

К ВОПРОСУ О РАДИУСЕ НЕЙТРОНИЗАЦИИ МАГНИТНЫХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД: ПОЛЕВАЯ И ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТИ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА И МИНИМАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЫРОЖДЕННОГО ЗАМАГНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

*В. В. Скобелев**

*Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 сентября 2011 г.

Численными и аналитическими методами проанализирована температурная и полевая зависимости химического потенциала и полевая зависимость энергии Ферми вырожденного релятивистского электронного газа в магнитном поле. Найдено аналитическое выражение для зависимости от величины магнитного поля минимального значения электронной концентрации и соответствующего радиуса начала процесса нейтронизации в коллапсирующей звезде при ее последующем превращении в нейтронную. Как мы полагаем, аналогичное соотношение имеет место и для равновесного радиуса нейтронной звезды. Результаты работы уточняют выводы предыдущей [1] в случае ненулевой температуры и влияния протонной компоненты звезды на процесс нейтронизации, а также подтверждают и обобщают их в плане значительного (на порядок или в несколько раз) уменьшения равновесного радиуса нейтронной звезды в сверхсильном (10^{14-17} Гс) магнитном поле по сравнению со случаем отсутствия такого поля. Указано на возможность существования отдельного класса звездных объектов — сверхмалых нейтронных звезд-магнитаров, которым мы предлагаем дать название «миниманитаров». Выдвинуто предположение, что они могут быть последней стадией эволюции звезд перед их коллапсом в черную дыру.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей работе [1] (разд. 3.2) было показано, что при наличии сверхсильного [2, 3] ($B \sim 10^{17}$ Гс) магнитного поля процесс нейтронизации звезды из-за паулиевского запрета (по электронной компоненте звезды) β -распада нейтрона $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, относящегося к классу прямых URCA-процессов, начинается, при прочих равных условиях, при значении радиуса, примерно на порядок меньшем, чем при отсутствии поля (список литературы, имеющей отношение к данному вопросу, приведен в этой же работе). Это, в свою очередь, может привести к значительному (в несколько раз) уменьшению равновесного размера нейтронной звезды. «Конкурирующий» процесс «исчезновения» нейтрона вследствие модифицированного URCA-процесса [4] $N + n \rightarrow N + p + e + \bar{\nu}_e$ ($N = n, p$) происходит

при участии дополнительного нуклона N в качестве «активного наблюдателя», снимающего кинематический запрет на осуществление процесса по причине близости импульсов нуклонов и электрона к поверхности Ферми вследствие сильного их вырождения, а сам этот процесс может доминировать над прямым URCA-процессом β -распада при достаточно малой концентрации протонов и электронов [5]. В центральной же области звезды, где, вероятно, и существует сверхсильное магнитное поле [3], модифицированный URCA-процесс гораздо слабее прямого [6], который принимался во внимание в работе [1]. Конкретный расчет был проведен при весьма вероятном в данном случае допущении, что большинство электронов находятся на основном уровне Ландау и полностью вырожденный электронный газ является эффективно «одномерным». Однако при меньших значениях поля и концентрации электронного газа, а также при учете конечной температуры электроны могут находиться и на возбужденных уровнях [6].

*E-mail: v.skobelev@inbox.ru

В данной работе мы учитываем влияние этих факторов на минимальную концентрацию электронного газа, «запрещающую» распад нейтрона, а также обсуждаем влияние протонного газа на процесс нейтронизации. Следует также рассмотреть их роль в изменении релятивистской энергии Ферми E_F электронов (зависящей от поля B и концентрации n), так как именно ее значением определяется минимальная концентрация электронного газа n_{min} при выполнении условия

$$E_F = \Delta, \quad (1)$$

где $\Delta = m_n - m_p = 1.3$ МэВ — энергосвободное при распаде нейтрона.

Исходным основным тезисом работы [1] послужили соображения, которые мы вкратце приведем здесь в несколько иной формулировке.

Известно, что уравнение Шредингера в постоянном и однородном магнитном поле [7], а также уравнение Дирака [8] в декартовых координатах с несимметричной калибровкой потенциала $A_x = A_z = 0$, $A_y = Bx$ совпадают с уравнением для гармонического осциллятора, если перейти к безразмерной переменной $\xi = x\sqrt{\gamma} - p_2/\sqrt{\gamma}$, а волновая функция содержит экспоненциальный множитель $\exp[i(p_3z - p_2y) - \xi^2/2]$, из которого следует выражение x -координаты центра ($\xi \sim 0$) волнового пакета:

$$X = p_2/\gamma, \quad (2)$$

где $\gamma = eB$, e — элементарный заряд, p_3 — импульс вдоль третьей оси, p_2 — квазиимпульс, через который выражается координата центра пакета (2). При этом релятивистская энергия электрона равна

$$E = \sqrt{\tilde{m}^2 + p_3^2}, \quad \tilde{m} = \sqrt{m^2 + 2\gamma n'}, \quad (3)$$

где $n' = 0, 1, 2, \dots$ — номера уровней Ландау. Далее, общее число электронов выражается через статистическую сумму:

$$N = \sum_{states} f_e \rightarrow \sum_{n'=0}^{\infty} \Gamma_{n'} \frac{L_2}{2\pi} \frac{L_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 f_e. \quad (4)$$

Учитывая также вытекающее из формулы (2) формальное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \rightarrow \int_{-L_1/2}^{L_1/2} \gamma dX = \gamma L_1,$$

получаем для концентрации выражение (разъяснение о вычислении суммы по состояниям в магнитном поле дано также в книге [7])

$$n \equiv \frac{N}{L_1 L_2 L_3} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_{n'=0}^{\infty} \Gamma_{n'} \int_0^{\infty} dp_3 f_e. \quad (4a)$$

Здесь $\Gamma_{n'}$ — спиновый статистический вес, равный 2 при $n' = 1, 2, \dots$ и 1 при $n' = 0$ (на основном уровне Ландау ориентация спина фиксирована — против поля), L_i ($i=1,2,3$) — нормировочные длины по осям, а функция распределения Ферми–Дирака равна (μ — обычное обозначение химического потенциала)

$$f_e = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) + 1}. \quad (5)$$

В случае полностью вырожденного электронного газа ($T \rightarrow 0$; $f_e = 1$, $E \leq E_F$; $f_e = 0$, $E > E_F \equiv \mu|_{T=0}$) приходим к соотношению вида (11) работы [1], которое для целей данной работы перепишем в виде¹⁾

$$x = \theta(y - 1) \sum_{n'=1}^{E(y)} \sqrt{y - n'} + \frac{1}{2} \sqrt{y}, \quad (6)$$

где θ — известная ступенчатая функция, $E(y)$ — наибольшая целая часть y и введены обозначения

$$x = \frac{\tilde{n}}{\varepsilon^{3/2}}, \quad (7a)$$

$$y = \frac{E_F^2 - m^2}{2\gamma}, \quad (7b)$$

$$\tilde{n} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} (n\lambda_C^3), \quad \lambda_C = \frac{1}{m} = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ см},$$

$$\varepsilon = \frac{B}{B_0}, \quad B_0 = \frac{m^2}{e} = 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}.$$

2. ВЛИЯНИЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОМПОНЕНТЫ НА ПРОЦЕСС НЕЙТРОНИЗАЦИИ

В формуле (6) первое слагаемое учитывает вклад возбужденных уровней Ландау, а второе — основного уровня, коэффициент же $1/2$ означает, что на

¹⁾ Формулу (6) можно записать через дзета-функцию Римана $\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + a)^{-s}$, $s > 1$, если использовать соотношение (4.1.3.1) книги [9, с. 490]: $\sum_{k=0}^{\infty} (k + a)^{-s} = \zeta(s, a) - \zeta(s, a + n + 1)$, представив предварительно подкоренное выражение (6) в виде $y - E(y) + E(y) - n'$. Переход к новому индексу суммирования $k = E(y) - n'$ приводит сумму в (6) к стандартному виду $\sum_{n'=1}^{E(y)} \rightarrow \sum_{k=0}^{E(y)-1}$, так что $x = \theta(y - 1) [\zeta(-1/2, y - E(y)) - \zeta(-1/2, y)] + \sqrt{y}/2$ с аналитическим продолжением в область $s < 1$. Однако это преобразование мало что дает для практических вычислений, являясь чисто формальным приемом.

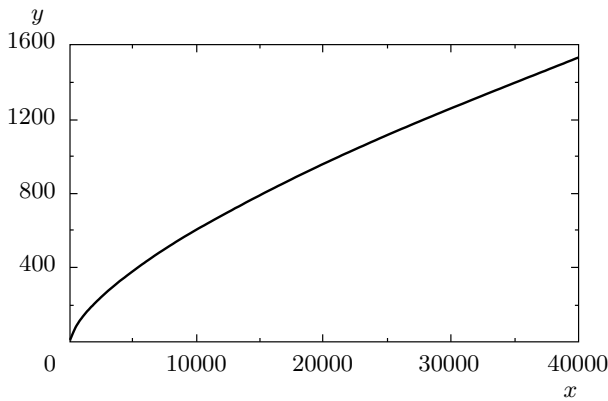


Рис. 1. Зависимость безразмерного энергетического параметра y (7b) от безразмерного параметра «концентрация/поле» x (7a) в предполагаемом диапазоне его изменения в магнитных нейтронных звездах

этом уровне ориентация спина фиксирована (против поля). Отметим, что в соответствующей формуле (11) работы [1] этот коэффициент из соображений удобства вычислений отсутствовал, однако это никак не влияло на результат работы, поскольку в белых карликах $x \gg y \gg 1$ [1] и вклад последнего слагаемого в (6) пренебрежимо мал, независимо от численного коэффициента. В физике же нейтронных звезд это, вообще говоря, не так, и в соответствующем разд. 3.2 работы [1], как и в данной работе, учитывается фиксированная ориентация спина на основном уровне. График функции $y(x)$ в диапазоне возможных значений величины поля $B_0 \lesssim B \lesssim 10^{17}$ Гс и концентрации $10^{30} \text{ см}^{-3} \lesssim n \lesssim 10^{35} \text{ см}^{-3}$ в магнитных нейтронных звездах представлен на рис. 1. Чрезвычайно важным для дальнейшего рассмотрения является положительный наклон кривой на графике. Именно, как видно из формул (7a), (7b) и из графика, энергия Ферми растет с увеличением концентрации при фиксированном значении поля, что совсем не очевидно при наличии последнего ввиду сложной структуры выражения (6). При этом в «свободном» случае упомянутый рост следует просто из соображений размерности — выражение для импульса Ферми фиксировано, $p_F \sim (n\lambda_C^3)^{1/3}m$. В магнитном же поле аналогичная простая зависимость $p_F \sim (n\lambda_C^3)m/\varepsilon$ имеет место только для вклада основного уровня Ландау — формула (22) работы [1] или см. ниже (14) (аналогичный график был приведен и в работе [1], но в диапазоне изменения параметров, характерном для белых карликов). Только в случае положитель-

ного наклона имеет смысл ключевое для данной работы понятие минимальной концентрации, определяемое условием (1) с явным представлением формулой (9) (см. ниже). При большей концентрации распад нейтрона запрещен ввиду того, что энергия «распадного» электрона меньше энергии Ферми; именно этим и обусловлено сжатие звезды, ведущее к началу процесса нейтронизации. Аналитическое выражение положительности наклона заключается в неравенстве $(dy/dx) > 0$ во всем интервале значений x в нейтронных звездах, что и будет использовано нами при анализе температурных поправок к химическому потенциалу, см. ниже (19) в разд. 3. Исследование зависимости энергии Ферми от поля при фиксированной концентрации на основании графика на рис. 1 является затруднительным. Нам понадобятся для этого более точные значения y (чем могут быть оценены из графика) при значениях параметра x в табл. 1 ($n \approx 10^{35} \text{ см}^{-3}$).

Анализ приведенных численных данных с учетом вытекающего из формулы (7b) выражения для энергии Ферми

$$E_F = m\sqrt{1 + 2\varepsilon y}, \quad (8)$$

показывает (ε находим по значению B в круглых скобках в верхнем ряду табл. 1, а соответствующая величина y приведена в нижнем ряду), что в указанном диапазоне значений поля и при $y > 1$, когда «включены» и возбужденные уровни, энергия Ферми почти не зависит от поля при фиксированной концентрации, аналогично ситуации с белыми карликами, когда она незначительно убывает [1]. Этому соответствует более «пологий» участок графика при больших x на рис. 1. При меньшей концентрации даже при $y < 1$ она несущественно уменьшается с ростом поля (более «крутой» участок графика при меньших значениях x). В этом можно убедиться, проанализировав значения x и y при $n \approx 10^{33} \text{ см}^{-3}$ и тех же значениях поля, что и в предыдущем случае (табл. 2).

Видно, что эффект уменьшения произведения εy с ростом поля (при фиксированной концентрации), т. е. и энергии Ферми (8) является наибольшим в области $y < 1$, когда вклад в (6) дает лишь основной уровень Ландау. Можно ожидать в соответствии с выражениями (1), (7a), (8) и видом зависимости $y(x)$ на рис. 1, что минимальное значение концентрации, «запрещающей» распад нейтрона и «компенсирующее» уменьшение энергии Ферми с ростом поля, в среднем увеличивается с рос-

Таблица 1

$\approx x$ (В, Гс)	$4 \cdot 10^4$ (B_0)	$1.17 \cdot 10^4$ (10^{14})	370 (10^{15})	11.7 (10^{16})	0.037 (10^{17})
$\approx y$	1532	675	67.5	6.77	0.0055

Таблица 2

$\approx x$ (В, Гс)	400 (B_0)	117 (10^{14})	3.7 (10^{15})	0.117 (10^{16})	0.0037 (10^{17})
y	71.14	31.33	3.103	0.055	0.000055

том поля²⁾, причем это увеличение является наиболее кардинальным, когда полностью вырожденный электронный газ находится на основном уровне Ландау («одномерный» электронный газ). На это и было указано в работе [1] для оптимального в смысле увеличения концентрации варианта, соответствующего предельно допустимому в нейтронных звездах магнитному полю $\sim 10^{17}$ Гс. Для обобщения этого результата на случай меньших значений поля, когда в том числе «задействованы» и возбужденные уровни Ландау, запишем вытекающее из формул (1), (6), (7а), (7б) выражение для безразмерной минимальной концентрации (при этом в (7б) следует положить $E_F = \Delta = 1.3$ МэВ, т. е. $y = 2.75/\varepsilon$):

$$\tilde{n}_{min} = \varepsilon \left\{ \theta(2.75 - \varepsilon) \sum_{n'=1}^N \sqrt{2.75 - \varepsilon n' + 0.83} \right\}, \quad (9)$$

$$N = E \left(\frac{2.75}{\varepsilon} \right),$$

$$\tilde{n}_{min} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} (n_{min} \lambda_C^3). \quad (9a)$$

График функции $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ в диапазоне значений поля, когда «задействованы» и возбужденные уровни Ландау, представлен на рис. 2, причем при значениях безразмерного полевого параметра ε , равного ε_i ($i = 1, 2, 3$), возбуждаются следующие уровни Ландау (в скобках):

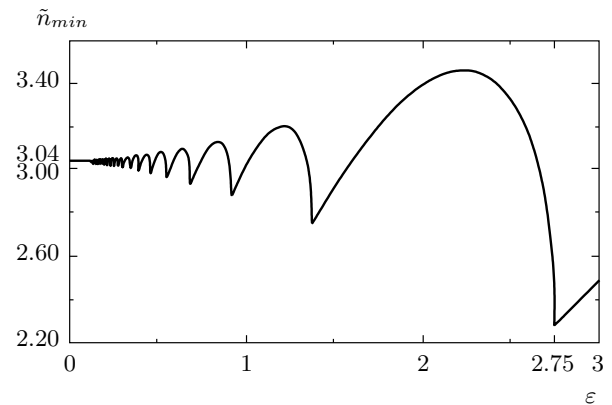


Рис. 2. Зависимость безразмерной минимальной концентрации электронного газа \tilde{n}_{min} (9) в начале процесса нейтронизации от безразмерного полевого параметра $\varepsilon = B/B_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_1 &= 2.75/2 \quad (n' = 0.1), \\ \varepsilon = \varepsilon_2 &= 2.75/3 \quad (n' = 0, 1, 2), \\ \varepsilon = \varepsilon_3 &= 0 \quad (n' = 0, 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (9b)$$

Соответствующие этим возбужденным состояниям значения «безразмерной» минимальной концентрации равны

$$\tilde{n}_{min}^{(1)} \approx 2.75; \quad \tilde{n}_{min}^{(2)} \approx 2.88; \quad \tilde{n}_{min}^{(3)} \approx 3.04 \quad (10a)$$

(смысл верхнего индекса в (10а), (10б) тот же, что и нижнего в выражении (9б), т. е. он относится к конкретному значению безразмерного полевого параметра $\varepsilon = \varepsilon_i$).

Согласно формуле (10а), «обычная» минимальная концентрация имеет следующие значения:

$$n_{min}^{(1,2,3)} \approx [6.9; 7.2; 7.6] 10^{30} \text{ см}^{-3}. \quad (10b)$$

Графическую зависимость $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ можно прокомментировать следующим образом. В интервале

²⁾ Это качественно можно пояснить так: функциональная зависимость $y(x)$, как видно на рис. 1, грубо аппроксимируется как линейная $y \approx \alpha x$, $\alpha < 1$; тогда из (8) следует, что $E_F \approx m\sqrt{1 + 2\alpha\varepsilon x}$, а с учетом (7а) $E_F \approx m\sqrt{1 + \beta\tilde{n}/\sqrt{\varepsilon}}$, $\beta > 1$, т. е. для компенсации уменьшения E_F с ростом поля и «восстановления» равенства (1) величина \tilde{n} (т. е. и \tilde{n}_{min} (9а)) в среднем должна расти приблизительно как $\sqrt{\varepsilon}$. Это не относится к значению $y < 1$, т. е. вкладу основного уровня, когда линейная аппроксимация $y(x)$ некорректна, а доказываемое утверждение и так очевидно, см. (12) ниже.

значений ε от $2.75/(N+1)$ до $2.75/N$ с ростом ε в указанном диапазоне каждое слагаемое суммы в фигурных скобках (9) уменьшается по закону $\sqrt{2.75 - \varepsilon n'}$, а при достижении значения $2.75/N$ число слагаемых в сумме уменьшается на 1, так как уровень $n' = N$ вклада уже не дает. Таким образом, с ростом ε от $2.75/(N+1)$ до некоторого значения $\varepsilon_m^{(N)}$, соответствующего максимуму функции $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ в указанном интервале, в формуле (9) рост первого множителя (ε) доминирует над уменьшением второго (в фигурных скобках) за счет убывания каждого слагаемого под знаком суммы, и $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ в целом растет. Этому соответствует положительный наклон кривой на рис. 2 в каждом «цикле» (при каждом N). При $\varepsilon > \varepsilon_m^{(N)}$ доминирует второй множитель и его уменьшение компенсирует рост первого. Этому соответствуют участки «циклов» на рис. 2 с отрицательным наклоном. Минимум в каждом «цикле» достигается при $\varepsilon = 2.75/N$, а значения $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ в этих минимумах приведены в формуле (10а) в частных случаях $N = 2, 3, \infty$. Значения $\varepsilon_m^{(N)}$, соответствующие максимумам функции в «циклах», в принципе могут быть определены из уравнения

$$\frac{d\tilde{n}_{min}}{d\varepsilon} = 0, \quad (11)$$

или оценены из графика. Для целей данной работы это не имеет принципиального значения. Заметим также, что очевидное из графика увеличение диапазона изменения $\tilde{n}_{min}(\varepsilon)$ в циклах с ростом ε (т. е. с уменьшением N) объясняется уменьшением числа слагаемых в сумме по n' . При этом значение $\tilde{n}_{min}(\varepsilon_m^{(N)})$ увеличивается с уменьшением N , т. е. с ростом поля, что в среднем ведет к увеличению минимальной концентрации с ростом поля и ожидалось на основе анализа графика на рис. 1 (см. сноску 2).

В области $\varepsilon \geq 2.75$, как следует из общей формулы (9), вклад дает лишь основной уровень Ландау, а соответствующая зависимость является линейной:

$$\tilde{n}_{min} \approx 0.83\varepsilon, \quad \varepsilon \geq 2.75, \quad (12)$$

или в более удобной для оценок записи, с учетом формулы (9а):

$$n_{min} \approx 0.47 \cdot 10^{30} B_{13} \text{ см}^{-3}, \quad B_{13} \equiv B/10^{13} \text{ Гс}. \quad (12а)$$

Линейный участок графика, соответствующий вкладу основного уровня Ландау, частично изображен на рис. 2 и начинается при значении $\varepsilon_{min} \approx 2.75$, что отвечает минимальному значению поля $B_{min} \approx 1.2 \cdot 10^{14}$ Гс. При $\varepsilon < 2.75$ дискретный

характер зависимости $n_{min}(\varepsilon)$ наиболее заметен, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ зависимость становится более гладкой, как и следует при переходе к случаю отсутствия поля. При $B \approx 10^{17}$ Гс, как видно из формулы (12а), $n_{min}^{(17)} \approx 4.7 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$ [1]. В отсутствие поля ($\varepsilon = 0$) $\tilde{n}_{min} \approx 3.04$ (10а), или $n_{min}^{(3)} \equiv n_{min}^{(0)} \approx 7.6 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ (10b), что и было получено в работе [1] аналитически. Как видно из формулы (10b), даже при значении поля $B_{ex} \approx 6 \cdot 10^{13}$ Гс (эта величина следует из первой формулы (9b), $B_{ex} = \varepsilon_1 B_0$), когда начинают возбуждаться при β -распаде нейтрона «верхние» уровни Ландау, значение $n_{min}^{(1)}$ мало отличается от $n_{min}^{(0)}$, так что их вкладом можно в этом смысле пренебречь, и главный эффект, как уже отмечалось, дает основной уровень при $B \geq B_{min}$.

3. УЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ ЭЛЕКТРОННОЙ КОМПОНЕНТЫ

Приведенные выше оценки, строго говоря, справедливы в случае, когда можно пренебречь температурными эффектами. Именно, должны выполняться неравенства

$$T \ll K_F, \quad (13а)$$

$$|\mu_2| \ll \mu_0, \quad (13б)$$

где $K_F = E_F - m$ — «кинетическая» энергия на уровне Ферми, $\mu = \mu_0 + \mu_2 + \dots$, $\mu_0 \equiv E_F$, $\mu_2 \sim T^2$ — температурная поправка к химическому потенциалу. Как отмечено в работе [1], имеется еще одно «температурное» ограничение: невозбуждение уровней $n' = 1, 2, \dots$ (формула (24) в [1]) в старых нейтронных звездах, по-видимому, выполняется в сверхсильном поле $B \geq B_{min}$.

Анализируя условие выполнения неравенства (13а), учитываем, что главный вклад в эффект увеличения n_{min} дает основной уровень Ландау, вследствие чего при вычислении $K_F = \sqrt{m^2 + p_F^2} - m$ следует воспользоваться аналитическим выражением для p_F для «одномерного» случая (формула (22) работы [1]), которое перепишем в виде

$$p_F = \frac{2\sqrt{2}\tilde{n}}{\varepsilon} m. \quad (14)$$

Минимальному значению K_F отвечает минимальное значение p_F , т. е. \tilde{n} , определяемое формулой (12), что дает

$$K_F^{(min)} \approx 1.55m \approx 0.8 \text{ МэВ}. \quad (15)$$

В отсутствие магнитного поля, когда $p_F = (3\sqrt{2}\tilde{n})^{1/3} m$, $\tilde{n}_{min}^{(0)} \approx 3.04$ результат такой же,

поскольку, разумеется, в обоих случаях $K_F^{(min)} = \Delta - m$. В «старых» нейтронных звездах $T \sim 1$ МэВ [10] и уровень Ферми достаточно сильно «размыт», так что в начале процесса «нейтронизации» условие (13а) может не выполняться, и наши расчеты в этом случае носят оценочный характер. Однако в процессе гравитационного сжатия, вплоть до достижения равновесного радиуса, концентрация, а также p_F , K_F возрастают и неравенство (13а) должно выполняться, что позволяет надеяться на адекватность расчетов даже применительно к нейтронным звездам с температурой порядка 1 МэВ.

Для нахождения квадратичной по температуре поправки к химическому потенциалу следует использовать адиабатическое разложение [11] в безразмерных переменных:

$$\int_0^\infty \frac{f(u) du}{\exp(u - u_0) + 1} = \int_0^{u_0} f(u) du + \frac{\pi^2}{6} f'(u_0) + \dots \quad (16)$$

Применив его к формуле (4а) и переходя в ней к новым переменным [12]

$$u = \sqrt{\tilde{p}_3^2 + \alpha^2} - \alpha, \quad u_0 = \beta - \alpha, \quad (17)$$

$$\tilde{p}_3 = p_3/T, \quad \beta = \mu/T, \quad \alpha = \tilde{m}/T,$$

получаем с использованием формул (16), (17)

$$n = \frac{\gamma T}{2\pi^2} \sum_{n'} \Gamma_{n'} \left[\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^{3/2}} \right]. \quad (18)$$

Это уравнение в принципе в неявном виде определяет зависимость химического потенциала от концентрации и температуры с квадратичной точностью по последней. В частности, при разложении первого слагаемого в квадратных скобках в ряд с точностью до μ_2 из условия независимости концентрации от температуры находим квадратичную поправку по температуре к химическому потенциалу. После простых вычислений имеем

$$\frac{|\mu_2|}{E_F} \approx \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{E_F} \right)^2 \frac{\varphi}{\varepsilon}, \quad (19)$$

$$\varphi = \frac{\theta(y-1) \sum_{n'=1}^{E(y)-1} \frac{1 + 2\varepsilon n'}{(y - n')^{3/2}} + \frac{1}{2y^{3/2}}}{\theta(y-1) \sum_{n'=1}^{E(y)-1} \frac{1}{\sqrt{y - n'}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}}, \quad (20)$$

где y как функция безразмерной концентрации \tilde{n} и поля ε определена формулами (6), (7а), а также представлена на рис. 1. Из формулы (20) видно, что функция φ увеличивается с уменьшением y , значение y , в свою очередь, пропорционально x (рис. 1, $dy/dx > 0$), поэтому для оценки максимального значения (19), как это видно из формулы (7а), следует положить

$$x = \tilde{n}_{min}/\varepsilon^{3/2}. \quad (20a)$$

При этом $\varphi \rightarrow \varphi_{max}(\varepsilon)$, а вид \tilde{n}_{min} как функции ε определяется выражением (9) и графически представлен на рис. 2. Численные расчеты и построение графика $\varphi_{max}(\varepsilon)$ с помощью персонального компьютера по затратам времени оказались нереальными. Для наших целей оценки квадратичного по температуре вклада в химический потенциал достаточно ограничиться рассмотрением предельных частных случаев. Именно, главный эффект имеет место в области $\varepsilon \geq 2.75$, когда вклад дает только основной уровень $n' = 0$, и в этом случае, согласно формулам (20а) и (12), $x \approx 0.83/\sqrt{\varepsilon}$, а функция (20) равна

$$\varphi_{max}(\varepsilon) = 1/y. \quad (21)$$

В интересующей нас области (12), когда доминирует вклад основного уровня (второе слагаемое в числителе и знаменателе выражения (20)), как с учетом соотношения $y = p_F^2/2\gamma$ (см. (7б)) и формулы (14) можно найти, что $y = 4\tilde{n}^2/\varepsilon^3$, и с использованием формулы (12) имеем

$$\varphi < \varphi_{max}(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{4 \cdot 0.83^2}, \quad (22)$$

т. е. $(\varphi/\varepsilon)_{max} \approx 0.36$. Учитывая также, что

$$(E_F)_{min} = m (1 + (p_F/m)_{min}^2)^{1/2} = \Delta,$$

получаем, что максимальное значение относительной температурной поправки к химическому потенциалу приблизительно равно $0.04(T/m)^2$ и оно много меньше единицы при упомянутых значениях температуры.

Далее, в другом предельном случае отсутствия внешнего поля значение отношения $\varphi_{max}(\varepsilon)/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является конечным и может быть оценено из соответствующих выражений книги [13]. Именно, из формулы (2.25) работы [13], аналогично выводу выражения (19), можно получить, что

$$\frac{|\mu_2|}{E_F} \approx \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{E_F} \right)^2 \frac{2E_F^2 - m^2}{E_F^2 - m^2}. \quad (22a)$$

При этом в нерелятивистском пределе $p_F \ll m$ отсюда следует хорошо известный результат:

$$\frac{|\mu_2|}{E_F} \approx \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{E_F} \right)^2, \quad E_F = \frac{p_F^2}{2m}.$$

При оценке величины упомянутого отношения в последнем множителе формулы (22а) E_F следует заменить на Δ . Тогда из сравнения с формулой (19) можно получить, что

$$\left. \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \approx 4.36.$$

Далее, при оценке максимального значения (19) следует вместо E_F взять $E_F^{(min)} = \Delta$, что дает следующее максимальное значение относительной температурной поправки к химическому потенциалу в отсутствие внешнего поля:

$$\left(\frac{|\mu_2|}{E_F} \right)_{max} \approx 0.5 \left(\frac{T}{m} \right)^2. \quad (23)$$

В отсутствие внешнего поля и при $T \lesssim m$ эффективное значение химического потенциала с учетом температурных эффектов будет, очевидно, меньше ($\mu_2 < 0$), чем при полном вырождении электронного газа. Это приведет к тому, что и значение минимальной электронной концентрации $\hat{n}_{min}^{(0)}$, запрещающее распад нейтрона, будет на самом деле больше, чем вычисленное ранее ($n_{min}^{(0)} \approx 7.6 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$). Можно сделать оценку из условия, что эффективное минимальное значение фермиевского энергетического барьера, запрещающего распад нейтрона, теперь, очевидно, будет равно

$$\hat{E}_F^{(min)} \approx E_F^{(min)} + |\mu_2|, \quad E_F^{(min)} = \Delta.$$

Учитывая соотношение (23), получаем оценку

$$\hat{E}_F^{(min)} \approx E_F^{(min)} (1 + 0.5(T/m)^2), \quad (24)$$

т. е. с учетом релятивистской связи энергии и безразмерной концентрации $E_F = m\sqrt{1 + (3\sqrt{2}\hat{n})^{2/3}}$ получаем с той же точностью по температуре с учетом значения $\hat{n}_{min}^{(0)} \approx 3.04$:

$$\hat{n}_{min}^{(0)} \approx 3.04 (1 + 1.8(T/m)^2). \quad (25)$$

Таким образом, в нашем случае, строго говоря, температурными поправками к химическому потенциалу можно пренебречь лишь в сверхсильном магнитном поле. Однако и в отсутствие магнитного поля даже при $T \sim 1 \text{ МэВ}$ и тем более при $T \lesssim m$, как

следует из (25) и (9а), минимальная концентрация $\hat{n}_{min}^{(0)}$ по сравнению с $n_{min}^{(0)}$ в худшем случае может увеличиться на порядок. Это не меняет наших основных выводов, поскольку значение радиуса нейтронизации R_0 может уменьшиться лишь в несколько раз (см. формулу (28)), речь о порядках [1] здесь не идет. Отметим, что мы оценивали максимальные значения температурных поправок, в среднем же они будут меньше. Ситуация с промежуточными значениями магнитного поля при $T \neq 0$, когда вклад дают и возбужденные уровни Ландау, для наших целей несущественна. Отметим лишь, что изменение \hat{n}_{min} в пределах «циклов» невелико (рис. 2) и перекрывается температурными поправками, так что вряд ли может быть использовано в практических целях, например, для оценки величины магнитного поля по значению радиуса звезды (см. формулу (26)) при наличии части электронов на возбужденных уровнях Ландау.

Как отмечено в работе [1], существует следующее соотношение между радиусами звезды в начале процесса нейтронизации в магнитном поле (R_B) и в его отсутствие (R_0), связывающее их с соответствующими минимальными электронными концентрациями:

$$R_0/R_B = \left(n_{min}^{(B)}/n_{min}^{(0)} \right)^{1/3}, \quad (26)$$

где значение $n_{min}^{(B)}$ определяется формулой (12а), а $n_{min}^{(0)}$ (см. формулу (25)) может быть на самом деле больше, чем $7.6 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ (10b). Используя значения минимальных концентраций (10b), (12а), получаем

$$R_0/R_B \approx 0.4B_{13}^{1/3} \quad (27)$$

(либо несколько меньше).

В частности, при $B \approx 10^{17} \text{ Гс}$ получается максимальный результат работы [1] (по порядку величины отношение радиусов составляет 10 [1], точнее — 8.6), а при $B = 1.25 \cdot 10^{15} \text{ Гс}$ радиус нейтронизации увеличивается в два раза, что, очевидно, тоже экспериментально проверяемо.

Таким образом, по результатам работы [1] и данной работы мы приходим к выводу, что в конце эволюции нейтронных звезд устанавливается равновесный радиус, обратно пропорциональный кубическому корню из величины существующего в них сверхсильного магнитного поля (см. также Приложение). Далее, по мере исчезновения магнитного поля нейтронное давление незначительно уменьшается [14] и радиус, соответственно, тоже уменьшается, приводя к увеличению частоты следования импульсов пульсара, что тоже, в принципе, может быть доступно для измерения [14].

С учетом рассмотренных температурных эффектов приведенные результаты применительно к реальной ситуации в нейтронных звездах нуждаются в уточнении, так как, во-первых, часть уровней ниже «прежнего» уровня Ферми на самом деле будет свободна и распад нейтрона будет возможен даже при достижении вычисленной минимальной концентрации n_{min} для случая $T = 0$. Для «запрещения» распада следует повысить уровень Ферми, т. е. увеличить концентрацию до значения (25). Таким образом, как при отсутствии, так и при наличии магнитного поля сжатие будет продолжаться и после достижения минимальных концентраций $n_{min}^{(B)}$ и $n_{min}^{(0)}$, прежде чем реально начнется процесс нейтронизации. Однако соотношение (27), по-видимому, будет все же приблизительно выполняться, так как согласно (26) R_0 и R_B уменьшатся в одинаковой пропорции из-за практического отсутствия влияния даже сверхсильного магнитного поля при его взаимодействии с аномальным магнитным моментом нейтрона на определяющее процесс сжатия и увеличение минимальной концентрации давление нейтронного газа [14] (к тому же полученные при $T = 0$ результаты для радиусов нейтронных звезд имеют «большой запас» по их относительным размерам вплоть до порядка, и существенная разница по ним, очевидно, остается; и еще, как уже отмечалось, мы привели здесь максимальные значения температурных поправок, т. е. их роль заведомо завышена). Во-вторых, по той же причине уменьшением радиуса нейтронизации в отсутствие поля R_0 до значения \hat{R}_0 , как это следует из (25)–(27), при наших оценках можно пренебречь, поскольку из соотношений $R \sim n^{-1/3}$ и (25) следует, что

$$\hat{R}_0 \approx \frac{R_0}{1 + 0.6(T/m)^2} \quad (28)$$

(это тем более справедливо, если $T \ll m$).

4. ПРОТОННАЯ КОМПОНЕНТА ЗВЕЗДЫ И ПРОЦЕСС НЕЙТРОНИЗАЦИИ

Запрет процесса распада нейтрона может быть обусловлен и наличием вырожденного протонного газа соответствующей концентрации (запрет по антинейтрину отсутствует, поскольку они не находятся в равновесии с остальным веществом и покидают звезду). Оценим значения $n_{min}^{(0)}$ и $n_{min}^{(B)}$ для протонов.

Заметим сначала, что в отличие от электронов протоны в нейтронной звезде в интересующем нас аспекте являются нерелятивистскими. В самом де-

ле, в отсутствие поля импульс Ферми равен $p_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$. Концентрация протонов равна электронной и, как в работе [1], принимаем ее равной $n \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}$. Обозначая массу протона M , получаем

$$p_F^{(0)} \sim 10^{-2} M. \quad (29)$$

В магнитном поле соответствующий вклад в энергию равен ($n' \neq 0$)

$$E_B = \frac{\gamma n'}{M} \sim \frac{B}{B_0} \left(\frac{m}{M} \right)^2 M. \quad (30)$$

Взяв для оценки значение $B \sim 10^{17} \text{ Гс}$, получаем $E_B \sim 10^{-3} M$. Наконец, значение импульса Ферми на основном уровне Ландау, как и в работе [1], равно ($n \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}$, $B \sim 10^{17} \text{ Гс}$)

$$p_F^{(B)} = \frac{2\pi^2 n}{\gamma} = 2\pi^2 n \lambda_C^3 \frac{B_0}{B} \frac{m}{M} M \sim 10^{-2} M. \quad (31)$$

Таким образом, во всех вариантах протон можно считать нерелятивистским.

Аналитические расчеты наиболее просто проводятся для основного уровня Ландау. Обсудим эту возможность для протонов. Соответствующее значение поля при равенстве концентраций будет таким же, как и для электронов: $B > B_{cr} \approx 8 \cdot 10^{16} \text{ Гс}$ [1]. Далее, температурное условие невозбуждения уровней $n' = 1, 2, \dots$ имеет вид $\gamma/M \gg T$ или

$$\frac{B}{B_0} \frac{m}{M} \gg \frac{T}{m}. \quad (32)$$

При $B \sim 10^{17} \text{ Гс}$ и $T \sim 1 \text{ МэВ}$ обе части неравенства имеют порядок единицы, так что можно лишь приблизительно считать, что большая часть протонов находится на основном уровне Ландау. Минимальное значение концентрации протонов, запрещающее распад нейтрона в отсутствие магнитного поля, может быть найдено из условия (массой нейтрино в наших оценках можно пренебречь)

$$\frac{(3\pi^2 n_{min}^{(0)})^{2/3}}{2M} = \Delta - m, \quad (33)$$

откуда находим по порядку величины

$$n_{min}^{(0)} \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}. \quad (33a)$$

Приблизительно считая протонный газ «одномерным» и используя приведенное значение импульса Ферми на основном уровне Ландау (31), получаем для $n_{min}^{(B)}$ уравнение (см. также (33))

$$\left(\frac{2\pi^2 n_{min}^{(B)}}{\gamma} \right)^2 = \frac{\Delta - m}{m} \frac{2M}{m} m^2 \approx 5720 m^2 \quad (34)$$

или

$$n_{min}^{(B)} \sim \frac{10^2}{2\pi^2\lambda_C^3} \frac{B}{B_0}, \quad (34a)$$

что дает для $B \sim 10^{17}$ Гс

$$n_{min}^{(B)} \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}. \quad (34b)$$

С учетом (33a) это означает, что магнитное поле практически не влияет на протонный газ в смысле начала процесса нейтронизации. Таким образом, нейтронизация обусловлена влиянием фактически только электронной компоненты, так как запрет распада нейтрона по ней в процессе сжатия наступает раньше (при меньших концентрациях), чем по протонной, и начинается при соотношении радиусов $R_0/R_{17} \sim 10$, как и в работе [1], в которой учитывалось влияние только электронной компоненты на запрет распада нейтрона. При достижении в процессе сжатия концентрации 10^{35} см^{-3} (если это будет иметь место) вступает в силу двойной запрет на процесс распада нейтрона и по электронной, и по протонной компонентам. Он, впрочем, не является абсолютным из-за температурного «размывания» уровней Ферми, однако является началом максимально возможной нейтронизации звезды. По протонной компоненте этот процесс, как уже отмечалось, происходит одинаковым образом, независимо от наличия магнитного поля, поэтому соотношение равновесных радиусов $R_0^{(eq)}$ и $R_{17}^{(eq)}$ будет таким же, как и при наличии только электронной компоненты [1] $R_0^{(eq)}/R_{17}^{(eq)} \sim 10$, или по крайней мере в несколько раз больше, а не на порядок, что и являлось основным результатом работы [1]. Из наших рассуждений следует, что нейтронные звезды со сверхсильным магнитным полем должны иметь наименьший радиус, поэтому есть основание полагать, что состояние с двойным запретом, т. е. с концентрацией $n_e \approx n_p \equiv n \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}$, в процессе сжатия реализуется именно у них.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сама по себе возможность влияния относительно небольшой (по сравнению с концентрацией нейтронов) концентрации электронного газа на размеры звезды, отмеченная в данной и предыдущей нашей работах, является достаточно удивительной и, насколько нам известно, ранее в литературе не обсуждалась. Не менее удивительно то, что это следует из общих соображений, независимо от деталей про-

цесса гравитационного сжатия, которых, строго говоря, мы вообще не касаемся. Отметим также, что предполагаемая корреляция между размерами нейтронной звезды и наличием сверхсильного магнитного поля может быть проверена экспериментально: большинство нейтронных звезд-пульсаров входят в систему двойных звезд и их размеры в принципе могут быть оценены по эффектам экранировки (или по ее отсутствию) регистрируемого нами излучения одной звезды звездой-партнером аналогично тому, как это делается при открытии и определении размеров экзопланет; с другой стороны, наличие сверхсильного магнитного поля может привести к линейной поляризации жесткого излучения пульсаров [15]. Очевидно, результаты работы [1] и данной работы носят характер оценок. Полное же решение проблемы подразумевает: а) определение зависимости химического потенциала электронов и протонов $\mu(\tilde{n}, \tilde{B}, \tilde{T})$ от безразмерных параметров \tilde{n} (2a), $\tilde{B} \equiv \varepsilon = B/B_0$, $\tilde{T} = T/m$ без разложения по ним; б) вычисление вероятности распада $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ в магнитном поле с учетом блокирующих факторов Паули $1 - f_e$, $1 - f_p$ при суммировании по состояниям конечных электрона и протона, которая будет функцией этих же параметров. В такой постановке задача может быть решена только численными методами. Эта возможность изучается.

Тем не менее, уже из представленного в объеме настоящей и предыдущей работ материала следует возможность существования отдельного нового класса звездных объектов, которому уместно в развитие общепринятой терминологии дать название «минимагнитары». Поскольку их радиус для типичных средних звезд вроде Солнца близок к гравитационному (1–2 или несколько километров в зависимости от массы), они вполне могут быть последней стадией эволюции перед коллапсом в черную дыру, имеющую «волосы» в виде магнитного поля. В связи с этим еще одним возможным обобщением наших результатов должен быть, очевидно, учет эффектов ОТО, например, уменьшение частоты импульсов при приближении размеров пульсара-минимагнитара к шварцшильдовской сфере с их последующим полным исчезновением. Заметим также, что при известной из анализа движения двойной системы массе и из величины гравитационного красного смещения можно, очевидно, оценить радиус минимагнитара. Если наше предположение соответствует действительности, то все это доступно для экспериментальной проверки, что могло бы послужить доказательством существования и минимагнитаров, и самих черных дыр.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что при учете возрастания магнитного поля по мере сжатия звезды наши основные выводы не меняются. Возможны два механизма возрастания магнитного поля.

а) Механизм, основанный на неизменности магнитного потока, т. е. $B \sim R^{-2}$, а следовательно, с учетом соотношения $\dot{n} \sim R^{-3}$ и выражения импульса Ферми (14) $p_F \sim R^{-1}$. Это означает, что импульс и энергия Ферми растут при сжатии медленней, чем при неучете роста магнитного поля, т. е. запрет на распад нейтрона будет достигнут при еще меньшем значении радиуса нейтронизации.

б) Механизм, основанный на балансе энергии при сжатии (при оценках считаем, что магнитная проницаемость среды порядка единицы):

$$W_2 = W_1 + A, \quad (\text{A.1})$$

где

$$W_{1,2} = \int_{(V_{1,2})} w dV, \quad w = B^2/4\pi, \quad (\text{A.2})$$

— энергия магнитного поля до и после сжатия,

$$A = \int_{V_2}^{V_1} P_B dV, \quad P_B = w/3, \quad (\text{A.3})$$

— работа гравитационного поля звезды против сил давления магнитного поля, приводящая к увеличению энергии последнего. Выполняя преобразование

$$A = \int_0^{V_1} P_B dV - \int_0^{V_2} P_B dV \rightarrow \int_{(V_1)} P_B dV - \int_{(V_2)} P_B dV,$$

приходим к равенству

$$\frac{1}{3\pi} \int_{(V_1)} B^2 dV \approx \frac{1}{3\pi} \int_{(V_2)} B^2 dV, \quad (\text{A.4})$$

иначе говоря,

$$B_1^2 V_1 \approx B_2^2 V_2, \quad (\text{A.5})$$

где $B_{1,2} = \sqrt{\langle B^2 \rangle_{1,2}}$ — среднее по объему значение поля до и после сжатия. Из этого следует, что в данном случае $B \sim R^{-3/2}$ и $p_F \sim R^{-3/2}$ с аналогичными а) выводами. Таким образом, учет возрастания

магнитного поля при сжатии может привести к еще большему уменьшению радиуса минималитаров и основной вывод работы не только подтверждается, а еще более усиливается, так что, несмотря на температурные эффекты, уменьшение радиуса в сверхсильном поле может действительно составить один порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **140**, 911 (2011).
2. R. C. Duncan and C. Tompson, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992).
3. S. Dall'Osso, S. N. Shore, and L. Stella, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **398**, 1869 (2009).
4. H.-Y. Chiu and E. E. Salpeter, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 413 (1964).
5. J. M. Lattimer et al., *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2701 (1991).
6. А. Ю. Потехин, УФН **180**, 1279 (2010).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Релятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
8. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 1, Наука, Москва (1968).
9. А. М. Прудников, Ю. П. Брычков, О. Н. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1, Элементарные функции, Физматлит, Москва (2003).
10. Debades Vandyopadhyay et al., *Phys. Rev. D* **58**, 121301 (1998).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2001).
12. Д. К. Надежин, *Асимптотические формулы для уравнения состояния электронно-позитронного газа*, Науч. инф. Астрон. совета АН СССР, вып. 32, 3 (1974).
13. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).
14. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **140**, 263 (2011).
15. S. L. Adler, J. N. Bachcall, C. G. Callan, and M. N. Rothenbluth, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1061 (1970).