

ФЛУКТУАЦИИ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ БЫСТРЫХ ИОНОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С АТОМАМИ

Д. Н. Макаров*, В. И. Матвеев

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова
163002, Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 12 октября 2012 г.

В рамках непertурбативного подхода, основанного на приближении эйконала, рассмотрен вопрос учета влияния размеров иона на флуктуации потерь энергии быстрыми частично ободранными ионами. Показано, что такое рассмотрение процессов столкновений ионов со сложными атомами может приводить к значительным поправкам при расчете среднеквадратичных флуктуаций потерь энергии быстрыми ионами по сравнению с результатами, полученными для точечных ионов. В качестве примеров рассчитаны величины среднеквадратичных флуктуаций потерь энергии ионов брома и йода на атомах меди, серебра, алюминия. Показано, что учет размеров электронной «шубы» иона приводит к заметному улучшению согласия с экспериментальными данными.

DOI: 10.7868/S004445101303005X

1. ВВЕДЕНИЕ

Приближение эйконала лишь сравнительно недавно стали использовать в непertурбативной теории потерь энергии быстрыми заряженными частицами (см., например, [1] и приведенные там ссылки). При этом в результате численных расчетов были обнаружены значительные отклонения от широко применяемой [2, 3] теории Бете–Блоха. Немного позже были выполнены работы [4–6], в которых уточнены границы применимости теории Бете–Блоха и показано, как необходимо модифицировать формулу Бете–Блоха для больших зарядов тормозящихся частиц. Методика, основанная на приближении эйконала, в работе [7] была применена для непertурбативного рассмотрения флуктуаций потерь энергии быстрыми заряженными частицами и там же предложена формула для непertурбативных расчетов среднеквадратичных флуктуаций (далее флуктуаций) на сложных атомах:

$$\Omega^2 = 4\pi Z^2 N \left[1 + \frac{4}{3v^2} K \left(\ln \frac{2v^2}{I_F} \right) + \Delta_F \right], \quad (1)$$

где Z — заряд налетающего иона, v — относительная скорость столкновения, N — число атомных электронов, K — средняя кинетическая энергия электрона в

атоме, I_F — ионизационный потенциал Фано [8] для сложного атома, Δ_F — непertурбативная поправка [7] к формуле Фано для сложного атома (здесь и везде ниже используются атомные единицы). Эта формула применима [7] для нерелятивистских скоростей столкновений $v \gg v_a$, где $v_a \sim 1$ — характерная скорость электронов мишени, а значения параметра $\eta = Z/v$ могут быть любыми. Формула (1) переходит в известную формулу Фано [8] в случае применимости теории возмущений ($\eta = Z/v \ll 1$) и значительно уточняет в непertурбативных случаях известную формулу Титейка [9], полученную на основе теории Бете–Блоха [2]. Вводя вместо непertурбативной поправки Δ_F поправку Δ , такую что

$$\Delta_F = \frac{4}{3v^2} K \Delta L^{Bloch} + \Delta,$$

где

$$\Delta L^{Bloch} = -\operatorname{Re} \psi(1 + i\eta) + \psi(1)$$

— поправка Блоха [2], $\psi(x)$ — логарифмическая производная Γ -функции, представим формулу (1) в виде

$$\Omega^2 = 4\pi Z^2 N \left[1 + \frac{4}{3v^2} K \left(\ln \frac{2v^2}{I_F} - \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iZ}{v} \right) + \psi(1) \right) + \Delta \right]. \quad (2)$$

При $\Delta = 0$ эта формула переходит в известную формулу Титейка [9], откуда следует, что поправка Δ

*E-mail: makarovd0608@yandex.ru

имеет смысл погрешности формулы Титейка. Как отмечено в работе [7], именно значительная погрешность является причиной «непопулярности» формулы Титейка. При этом, если в случае расчетов потерь энергии учет непертурбативных эффектов в приближении эйконала при больших зарядах снаряда приводит [4–6] примерно к 50 %-м поправкам к формуле Бете–Блоха, то в случае расчетов флуктуаций потерь энергии такой учет может приводить [7] к значительным (до десяти раз) изменениям флуктуаций по сравнению с результатами, следующими из формул Титейка [9], Фано [8] и Бора [10, 11]. Формулы (1) и (2), как и формулы Титейка, Фано и Бора, получены для точечных ионов. Однако часто в экспериментах используются частично ободранные ионы, кроме того, при движении быстрого иона в среде в результате процессов перезарядки и потерь электронов устанавливается некоторый равновесный заряд иона, меньший заряда голого иона. При расчетах флуктуаций потерь энергии поле экранированного иона часто [3, 12] описывается как поле точечного заряда, хотя в принципе ясно, что при столкновениях с малыми параметрами удара (или с большими переданными импульсами) ион ведет себя как голый неэкранированный заряд, при столкновениях же с большими параметрами удара (или с малыми переданными импульсами) ион ведет себя как экранированный заряд. Другими словами, представляется необходимым рассматривать тормозящийся ион не как точечную частицу, а как протяженную частицу размером порядка размера электронных оболочек, на которых расположены электроны при установившемся равновесном эффективном заряде иона Z^* . Поэтому электроны атомов мишени при малых параметрах удара взаимодействуют с ионом, имеющим заряд, больший, чем Z^* . Это, в свою очередь, приводит к росту сечений неупругих процессов по сравнению с аналогичными сечениями, вычисленными для точечных ионов заряда Z^* .

В настоящей работе флуктуации потерь энергии быстрыми заряженными частицами при столкновениях с атомами рассмотрены на основе приближения эйконала с учетом конечных размеров частично ободранных тормозящихся ионов. Получены формулы для расчетов среднеквадратичных флуктуаций потерь энергии быстрых высокозарядных ионов на сложных атомах. Формулы представлены в виде выражений, допускающих предельный переход к бесконечно малым размерам ионов. При проведении расчетов мы рассматривали область применимости нерелятивистского приближения эйконала: $v \gg v_a$, где $v_a \sim 1$ — характерная скорость электронов ми-

шени, а значения параметра η могут быть любыми. В рамках границ применимости такие расчеты можно назвать точными (точнее, вносящими стандартную [13] и пренебрежимо малую погрешность), хотя технически эйкональные расчеты представляются довольно сложными. Эта же область обычно считается [2, 3] совпадающей с областью применимости подхода Блоха и, следовательно, с областью применимости формулы Титейка. Ниже показано, что вклад за счет учета конечного размера иона для столкновений со сложными атомами может увеличивать примерно на 20 % величину флуктуаций, рассчитанных в приближении эйконала для точечных ионов. Абсолютная величина этого вклада значительно (до двух раз) превышает значения флуктуаций, рассчитанные по часто используемым формулам Титейка, Фано и Бора для точечных частиц тех же зарядов. Сама же величина флуктуаций, рассчитанных в приближении эйконала, может превышать примерно на порядок результаты, полученные при использовании формул Бора, Фано и Титейка. Другими словами, результаты, полученные по этим формулам, даже не являются основным вкладом в величину флуктуаций в области неприменимости теории возмущений и формулы Фано. В качестве примеров рассчитаны величины среднеквадратичных флуктуаций потерь энергии быстрыми высокозарядными ионами на атомах меди, серебра, алюминия и проведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными для этих атомов. Показано, что непертурбативный учет конечных размеров снарядов приводит к заметному улучшению согласия экспериментальных данных с результатами расчетов по формулам Бора, Фано и Титейка для точечных ионов тех же зарядов.

2. ФЛУКТУАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ

Будем рассматривать столкновение быстрого частично ободранного иона с атомом. Для описания пространственного распределения заряда иона воспользуемся моделью Брандта–Китагавы [14] и будем считать, что ядро налетающего иона имеет заряд Z , а его N_i электронов распределены вокруг ядра с плотностью

$$\rho(r) = -\frac{N_i}{4\pi\lambda^3} \frac{\lambda}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right).$$

Здесь λ — параметр экранирования (эффективный размер иона), равный

$$\lambda = g \frac{\nu^{2/3}}{1 - \nu/7} Z^{-1/3}, \quad g = 0.3 \frac{3\pi^2}{50} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.48,$$

$\nu = N_i/Z$ — относительное число электронов иона, так что эффективный заряд иона $Z^* = Z - N_i = Z(1 - \nu)$. Кулоновское взаимодействие такого иона с атомными электронами имеет вид

$$U = - \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{Z^*}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{R}|} + (Z - Z^*) \frac{e^{(-\lambda^{-1}|\mathbf{r}_a - \mathbf{R}|)}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{R}|} \right\}, \quad (3)$$

где \mathbf{R} — координаты ядра иона, \mathbf{r}_a — координаты атомных электронов, N — число атомных электронов, $a = 1, 2, \dots, N$. При расчетах с целью исключения подгоночных параметров будем использовать формулу для эффективного заряда тормозящегося иона Z^* в виде [3, 15, 16], согласующемся с оценками Бора [17, 18]:

$$Z^* = Z \left[1 - \exp\left(-\frac{v}{Z^{2/3}}\right) \right], \quad (4)$$

где Z — заряд голого иона, v — скорость иона.

При расчете флуктуации потерь энергии будем пользоваться общей методикой расчета, изложенной в работе [7]. Известно, что среднеквадратичные флуктуаций потерь энергии при столкновениях быстрых заряженных частиц с атомами определяются как [8]

$$\Omega^2 = \sum_n \epsilon_{n,0}^2 \sigma_{n,0}, \quad (5)$$

где $\sigma_{n,0}$ — сечение перехода атома из состояния $|0\rangle$ с энергией ϵ_0 в состояние $|n\rangle$ с энергией ϵ_n , $\epsilon_{n,0} = \epsilon_n - \epsilon_0$, а суммирование проводится по полному набору атомных состояний. В приближении эйконала амплитуда неупругого столкновения движущегося с нерелятивистской скоростью иона с нерелятивистским атомом, с переходом атома из состояния $|0\rangle$ в состояние $|n\rangle$, имеет вид

$$f_{n,0} = \langle n | f(\mathbf{q}) | 0 \rangle, \quad (6)$$

где

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik_0}{2\pi} \int \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \times \left[1 - \exp\left\{-\frac{i}{v} \int U dX\right\} \right] d\mathbf{b}. \quad (7)$$

Здесь рассеивающий потенциал U согласно (3) есть функция не только координат иона $\mathbf{R} = (X, \mathbf{b})$, но и мгновенных положений атомных электронов, совокупность координат которых обозначим $\{\mathbf{r}_a\}$, т.е.

$U = U(X, \mathbf{b}; \{\mathbf{r}_a\})$; $\mathbf{q} = \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_0$ — изменение импульса иона, \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_n — импульсы иона до и после столкновения. Сечение неупругого столкновения можно получить с помощью известной формулы [13]:

$$\sigma_{n,0} = \int \frac{k_n}{k_0} |f_{n0}|^2 d\omega = \frac{1}{v^2} \int_{q_{min} \leq q \leq q_1} |f_{n0}|^2 d\mathbf{q}, \quad (8)$$

где $d\omega$ — телесный угол рассеяния иона, область интегрирования по $d\mathbf{q}$ такая, что $q_{min} \leq |\mathbf{q}| \leq q_1$, $q_{min} = (\epsilon_n - \epsilon_0)/v$, $q_1 = 2v$. Здесь учтено, что для малых углов рассеяния и $k_0 \approx k_n \approx k$ имеем $d\omega = d\mathbf{q}/(k_0 k_n) = d\mathbf{q}/k^2$.

Рассмотрим сначала столкновение с атомом водорода и полученные результаты обобщим в дальнейшем на сложный атом. Тогда эйкональная фаза в формуле (7) с потенциалом (3) при $N = 1$ легко вычисляется и равна

$$\chi(b, s) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} U dX = 2 \frac{Z^*}{v} \left\{ \ln \frac{|\mathbf{b} - \mathbf{s}|}{|\mathbf{b}|} - \frac{Z - Z^*}{Z^*} \times \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{b} - \mathbf{s}|}{\lambda} \right) - K_0 \left(\frac{|\mathbf{b}|}{\lambda} \right) \right) \right\}, \quad (9)$$

где X, \mathbf{b} — координаты иона, $\mathbf{r} = (x, \mathbf{s})$ — координаты атомного электрона, \mathbf{s} — проекция \mathbf{r} на плоскость параметра удара \mathbf{b} . Как и при рассмотрении [7] в приближении эйконала, следуя [13], разобьем область интегрирования ($q_{min} \leq q \leq q_1$) на две части: $q_{min} \leq q \leq q_0$ и $q_0 \leq q \leq q_1$ (где q_0 не зависит от n и $v_a/v \ll q_0 \ll 1$), соответствующие малым и большим переданным импульсам, и представим Ω^2 в виде

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2. \quad (10)$$

Область малых переданных импульсов $q_{min} \leq q \leq q_0$ вносит вклад Ω_1^2 и соответствует большим параметрам удара, когда атомный электрон взаимодействует с ионом как с точечным зарядом Z^* . Поэтому вклад от области малых переданных импульсов (при $q_0 \lambda \ll 1$) совпадает с результатом, рассчитанным Фано [8] по теории возмущений:

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{v^2} \sum_n \epsilon_{n,0}^2 \int_{q_{min} \leq |\mathbf{q}| \leq q_0} d^2 q |f_{n0}|^2 = 8\pi \frac{Z^{*2}}{v^2} \frac{2}{3} K \ln \frac{q_0 v}{I_F}, \quad (11)$$

где $K = \langle 0 | \hat{K} | 0 \rangle$, $\hat{K} = -(1/2)\nabla^2$ — оператор кинетической энергии, $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$. Область больших переданных импульсов $q_0 \leq q \leq q_1$ вносит вклад

$$\Omega_2^2 = \int_{q_0 \leq |\mathbf{q}| \leq q_1} \frac{d^2q}{v^2} \sum_n \epsilon_{n,0}^2 |f_{n,0}|^2, \quad (12)$$

где величины $f_{n,0}$, согласно (6), выражаются через амплитуду f (7) с эйкональной фазой (9). Дальнейшие выкладки во многом аналогичны приведенным в работе [7]. В результате флуктуации (10) для столкновений быстрого иона конечного размера с атомом водорода можно представить в виде (ср. (2)):

$$\Omega^2 = 4\pi Z^{*2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \frac{4}{3} \times K \left(\ln \frac{2v^2}{I_F} + \psi(1) - \operatorname{Re} \psi(1 + i\eta^*) \right) + \Delta_{\text{H}}^* \right), \quad (13)$$

где $\eta^* = Z^*/v$ — кулоновский параметр для заряда Z^* , а величина Δ_{H}^* имеет смысл непертурбативной поправки для атома водорода и равна

$$\Delta_{\text{H}}^* = G + \frac{1}{v^2} \frac{4}{3} \times K \left[L + \frac{Z - Z^*}{2Z^*} \left(\frac{Z + Z^*}{Z^*} \ln(1 + 4v^2\lambda^2) - \frac{Z - Z^*}{Z^*} \frac{(2v\lambda)^2}{1 + (2v\lambda)^2} \right) - \psi(1) + \operatorname{Re} \psi(1 + i\eta^*) \right]. \quad (14)$$

Выражения для интегралов G и L приведены ниже в Приложении.

Воспользуемся результатами, полученными для водородоподобного атома, для того чтобы найти непертурбативную поправку Δ^* для сложного многоэлектронного атома. Следуя методике [7], проведем численные расчеты поправки Δ_{H}^* для атома водорода, находящегося до столкновения в произвольном состоянии $|nlm\rangle$ (n — главное квантовое число, l — орбитальный момент, m — его проекция), найденные таким образом значения Δ_{H}^* будем обозначать Δ_{nlm}^* . При этом, как и в [7], зависимостью от проекции орбитального момента m можно пренебречь, так что $\Delta_{nlm}^* = \Delta_{nl}^*$. Для проведения оценок сделаем (как в работе [7]) следующие упрощающие предположения для описания многоэлектронного атома. Будем считать электроны различимыми, их состояния будем описывать одноэлектронными волновыми функциями в среднем поле. Ниже при описании состояний многоэлектронного атома будем использовать водородоподобные функции $|nlm\rangle$ с эффективными зарядами $Z_a^{(n,l)}$, определяемыми согласно правилам (аналогичным известным правилам Слейтера [19]), предложенным в статье [20]. Соответствующие значения поправки для водородоподобного атома с эффективным зарядом ядра, равным $Z_a^{(n,l)}$, обозначим $\Delta_{n,l}^*$. Далее, следуя рассуждениям разд. 4

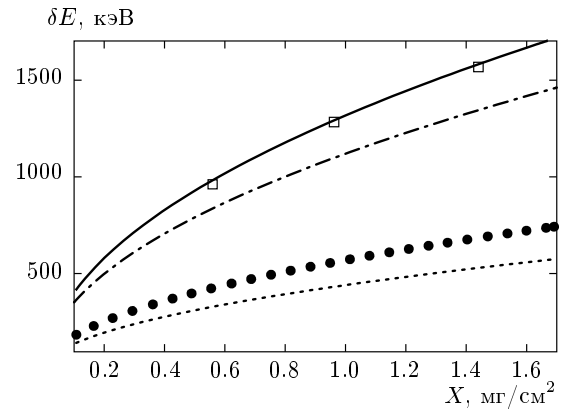


Рис. 1. Зависимость δE от толщины мишени x для ионов йода (с энергией 1.467 МэВ/н), сталкивающихся с медной мишенью

статьи [7], получаем обобщение формулы (13) для флуктуаций потерь энергии быстрыми ионами конечных размеров на сложных атомах:

$$\Omega^2 = 4\pi Z^{*2} \times N \left[1 + \frac{4}{3v^2} K \left(\ln \frac{2v^2}{I_F} + \Delta L^{Bloch} \right) + \Delta^* \right], \quad (15)$$

где

$$K = \frac{1}{2N} \langle 0 | \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{p}}_i^2 | 0 \rangle,$$

$\hat{\mathbf{p}}_i$ — операторы импульсов атомных электронов, Δ^* — непертурбативная поправка к формуле Титейка для сложного атома, имеющая вид (ср. [7])

$$\Delta^* = \frac{1}{N} \sum_{n,l} N_{n,l} \Delta_{n,l}^*, \quad (16)$$

$N_{n,l}$ — число атомных электронов в состояниях с квантовыми числами n, l . В формуле (16) суммирование проводится только по заполненным состояниям и $\sum_{n,l} N_{n,l} = N$, где N — общее число электронов в данном атоме, $N_{n,l}$ — числа заполнения для атома, находящегося в основном состоянии до столкновения. Отметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ потенциал (3) соответствует взаимодействию точечного иона заряда Z^* с атомными электронами и формула (15) переходит в ранее полученную нами формулу (41) статьи [7] для среднеквадратичных флуктуаций потерь энергии точечным ионом с $Z = Z^*$.

На рис. 1, 2, 3 приведены экспериментальные данные [21] (лежащие вне области применимости теории возмущений и формулы Фано) и результаты

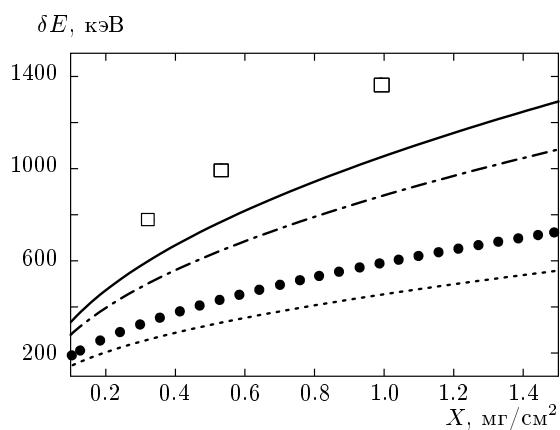


Рис. 2. Зависимость δE от толщины мишени x для ионов йода (с энергией 1.467 МэВ/н), сталкивающихся с алюминиевой мишенью

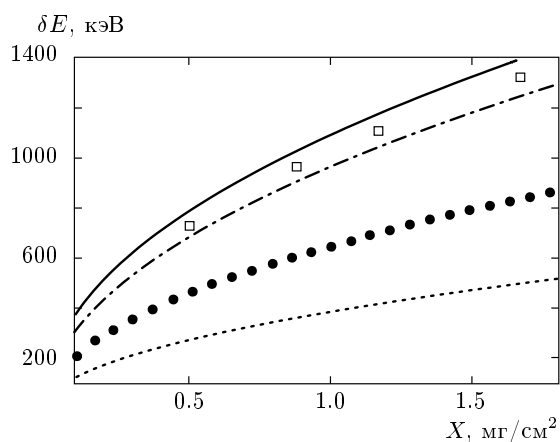


Рис. 3. Зависимость δE от толщины мишени x для ионов брома (с энергией 2 МэВ/н), сталкивающихся с серебряной мишенью

наших расчетов ширины флуктуаций δE , связанной с Ω^2 соотношением [21]

$$\delta E = 2(2 \ln 2)^{1/2} \sqrt{\Omega^2 X}, \tag{17}$$

где X — толщина поглотителя (пленки). На всех рисунках введены единые обозначения. Квадраты — экспериментальные данные [21], сплошные линии — результаты наших расчетов величины δE с Ω^2 , вычисленной в приближении эйконала по формуле (15) с учетом непертурбативных эффектов и размеров ионов. Далее следуют обозначения для трех групп результатов, полученных для точечных ионов заряда Z^* : штрихпунктирные линии — результаты расчетов δE с использованием для флуктуации полученной в приближении эйконала формулы (2) (формула (41) из [7]) при $Z = Z^*$; кружки — резуль-

таты расчетов δE с использованием для флуктуации формулы Титейка (формула (2) при $\Delta = 0$ и $Z = Z^*$); пунктирные линии — результаты расчетов δE с использованием для флуктуации формулы Бора $\Omega_B^2 = 4\pi Z^{*2} N$.

Как видно из приведенных рисунков, результаты расчетов флуктуаций в приближении эйконала заметно лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты, следующие из формул Бора и Титейка. Кроме того, сравнивая на рисунках сплошную линию со штрихпунктирной, можно увидеть и зависимость флуктуаций энергетических потерь от учета размера иона. Разность между сплошной линией и штрихпунктирной составляет примерно 20% и демонстрирует рост флуктуаций за счет учета размеров иона в приближении эйконала. Отметим еще раз, что результаты расчетов в приближении эйконала для протяженных ионов отличаются на 20% от результатов расчетов в приближении эйконала для точечных ионов, абсолютная величина этой разности может примерно в два раза превосходить флуктуации, рассчитанные по формулам Бора и Титейка. Другими словами, результаты, полученные по формулам Бора и Титейка, даже не являются основным вкладом в величину флуктуаций для приведенных выше партнеров по столкновениям при энергиях в области неприменимости теории возмущений и формулы Фано. Сама же величина флуктуаций (как видно из рисунков), рассчитанная в приближении эйконала, и результаты для флуктуаций, полученные при использовании формул Бора и Титейка, вообще могут отличаться примерно на порядок (см. также [7]). Подчеркнем, что формула (15), учитывающая в приближении эйконала непертурбативные эффекты и размеры ионов, не содержит подгоночных параметров. Таким образом, несмотря на отсутствие подгоночных параметров, в наших расчетах по формуле (15) наблюдается заметное улучшение согласия с экспериментальными данными по сравнению с результатами, полученными для точечных ионов тех же зарядов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ (грант МК-3592.2011.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены выражения для рассчитываемых численно интегралов, входящих в формулу (14):

$$L = \frac{1}{\langle 0 | \frac{2}{3} \hat{K} | 0 \rangle} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}'} \langle 0 | \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'}{b^2 b'^2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{(Z-Z^*)b}{Z^*\lambda} K_1 \left(\frac{b}{\lambda} \right) \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{(Z-Z^*)b'}{Z^*\lambda} K_1 \left(\frac{b'}{\lambda} \right) \right) \left(e^{-i\chi(\mathbf{b},\mathbf{s})} e^{i\chi(\mathbf{b}',\mathbf{s})} - 1 \right) \times$$

$$\times \frac{2}{3} \hat{K} | 0 \rangle d\mathbf{b} d\mathbf{b}' d\mathbf{q}, \quad (18)$$

где $\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s})$ — эйконалная фаза (9);

$$G = \frac{1}{8\pi Z^{*2}} \text{Re} \int \langle 0 | J_1 J_2 | 0 \rangle d\mathbf{q} +$$

$$+ \frac{1}{16\pi Z^{*2}} \int \langle 0 | |J_1|^2 | 0 \rangle d\mathbf{q}. \quad (19)$$

Интегралы J_1 и J_2 выражаются через вспомогательную функцию вида

$$F(Z, Z^*, x) =$$

$$= \exp \left\{ -i \frac{2}{v} \left(Z^* \ln x - (Z - Z^*) K_0 \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right) \right\} \quad (20)$$

и равны

$$J_1 = -\frac{i}{2\pi} \int \left[\frac{2i}{v} \frac{Z - Z^*}{\lambda^2} K_0 \left(\frac{b}{\lambda} \right) - \left(\frac{2}{v} \right)^2 \times \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{Z^*}{b} + \frac{Z - Z^*}{\lambda} K_1 \left(\frac{b}{\lambda} \right) \right)^2 \right] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} F(Z, Z^*, b) \times$$

$$\times (F(-Z, -Z^*, |\mathbf{b} + \mathbf{s}|) - F(-Z, -Z^*, s)) d\mathbf{b}, \quad (21)$$

$$J_2 = -ie^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} F(-Z, -Z^*, s) \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(1 - F \left(Z, Z^*, \frac{x}{q} \right) \right) J_0(x) x dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Miraglia and M. S. Gravielle, Phys. Rev. A **72**, 042902 (2005).
2. F. Bloch, Ann. der Phys. **16**, 285 (1933).
3. J. F. Ziegler, Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process. **85**, 1249 (1999).
4. В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, Е. С. Гусаревич, Письма в ЖЭТФ **92**, 317 (2010).
5. В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, Е. С. Гусаревич, ЖЭТФ **139**, 868 (2011).
6. В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, Письма в ЖЭТФ **94**, 3 (2011).
7. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, Письма в ЖЭТФ **95**, 131 (2012).
8. U. Fano, Ann. Rev. Nucl. Sci. **13**, 1 (1963).
9. S. Titeica, Bul. Soc. Romaniae Phys. **38**, 81 (1939).
10. N. Bohr, Mat.-Fys. Meddr. Dansk. K. Vidensk Selsk. **18** (1948).
11. Н. Бор, *Избранные труды*, т. 1, Наука, Москва (1970).
12. P. K. Sigmund, Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **52**, 557 (2006), *Special Issue on Ion Beam Science: Solved and Unsolved Problems*, ed. by P. Sigmund.
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
14. W. Brandt and M. Kitagawa, Phys. Rev. B **52**, 5631 (1982).
15. L. C. Northcliffe, Phys. Rev. **120**, 1744 (1960).
16. N. J. Carron, *An Introduction to the Passage of Energetic Particles through Matter*, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, London (2007).
17. N. Bohr, Phys. Rev. **58**, 654 (1940).
18. N. Bohr, Phys. Rev. **59**, 279 (1941).
19. J. C. Slater, Phys. Rev. **36**, 57 (1930).
20. G. Burns, J. Chem. Phys. **41**, 1521 (1964).
21. S. Ouichaoui, E. Hourani, L. Rosier et al., Nucl. Instr. Meth. B **164–165**, 259 (2000).