нарушений ТИ-биполярон будет оставаться в делокализованном состоянии. Так, например, в ионном кристалле с вакансиями образование  $F'$ -центров делокализованными биполяронными состояниями будет происходить только при некотором критическом значении статической диэлектрической постоянной  $\epsilon_{0c}$ . При значении  $\epsilon_0 > \epsilon_{0c}$  в кристалле будут делокализованные ТИ-биполярны и свободные вакансии.

При  $\epsilon_0 = \epsilon_{0c}$  будет происходить переход из делокализованного состояния ТИ-биполярона в локализованное на вакансии состояние, т. е. в  $F'$ -центр. Такое поведение ТИ-биполяронов качественно отличается от поведения биполяронов со спонтанно нарушенной симметрией пекаровского типа [13], которые локализируются на вакансиях при любом значении  $\epsilon_0$ .

Делокализованные при  $P = 0$  ТИ-биполярны, где  $P$  — полный импульс биполярона, будут отделены энергетической щелью от биполяронных состояний с нарушенной трансляционной инвариантностью, которые описываются локализованной волновой функцией. В работе [12] было высказано предположение, что трансляционно-инвариантные поляронные и биполяронные состояния являются сверхпроводящими. Как и в случае ТИ-полярона, в случае ТИ-биполярона нет никаких оснований считать его массу сильно отличающейся от удвоенной массы спаренных электронов. Как известно, объяснение высокотемпературной сверхпроводимости на основе биполяронного механизма бозе-конденсации сталкивается с трудностью, связанной с большой массой биполяронов и, как следствие, низкой температурой бозе-конденсации. Возможность малости массы ТИ-биполяронов разрешает эту проблему. Следует подчеркнуть, что отмеченные выше свойства ТИ-биполяронов придают им сверхпроводящие качества даже в отсутствие их бозе-конденсации.

#### 4. ДИСКУССИЯ О ПОЛНОТЕ ТЕОРИИ ТУЛУБА

В работах [14, 15] был поставлен вопрос о неполноте теории Тулуба [3]. Возражения авторов работ [14, 15] основываются на работе Порша и Роселера [16], которая воспроизводит результаты теории Тулуба. Однако в последнем разделе своей статьи Порш и Роселер рассмотрели вопрос о том, что произойдет, если в теории Тулуба заменить бесконечный предел интегрирования на конечный, а затем перейти к бесконечному пределу. Сюрпризом оказалось то, что в этом случае одновременно с обрезанием интегрирования по фоновым волновым векторам в функционале полной энергии полярона к последнему необходимо добавить член  $\delta E^{PR}$ , который не исчезает, если верхний предел устремить к бесконечности [15, 17]. На основании этого результата авторы работ [14, 15] пришли к выводу, что Тулуб не учел эту добавку и, таким образом, его теория неполна.

Чтобы разрешить парадокс с вкладом в энергию полярона «плазменной частоты», приводящей к добавке  $\delta E^{PR}$  [16], рассмотрим функцию  $\Pi_q(s)$ , определяемую формулой (37с) работы [16]. Нули этой функции дают вклад в энергию «отдачи полярона» и, согласно [16], определяются из решения уравнения

$$1 = \lambda \frac{2}{3m} \sum_q \frac{q^2 f_q^2 \hbar \omega_q}{s - \omega_q^2}, \quad (6)$$

где мы сохранили обозначения, использованные в работе [16].

Если обрезание в сумме, фигурирующей в правой части (6), отсутствует, то решение уравнения (6) дает спектр значений  $s$ , определяемый частотами  $\Omega_{q_i}$ , лежащими между соседними значениями  $\omega_{q_i}$  и  $\omega_{q_{i+1}}$  для всех волновых векторов  $q_i$ . Эти частоты определяют значение энергии «отдачи»:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2} \sum_{q_i} (\Omega_{q_i} - \omega_{q_i}). \quad (7)$$

Посмотрим, что происходит с вкладом частот  $\Omega_{q_i}$  в  $\Delta E$  в той области волновых векторов  $q$ , в которой  $f_q$  стремится к нулю, но нигде в точности не обращается в нуль. Из (6) следует, что при  $f_q \rightarrow 0$  решения уравнения (6)  $\Omega_{q_i}$  будут стремиться к  $\omega_{q_i}$ :  $\Omega_{q_i} \rightarrow \omega_{q_i}$ . Соответственно, вклад в  $\Delta E$  области волновых векторов, в которой  $f_q \rightarrow 0$ , будет также стремиться к нулю.

В частности, если мы введем некоторое  $q^0$ , такое что в области  $q > q^0$  величины  $f_q$  будут малы, мы получим для  $\Delta E$  выражение

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2} \sum_{q_i \leq q^0} (\Omega_{q_i} - \omega_{q_i}), \quad (8)$$

не содержащее никаких добавочных членов. Это соответствует тому, что в функционале Тулуба мы можем поставить верхний предел  $q^0$  и никаких добавочных членов при этом не возникнет.

Например, если для исследования минимума функционала Тулуба выбрать пробную функцию  $f_q$ , не содержащую обрезание, в виде

$$f_q = -V_q \exp(-q^2/2a^2(q)), \quad (9)$$

$$a(q) = \frac{a}{2} \left[ 1 + \text{th} \left( \frac{q_b - q}{a} \right) \right],$$

где  $a$  — параметр пробной функции Тулуба [3],  $q_b$  удовлетворяет условию  $a \ll q_b \ll q_{0c}$ ,  $q_{0c}$  — величина волнового вектора, при котором интеграл Тулуба  $q(1/\lambda)$  имеет максимум [3, 17], то с использованием (9) в пределе  $a \rightarrow \infty$  получим для интеграла  $q(1/\lambda)$  выражение

$$q \left( \frac{1}{\lambda} \right) \approx 5.75 + 6 \left( \frac{a}{q_b} \right)^3 \exp \left( -\frac{q_b^2}{a^2} \right). \quad (10)$$

Второй член в правой части (10) исчезает при  $q_b/a \rightarrow \infty$  и мы получаем, как и следовало ожидать, результат Тулуба:  $q(1/\lambda) \approx 5.75$ .

Уравнение (6), однако, имеет особенность. Даже в случае непрерывного спектра, при  $f_q = 0$ , если  $q > q^0$ , оно имеет изолированное решение  $\Omega_{q^0}$ , отличающееся от максимальной частоты  $\omega_{q^0}$  на конечную величину. Это изолированное решение приводит к дополнительному вкладу в  $\Delta E$ :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_{q_i < q^0} (\Omega_{q_i} - \omega_{q_i}) + \delta E^{PR}, \quad (11)$$

$$\delta E^{PR} = \frac{1}{2} (\Omega_{q^0} - \omega_{q^0}),$$

где  $\Omega_{q^0}$  имеет смысл «плазменной частоты». Таким образом, здесь отсутствует непрерывный переход от случая  $f_q \rightarrow 0$  при  $q > q^0$  к случаю  $f_q = 0$  при  $q > q^0$ . Как показано прямым вычислением [17] вклада в (11) слагаемого с «плазменной частотой»  $\delta E^{PR}$ , даже при  $q^0 \rightarrow \infty$  теория Порша и Роселера не переходит в теорию Тулуба.

В теории Тулуба мы выбираем такие  $f_q$ , которые приводят к минимуму функционала полной энергии полярона. В частности, выбор пробной функции в виде (9) гарантирует нам отсутствие вклада «плазменной частоты» в величину полной энергии и при практических расчетах можно выбирать обрезанную  $f_q$ , не вводя при этом в функционал Тулуба никаких дополнительных членов [18].

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работах [14, 15] были высказаны критические замечания в адрес теории Тулуба [3] и основанных на этой теории работ автора [11, 12]. Несостоятельность этих критических замечаний была показана в работах [17, 18] и в данной работе. В настоящее время теория Тулуба и полученные на ее основе количественные результаты [11, 12] не вызывают сомнений.

Важную роль в проверке правильности теории играют вириальные соотношения. В работе [2] было показано, что в теории Тулуба эти соотношения строго выполняются в случае полярона. В данной работе показано их строгое выполнение в случае биполярона. Отметим, что выражения, полученные в работах [14, 15] для полной энергии полярона и биполярона, не удовлетворяют вириальным соотношениям.

Построенная в работе [3] квантовополевая теория является непертурбативной. Предел сильной связи достигается в ней посредством выбора пробной функции, и при более сложном выборе эта теория может воспроизводить режим промежуточной и

слабой силы связи [19]. В настоящее время одним из наиболее эффективных методов расчета поляронов и биполяронов в этом диапазоне силы связи считается метод интегралов по траекториям. Этот подход без должной модификации не является трансляционно-инвариантным, поскольку в этом методе главный вклад в уровни энергии дают классические решения (т. е. экстремумы экспоненты от классического действия, входящей в интеграл по траекториям). При этом такие решения в силу трансляционной инвариантности являются не изолированными стационарными точками, а принадлежат непрерывному семейству классических решений, получаемых в результате действия на исходное классическое решение оператора трансляций. Соответственно, приближение стационарной фазы в ТИ-системе без соответствующей модификации неприменимо. В квантовой теории поля для восстановления трансляционной инвариантности разработаны подходы, основанные на введении коллективных координат в функциональный интеграл [1], которые, однако, вплоть до настоящего времени в теории поляронов не использовались. По этой причине неудивительно, что использованный в теории поляронов метод интегралов по траекториям приводит к результату, совпадающему с полуклассической теорией поляронов сильной связи [20].

В заключение автор выражает благодарность А. В. Тулубу и Н. И. Кашириной за обсуждение различных аспектов затронутых в работе вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 11-07-12054, 13-07-00256).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985) [R. Rajaraman, *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, New York, Oxford (1982)].
2. Н. И. Каширина, В. Д. Лахно, А. В. Тулуб, ЖЭТФ **141**, 994 (2012).
3. А. В. Тулуб, ЖЭТФ **41**, 1828 (1961).
4. В. Д. Лахно, Г. Н. Чуев, УФН **165**, 285 (1995) [V. D. Lakhno and G. N. Chuev, *Phys. Uspekhi* **38**, 273 (1995)].
5. S. J. Miyake, *J. Phys. Soc. Jpn.* **38**, 181 (1975).
6. D. J. J. Marchand et al., *Phys. Rev. Lett.* **105**, 266605 (2010).
7. J. P. Hague et al., *Phys. Rev. B* **78**, 092302 (2008).
8. A. S. Mishchenko et al., *Phys. Rev. B* **79**, 180301 (2009).
9. H. Ebrahimnejad and M. Berciu, *Phys. Rev. B* **85**, 165117 (2012).
10. E. Burovski et al., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 116403 (2008).
11. В. Д. Лахно, ЖЭТФ **137**, 926 (2010).
12. В. Д. Лахно, *Sol. St. Comm.* **152**, 621 (2012).
13. Н. И. Каширина, В. Д. Лахно, УФН **180**, 449 (2010) [N. I. Kashirina and V. D. Lakhno, *Phys. Uspekhi* **53**, 431 (2010)].
14. S. N. Klimin and J. T. Devreese, *Sol. St. Comm.* **152**, 1601 (2012).
15. S. N. Klimin and J. T. Devreese, *Sol. St. Comm.* **153**, 58 (2013).
16. M. Porsch and J. Röseler, *J. Phys. Stat. Sol.(b)* **23**, 365 (1967).
17. V. D. Lakhno, arXiv:1211.0382.
18. V. D. Lakhno, *Sol. St. Comm.* **152**, 1855 (2012).
19. А. В. Тулуб, Вестник ЛГУ **22**, 104 (1960).
20. B. Gerlach and H. Löwen, *Phys. Rev. B* **37**, 8042 (1988).