

# НЕЛИНЕЙНЫЕ СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В КВАНТОВЫХ ГАЗАХ, СВЯЗАННЫЕ С МЕЖАТОМНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*А. И. Сафонов<sup>a,b\*</sup>, И. И. Сафонова<sup>a</sup>, И. С. Ясников<sup>c</sup>*

*<sup>a</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

*<sup>c</sup> Тольяттинский государственный университет  
445667, Тольятти, Россия*

Статья написана по материалам доклада  
на 36-м Совещании по физике низких температур  
(Санкт-Петербург, 2–6 июля 2012 г.)

Рассмотрены нелинейные спектроскопические эффекты — усиленный взаимодействием двойной резонанс и нестабильность спектра, возникающие в ультрахолодных квантовых газах благодаря столкновительному сдвигу частот атомных переходов и, соответственно, зависимости частот от заселенностей различных внутренних состояний частиц. Особое внимание уделяется двум простейшим случаям: а) газа двухуровневых атомов и б) двойного резонанса в газе трехуровневых бозонов, в котором частота управляющего перехода остается неизменной.

DOI: 10.7868/S0044451013050042

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что взаимодействие многоуровневой квантовой системы одновременно с несколькими резонансными полями при определенных условиях сопровождается нелинейными спектроскопическими явлениями — когерентным пленением населенности [1] и электромагнитно-индуцированной прозрачностью [2], причиной которых служит образование особого «темного» суперпозиционного квантового состояния, которое не взаимодействует ни с одним из резонансных полей. Указанные эффекты, однако, остаются линейными в том смысле, что частоты резонансных переходов в квантовой системе не зависят от заселенностей различных состояний. В настоящей работе рассматривается другой, вообще говоря, более общий класс явлений, вызванных именно такой зависимостью, примером которой может

служить столкновительный или контактный сдвиг внутриатомных (например, сверхтонких) переходов в квантовых газах, порождаемый взаимодействием частиц газа друг с другом. Ранее было показано, что при взаимодействии газа трехуровневых атомов с двумя переменными полями вследствие контактного сдвига имеет место особая разновидность двойного резонанса — усиленный взаимодействием двойной резонанс (УВДР) [3]. Кроме того, как будет показано ниже, при ненулевом контактном сдвиге в газе двухуровневых атомов может возникать нестабильность спектра резонансного перехода, а именно, зависимость формы резонансной кривой и конечной заселенности состояний от направления прохождения, а также от соотношения амплитуды возбуждающего поля, скорости развертки и величины контактного сдвига.

Поведение произвольной двухуровневой системы принято описывать с помощью эффективного спина (псевдоспина)  $s = 1/2$ . Мы также будем придерживаться этой терминологии, всякий раз понимая под спином конкретную пару квантовых состояний, связанных резонансным переходом. В настоящей рабо-

\*E-mail: alesaf2008@rambler.ru

те не рассматриваются спиновые волны и родственные им эффекты, связанные с пространственным переносом спиновой поляризации, что фактически отвечает нулевому значению коэффициента спиновой диффузии. Ниже мы обсудим, насколько такое допущение соответствует реальным физическим системам. Пространственная неоднородность учитывается лишь при анализе возможного вида спектра УВДР в линейном градиенте внешнего поля.

## 2. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

В общем случае эволюция квантовой системы, взаимодействующей с резонансными полями, описывается уравнением Лиувилля – фон Неймана для компонент «спиновой» матрицы плотности  $\rho$  [4]:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\hat{H}(t), \rho] - i\hat{\mathcal{L}}(t)\rho, \quad (2.1)$$

где  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{U}(t)$  — гамильтониан, включающий невозмущенную часть  $\hat{H}_0$  и вызванное переменным внешним полем зависящее от времени возмущение  $\hat{U}(t)$ ,  $\hat{\mathcal{L}}$  — супероператор Линдблада [5], отвечающий за диссипацию, а квадратные скобки, как обычно, обозначают квантовомеханический коммутатор.

Для получения общего уравнения эволюции компонент матрицы плотности газа трехуровневых атомов, взаимодействующих с двумя резонансными полями, воспользуемся полученным ранее выражением для контактного сдвига перехода  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  в пространственно-однородном газе в присутствии третьего состояния  $|3\rangle$  [6]. Нас будет интересовать когерентное заполнение состояний. В этом случае сдвиг частоты перехода между состояниями  $|i\rangle$  и  $|j\rangle$  при некоторой ненулевой плотности газа  $n \equiv \text{Tr}(\rho_{ij})$ , определяемый как  $\Delta_{ij}(\rho) \equiv \omega_{ij}(\rho) - \omega_{ij}(0)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) обращается в нуль для фермионов, а для бозонов в отсутствие бозе-эйнштейновского конденсата составляет

$$\hbar\Delta_{12} = (\rho_{11} + \rho_{22})\delta\lambda_{12} + (\rho_{22} - \rho_{11})\Delta\lambda_{12} + 2\rho_{33}(\lambda_{23}^+ - \lambda_{13}^+), \quad (2.2)$$

$$\hbar\Delta_{13} = (\rho_{11} + \rho_{33})\delta\lambda_{13} + (\rho_{33} - \rho_{11})\Delta\lambda_{13} + 2\rho_{22}(\lambda_{23}^+ - \lambda_{12}^+). \quad (2.3)$$

Здесь  $\rho_{ij}$  — компоненты матрицы плотности в представлении волновых функций независящего от времени невозмущенного гамильтониана  $\hat{H}_0$ ,  $\delta\lambda_{ij} = \lambda_{jj} - \lambda_{ii}$ ,  $\Delta\lambda_{ij} = \lambda_{ii} + \lambda_{jj} - 2\lambda_{ij}^+$ ,  $\lambda_{ij}^\pm \equiv \langle ij|\lambda|ij\rangle_\pm$  —

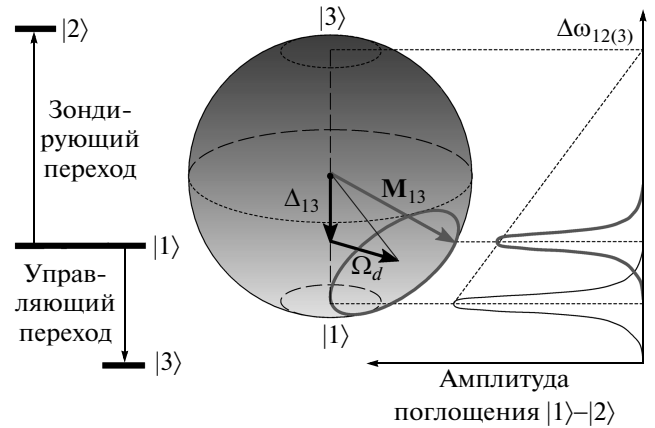


Рис. 1. Схемы трехуровневой системы (слева) и влияния осцилляций Раби между состояниями  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  на частоту и интенсивность перехода  $|1\rangle$ – $|2\rangle$  (справа). Для наглядности предполагается, что период Раби  $2\pi/\Omega_d$  много больше времени, необходимого для детектирования резонансной линии  $|1\rangle$ – $|2\rangle$

спиновая часть матричного элемента интенсивности взаимодействия  $\lambda = 4\pi\hbar^2 a/m$ , которая обычно используется при описании холодных столкновений, когда парциальные амплитуды рассеяния с ненулевым моментом импульса относительного движения сталкивающихся частиц «вымерзают»,  $m$  — масса атома,  $a$  — соответствующая длина  $s$ -рассеяния. Индекс «+» означает, что волновая функция двух сталкивающихся бозонов симметрична по отношению к перестановке как их псевдоспиновых, так и пространственных координат. Дважды антисимметричная компонента, очевидно, не вносит вклада в  $s$ -рассеяние.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением типичной для двойного резонанса ситуации, когда состояние  $|2\rangle$  изначально не заселено, и его заселенность лишь незначительно меняется при взаимодействии со слабым переменным зондирующим (probe) полем с частотой  $\omega_p$ , тогда как заселенности состояний  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  могут меняться произвольным образом под действием сильного управляющего (drive) переменного поля с частотой  $\omega_d$ . В этом случае  $\rho_{22} \ll \rho_{11}, \rho_{33}$ , поэтому последнее слагаемое в правой части (2.3) можно опустить, и общее уравнение (2.1) эволюции компонент матрицы плотности газа трехуровневых бозонов с лестничной ( $\Xi$ ) схемой уровней (рис. 1) в отсутствие спонтанной продольной релаксации приобретает вид (ср. [1])

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = + \frac{\Omega_d}{2} \rho_{13} \exp [i \Delta \omega_{13}(\rho) t] - \frac{\Omega_p}{2} \rho_{21} \exp [i \Delta \omega_{12}(\rho) t] - \text{с.с.}, \quad (2.4)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{33} = - \frac{\Omega_d}{2} \rho_{13} \exp [i \Delta \omega_{13}(\rho) t] + \text{с.с.}, \quad (2.5)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{31} = \frac{\Omega_d}{2} (\rho_{33} - \rho_{11}) \exp [i \Delta \omega_{13}(\rho) t] + \frac{\Omega_p}{2} \rho_{32} \exp [i \Delta \omega_{12}(\rho) t] - i \gamma_{13} \rho_{31}, \quad (2.6)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = \frac{\Omega_p}{2} \rho_{21} \exp [i \Delta \omega_{12}(\rho) t] - \text{с.с.}, \quad (2.7)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{12} = \frac{\Omega_p}{2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \exp [i \Delta \omega_{12}(\rho) t] + \frac{\Omega_d}{2} \rho_{32} \exp [i \Delta \omega_{13}(\rho) t] - i \gamma_{12} \rho_{12}, \quad (2.8)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{32} = - \frac{\Omega_d}{2} \rho_{12} \exp [i \Delta \omega_{13}(\rho) t] - \frac{\Omega_p}{2} \rho_{31} \exp [i \Delta \omega_{12}(\rho) t] - i \gamma_{32} \rho_{32}, \quad (2.9)$$

где  $\Omega_{p(d)}$  — частота Раби,  $\Delta \omega_{12(13)}(\rho) = \omega_{p(d)} - \omega_{12(13)}(\rho)$  — зависящая от плотности частотная отстройка зондирующего (управляющего) поля,  $\gamma_{ij}$  — скорости поперечной релаксации. Переменные поля считаются пространственно-однородными, что, как правило, хорошо выполняется для СВЧ-излучения на много превосходит геометрические размеры образца.

Если, как уже упоминалось выше, зондирующее поле значительно слабее управляющего,  $\Omega_p \ll \Omega_d$ , то вторыми слагаемыми в уравнениях (2.4) и (2.6) можно пренебречь и записать (2.4)–(2.6) в более компактной форме обычного уравнения Блоха для прецессии вектора спиновой поляризации («намагниченности»)  $\mathbf{M}$  в пространстве состояний  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  ( $\mathbf{M}_z = (0, 0, \rho_{33} - \rho_{11})$ ,  $\mathbf{M}_\perp = 2(\text{Re } \rho_{13}, \text{Im } \rho_{13}, 0)$ ):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{M} \times \left( \tilde{\Omega} + \frac{\Delta \lambda_{13}}{\hbar} \mathbf{M}_z \right) - \gamma_{13} \mathbf{M}_\perp, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{\Omega} = (\Omega_d, 0, \omega_{13}(0) - \omega_d + \hbar^{-1} \delta \lambda_{13}(\rho_{11} + \rho_{33})).$$

Для наглядности мы выделили в частоте прецессии  $\tilde{\Omega}$  составляющую, которая остается почти постоянной в слабом зондирующем поле, когда  $\rho_{11} + \rho_{33} \approx$

$\approx \text{const}$ . Второе же слагаемое в скобках в правой части (2.10) явно выражает зависимость частоты прецессии от текущего значения вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ . В следующих разделах обсуждаются прямые следствия такой, вообще говоря, нелинейной прецессии в двух предельных случаях.

### 3. УСИЛЕННЫЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ДВОЙНОЙ РЕЗОНАНС

Из уравнения (2.2) следует, что возбуждение перехода из состояния  $|1\rangle$  в состояние  $|3\rangle$  в бозе-газе вызывает модуляцию частоты перехода  $|1\rangle$ – $|2\rangle$ , связанную с осцилляциями Раби заселенности состояний  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  [6]. Если оба перехода возбуждаются одновременно, эта модуляция приводит к новому явлению — усиленному взаимодействию двойному резонансу.

Для простоты и ясности изложения ограничимся случаем  $\lambda_{11} = \lambda_{12}^+$ , когда контактный сдвиг перехода  $|1\rangle$ – $|2\rangle$  обращается в нуль при  $\rho_{22} = \rho_{33} = 0$ . Дополнительным преимуществом этого допущения является возможность прямого сравнения с экспериментами по двойному электронно-ядерному резонансу (ДЭЯР) в атомарном водороде [7, 8]. Для еще большего упрощения анализа предположим, что частота управляющего перехода  $|1\rangle$ – $|3\rangle$  остается неизменной, для чего необходимо, чтобы величина  $\Delta \lambda_{13}$  была достаточно мала. Противоположный случай рассматривается в разд. 4. Несмотря на сделанные допущения, общее аналитическое решение нелинейной системы (2.7)–(2.10) вряд ли возможно. Используемый ниже наглядный подход не обладает подобной общностью, но обеспечивает количественное и физически прозрачное описание в интересующем нас случае.

Физическая сущность новой разновидности двойного резонанса понятна из рис. 1. В отсутствие релаксации при непрерывном возбуждении перехода  $|1\rangle$ – $|3\rangle$  в образце, в котором изначально заселено только состояние  $|1\rangle$ , заселенности состояний  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  осциллируют с частотой (см. рис. 1)

$$\tilde{\Omega}_{13} = \sqrt{\Omega_d^2 + \Delta \omega_{13}^2}.$$

В результате имеет место модуляция частоты зондирующего перехода  $|1\rangle$ – $|2\rangle$  [6]:

$$\hbar \omega_{12} = \hbar \omega_{12}(0) + 2n \Delta \lambda \left( \frac{\Omega_d}{\tilde{\Omega}_{13}} \right)^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Omega}_{13} t}{2}, \quad (3.1)$$

где  $\Delta\lambda = \lambda_{23}^+ - \lambda_{13}^+$ . Амплитуда такой модуляции частоты легко может оказаться порядка или даже много больше ширины линии рабочего перехода. В этом случае возбуждение перехода  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  периодически выводит зондирующий переход из резонанса. Для наглядности рис. 1 соответствует медленной модуляции частоты, когда период Раби управляющего перехода  $2\pi/\Omega_d$  много больше, чем время регистрации резонансной линии  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ , и спектр перехода  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  периодически целиком смещается вверх и вниз по частоте, одновременно изменяясь по амплитуде. Резонансные кривые, показанные на рис. 1, представляют собой схематические «мгновенные снимки» спектра в различных фазах цикла Раби. Очевидно, что поглощение электромагнитной мощности на фиксированной частоте зондирующего поля  $\omega_p$  также периодически меняется в процессе осцилляций Раби состояний  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$ . Необходимо подчеркнуть, что это изменение связано с изменением как населенности исходного состояния  $|1\rangle$ , так и частоты перехода, в отличие от обычного двойного резонанса, который происходит целиком за счет изменения населенности исходного состояния вследствие возбуждения управляющего перехода. Ясно, что такая вызванная взаимодействием модуляция частоты многократно усиливает эффект, который поэтому естественно назвать усиленным взаимодействием двойным резонансом.

Рассмотрим более подробно возможную форму линии спектра УВДР в сильном управляющем поле, когда, в отличие от случая, изображенного на рис. 1, одновременная модуляция частоты и амплитуды линии поглощения  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  происходит достаточно быстро и поэтому интегрируется измерительной системой. Это означает, что частота Раби  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  много больше скорости прохождения через резонанс  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  при развертке внешнего поля (или частоты) или же обратной постоянной времени  $\tau^{-1}$  измерительной системы,  $\tilde{\Omega}_{13}\tau \gg 1$ .

В общем случае энергии всех трех уровней и, соответственно, частоты обоих переходов зависят от постоянного внешнего поля. Конкретная природа этого поля несущественна, но для определенности мы будем рассматривать магнитное поле  $B$ . Пусть поле  $B_0$  отвечает точному резонансу  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  при некоторой плотности  $\rho$ :  $\omega_{13}(\rho, B_0) = \omega_d$ . Тогда отклонение поля  $b = B - B_0$  от этого значения эквивалентно отстройке частот переходов на величину, соответственно,  $\Delta\omega_{13}(b) = \gamma_d b$  и  $\Delta\omega_{12}(b) = \gamma_p b$ , где  $\gamma_{d(p)}$  — эффективное гиромагнитное отношение управляющего (зондирующего) перехода. Благодаря такому

зеemanовскому вкладу в частоту

$$\tilde{\Omega}_{13}(\rho, b) = \gamma_d \sqrt{B_d^2 + b^2}$$

прецессии намагниченности под действием управляющего поля

$$B_d(t) = B_d \exp(i\omega_d t)$$

амплитуда осциллирующей компоненты  $\omega_{12}$  в уравнении (3.1), т.е. амплитуда частотной модуляции зондирующего перехода, оказывается лоренцевой функцией постоянного поля  $b$ . В результате  $\omega_{12}(t)$  осциллирует между чисто зеemanовской нижней границей, соответствующей нулевой плотности газа (штриховая линия на рис. 2a)

$$\omega_{12}(0, B_0 + b) = \omega_{12}(0, B_0) + \gamma_p b, \quad (3.2)$$

и верхней границей, являющейся суммой зеemanовского вклада и контактного сдвига (сплошная кривая на рис. 2a)

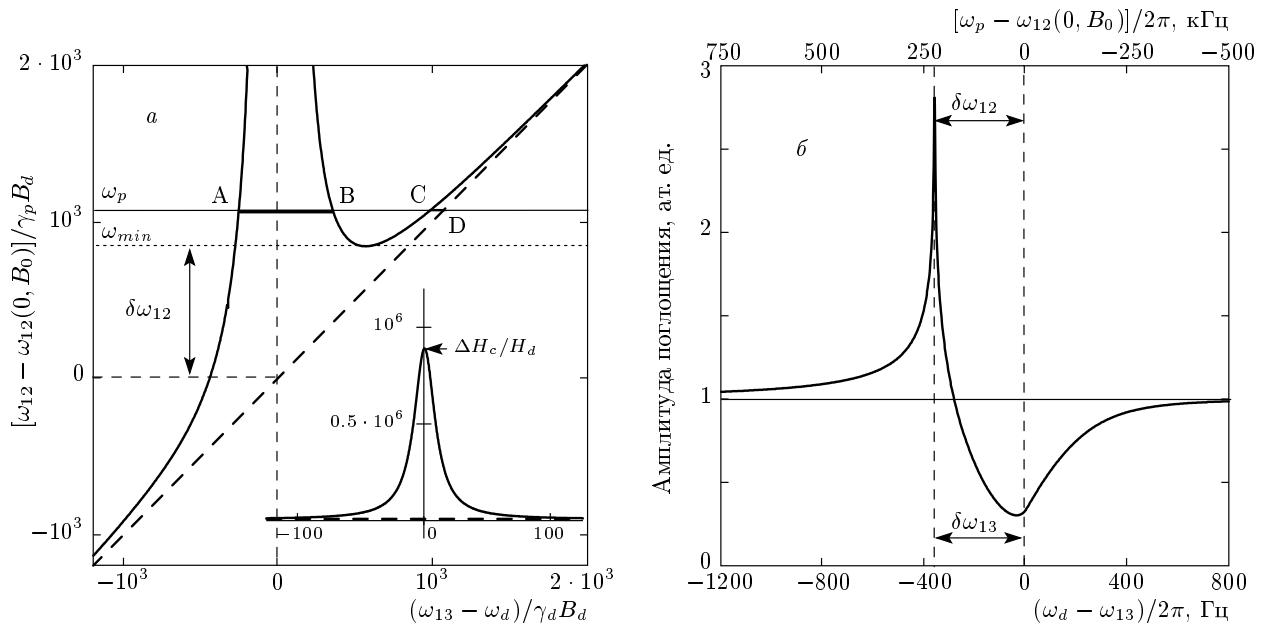
$$\omega_{12}(\rho, B_0 + b) = \omega_{12}(0, B_0) + \gamma_p b + \frac{2n\Delta\lambda}{\hbar} \frac{B_d^2}{B_d^2 + b^2}, \quad (3.3)$$

на зависящей от поля частоте  $\tilde{\Omega}_{13}(b)$  [3]. Согласно (3.3) верхняя граница частоты зондирующего перехода является, вообще говоря, немонотонной функцией постоянного внешнего поля.

Усредненная по времени амплитуда поглощения на частоте зондирующего перехода  $A(b, \omega_p)$  в пределах границ (3.2) и (3.3) пропорциональна средней заселенности исходного уровня и плотности вероятности обнаружить систему при заданных значениях  $b$  и  $\omega_p$ , причем, плотность вероятности имеет острые максимумы на нижней и верхней границах частоты зондирующего перехода, где система проводит больше всего времени, так как в этих случаях  $d\omega_{12}(b, \omega_p)/dt = 0$  [3].

Для иллюстрации влияния пространственной неоднородности рассмотрим более подробно бесконечный образец с однородной плотностью в линейном градиенте постоянного поля  $\nabla B$  и однородных переменных полях. В этом случае различные части образца одновременно находятся при всех возможных значениях поля. Амплитуда поглощения на заданной частоте  $\omega_p$  зондирующего поля пропорциональна интегралу

$$I(\omega_p) = \int A(b, \omega_p) \frac{\partial N}{\partial b} db$$



**Рис. 2.** а) Зависимость сдвига частоты резонанса  $|1\rangle-|2\rangle$  (в единицах  $\gamma_p B_d$ ) от внешнего поля при непрерывном возбуждении резонанса  $|1\rangle-|3\rangle$ . По оси абсцисс отложена отстройка поля  $(\omega_{13} - \omega_d)/\gamma_d$  от резонанса  $|1\rangle-|3\rangle$  в единицах амплитуды управляющего поля  $B_d$ . Сплошная кривая соответствует верхней границе суммы зеемановского вклада и контактного сдвига, штриховая — только зеемановскому вкладу. Горизонтальные линии показывают значение  $\omega_{12}$  в минимуме (пунктирная линия) и рабочую частоту (тонкая сплошная линия). Вертикальной штриховой линией отмечено резонансное значение поля для перехода  $|1\rangle-|3\rangle$ . На вставке: полный диапазон изменения  $\omega_{12}$  вследствие контактного сдвига. б) Зависимость амплитуды поглощения  $|1\rangle-|2\rangle$  от частоты управляющего поля (по нижней горизонтальной оси отложена отстройка от частоты резонанса  $|1\rangle-|3\rangle$ ) для монохроматического зондирующего поля с частотой  $\omega_p = \omega_{12}(0, B_0)$ . Острый пик соответствует минимуму частоты рабочего перехода на рис. 2а. Спектр, получающийся при развертке  $\omega_p$  (верхняя горизонтальная ось) с фиксированной  $\omega_d = \omega_{13}$ , отличается лишь инверсией относительно шкалы частот. Значения параметров соответствуют двумерному атомарному водороду при плотности  $3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$  в сильном поляризуемом поле  $B = 45 \text{ кГц}$ , за исключением знака контактного сдвига:  $B_d = 1 \text{ мГц}$ ,  $\Delta B_c = 89 \text{ Гц}$

вдоль линии  $\omega_p = \text{const}$  в пределах отрезков АВ и CD на рис. 2а. Результат численного интегрирования со значениями параметров, отвечающими экспериментам по ДЭЯР в двумерном атомарном водороде при плотности  $3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$  в сильном поляризуемом магнитном поле  $B = 45 \text{ кГц}$ , управляющем поле  $B_d = 1 \text{ мГц}$  [7–9] и при максимальной амплитуде контактного сдвига сверхтонкого перехода  $|b\rangle-|c\rangle$  в единицах внешнего поля  $\Delta B_c = 2n\Delta\lambda(\hbar\gamma_p)^{-1} = 89 \text{ Гц}$  (здесь  $\gamma_p$  и  $\gamma_d$  с хорошей точностью равны гиромагнитным отношениям соответственно электрона и протона), представлен на рис. 2б в виде зависимости амплитуды поглощения от частоты управляющего поля  $\omega_d$  (нижняя горизонтальная ось) при постоянной  $\omega_p = \omega_{12}(0, B_0)$ . Спектр УВДР можно также наблюдать, разворачивая  $\omega_p$  (верхняя горизонтальная ось) при постоянной  $\omega_d$  (на рис. 2б  $\omega_d = \omega_{13}(0, B_0)$ ).

В этом случае спектр инвертируется относительно оси частот, поскольку увеличение  $\omega_d$  соответствует увеличению резонансного значения постоянного поля  $\omega_d/\gamma_d$  и, следовательно, положительному смещению среднеполевого лоренцевого пика на кривой  $\omega_{12}(b)$  (3.3) на рис. 2а. Последнее, в свою очередь, равносильно уменьшению рабочей частоты  $\omega_p$  при постоянной  $\omega_d$ . Выбор того или иного способа детектирования спектра УВДР зависит от условий конкретного эксперимента.

Амплитуда поглощения в зависимости от  $\omega_d$  (рис. 2б) существенно снижается в пределах управляющего резонанса и имеет острый максимум при  $\omega_p = \omega_{min}$ , т.е. когда минимальное значение выражения (3.3) совпадает с частотой зондирующего поля. Это объясняет дисперсионный вид спектров ДЭЯР двумерного атомарного водорода [7, 8]. Воз-

никновение провала в амплитуде поглощения может быть качественно объяснено тем, что атомы в резонансных областях образца периодически выводятся из условий зондирующего резонанса и в итоге проводят в них лишь малую часть времени. С другой стороны, максимум поглощения возникает из-за того, что управляющий резонанс порождает нулевой градиент частоты зондирующего перехода  $|1\rangle-|2\rangle$  в некоторой области образца, так что гораздо большая доля атомов оказывается в резонансе.

Ширина кривой двойного резонанса в единицах частоты зондирующего поля может быть оценена как разность  $\delta\omega_{12} = \omega_{min} - \omega_{12}(0, B_0)$  (см. рис. 2а). Несложно показать, что для достаточно большой амплитуды контактного сдвига, такой что  $|2n\Delta\lambda| \gg \hbar\gamma_p B_d$  и  $b \gg B_d$  [3],

$$\delta\omega_{13} = \frac{\gamma_d}{\gamma_p} \delta\omega_{12} \approx \frac{3}{2} \gamma_d (2\Delta B_c B_d^2)^{1/3}, \quad (3.4)$$

где  $\Delta B_c = 2n\Delta\lambda(\hbar\gamma_p)^{-1}$  — максимальный контактный сдвиг частоты перехода  $|1\rangle-|2\rangle$  в единицах внешнего поля. Таким образом, ширина линии УВДР не зависит от градиента постоянного поля. Интенсивность же спектра, напротив, обратно пропорциональна  $|\nabla B|$ .

#### 4. НЕЛИНЕЙНОСТЬ СПЕКТРА ДВУХУРОВНЕВЫХ БОЗОНОВ

В отличие от обычных оптических уравнений Блоха, уравнение (2.10) содержит заведомо нелинейный член, пропорциональный контактному сдвигу резонансной частоты. Для наблюдения этой нелинейности достаточно ограничиться всего двумя уровнями. Во избежание путаницы сохраним уровни 1 и 3. Для упрощения обозначений в дальнейшем будем опускать индексы «13» и «p» («d»). Так, в этом разделе  $\Delta\lambda \equiv \Delta\lambda_{13}$ . Кроме того, будем считать полную плотность постоянной,  $n \equiv \rho_{11} + \rho_{33} = \text{const}$ . Нелинейность наиболее ярко проявляется в спектре при достаточно низкой скорости развертки. Так, если скорость изменения резонансной частоты вследствие изменения заселенностей

$$\frac{\Delta\lambda}{\hbar} \frac{dM_z}{dt} \sim \Omega n \frac{\Delta\lambda}{\hbar}$$

больше скорости развертки частоты  $d\omega/dt$ , то осцилляции Раби происходят на фоне сравнительно медленного изменения намагниченности вместе с частотой переменного поля, так что система все время остается вблизи резонанса

$$M_z \Delta\lambda \approx \hbar[\omega(\rho) - \omega(0)] - n\delta\lambda.$$

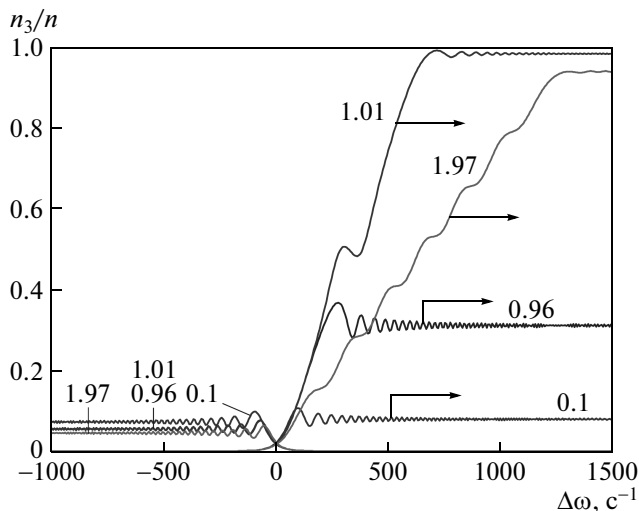
При этом периодически, при выполнении резонансных условий, заселенности изменяются сравнительно быстро, что, в свою очередь, на некоторое время выводит систему из точного резонанса до тех пор, пока частота переменного поля вновь не подстроится под изменившееся значение частоты перехода. Картина такого «догоняющего» резонанса повторяется, пока резонансная частота не перестанет меняться вследствие достижения предельного значения намагниченности (например,  $M_z = n$ ). При противоположном направлении развертки имеет место обычное поведение заселенностей, так как повторное выполнение резонансных условий невозможно. С другой стороны, ясно, что контактный сдвиг частоты существенно влияет на вид спектра, только если он выводит систему из резонансных условий. Для этого необходимо, чтобы он был, по крайней мере, сопоставим с частотой Раби (полоса генератора переменного поля считается достаточно узкой; так, в экспериментах с атомарным водородом спектральная ширина генератора имела значение  $\delta f/f \lesssim 10^{-10}$  [9]). Таким образом, при выполнении условий

$$\Omega n |\Delta\lambda| \gtrsim \hbar \left| \frac{d\omega}{dt} \right|, \quad n |\Delta\lambda| \gtrsim \hbar \Omega \quad (4.1)$$

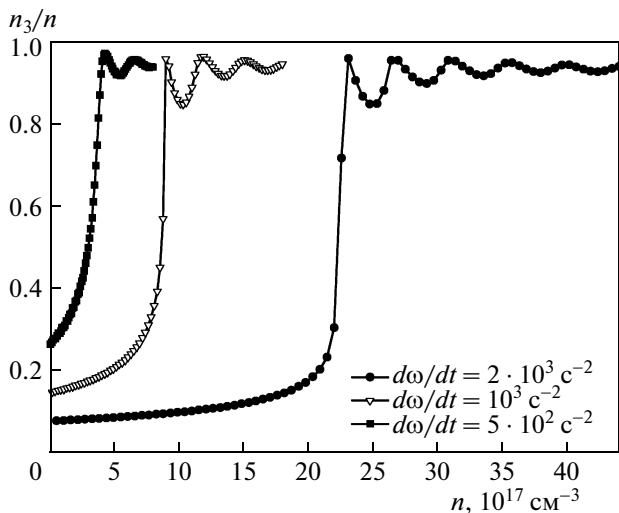
возникает «гистерезис» спектра (рис. 3). Если, кроме того,  $n |\Delta\lambda| \gg \hbar \Omega$ , радикальное изменение его вида при достижении некоторого критического значения полной плотности  $n_c$  или любого другого параметра, входящего в первое из условий (4.1), происходит практически скачкообразно (рис. 4).

На рис. 3 показана эволюция заселенности состояния  $|3\rangle$  в процессе линейной развертки частоты СВЧ-поля снизу вверх (показано стрелками) и сверху вниз по данным численного решения уравнения (2.10) со значениями параметров, соответствующими сверхтонкому переходу  $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$  в трехмерном атомарном водороде, а именно, при частоте Раби  $\Omega = 10 \text{ с}^{-1}$ , скорости развертки  $d\omega/dt = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-2}$  и полной плотности  $n \sim 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  [9],  $\Delta\lambda/\hbar = -3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с}$  (см. Приложение). Скорость поперечной релаксации слабо влияет на характер спектра (см. ниже). При расчетах использовалось значение  $\gamma = 0.3 \text{ с}^{-1}$ . Скорость продольной релаксации  $\Gamma$  в атомарном водороде весьма мала и поэтому положена равной нулю.

На рис. 4 представлена расчетная зависимость конечной заселенности состояния  $|3\rangle$  от полной плотности газа при различных значениях скорости развертки частоты  $|d\omega/dt|$  при тех же значениях остальных параметров, что и на рис. 3. При увеличении плотности от докритического до сверхкритического



**Рис. 3.** Эволюция заселенности состояния  $|3\rangle$  в процессе линейной развертки частоты СВЧ-поля снизу вверх (стрелки вправо) и сверху вниз по данным численного решения уравнения (2.10). Полная плотность газа, соответствующая каждой кривой, указана в единицах критической плотности  $n_c$ . Значения параметров соответствуют сверхтонкому переходу  $b \rightarrow a$  в трехмерном атомарном водороде:  $\Omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ,  $d\omega/dt = 2 \cdot 10^3 \text{ c}^{-2}$ ,  $n_c \approx 2.23 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  [9],  $\gamma = 0.3 \text{ c}^{-1}$ ,  $\Gamma = 0$ ,  $\Delta\lambda/\hbar = -3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{c}$



**Рис. 4.** Расчетная зависимость конечной заселенности состояния  $|3\rangle$  от полной плотности газа при различных значениях скорости развертки частоты  $|d\omega/dt|$ . Значения остальных параметров те же, что на рис. 3

уровня конечная заселенность состояния  $|3\rangle$  после прохождения резонансных условий резко возрастает от небольшой величины  $\rho_{33} \sim \Omega^2 |d\omega/dt|^{-1}$ , определяемой произведением частоты Раби  $\Omega$  и времени прохождения резонансной линии  $\Omega |d\omega/dt|^{-1}$ , почти до единицы. При дальнейшем росте плотности увеличивается лишь частотная отстройка, при которой достигается предельная заселенность. Нетрудно видеть, что эта отстройка как раз совпадает с максимально возможным контактным сдвигом частоты  $n\Delta\lambda$ . При обратном направлении развертки конечная заселенность состояния  $|3\rangle$ , напротив, уменьшается с ростом плотности. Как и следовало ожидать, конечная заселенность не зависит от направления развертки в пределе низкой плотности, когда контактный сдвиг стремится к нулю. Таким образом, вид спектра зависит от направления и скорости развертки частоты переменного поля, а также от его амплитуды.

Как видно на рис. 4, критическое значение плотности  $n_c$  (определенное по максимуму производной) не в точности соответствует условию  $|\Omega n_c \Delta\lambda| \propto \hbar |d\omega/dt|$ , следующему из (4.1), а возрастает с ростом  $|d\omega/dt|$  быстрее, чем по линейному закону. Причины подобного поведения предстоит выяснить. Отметим лишь, что при низкой скорости развертки частоты СВЧ (левая кривая на рис. 4) период осцилляций Раби  $2\pi/\Omega$  становится сопоставимым со временем прохождения резонансной линии. Наблюдающиеся при  $n > n_c$  затухающие колебания конечной заселенности состояния  $|3\rangle$ , по-видимому, объясняются тем, в какой именно фазе эффективных осцилляций Раби (волны на наклонных участках кривых на рис. 3 при  $n > n_c$ ) система окончательно выходит из резонансных условий.

Уравнение (2.10) справедливо для пространственно-однородной системы. В случае пространственной неоднородности возникает перенос намагниченности вследствие обменного и диполь-дипольного взаимодействий (псевдо)спинов атомов, что приводит к появлению спиновых волн [10, 11]. Влияние контактного сдвига на спектр спиновых волн требует особого рассмотрения и выходит за рамки настоящей работы.

Рассматриваемый эффект может наблюдаться не только в атомарном водороде, но и в ультрахолодных парах щелочных металлов и ряде других систем. При этом характер взаимодействия, приводящего к зависимости резонансной частоты от заселенности уровней, не имеет принципиального значения. Причина, по которой нелинейность спектра не проявлялась в экспериментах по измерению кон-

тактного сдвига в парах  $^{87}\text{Rb}$  [12], состоит в невыполнении второго из условий (4.1). Так, в  $^{87}\text{Rb}$  соотношение длин  $s$ -рассеяния в различных состояниях таково, что при плотности  $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$  максимальный дифференциальный контактный сдвиг составлял всего  $n\Delta\lambda/h \approx 0.2 \text{ Гц}$  ( $\Delta\omega/\omega \approx 3 \cdot 10^{-11}$ ), в то время как частота Раби для двухфотонного перехода в импульсном СВЧ+ВЧ-поле приблизительно была равна 2.5 кГц.

Как известно, зависимость положения резонанса от намагниченности образца приводит к так называемой ферромагнитной нестабильности [13], например, спектров ФМР ферромагнитных пленок, ЭПР в двумерном атомарном водороде [14] и ЯМР в  $^3\text{He}$  [15]. В отличие от указанной нестабильности, условие возникновения которой определяется скоростью поперечной релаксации, рассматриваемый в настоящем разделе эффект напрямую не зависит от поперечной релаксации, так как контактный сдвиг в двухуровневой системе не зависит от взаимной когерентности одночастичных состояний [16].

Авторы выражают искреннюю признательность С. А. Васильеву за плодотворные обсуждения и предоставленные данные экспериментов с атомарным водородом в университете г. Турку. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Научный потенциал» (контракт 211).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Контактный сдвиг в атомарном водороде

Величина контактного сдвига сверхтонкого перехода  $|b\rangle \leftrightarrow |a\rangle$  в атомарном водороде может быть получена следующим образом. Двухатомные состояния в базисе полных электронного и ядерного спинов пары атомов  $|S, m_S; I, m_I\rangle$  имеют вид

$$|bb\rangle = |1, -1; 1, -1\rangle, \quad (\text{A.1})$$

$$|ab\rangle_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|ab\rangle + |ba\rangle) = \cos\theta |1, -1; 1, 0\rangle - \sin\theta |1, 0; 1, -1\rangle, \quad (\text{A.2})$$

$$|aa\rangle = \cos^2\theta |1, -1; 1, 1\rangle + \sin^2\theta |1, 1; 1, -1\rangle - \frac{\sin(2\theta)}{2} |1, 0; 1, 0\rangle - \frac{\sin(2\theta)}{2} |0, 0; 0, 0\rangle, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\text{tg}(2\theta) = A[(\gamma_e + \gamma_p)hB]^{-1},$$

$\gamma_e$  ( $\gamma_p$ ) — гиромагнитное отношение электрона (протона),  $A/h = 1420 \text{ МГц}$  — сверхтонкая постоянная водорода. Таким образом, состояния  $|bb\rangle$  и  $|ab\rangle_+$  являются чистыми электронными и ядерными триплетами независимо от величины магнитного поля. Следовательно,

$$\lambda_{ab}^+ = \lambda_{bb} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_t,$$

где  $a_t$  — длина триплетного  $s$ -рассеяния. Поэтому согласно уравнению (2.3) при  $\rho_{aa} = 0$  контактный сдвиг перехода  $|b\rangle \leftrightarrow |a\rangle$  равен нулю в произвольном поле. С другой стороны, состояние  $|aa\rangle$  содержит синглетную компоненту (последнее слагаемое в (A.3)). Следовательно,

$$\Delta\lambda_{ab} = \lambda_{bb} + \lambda_{aa} - 2\lambda_{ab}^+ = \frac{\pi\hbar^2}{m} (a_s - a_t) \sin^2(2\theta) \neq 0,$$

так как  $a_t - a_s = 30(5) \text{ пм}$  [17]. В поле  $B = 4.5 \text{ Тл}$  имеем  $\Delta\lambda_{ab}/\hbar = -3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с}$ , и при плотности  $\rho_{aa} = 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  сдвиг частоты составляет около  $-100 \text{ Гц}$ , на два порядка превосходя частоту Раби.

Заменой электронного спина на ядерный все сказанное автоматически обобщается на переходы  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ ,  $|a\rangle \leftrightarrow |d\rangle$  и  $|c\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ , откуда

$$\Delta\lambda_{bc} = \Delta\lambda_{ad} = \Delta\lambda_{cd} = \frac{\pi\hbar^2}{m} (a_s - a_t) \sin^2(2\theta).$$

Однако заселенности состояний с противоположно направленными электронными спинами не могут быть одновременно большими из-за быстрой рекомбинации таких атомов, поэтому сдвиги переходов  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  и  $|a\rangle \leftrightarrow |d\rangle$  труднообнаружимы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, УФН **163**, 1 (1993).
2. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, ЖЭТФ **63**, 1610 (1986).
3. A. I. Safonov, I. I. Safonova, and I. S. Yasnikov, Europ. Phys. J. D **65**, 279 (2011).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989), § 14.
5. G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
6. A. I. Safonov, I. I. Safonova, and I. S. Yasnikov, J. Low Temp. Phys. **162**, 127 (2011).



7. J. Ahokas, J. Järvinen, and S. Vasiliev, Phys. Rev. Lett. **98**, 043004 (2007).
8. J. Ahokas, J. Järvinen, and S. Vasiliev, J. Low Temp. Phys. **150**, 577 (2007).
9. С. А. Васильев, частные сообщения.
10. Е. П. Башкин, Письма в ЖЭТФ **33**, 11 (1981).
11. O. Vainio et al., Phys. Rev. Lett. **108**, 185304 (2012).
12. D. M. Harber, H. J. Lewandowski, J. M. McGuirk, and E. Cornell, Phys. Rev. A **66**, 053616 (2002).
13. P. W. Anderson and H. Suhl, Phys. Rev. **100**, 1788 (1955).
14. S. A. Vasilyev, J. Järvinen, A. I. Safonov et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 153002 (2002).
15. E. Stoltz, J. Tannenhauser, and P.-J. Nacher, J. Low Temp. Phys. **101**, 839 (1995).
16. M. Zwierlein, Z. Hadzibabic, S. Gupta, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **91**, 250404 (2003).
17. A. I. Safonov, I. I. Safonova, and I. S. Yasnikov, Phys. Rev. Lett. **104**, 099301 (2010).