

ТЕОРИЯ МНОГОФОТОННОЙ И ТУННЕЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ В БИХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Д. С. Багулов^{a}, И. А. Котельников^{b**}*

^a *Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

^b *Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 7 июня 2012 г.

Методом мнимого времени [6, 7] вычислена вероятность многофотонной и туннельной ионизации атомов в поле лазерного излучения, часть которого конвертирована во вторую гармонику. Предполагается, что первая гармоника имеет линейную или эллиптическую поляризацию, а вторая гармоника поляризована линейно, причем вектор ее поляризации составляет произвольный угол с вектором поляризации первой гармоники. Показано, что средний импульс фотоэлектронов, вырванных из атомов, зависит от сдвига фаз между первой и второй гармониками, а также от их взаимной поляризации и тождественно равен нулю для монохроматического поля. Отмечено, что важным отличием случая эллиптической поляризации от случая линейной поляризации обеих гармоник является отсутствие условий, при которых в процессе генерации терагерцевого излучения из области оптического пробоя в газе можно выделить условия доминирования одного из двух рассмотренных в статье механизмов генерации.

DOI: 10.7868/S0044451013010026

1. ВВЕДЕНИЕ

Многофотонная ионизация является основным механизмом оптического пробоя в фокусе фемтосекундного лазера. Плазма, образующаяся в фокальном пятне, является источником терагерцевого излучения, мощность которого может увеличиваться в сотни раз при пропускании лазерного импульса через нелинейный кристалл β -бората бария (ВВО-кристалл), установленный перед фокусным пятном [1]. Этот нелинейный преобразователь конвертирует часть мощности лазерного излучения в линейно поляризованную вторую гармонику.

Известны два механизма усиления терагерцевого излучения из фокального пятна.

Первый механизм основан на очевидном допущении, что для многофотонной ионизации на двойной частоте требуется одновременное поглощение вдвое меньшего числа фотонов. Поскольку вероятность такой ионизации тем меньше, чем больше необходимое число фотонов, ионизация от второй гармоники мо-

жет превысить ионизацию от первой гармоники, даже если амплитуда последней существенно больше.

Другой механизм усиления терагерцевого излучения основан на появлении у фотоэлектронов, вырванных лазерным излучением из атомов, начального импульса, что приводит к возникновению переходного фототока [2, 3]. Переходный фототок возникает только при наличии второй гармоники и только при наличии сдвига фаз между гармониками, не кратного π , если обе гармоники имеют линейную поляризацию [4].

Попытка создания квантовой модели генерации терагерцевого излучения из фокуса фемтосекундного лазера, описывающей оба механизма, была предпринята в недавней работе [5] (см. также цитированную там литературу). С помощью метода мнимого времени (ММВ), разработанного преимущественно в работах А. М. Переломова и В. С. Попова [6–9], авторы связали скорость ионизации и величину переходного фототока с параметрами лазерного импульса, из которых важнейшими являются отношение

$$\epsilon = E_2/E_1 \quad (1)$$

амплитуды второй гармоники E_2 к амплитуде первой гармоники E_1 , сдвиг фаз между гармониками ψ ,

*E-mail: bagulov-denis@yandex.ru

**E-mail: I.A.Kotelnikov@inp.nsk.su

параметр Келдыша γ (см. ниже), а также поляризация гармоник. В зависимости от величины параметра Келдыша различают многофотонную ($\gamma \gg 1$) и туннельную ($\gamma \ll 1$) фотоионизацию.

В работе [5] был исследован случай, когда обе гармоники поляризованы линейно, а их векторы поляризации либо параллельны, либо перпендикулярны друг другу. Результаты расчетов были представлены в виде сравнительно простых асимптотических формул в пределе $\gamma \gg 1$. Продолжая эту линию, в данной работе мы, во-первых, укажем простое правило вычисления главного члена асимптотического разложения в другом предельном случае $\gamma \ll 1$.

Во-вторых, мы откажемся от допущения, что две линейно поляризованные гармоники либо параллельны, либо взаимно перпендикулярны. Вместо этого будем считать, что между векторами поляризации гармоник имеется произвольный угол θ , так что вблизи атома электрическое поле лазерного импульса можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t) + E_2 \cos \theta \cos(2\omega t + \psi), \\ E_y &= E_2 \sin \theta \cos(2\omega t + \psi). \end{aligned} \quad (2)$$

Соответствующие вычисления представлены в разд. 3, которому предшествует разд. 2, где кратко описан метод мнимого времени и приведены основные формулы, используемые далее.

В-третьих, мы рассмотрим случай, когда первая гармоника имеет эллиптическую поляризацию, что лучше соответствует реальной экспериментальной ситуации. Тогда

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \mu \cos(\omega t) + E_2 \cos \theta \cos(2\omega t + \psi), \\ E_y &= E_1 \sin \mu \sin(\omega t) + E_2 \sin \theta \cos(2\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (3)$$

где параметр μ фиксирует поляризацию первой гармоники. Например, $\mu = \pi n/2$ при целом n отвечает линейной поляризации, $\mu = \pi/4$ — правой, $\mu = -\pi/4$ — левой круговой поляризации; при других значениях μ имеем эллиптическую поляризацию. Фотоионизации монохроматическим полем с эллиптической поляризацией (в пределе $E_2 = 0$) посвящен разд. 4, в котором воспроизведены известные результаты других авторов. Это необходимо для понимания рассмотренного в разд. 5 случая, в котором к основной гармонике добавлена малая примесь линейно поляризованного поля на удвоенной частоте. Такой выбор поляризации гармоник имеет практическое обоснование, поскольку ВВО-кристалл не только удваивает частоту проходящего через него лазерного излучения, но еще и преобразует эллиптическую поляризацию в линейную.

В разд. 6 сформулированы основные результаты.

2. МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ

В рамках ММВ вероятность ионизации (в единицу времени) уровня с энергией связи $-I$ электромагнитным полем с экспоненциальной точностью определяется мнимой частью функции укороченного действия W , вычисленного вдоль траектории, на которой электрон имеет заданный обобщенный импульс:

$$w_i \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} W\right). \quad (4)$$

Для частицы, связанной короткодействующими силами, укороченное действие и траектория определяются полем электромагнитной волны. В таком поле укороченное действие имеет вид [10]

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(t) + e \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{x}(t) - I \right) dt - \\ &\quad - m [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0)], \end{aligned} \quad (5)$$

а траектория определяется из классических уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (6)$$

которые нужно решать с необычными начальными условиями

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(t_0) + I = 0, \quad \mathbf{x}(t_0) = 0. \quad (7)$$

Ключевым пунктом ММВ является то, что начальное «время» t_0 нужно выбирать так, чтобы траектория, определяемая из уравнений (6) с начальными условиями (7), была вещественной на вещественной оси t ; при этом «время» t_0 по необходимости должно быть комплексным (а не вещественным), так как первое из начальных условий подразумевает, что начальная скорость $\mathbf{v}(t_0)$ является мнимой.

Поскольку мы выбираем $\mathbf{x}(t_0) = 0$, а $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ в выражении для W вещественны, последнее (внеинтегральное) слагаемое в (5) можно отбросить (см. [5, 11]) — оно не меняет вероятность ионизации (4), куда входит только мнимая часть W .

Введем безразмерные время τ , вектор координат $\boldsymbol{\xi}$ и силу \mathbf{F} так, что

$$\tau = \omega t, \quad \mathbf{x} = \frac{eE_1}{m\omega^2} \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{E}}{E_1}.$$

Тогда уравнения движения и начальные условия записываются в виде

$$\ddot{\xi} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\dot{\xi}^2(\tau_0) = -\gamma^2, \quad (9)$$

$$\xi(\tau_0) = 0, \quad (10)$$

где точки над ξ обозначают дифференцирование по τ , а величину

$$\gamma = \sqrt{\frac{2I}{m}} \left(\frac{eE_1}{m\omega} \right)^{-1} \quad (11)$$

называют параметром Келдыша¹⁾. В тех же переменных

$$w_i \propto \exp \left[-\frac{2I}{\hbar\omega} f_0 \right], \quad (12)$$

где

$$f_0 = \text{Im} \left[\frac{2}{\gamma^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{1}{2} \dot{\xi}^2(\tau) + \mathbf{F}(\tau) \cdot \xi(\tau) - \frac{\gamma^2}{2} \right) d\tau \right]. \quad (13)$$

В пределе $\gamma \rightarrow \infty$, соответствующем случаю многофотонной ионизации, в интеграле (13) доминирует последнее слагаемое. Тогда [5]

$$f_0 \approx \text{Im} \tau_0. \quad (14)$$

Рассматривая предел туннельной ионизации, достаточно заметить, что $\gamma \rightarrow 0$ в постоянном электрическом поле, т. е. при $\omega \rightarrow 0$. Следуя работе [12], для постоянной силы \mathbf{F} из уравнений (8), (9) находим

$$\dot{\xi} = \pm i\gamma + F(\tau - \tau_0).$$

Чтобы это решение было вещественным при вещественном τ , необходимо наложить условие

$$\tau_0 = \pm i\gamma/F.$$

Тогда

$$\dot{\xi} = F\tau, \quad \xi = \frac{1}{2}F(\tau^2 - \tau_0^2).$$

¹⁾ В некоторых статьях параметр Келдыша определяют через максимальную величину электрического поля $E_{max} = E_1 \max(|\cos \mu|, |\sin \mu|)$, т. е.

$$\gamma = \sqrt{\frac{2I}{m}} \left(\frac{eE_{max}}{m\omega} \right)^{-1}.$$

См., например, [11].

Поставляя эти выражения в формулу (13), находим

$$f_0 = \frac{2F^2}{3\gamma^2} \text{Im} [-\tau_0^3].$$

Выбирая верхний знак в формуле $\tau_0 = \pm i\gamma/F$, чтобы обеспечить положительность f_0 , получаем результат, хорошо известный в теории ионизации атома постоянным электрическим полем [12]:

$$f_0 = \frac{2\gamma}{3F}.$$

В медленно меняющемся периодическом поле амплитуду F в этой формуле нужно заменить ее максимальным значением F_{max} , так как вероятность ионизации (12) будет максимальной именно в момент максимума:

$$f_0 = \frac{2\gamma}{3F_{max}}. \quad (15)$$

Имеющиеся расчеты туннельной ионизации подтверждают этот вывод [11]. Если считать, что электрон выбивается из атома в момент $\tau = 0$, то в пределе туннельной ионизации его начальная скорость равна нулю согласно формуле $\dot{\xi} = F\tau$. Иными словами, в первом приближении переходный фототок отсутствует. Однако далее будет показано, что он появляется в бихроматическом поле.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ГАРМОНИК

Переходя к решению уравнения (8), начнем со случая, когда и первая, и вторая гармоники поляризованы линейно. При этом сила \mathbf{F} имеет две компоненты

$$\begin{aligned} F_x &= \cos \tau + \epsilon \cos \theta \cos(2\tau + \psi), \\ F_y &= \epsilon \sin \theta \cos(2\tau + \psi). \end{aligned} \quad (16)$$

В отличие от работы [5], здесь мы допускаем произвольный угол θ между векторами поляризации гармоник. Временно игнорируя первое начальное условие (9), запишем решение уравнения (8) с силой (16) в виде

$$\begin{aligned} \xi_x &= \alpha_x (\tau - \tau_0) - [\cos \tau - \cos \tau_0] - \\ &\quad - \frac{1}{4} \epsilon \cos \theta [\cos(2\tau + \psi) - \cos(2\tau_0 + \psi)], \\ \xi_y &= \alpha_y (\tau - \tau_0) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \epsilon \sin \theta [\cos(2\tau + \psi) - \cos(2\tau_0 + \psi)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Оно обращается в нуль при $\tau = \tau_0$ при любой величине констант α_x и α_y . Параметры α_x и α_y определяют компоненты среднего импульса

$$p_{x,y} = (eE_1/\omega)\alpha_{x,y}$$

фотоэлектронов, порождаемых лазерным импульсом. Они должны быть вещественными, чтобы ξ_x , ξ_y , $\dot{\xi}_x$ и $\dot{\xi}_y$ были вещественны при вещественном τ (ср. [5]). Учитывая это и приравнявая нулю мнимую часть выражения (17) при произвольном вещественном значении τ , находим, что

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \text{Im} \left[\cos \tau_0 + \frac{1}{4}\epsilon \cos \theta \cos(2\tau_0 + \psi) \right] \times \\ &\quad \times (\text{Im } \tau_0)^{-1}, \quad (18) \\ \alpha_y &= \text{Im} \left[\frac{1}{4}\epsilon \sin \theta \cos(2\tau_0 + \psi) \right] (\text{Im } \tau_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное решение в неиспользованное ранее первое начальное условие (9), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left[\alpha_x + \sin \tau_0 + \frac{1}{2}\epsilon \cos \theta \sin(2\tau_0 + \psi) \right]^2 + \\ + \left[\alpha_y + \frac{1}{2}\epsilon \sin \theta \sin(2\tau_0 + \psi) \right]^2 = -\gamma^2 \quad (19) \end{aligned}$$

для вычисления τ_0 .

В частном случае $\epsilon = 0$ (монохроматическое поле) уравнение (19) имеет бесконечный набор решений с положительной мнимой частью,

$$\tau_0 = i \operatorname{arcsch} \gamma + \pi k, \quad (20)$$

где k — целое число. Ему соответствуют значения $\alpha_x = \alpha_y = 0$, а вероятность ионизации была вычислена Л. В. Келдышем [13]

$$f_0 = \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \operatorname{arcsch} \gamma - \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{2\gamma}. \quad (21)$$

В пределе $\gamma \ll 1$ из (21) получаем результат $f_0 \approx (2/3)\gamma$, который совпадает с формулой (15), если учесть, что в данном случае $F_{max} = 1$. Если же $\gamma \gg 1$, то $f_0 \approx \ln(2\gamma)$.

Другой набор решений уравнения (19) с отрицательной мнимой частью, $\tau_0 = -i \operatorname{arcsch} \gamma + \pi k$, следует отбраковать, так как он дает отрицательное значение f_0 , не имеющее физического смысла.

В комплексной плоскости функция $\operatorname{arcsch} \gamma$ многолистка, поэтому многочисленные корни (20) по сути являются значениями функции $\operatorname{arcsch} \gamma$ на различных листах римановой поверхности. Однако условимся, что здесь и далее у многолистных функций,

таких как $\operatorname{arcsch} \gamma$ и $\ln \gamma$, выбрано то значение, которое вещественно при вещественном $\gamma > 0$, а разным листам отвечают разные значения некоторого целого параметра, такого как k . Существенно, что для всех этих корней получаются одни и те же значения функции f_0 и вектора $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$, поэтому при $\epsilon = 0$ вопрос о селекции корней не возникает. Обычно без пояснений выбирают тот корень, который соответствует ветви $k = 0$ (см., например, [11]). По существу же вопрос о селекции корней решен в работе Келдыша [13], где указано, что в амплитуде ионизации необходимо выполнять суммирование по всем решениям перевального уравнения, лежащим в верхней полуплоскости комплексного времени, причем суммирование по корням, отличающимся сдвигом на период, приводит к появлению в амплитуде ионизации дельта-функции, выражающей закон сохранения энергии. В работе [6] этот вопрос рассмотрен более подробно и показано, что суммирование по корням внутри одного оптического периода приводит к появлению интерференции в спектре фотоэлектронов, но при вычислении вероятности ионизации интерференционными членами можно пренебречь (см. формулу (53) в [6]). С точностью до тех же интерференционных членов переходный фототок, создаваемый коротким лазерным импульсом, пропорционален сумме:

$$\mathbf{j} \propto \sum_k \alpha(k) \exp \left[-\frac{2I}{\hbar\omega} f_0(k) \right]. \quad (22)$$

В задаче о колебаниях плазмы, созданной лазерным импульсом, этот ток определяет начальный гидродинамический импульс плазмы, который, как резкий толчок, инициирует ленгмюровские колебания плазмы, вызывающие ее излучение в терагерцевом диапазоне частот [4].

В бихроматическом поле (при $\epsilon \neq 0$) различные корни уравнения (20) приводят к разным значениям f_0 и вектора α . Из множества корней, во-первых, следует отобрать только такие, которые дают положительное значение f_0 . Во-вторых, из оставшихся корней следует выбрать те, которые дают наименьшее значение

$$f_0 = \min_k f_0(k), \quad (23)$$

которое соответствует наибольшей вероятности ионизации. Второе правило подразумевает, что наименьшее (по абсолютной величине) значение отличается от любого другого значения $f_0(k)$ на-

столько, чтобы было заметно различие в величине вероятности ионизации, т. е.

$$f_0(k) - f_0 \gg \hbar\omega/2I. \quad (24)$$

В противном случае нужно взять все те корни, которые удовлетворяют условию

$$f_0(k) - f_0 \lesssim \hbar\omega/2I. \quad (25)$$

3.1. Туннельная ионизация

Проще всего исследовать случай туннельной ионизации, для которого имеется универсальная формула (15).

3.1.1. Малая примесь второй гармоники

Если примесь второй гармоники мала, т. е. $\epsilon \ll 1$, нетрудно подсчитать, что

$$F_{max} \approx 1 + \epsilon |\cos \theta \cos \psi|$$

и, следовательно,

$$f_0 = \frac{2\gamma}{3} (1 - \epsilon |\cos \theta \cos \psi|). \quad (26)$$

Однако для вычисления параметров α_x и α_y нужно все-таки проделать описанные выше вычисления.

Прежде всего находим корни уравнения (19) с положительной мнимой частью:

$$\tau_0 = i\gamma + \pi k - i\gamma\epsilon \cos \theta \cos(\pi k + \psi) - 2\epsilon \cos \theta \sin(\pi k + \psi). \quad (27)$$

Физически различимые корни расположены на интервале $\Delta\tau_0 = 2\pi$. Условимся, что это корни с индексами $k = 0$ и $k = 1$. Соответствующие значения функции

$$f_0(k) = \frac{2\gamma}{3} [1 - \epsilon \cos \theta \cos(\pi k + \psi)]$$

различаются для четных и нечетных индексов k . Отбирая те корни, для которых $f_0(k)$ меньше по абсолютной величине, вновь приходим к формуле (26), которая получена выше из других соображений. Что касается параметров α_x и α_y , то оказывается, что в первом неисчезающем порядке разложения по малому параметру $\epsilon = E_2/E_1$ они не зависят от k :

$$\alpha_x(k) = \frac{3\epsilon}{2} \cos \theta \sin \psi, \quad \alpha_y(k) = -\frac{\epsilon}{2} \sin \theta \sin \psi. \quad (28)$$

В размерных единицах $p_{x,y} = (eE_1/\omega)\alpha_{x,y}$, т. е. фотоэлектроны рождаются с импульсом порядка $p \sim (eE_1/\omega)\epsilon = eE_2/\omega$, пропорциональным амплитуде второй гармоники, причем импульс максимален

при $\cos \psi = 0$, когда усиление ионизации от интерференции гармоник отсутствует (второе слагаемое в (26) обращается в нуль). В переходном фототоке (22) можно оставить только одно слагаемое, если выполнено условие (24), т. е.

$$\frac{2}{3}\epsilon\gamma |\cos \theta \cos \psi| \gg \frac{\hbar\omega}{2I}.$$

Это условие нарушается, если $E_2 \rightarrow 0$.

Поскольку α_x и α_y пропорциональны $\sin \psi$, переходный фототок исчезает, если сдвиг фазы ψ кратен π . Такой же вывод был сделан ранее в работе [5], где анализировалась многофотонная ионизация для случая продольной ($\theta = 0$) и взаимно перпендикулярной ($\theta = \pi/2$) поляризации гармоник.

3.1.2. Малая примесь первой гармоники

Если, напротив, $\epsilon \gg 1$ и первая гармоника составляет малую добавку, то вновь при помощи несложных вычислений можно найти максимальную амплитуду. Она выбирается из четырех значений

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

в точках экстремумов, где $dF/d\tau = 0$. Подставляя найденные значения экстремумов в формулу (15), находим

$$f_0(k) = \frac{2\gamma}{3\epsilon} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \cos \theta \cos \frac{\pi k + \psi}{2}\right). \quad (29)$$

Тот же результат получится, если найти корни уравнения (19) с положительной мнимой частью,

$$\tau_0 = \frac{i\gamma}{\epsilon} - \frac{i\gamma}{\epsilon^2} \cos \theta \cos \frac{\pi k + \psi}{2} + \frac{1}{2}(\pi k - \psi) + \frac{1}{4\epsilon} \cos \theta \sin \left(\frac{\pi k + \psi}{2}\right), \quad (30)$$

и подставить их в (13), но второй метод позволяет также вычислить начальный импульс фотоэлектронов с помощью формулы (18):

$$\alpha_x = \frac{1}{8} [\cos(2\theta) - 7] \sin \frac{\pi k - \psi}{2}, \quad \alpha_y = \frac{1}{8} \sin(2\theta) \sin \frac{\pi k - \psi}{2}. \quad (31)$$

Полезно заметить, что величина

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma}{\epsilon} = \sqrt{\frac{2I}{m}} \left(\frac{eE_2}{2m\omega}\right)^{-1}$$

имеет смысл параметра Келдыша для второй гармоники, поэтому первое слагаемое в (29) описывает

ионизацию в поле одной только второй гармоники, когда первая гармоника вообще отсутствует. При доминировании второй гармоники туннельное приближение применимо, если $\gamma/\epsilon \ll 1$.

Из сравнения формул (26) и (29) следует, что ионизация второй гармоникой доминирует (f_0 для этой гармоники меньше), если $\epsilon > 1$, т.е. $E_2 > E_1$. Иными словами, в режиме туннельной ионизации удвоение частоты лазерного излучения (при фиксированной мощности) не приводит к усилению фотоионизации (в отличие от случая многофотонной ионизации, см. ниже). Однако конвертация части мощности лазерного излучения в удвоенную частоту включает второй механизм усиления терагерцевого излучения — генерацию фототока. В размерных единицах формула (31) означает, что при $E_1 < E_2$ величина начального импульса фотоэлектронов пропорциональна амплитуде первой гармоники, $p \sim eE_1/\omega$, тогда как при $E_1 > E_2$ она пропорциональна E_2 (см. выше). Следовательно, максимальный эффект достигается при $E_1 \sim E_2$.

Правило отбора (24) индекса k означает, что

$$\frac{2\gamma}{3\epsilon^2} |\cos \theta| > \frac{\hbar\omega}{2I}.$$

Это условие нарушается, если $E_1 \rightarrow 0$. В этом случае нужно суммировать вклады всех корней. В результате такого суммирования согласно (22) выясняется, что при $E_1 \rightarrow 0$ переходный фототок уменьшается быстрее, чем по линейному закону относительно E_1 , так как сумма коэффициентов (31) с разными значениями k равна нулю.

3.2. Многофотонная ионизация

Рассмотрим теперь другой предельный случай $\gamma \rightarrow \infty$, который представляет большой интерес для анализа экспериментов с лазерами умеренной мощности. В зависимости от величины ϵ здесь можно выделить два случая.

Если параметр ϵ достаточно мал, в левой части уравнения (19) в первом приближении можно оставить только первое слагаемое, а в нем только $\sin \tau_0$. Заранее отбирая только те корни уравнения, мнимая часть которых положительна, можем записать $\sin \tau_0 \approx -\exp(-i\tau_0)/2i$. Тогда уравнение для τ_0 приводится к виду

$$\left[-\frac{1}{2i} \exp(-i\tau_0) \right]^2 \approx -\gamma^2$$

и имеет бесконечный набор решений

$$\tau_0 \approx i \ln(2\gamma) + \pi k, \quad (32)$$

отвечающих целочисленным значениям k . Поскольку сила (16) есть периодическая функция τ с периодом 2π , достаточно рассмотреть только два решения, получающиеся при $k = 0$ и $k = 1$.

Если же параметр ϵ не слишком мал, имеем уравнение

$$\left[-\frac{\epsilon}{4i} \exp(-i(2\tau_0 + \psi)) \right]^2 \approx -\gamma^2,$$

откуда находим

$$\tau_0 \approx \frac{i}{2} \ln \frac{4\gamma}{\epsilon} + \frac{\pi k - \psi}{2}. \quad (33)$$

В этом случае надо исследовать четыре решения с $k = 0, 1, 2, 3$.

Обратившись к определению параметров γ и ϵ , нетрудно видеть, что решение (32) зависит только от амплитуды E_1 первой гармоники, а (33) — только от амплитуды E_2 второй гармоники. Подстановка этих решений в формулу (13) дает вероятность ионизации при доминировании соответственно первой гармоники и второй гармоники. Сравнивая (32) с (33), находим, что ионизация второй гармоникой преобладает, если $\epsilon \gg 1/\gamma$. В размерных обозначениях это условие эквивалентно неравенству

$$\frac{E_2}{E_1} \gg \frac{eE_1/m\omega}{\sqrt{2I/m}}. \quad (34)$$

Отсюда видно, что в режиме многофотонной ионизации конвертация лазерного излучения во вторую гармонику способна существенно увеличить скорость ионизации и, как следствие, плотность плазмы в фокальном пятне, что должно сопровождаться усилением терагерцевого излучения из фокального пятна.

3.2.1. Доминантная первая гармоника

При вычислении вектора α следует действовать с большей точностью, так как при ионизации только первой или только второй гармоникой $\alpha_x = \alpha_y = 0$. Уточняя формулу (32) путем удержания в уравнениях (18) и (19) малых членов, пропорциональных ϵ , получаем

$$\tau_0 = i \ln(2\gamma) + \pi k - (-1)^k \gamma \epsilon \cos \theta \left[ie^{-i\psi} + \frac{\sin \psi}{2(\ln(2\gamma) - 1)} \right]. \quad (35)$$

Такой метод расчета оправдан, если поправка, пропорциональная ϵ , мала, т.е. $\epsilon\gamma \ll 1$. Подстановка (35) в (18) дает компоненты вектора α :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\epsilon\gamma^2}{2(\ln(2\gamma) - 1)} \cos\theta \sin\psi, \\ \alpha_y &= -\frac{\epsilon\gamma^2}{2\ln(2\gamma)} \sin\theta \sin\psi.\end{aligned}\quad (36)$$

Оказывается, что они не зависят от k в главном порядке по параметру $\epsilon\gamma$. Напротив, функция f_0 , определяющая вероятность ионизации, зависит от k :

$$f_0(k) = \ln(2\gamma) - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(-1)^k \epsilon\gamma \cos\theta \cos\psi. \quad (37)$$

Выбирая то значение k , которое дает наибольшую вероятность ионизации, имеем

$$f_0 = \ln(2\gamma) - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \epsilon\gamma |\cos\theta \cos\psi|. \quad (38)$$

За интерференцию гармоник здесь отвечает последнее слагаемое, которое мало по сравнению с двумя первыми. Однако оно входит в выражение (12) для вероятности ионизации, будучи умноженным на большой множитель $I/\hbar\omega \gg 1$. Поэтому присутствие второй гармоники в поле лазера способно существенно увеличить скорость многофотонной ионизации даже при $\epsilon\gamma \ll 1$. В эксперименте эффект усиления может показаться пороговым, возникая при $\epsilon\gamma \gtrsim \hbar\omega/I$.

Усиление ионизации в данном приближении исчезает при $\theta = \pm\pi/2$. Однако эффект усиления присутствует в следующем порядке разложения по параметру $\epsilon\gamma$, как показано в работе [5], где для случая взаимно ортогональной поляризации гармоник вычисления проведены с большей точностью.

Усиление ионизации от интерференции гармоник исчезает также при $\psi = \pm\pi/2$, но именно при таком сдвиге фазы ψ согласно формулам (36) достигает максимума эффект генерации фототока. Генерация фототока имеется при любом угле поляризации θ , но в данном порядке теории исчезает при $\psi = 0$ или $\psi = \pi$. Нужно также помнить, что следует суммировать вклады всех корней, как с четными, так и с нечетными k . При $\cos\theta = 0$ формула (38) не предсказывает усиления ионизации, но оба сорта корней (с четными и нечетными k) дают одинаковый и ненулевой импульс α_y .

3.2.2. Доминантная вторая гармоника

В другом пределе $\epsilon \gg 1/\gamma$, уточняя формулу (33), получаем

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \frac{i}{2} \ln\left(\frac{4\gamma}{\epsilon}\right) + \frac{\pi k - \psi}{2} - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{\gamma\epsilon}} \times \\ &\times \left[\frac{\sin[(\pi k + \psi)/2]}{\ln(4\gamma/\epsilon) - 1} + i \exp\left(\frac{i(\pi k + \psi)}{2}\right) \right].\end{aligned}\quad (39)$$

Вектор α в этом пределе равен

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \sqrt{\frac{\gamma}{\epsilon}} \left[\frac{\ln(4\gamma/\epsilon) - 2}{(\ln(4\gamma/\epsilon) - 1) \ln(4\gamma/\epsilon)} \cos^2\theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\ln(4\gamma/\epsilon)} \right] \sin\frac{\pi k - \psi}{2}, \\ \alpha_y &= \sqrt{\frac{\gamma}{\epsilon}} \left[\frac{\ln(4\gamma/\epsilon) - 2}{2(\ln(4\gamma/\epsilon) - 1) \ln(4\gamma/\epsilon)} \sin(2\theta) \right] \times \\ &\quad \times \sin\frac{\pi k - \psi}{2},\end{aligned}\quad (40)$$

а мнимая часть укороченного действия вычисляется с помощью формулы

$$f_0(k) = \frac{1}{2} \ln\frac{4\gamma}{\epsilon} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3\sqrt{\epsilon\gamma}} \cos\theta \cos\frac{\pi k + \psi}{2}. \quad (41)$$

При заданном значении сдвига фаз ψ и угла θ нужно выбрать то значение k , которое минимизирует $f_0(k)$, — оно дает наибольшую вероятность ионизации. В размерных единицах импульс фотоэлектронов, вычисленный с помощью формул (40), пропорционален $E_1/\sqrt{E_2}$. Если

$$\frac{2}{3} \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{\gamma\epsilon}} \ll \frac{\hbar\omega}{2I},$$

третье слагаемое в (41) будет столь мало, что вклад различных k в вероятность ионизации (12) будет неразличим. Тогда при вычислении переходного фототока по формуле (22) происходит взаимное сокращение параметров (40) с разными k , в результате чего при уменьшении E_1 импульс фотоэлектронов будет уменьшаться быстрее, чем по закону $E_1/\sqrt{E_2}$.

Как и в ранее рассмотренном пределе $\epsilon \ll 1/\gamma$, максимум ионизации наблюдается при значениях ψ , кратных π , а фототок (пропорциональный α) максимален (по абсолютной величине) при $\psi = \pm\pi/2$.

Анализ формул (40) вновь, как и в случае $\epsilon\gamma \ll 1$, показывает, что абсолютная величина начального импульса фотоэлектронов примерно одинакова при параллельной и взаимно ортогональной поляризации гармоник.

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Перейдем к случаю, в котором первая гармоника имеет эллиптическую поляризацию. Воспроизведем известные результаты теории ионизации монохроматическим полем (см. [11] и указанные там ссылки), используя иную параметризацию, более удобную для сравнения с экспериментом. Именно, запишем безразмерную силу \mathbf{F} в следующем виде:

$$F_x = \cos \mu \cos \tau, \quad F_y = \sin \mu \sin \tau. \quad (42)$$

Параметр μ определяет поляризацию поля при фиксированной мощности лазерного излучения. Линейной поляризации соответствуют значения μ , кратные $\pi/2$. Волна с правой круговой поляризацией описывается значением $\mu = \pi/4$, а левая — $\mu = -\pi/4$. Значения μ , не кратные $\pi/4$, описывают эллиптическую поляризацию. Все физически различимые поляризации укладываются на интервал $0 \leq \mu < \pi$, так как при замене $\mu \rightarrow \mu + \pi$ поляризация не меняется. В предыдущих работах использовался иной параметр, при варьировании которого одновременно изменялась как поляризация, так и мощность излучения.

Повторяя рассуждения, изложенные в разд. 3, решение уравнения движения (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi_x &= \alpha_x(\tau - \tau_0) - \cos \mu(\cos \tau - \cos \tau_0), \\ \xi_y &= \alpha_y(\tau - \tau_0) - \sin \mu(\sin \tau - \sin \tau_0), \end{aligned} \quad (43)$$

где константы α_x и α_y определяются из условия вещественности решения при вещественном τ . Вводя обозначения для действительной и мнимой частей τ_0 посредством $\tau_0 = x + iy$, получаем

$$\alpha_x = -\frac{\text{sh } y}{y} \cos \mu \sin x, \quad \alpha_y = \frac{\text{sh } y}{y} \sin \mu \cos x. \quad (44)$$

Подставляя эти формулы в уравнение (13), имеем

$$f_0 = y + \frac{y^2 - \text{sh}^2 y}{2\gamma^2 y} + \frac{2 \text{sh}^2 y - y \text{sh}(2y)}{4\gamma^2 y} \times \cos(2\mu) \cos(2x). \quad (45)$$

Обратившись к неиспользованному начальному условию (9) и отделив в формуле $\dot{\xi}^2(\tau_0) = -\gamma^2$ мнимую часть, получим уравнение

$$\frac{\text{sh } y (\text{sh } y - y \text{ch } y)}{y} \cos(2\mu) \sin(2x) = 0, \quad (46)$$

в котором множитель, зависящий от y , нигде не обращается в нуль, кроме как при $y = 0$. При $y \neq 0$ его

решение имеет вид $x = \pi k/2$. Особый случай представляет собой круговая поляризация, так как при $\cos(2\mu) = 0$ уравнение (46) превращается в тождество.

Действительную часть равенства $\dot{\xi}^2(\tau_0) = -\gamma^2$ дает второе уравнение для x и y :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{4y^2} [1 - 2y^2 - \text{ch}(2y) + 2y \text{sh}(2y)] - \\ &\quad - \frac{\cos(2x) \cos(2\mu)}{4y^2} \times \\ &\quad \times [1 - (1 + 2y^2) \text{ch}(2y) + 2y \text{sh}(2y)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Из него следует, что $y = 0$ не является совместным решением пары уравнений (46) и (47), а подстановка $x = \pi k/2$ в (47) приводит к замене $\cos(2x)$ на $(-1)^k$. Получившееся в итоге уравнение не решается в элементарных функциях, однако можно указать приближенные решения в предельных случаях туннельной ($\gamma \ll 1$) и многофотонной ($\gamma \gg 1$) ионизации.

Прежде чем переходить к анализу предельных случаев, обратимся к рис. 1, чтобы проследить, как трансформируются корни уравнений (46), (47) по мере изменения поляризации поля. Эти корни лежат на пересечении штриховых и сплошных линий на плоскости (x, y) . Всего на интервале $-\pi \leq x < \pi$ может быть до шести корней с $y > 0$ (и столько же с $y < 0$). Если поляризация близка к круговой (как на рис. 1а), имеется шесть корней, два из которых характеризуются большими значениями y и поэтому дают экспоненциально малый вклад в вероятность ионизации по сравнению с четырьмя другими корнями. Эти два корня смещаются вниз на плоскости (x, y) , если поляризация приближается к линейной (рис. 1б), и затем исчезают, сливаясь с двумя другими корнями (рис. 1в).

4.1. Туннельная ионизация

При $\gamma \ll 1$ в первом порядке по малому параметру γ вероятность ионизации можно вычислить по универсальной формуле (15), заметив, что для поля вида (42)

$$F_{max} = \max_k \left[\sqrt{\frac{1 + (-1)^k \cos(2\mu)}{2}} \right].$$

Для вычисления следующего члена разложения к уравнению (47) следует применить разложение в ряд Тейлора при $y \ll 1$. Удерживая члены разложения до y^3 включительно и выбирая положительные решения, получаем

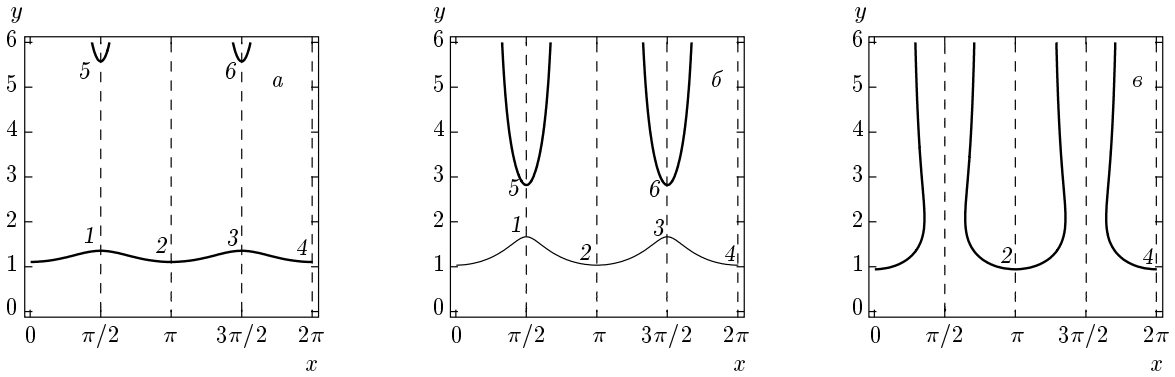


Рис. 1. Графическое решение уравнений (47), (46) при $\gamma = 1$: $a - \mu = (7/8)(\pi/4)$, $b - \mu = (6/8)(\pi/4)$, $в - \mu = (5/8)(\pi/4)$

$$x = \frac{\pi}{2}k, \quad y = \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1 + (-1)^k \cos(2\mu)}} - \frac{2\sqrt{2}\gamma^3 [1 + 2(-1)^k \cos(2\mu)]}{9 [1 + (-1)^k \cos(2\mu)]^{5/2}}. \quad (48)$$

На рис. 1 этим решениям примерно соответствуют точки пересечения с номерами от $k = 0$ до $k = 3$. Подставляя (48) в (44) и (45), находим вектор α и функцию f_0 :

$$\alpha_x = - \left[1 + \frac{\gamma^2/3}{1 + (-1)^k \cos(2\mu)} \right] \cos \mu \sin \frac{\pi k}{2}, \quad (49)$$

$$\alpha_y = \left[1 + \frac{\gamma^2/3}{1 + (-1)^k \cos(2\mu)} \right] \sin \mu \cos \frac{\pi k}{2},$$

$$f_0(k) = \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\sqrt{1 + (-1)^k \cos(2\mu)}} - \frac{4\sqrt{2}\gamma^3}{45} \frac{1 + 2(-1)^k \cos(2\mu)}{[1 + (-1)^k \cos(2\mu)]^{5/2}}. \quad (50)$$

Второе слагаемое в формулах (48)–(50) представляет собой малую поправку, если

$$\gamma \ll 1 + (-1)^k \cos(2\mu).$$

В зависимости от четности k последнее неравенство может нарушаться, если $\cos(2\mu) \rightarrow 1$ или $\cos(2\mu) \rightarrow -1$, т. е. если эллиптическая поляризация вырождается в линейную. Можно показать, что при

$$\frac{3}{4} [1 + (-1)^k \cos(2\mu)] \leq \gamma \ll 1$$

решение соответствующей четности исчезает. На рис. 1 этому соответствует слияние корней 1, 5 и 2, 6.

В пределе $\cos(2\mu) \rightarrow 0$, когда эллиптическая поляризация вырождается в круговую, значения y для четных и нечетных индексов k совпадают. На рис. 1 этому соответствует выпрямление нижней кривой, на которой расположены точки с номерами от 1 до 4. При этом значения $f_0(k)$ для четных и нечетных k равны, поэтому при вычислении вероятности ионизации согласно (50) должны быть учтены и те, и другие. Такой учет всего лишь приводит к удвоению предэкспоненциального множителя в формуле для вероятности ионизации, который не может быть вычислен методом мнимого времени. Однако компоненты вектора α различаются для четных и нечетных значений k даже в случае круговой поляризации. Как видно из формулы (49), целочисленный параметр k генерирует четыре различных вектора α соответственно четырем значениям $k \pmod{4} = 0, 1, 2, 3$. В методе мнимого времени не существует иного способа отбора корней уравнения (47), кроме как по величине f_0 , поэтому при вычислении переходного фототока согласно (22) следует суммировать вклад всех четырех корней. При таком суммировании α обращается в нуль при любой поляризации (так как α_x и α_y меняют знак при замене $k \rightarrow k + 2$), что означает отсутствие переходного фототока в монохроматическом поле. И этот факт не связан с малостью γ .

Выбирая то значение k , которое удовлетворяет условию $(-1)^k \cos \mu > 0$ и, следовательно, максимизирует вероятность ионизации (12), заключаем, что уже первый член в разложении (50), который в соответствии с универсальной формулой (15) равен

$$f_0 \approx \frac{2\gamma}{3F_{max}} = \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\sqrt{1 + |\cos(2\mu)|}},$$

предсказывает сильную зависимость вероятности

ионизации от поляризации лазерного излучения при фиксированной мощности излучения. В частности, для круговой поляризации ($\cos(2\mu) = 0$) величина $f_0 = 2\sqrt{2}\gamma/3$ в $\sqrt{2}$ раза больше, чем для линейной поляризации ($\cos(2\mu) = \pm 1$). Поскольку $w_i \propto \exp(-2If_0/\hbar\omega)$, при $I \gg \hbar\omega$ ионизация линейно поляризованным лазерным излучением должна быть существенно более сильной, чем ионизация циркулярно поляризованным излучением той же интенсивности. Указанный факт прошел почти незамеченным в более ранних работах (см. [11]), поскольку в них параметр Келдыша был выбран так, что в наших обозначениях он соответствует γ/F_{max} , т. е. не остается постоянным, если поляризация изменяется при фиксированной мощности излучения.

4.2. Многофотонная ионизация

В случае $\gamma \gg 1$ величина $e^y \sim \gamma$ в уравнении (47) также оказывается большой, так что гиперболические функции можно заменить на экспоненциальные, как это было сделано при анализе многофотонной ионизации для линейной поляризации гармоник в разд. 3.1. Более точная процедура состоит в том, что гиперболические функции выражаются через экспоненциальные, например,

$$\text{sh}(2y) = \frac{1}{2}[e^{2y} - e^{-2y}],$$

после чего проводится разложение по большому параметру $Y = e^y$, при том что величина $y \sim \ln \gamma$, вообще говоря, рассматривается как величина порядка единицы. В указанном приближении уравнение (47) приводится к виду

$$\gamma^2 = \frac{e^{2y}}{8y^2} [2y - 1 + (2y^2 - 2y + 1) (-1)^k \cos(2\mu)]. \quad (51)$$

Если функция $\cos(2\mu)$ не слишком мала (а именно, последнее слагаемое в квадратных скобках больше других слагаемых), вещественное решение уравнения (51) существует, если $(-1)^k \cos(2\mu) > 0$, т. е. k четно при $\cos(2\mu) > 0$ или нечетно при $\cos(2\mu) < 0$. Иными словами, правило отбора k совпадает с тем, которое было установлено в разд. 4.1. Этому случаю соответствует рис. 1в, где имеются только два корня.

В главном порядке по параметру $Y \sim \gamma$ результат вычислений можно представить в виде

$$f_0(k) = y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1 - (-1)^k \cos(2\mu)}{2y_1 - 1 + (2y_1^2 - 2y_1 + 1) (-1)^k \cos(2\mu)}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\frac{\exp(y_1)}{2y_1} \cos \mu \sin \frac{\pi k}{2}, \\ \alpha_y &= \frac{\exp(y_1)}{2y_1} \sin \mu \cos \frac{\pi k}{2}, \end{aligned} \quad (53)$$

где y_1 обозначает положительный корень уравнения (51). Поскольку при замене $k \rightarrow k+2$ компоненты α_x и α_y меняют знак на противоположный, тогда как y_1 и $f_0(k)$ не меняются, суммирование по k в (22) дает нуль, что означает отсутствие переходного фототока. В пределе линейной поляризации к тому же выводу можно подойти иным способом. Для волны, поляризованной вдоль оси x , следует взять $\mu = 0$ и четное значение k , тогда из формул (53) следует, что $\alpha_x = \alpha_y = 0$. Если же волна поляризована вдоль оси y , то $\mu = \pi/2$, k нечетно и вновь оказывается, что $\alpha_x = \alpha_y = 0$.

Если поляризация близка к линейной, а именно $|\cos(2\mu)| \gg 1/y_1$, то

$$y_1 \approx \ln \frac{2\gamma}{\sqrt{(-1)^k \cos(2\mu)}}, \quad (54)$$

причем индекс k нужно выбрать в соответствии с указанным выше правилом так, чтобы выполнялось условие $(-1)^k \cos(2\mu) > 0$.

Если же поляризация близка к круговой и $|\cos(2\mu)| \ll 1/y_1$, то положительные корни уравнения (51) имеются при всех значениях k . В этом случае в этом уравнении справа главным является первое слагаемое. Если оставить только это слагаемое, решение выражается через функцию Ламберта $W_k(z)$, которая удовлетворяет уравнению $W e^W = z$:

$$y_1 = -\frac{1}{2} W_{-1} \left(-\frac{1}{2\gamma^2} \right).$$

Функция Ламберта (рис. 2) определена в комплексной плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-1/e$, а $W_{-1}(z)$ обозначает ту ветвь многолистной функции $W(z)$, которая, во-первых, вещественна на интервале $-1/e < z < 0$, во-вторых, отрицательна на этом интервале, причем $W_{-1}(z) \leq -1$, и, в-третьих, $W_{-1}(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow 0-$. В указанном приближении вклад всех k в вероятность ионизации одинаков. Чтобы найти зависимость от k , нужно дополнительно удержать в качестве малой поправки последнее слагаемое в правой части уравнения (51). Включив эту поправку, получим уточненное выражение

$$y_1 = -\frac{1}{2} W_{-1} \left(-\frac{1}{2\gamma^2} \right) + \frac{(-1)^k}{4} \frac{W_{-1}^2(-1/2\gamma^2)}{W_{-1}(-1/2\gamma^2) + 1} \cos(2\mu), \quad (55)$$

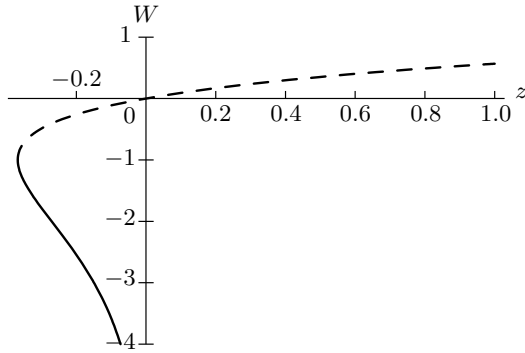


Рис. 2. Функция Ламберта $W_0(x)$ (штриховая линия) и $W_{-1}(x)$ (сплошная линия) в вещественной области определения; $W_0(x)$ и $W_{-1}(x)$ сшиваются в точке $x = -1/e$, где $W_0 = W_{-1} = -1$

где знак второго слагаемого в правой части противоположен знаку $(-1)^k \cos(2\mu)$, так как $W_{-1}(-1/2\gamma^2) + 1 < 0$. Поскольку согласно формуле (52) $f_0 = y - 1/2$, точно такая же поправка, зависящая от k , будет в выражении для $f_0(k)$. Она описывает влияние слабой эллиптичности круговой поляризации на вероятность многофотонной ионизации. Для грубых оценок при $\gamma \gg 1$ можно принять, что $W_{-1}(-1/2\gamma^2) \sim -\ln(2\gamma^2)$. Тогда эллиптическая поправка к $f_0(k)$ по порядку величины равна

$$-\frac{1}{4}(-1)^k \ln(2\gamma^2) \cos(2\mu).$$

Она уменьшает $f_0(k)$, если $(-1)^k \cos(2\mu) > 0$. Отсюда следует, что k вновь, как уже случалось ранее, нужно выбирать так, чтобы выполнялось условие $(-1)^k \cos(2\mu) > 0$. Такое правило отбора имеет смысл, если

$$\frac{1}{4} \ln(2\gamma^2) |\cos(2\mu)| > \hbar\omega/2I.$$

5. ДВЕ ГАРМОНИКИ С РАЗНЫМИ ПОЛЯРИЗАЦИЯМИ

Добавим теперь к эллиптически поляризованному полю на основной частоте линейно поляризованную волну на двойной частоте. Будем считать, что безразмерная сила имеет компоненты

$$\begin{aligned} F_x &= \cos \mu \cos \tau + \epsilon \cos \theta \cos(2\tau + \psi), \\ F_y &= \sin \mu \sin \tau + \epsilon \sin \theta \cos(2\tau + \psi). \end{aligned} \quad (56)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что компоненты вектора α представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\frac{\text{sh } y}{y} \sin x \cos \mu - \epsilon \frac{\text{sh}(2y)}{4y} \times \\ &\quad \times \cos \theta \sin(2x + \psi), \\ \alpha_y &= \frac{\text{sh } y}{y} \cos x \sin \mu - \epsilon \frac{\text{sh}(2y)}{4y} \times \\ &\quad \times \sin \theta \sin(2x + \psi). \end{aligned} \quad (57)$$

Уравнение $\dot{\xi}^2(\tau_0) = -\gamma^2$ теперь становится очень громоздким, поэтому здесь мы его не приводим и далее ограничимся случаем $\epsilon \ll 1$, когда примесь второй гармоники мала. Тогда можно выполнить разложение по малому параметру ϵ каждой (действительной и мнимой) части этого уравнения, удерживая члены до первого порядка включительно.

5.1. Туннельная ионизация

В пределе $\gamma \ll 1$ функция f_0 при помощи формулы (15) в первом приближении выражается через максимальное значение F_{max} , которое, как и в разд. 3.1.2, выбирается из четырех экстремумов амплитуды поля $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ как функции времени. Отыскивая эти экстремумы в линейном приближении по параметру ϵ , находим, что им соответствуют моменты времени

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{\pi k}{2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\cos(2\mu)} \times \\ &\quad \times \left[(3 - (-1)^k) \sin \theta \sin \mu \cos \left(\frac{\pi k}{2} + \psi \right) - \right. \\ &\quad \left. - (3 + (-1)^k) \cos \theta \cos \mu \sin \left(\frac{\pi k}{2} + \psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Вычисляя F в эти моменты времени и подставляя в (15) полученные значения вместо F_{max} , имеем

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\sqrt{1 + (-1)^k \cos(2\mu)}} - \\ &\quad - \frac{4\sqrt{2}(-1)^k \gamma \epsilon}{3[1 + (-1)^k \cos(2\mu)]^{3/2}} \times \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\pi k}{2} \sin \theta \sin \mu + \cos \frac{\pi k}{2} \cos \theta \cos \mu \right) \cos \psi. \end{aligned} \quad (59)$$

В отличие от случая $\epsilon = 0$ теперь все четыре значения $f_0(k)$ различны. Тот же результат можно получить регулярным способом, раскладывая первое начальное условие (8) по малому параметру y . При этом оказывается, что вещественная часть x корней уравнения (9) совпадает с моментами времени (58), а

$$y = \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1+(-1)^n \cos(2\mu)}} - \frac{2\sqrt{2}\gamma(-1)^n \epsilon \cos \psi}{(1+(-1)^n \cos(2\mu))^{3/2}} \times \\ \times \left(\sin \theta \sin \mu \sin \frac{\pi n}{2} + \cos \theta \cos \mu \cos \frac{\pi n}{2} \right). \quad (60)$$

Дополнительно этот метод позволяет вычислить вектор α :

$$\alpha_x = -\cos \mu \sin \frac{\pi k}{2} - \frac{\epsilon}{2}(-1)^k \cos \theta \sin \psi + \\ + \frac{\epsilon}{2 \cos(2\mu)} \cos \mu \cos^2 \left(\frac{\pi k}{2} \right) \times \\ \times [(3 + (-1)^k) \cos \theta \cos \mu \sin \psi - \\ - (3 - (-1)^k) \sin \theta \sin \mu \cos \psi], \quad (61)$$

$$\alpha_y = \sin \mu \cos \frac{\pi k}{2} - \frac{\epsilon}{2}(-1)^k \sin \theta \sin \psi + \\ + \frac{\epsilon}{2 \cos(2\mu)} \sin \mu \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2} \right) \times \\ \times [(3 + (-1)^k) \cos \theta \cos \mu \cos \psi + \\ + (3 - (-1)^k) \sin \theta \sin \mu \sin \psi]. \quad (62)$$

Отсюда видно, что при замене $k \rightarrow k + 2$ поправки в α , пропорциональные ϵ , переходят сами в себя, тогда как первые слагаемые, не зависящие от ϵ , меняют знак и при суммировании (22) сокращаются. Напротив, слагаемые, пропорциональные ϵ , не сокращаются. Это означает, что в бихроматическом поле возникает переходный фототок. К такому же выводу мы пришли в случае линейной поляризации основной гармоники. Однако в этом случае фототок не обращается в нуль ни при каком значении сдвига фаз ψ .

5.2. Многофотонная ионизация

Как показано в разд. 3.2, при $\gamma \gg 1$ следует различать два случая. Если $1 \ll \gamma \ll 1/\epsilon$, доминирующий вклад в ионизацию вносит первая гармоника. Если же $\gamma \epsilon \gg 1$, доминирует ионизация второй гармоникой.

5.2.1. Доминантная первая гармоника

В случае $1 \ll \gamma \ll 1/\epsilon$ результаты вычислений оказываются столь громоздкими, что их практическая ценность становится сомнительной. По этой причине мы ограничимся рассмотрением предела $y \sim \ln \gamma \gg 1$, который совместим с условием $\gamma \ll 1/\epsilon$ только для очень малых величин ϵ . В указанном пределе

$$x = \frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^k \gamma \epsilon}{[(-1)^k \cos(2\mu)]^{3/2}} \times \\ \times \left[\sin \theta \sin \mu \cos \left(\frac{\pi k}{2} + \psi \right) - \cos \theta \cos \mu \sin \left(\frac{\pi k}{2} + \psi \right) \right],$$

$$y = y_1 - \frac{(-1)^k \gamma \epsilon}{[(-1)^k \cos(2\mu)]^{3/2}} \times \\ \times \left[\sin \frac{\pi k}{2} (\sin \theta \sin \mu \cos \psi - \cos \theta \cos \mu \sin \psi) + \right. \\ \left. + \cos \frac{\pi k}{2} (\sin \theta \sin \mu \sin \psi + \cos \theta \cos \mu \cos \psi) \right],$$

причем

$$y_1 = \ln \left[\frac{2\gamma}{\sqrt{(-1)^k \cos(2\mu)}} \right],$$

и нужно взять четный индекс k , если $\cos(2\mu) > 0$, и нечетный, если $\cos(2\mu) < 0$. Подставляя эти значения x и y в уравнения (57), находим вектор α :

$$\alpha_x = -\frac{\gamma \cos \mu}{y_1 \sqrt{(-1)^k \cos(2\mu)}} \sin \frac{\pi k}{2} - \\ - \epsilon \gamma^2 \frac{\sin \theta \sin(2\mu) \cos \psi - \cos \theta \sin \psi}{2y_1 \cos^2(2\mu)}, \quad (63) \\ \alpha_y = \frac{\gamma \sin \mu}{y_1 \sqrt{(-1)^k \cos(2\mu)}} \cos \frac{\pi k}{2} - \\ - \epsilon \gamma^2 \frac{\cos \theta \sin(2\mu) \cos \psi + \sin \theta \sin \psi}{2y_1 \cos^2(2\mu)}.$$

Наконец,

$$f_0 = y_1 - \frac{1}{2} - \frac{2\gamma \epsilon}{3} \frac{1}{[(-1)^k \cos(2\mu)]^{3/2}} \times \\ \times \left[\sin \theta \sin \mu \sin \left(\psi - \frac{\pi k}{2} \right) + \right. \\ \left. + \cos \theta \cos \mu \cos \left(\psi - \frac{\pi k}{2} \right) \right]. \quad (64)$$

Полученные формулы применимы, пока $|\cos(2\mu)| > 1/y_1$; ими не следует пользоваться в пределе $\cos(2\mu) \rightarrow 0$, когда поляризация основной гармоники приближается к круговой. В пределах области применимости обращает на себя внимание сильная зависимость от $\cos(2\mu)$, который в разной степени входит в знаменатель поправок, пропорциональных ϵ , усиливая интерференционный эффект от второй гармоники по мере приближения ее поляризации к круговой.

Чтобы сравнить формулы (63) и (64) с результатами расчетов, приведенными в разд. 3.2.1 для случая линейной поляризации, нужно взять, например, $\mu = 0$. Тогда, в соответствии с указанным выше правилом отбора корней, в формулах (63) и (64) нужно выбрать четные значения $k = 2n$; при этом индекс n в этих формулах будет соответствовать индексу k в формулах (36) и (37).

Формулы (63) подтверждают вывод, сделанный в разд. 5.1 о том, что в случае эллиптической поляризации одной из гармоник переходный фототок возникает даже при значениях ψ , кратных π .

5.2.2. Доминантная вторая гармоника

В случае $\gamma\epsilon \gg 1$ доминирует ионизация второй гармоникой, которая по нашему предположению имеет линейную поляризацию. Приведем результаты расчетов без дополнительных пояснений. Параметр $\tau_0 = x + iy$ теперь имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi k - \psi}{2} - \frac{1 - y_1}{\sqrt{\gamma\epsilon}(2y_1 - 1)} \times \\ &\times \left(\sin \theta \sin \mu \cos \frac{\pi k + \psi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \cos \mu \sin \frac{\pi k + \psi}{2} \right), \quad (65) \\ y &= y_1 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma\epsilon}} \left(\sin \theta \sin \mu \sin \frac{\pi k + \psi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta \cos \mu \cos \frac{\pi k + \psi}{2} \right), \end{aligned}$$

где

$$y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{4\gamma}{\epsilon}.$$

Начальный импульс фотоэлектронов определяется вектором α с компонентами

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\frac{\sqrt{\gamma/\epsilon}}{y_1} \cos \mu \sin \frac{\pi k - \psi}{2} - \frac{(y_1 - 1)\sqrt{\gamma/\epsilon}}{y_1(2y_1 - 1)} \times \\ &\times \cos \theta \left(\sin \theta \sin \mu \cos \frac{\pi k - \psi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta \cos \mu \sin \frac{\pi k - \psi}{2} \right), \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \frac{\sqrt{\gamma/\epsilon}}{y_1} \sin \mu \cos \frac{\pi k - \psi}{2} + \frac{(y_1 - 1)\sqrt{\gamma/\epsilon}}{y_1(2y_1 - 1)} \times \\ &\times \sin \theta \left(\cos \theta \cos \mu \sin \frac{\pi k - \psi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta \sin \mu \cos \frac{\pi k - \psi}{2} \right). \quad (67) \end{aligned}$$

Наконец, вероятность ионизации выражается через функцию

$$\begin{aligned} f_0(k) &= y_1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3\sqrt{\gamma\epsilon}} \left(\cos \theta \cos \mu \cos \frac{\pi k + \psi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta \sin \mu \sin \frac{\pi k + \psi}{2} \right). \quad (68) \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ эти формулы совпадают с результатами, полученными в разд. 3.2.2. В отличие от случая многофотонной ионизации с доминированием первой гармоники, который был рассмотрен в разд. 5.2.1, теперь отсутствует сильная зависимость от параметра μ , определяющего поляризацию первой гармоники.

6. ВЫВОДЫ

Завершая статью, повторим, что добавление второй гармоники отвечает за экспериментально наблюдаемое усиление терагерцевого излучения из оптического пробоя в фокусе фемтосекундного лазерного импульса.

К настоящему времени предложены два механизма усиления терагерцевого излучения из фокального пятна. Первый механизм основан на том наблюдении, что для многофотонной ионизации на двойной частоте требуется одновременное поглощение вдвое меньшего числа фотонов, а поэтому ионизация от второй гармоники может превысить ионизацию от первой гармоники, даже если амплитуда последней существенно больше. Другой механизм усиления терагерцевого излучения связан с генерацией в бихроматическом поле переходного фототока, который возникает, если фотоэлектроны рождаются с ненулевым средним импульсом.

Наши расчеты, начатые в работе [5], позволяют проанализировать оба механизма. В настоящей работе мы рассмотрели случай, когда первая гармоника имеет произвольную эллиптическую поляризацию, а вторая поляризована линейно, что в точности соответствует реальной экспериментальной ситуации, тогда как в работе [5] предполагалось, что линейно поляризованы обе гармоники. Кроме того, мы рассмотрели не только предел многофотонной ионизации ($\gamma \gg 1$), как в работе [5], но и противоположный предел туннельной ионизации ($\gamma \ll 1$).

Анализ полученных формул показывает, что оба механизма усиления терагерцевого излучения в бихроматическом поле присутствуют в режиме многофотонной ионизации, характеризуемой большими

значениями параметра Келдыша ($\gamma \gg 1$). Однако в режиме туннельной ионизации ($\gamma \ll 1$) эффект усиления ионизации от конвертации лазерного импульса во вторую гармонику ослабевает.

Наши расчеты подтверждают вывод о том, что в строго монохроматическом поле переходный фототок не генерируется. Мы также показали, что при фиксированной мощности лазерного излучения скорость фотоионизации больше для линейной поляризации, чем для круговой.

Существенной особенностью случая, когда обе гармоники поляризованы линейно, является исчезновение переходного фототока при значениях сдвига фаз ψ , кратных π . Наши расчеты показали, что такая особенность фототока исчезает, если первая гармоника имеет эллиптическую поляризацию.

При произвольной эллиптической поляризации первой гармоники и произвольной ориентации вектора поляризации второй гармоники относительно осей эллипса затруднительно выделить условия, при которых один механизм усиления доминировал бы над другим. Если же обе гармоники поляризованы линейно, причем векторы поляризации параллельны либо перпендикулярны друг другу, такие условия можно указать и, как показано в работе [5], они определяются величиной сдвига фаз ψ гармоник. В реальных экспериментах сдвиг фаз зависит от давления газа из-за дисперсии фазовой скорости гармоник, в результате чего наблюдается гармоническая зависимость мощности терагерцевого излучения от давления газа [14].

Авторы благодарны рецензенту статьи за ценные замечания относительно суммирования корней перекрестного уравнения и М. Н. Есаулкову за разъяснение поляризующих свойств ВВО-кристалла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (грант № 11.G34.31.0033), РФФИ (гранты № 11-02-12252-офи-м, 11-02-12171-офи-м) и

Министерства образования и науки России (гранты №№ 14.B37.21.0732, 14.B37.21.0784, 14.B37.21.0750, 14.B37.21.0765, 14.B37.21.0469).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Cook and R. M. Hochstrasser, *Opt. Lett.* **25**, 1210 (2000); <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=ol-25-16-1210>.
2. M. Kieß, T. Löffler, M. D. Thomson et al., *Nature Phys.* **2**, 327 (2006); www.nature.com/naturephysics.
3. K. Y. Kim, J. H. Glowina, A. J. Taylor, and G. Rodriguez, *Opt. Express* **15**, 4577 (2007).
4. A. V. Balakin, A. V. Borodin, I. A. Kotelnikov, and A. P. Shkurinov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **27**, 16 (2010).
5. И. А. Котельников, А. В. Бородин, А. П. Шкуринов, *ЖЭТФ* **139**, 1081 (2011).
6. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393 (1966).
7. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **51**, 309 (1966).
8. В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 3 (2001).
9. В. С. Попов, *ЖЭТФ* **120**, 315 (2001).
10. С. В. Попруженко, В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Байэр, *ЖЭТФ* **135**, 1092 (2009).
11. В. С. Попов, *УФН* **174**, 921 (2004); <http://ufn.ru/ru/articles/2004/9/a/>.
12. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской и квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
13. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
14. A. V. Borodin, M. N. Esaulkov, I. I. Kuritsyn et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **29**, 1911 (2012).