

ПРОЦЕСС $\nu \rightarrow \nu\gamma$ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ВКЛАДА ПОЗИТРОНИЯ В ДИСПЕРСИЮ ФОТОНА

*Р. А. Аникин**, *Н. В. Михеев***

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Ярославль, Россия*

Поступила в редакцию 15 февраля 2012 г.

Исследован процесс радиационного «распада» нейтрино относительно высоких энергий $E \gg m_e$ в сильном магнитном поле с учетом влияния связанной электрон-позитронной пары (позитрония) на дисперсию фотона. Учет вклада позитрония в поляризационный оператор фотона приводит к существенному изменению закона дисперсии фотона и амплитуды процесса в окрестности циклотронного резонанса. Показано, что вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ с учетом вклада позитрония значительно увеличивается.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электрослабые процессы в сильном магнитном поле вызывают неугасающий интерес. Это связано с тем, что магнитное поле оказывает активное влияние на свойства частиц. Во-первых, оно способно индуцировать новые взаимодействия частиц, например, взаимодействие незаряженных нейтрино и фотона, возникающее на однопетлевом уровне. Во-вторых, поле существенно меняет кинематику частиц, открывая новые каналы, запрещенные в вакууме законами сохранения. Среди таких процессов в первую очередь следует указать нейтринный распад фотона, $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, и нейтринное излучение фотона, $\nu \rightarrow \nu\gamma$, называемое также черенковским нейтринным процессом, которые вызывают большой интерес уже в течение длительного времени.

Процесс $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в магнитном поле исследовался в случаях относительно слабого поля [1], сильного поля [2] и поля произвольной интенсивности [3]. В работах [1–3] рассматривались только ситуации с относительно малыми энергиями нейтрино по сравнению с массой электрона m_e , $E < 2m_e$. В случае более значительных энергий нейтрино, $E \geq 2m_e$, который интересен в свете возможных астрофизических приложений, становятся существенными большие радиационные поправки, приводящие к перенормировке волновой функции фотона. Еще одним существенным фактором является значительное отклонение

закона дисперсии фотона от вакуумного. Оба эти фактора были впервые учтены в работе [4]. Но и в этой, и в других работах, насколько известно авторам, при расчете радиационного распада нейтрино в поляризационном операторе фотона учитывался только петлевой вклад виртуальных свободных (не образующих связанного состояния — позитрония) электронов и позитронов. На первый взгляд учет вклада позитрония должен давать малую поправку следующего порядка по постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$. Однако в сильном магнитном поле, $B \gg B_e$, где $B_e = m_e^2/e \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс¹⁾, этот вклад приводит к существенному изменению дисперсионных свойств фотона в окрестности циклотронного резонанса [5], что, в свою очередь, влияет на ширину самого процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$. В настоящей работе исследуется процесс радиационного «распада» нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ относительно высоких энергий, $E \gg m_e$, с учетом влияния позитрония как на дисперсию фотона, так и на амплитуду процесса.

2. КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССА $\nu \rightarrow \nu\gamma$

Процесс $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в вакууме запрещен, поскольку вакуумный закон дисперсии фотона имеет вид $q^2 = 0$, в то время как из закона сохранения энергии-импульса следует, что 4-импульс фотона должен быть пространственно подобен, $q^2 = (p - p')^2 < 0$,

*E-mail: anik-roman@mail.ru

**E-mail: mikheev@uniyar.ac.ru

¹⁾ Мы используем естественную систему единиц $c = \hbar = 1$, c — скорость света, $e > 0$ — элементарный заряд.

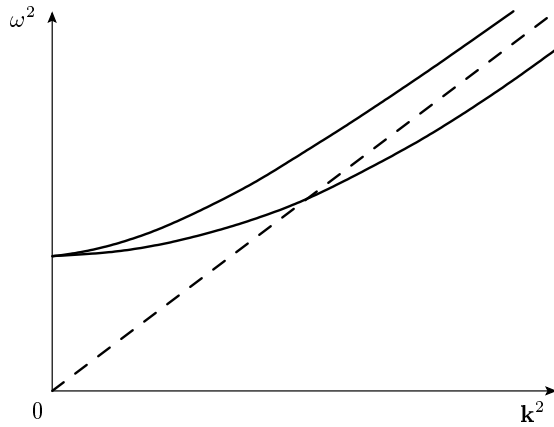


Рис. 1. Дисперсионные кривые поперечного плазмона $\omega^2 = \omega_t^2(\mathbf{k})$ (верхняя сплошная линия) и продольного плазмона $\omega^2 = \omega_l^2(\mathbf{k})$ (нижняя сплошная линия), штриховая линия соответствует вакуумной дисперсии $q^2 = 0$

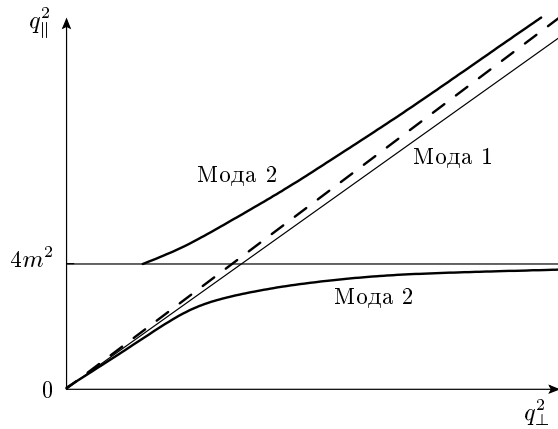


Рис. 2. Закон дисперсии в сильном магнитном поле для фотонов первой и второй мод, штриховая линия соответствует вакуумной дисперсии $q^2 = 0$

где p и p' — 4-импульсы соответственно начального и конечного нейтрино. Однако в оптически активных средах процесс может идти при условии $q^2 < 0$. Например, закон дисперсии в плазме (рис. 1) открывает данный процесс для продольных плазмонов, когда их дисперсионная ветвь оказывается в области $q^2 < 0$ [6]. Процесс также возможен в диэлектриках с показателем преломления $n > 1$ [7].

Следует отметить, что оптически активной средой является также и магнитное поле, где существуют дисперсионные ветви с $q^2 < 0$ (рис. 2). Известно [8], что в магнитном поле определенный закон дисперсии имеют фотоны двух поляризаций:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)} = \sqrt{Z_1} \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{k_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \sqrt{Z_2} \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}, \quad (1)$$

где $\varphi^{\alpha\beta} \equiv F^{\alpha\beta}/B$ — безразмерный тензор магнитного поля, $\tilde{\varphi}^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}/2$ — дуально сопряженный тензор поля, множители $Z_\lambda^{-1} = 1 - \partial\Pi^{(\lambda)}/\partial q_\parallel^2$ учитывают эффект перенормировки волновых функций фотонов, который, как мы увидим ниже, оказывается существенным в окрестности циклотронных резонансов [9], $\Pi^{(\lambda)}$ — собственные значения поляризаационного оператора фотона мод $\lambda = 1, 2$. Индексы внутри круглых скобок свернуты последовательно, $(q\varphi)_\nu = q^\mu \varphi_{\mu\nu}$. Фотонный 4-импульс $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ разбит на два двумерных импульса: вектор в подпространстве Минковского $(0, 3)$, $q_\parallel^\alpha = (\omega, 0, 0, k_3)$, $q_\parallel^2 = \omega^2 - k_3^2$, и вектор в плоскости, поперечной магнитному полю, $q_\perp^\alpha = (0, \mathbf{k}_\perp, 0)$. Предполагается, что третья ось направлена вдоль магнитного поля \mathbf{B} . Отметим, что разбиение на q_\parallel^α и q_\perp^α можно представить в ковариантном виде: $q_\parallel^\alpha = (q\tilde{\varphi})^\alpha$, $q_\perp^\alpha = (q\varphi)^\alpha$.

В процессе $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в сильном магнитном поле имеет место правило отбора по поляризациям фотона. Действительно, дисперсия фотона первой моды даже в случае сильного магнитного поля незначительно отличается от вакуумной. Это означает, что в процессе с участием фотона первой моды $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(1)}$ при значениях $q_\parallel^2 \ll eB$ реализуется коллинеарная кинематика $j_\alpha \sim q_\alpha \sim p_\alpha \sim p'_\alpha$, при которой амплитуда этого процесса оказывается подавленной [4]:

$$M(\nu\nu\gamma^{(1)}) \sim (q\varphi j) \sim (q\varphi q) = 0.$$

В свою очередь, в процессе с участием фотона второй моды кинематика далека от коллинеарности, особенно в окрестности циклотронного резонанса, когда q_\parallel^2 стремится снизу к $4m_e^2$. Кроме того, в этой кинематической области амплитуда оказывается усилена так же, как поляризаационный оператор $\Pi^{(2)}$ [4]. Таким образом, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ с участием фотона только второй моды.

В качестве иллюстрации влияния дисперсии фотона на кинематику оценим фазовый объем этого процесса:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{d^3 p' d^3 k}{E' \omega} \delta^4(P - P' - q) = \\ &= \int \frac{d^3 k}{\omega(k) E'} \delta(E - E' - \omega(k)), \quad (2) \end{aligned}$$

где интеграл вычисляется с учетом зависимости энергии фотона от его импульса $\omega(k)$, соответствующей дисперсионной линии фотона моды 2 в области

$q^2 < 0$ (рис. 2). Фазовый объем приближенно можно представить в виде суммы двух интегралов, первый из которых соответствует части дисперсионной линии, где фотон имеет закон дисперсии, близкий к линейному: $q_{\parallel}^2 \approx k_{\perp}^2/\xi$, а второй — части дисперсионной линии, идущей практически горизонтально, $q_{\parallel}^2 \approx 4m^2$. Здесь $\xi = 1 + \alpha b/3\pi$, $b = B/B_e$. Вклад в фазовый объем от этих двух участков дисперсионных линий относительно легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{(I)} &\approx 2\pi\sqrt{\frac{16m^2\xi}{(p\varphi p)}}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\xi\right), \\ \Delta\Phi^{(II)} &\approx 2\pi\ln\frac{(p\varphi p)}{4m^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь инвариант $(p\varphi p) = E_{\perp}^2 = E^2\sin^2\theta$ имеет смысл квадрата «поперечной энергии» начального нейтрино, где θ — угол между векторами импульса нейтрино и магнитного поля. Из выражений (3) следует, что вклад второго участка дисперсионной линии доминирует для нейтрино с энергией $E_{\perp} \gg m_e$, $\Delta\Phi^{(II)} \gg \Delta\Phi^{(I)}$, и в дальнейших вычислениях вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ можно ограничиться интегрированием только по «горизонтальному» участку дисперсионной линии.

3. АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА $\nu \rightarrow \nu\gamma$

Рассматривая процесс радиационного «распада» нейтрино в сильном магнитном поле, ограничимся локальным пределом слабого взаимодействия левого нейтрино с виртуальными электронами, когда пропагаторы промежуточных W - и Z -бозонов «стягиваются» в точку, как это показано на рис. 3.

Имея в виду возможные астрофизические приложения, будем считать, что энергия нейтрино относительно велика, $E_{\perp} \gg m_e$, но при этом магнитное поле остается самым большим параметром задачи. Та-

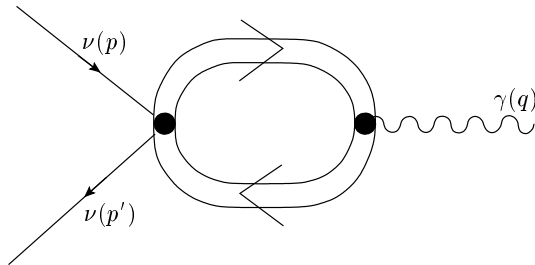


Рис. 3. Диаграмма, описывающая вершину $\nu\nu\gamma$ в локальном пределе слабого взаимодействия

ким образом, в вычислениях будет подразумеваться следующая иерархия параметров:

$$m_W^2 \gg eB \geq E_{\nu}^2 \gg m_e^2. \quad (4)$$

Лагранжиан взаимодействия, соответствующий процессу $\nu \rightarrow \nu\gamma$, имеет вид

$$L = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}j_{\alpha}^{(\nu)}(\bar{\Psi}_e\gamma^{\alpha}(C_V + C_A\gamma_5)\Psi_e) + e(\bar{\Psi}_e\gamma^{\alpha}\Psi_e)A_{\alpha}. \quad (5)$$

Здесь

$$j_{\alpha}^{(\nu)} = \bar{\Psi}_{\nu}\gamma_{\alpha}(1 + \gamma_5)\Psi_{\nu}$$

— оператор нейтринного тока, константы C_V , C_A определены следующим образом:

$$C_V = \pm\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \quad C_A = \pm\frac{1}{2},$$

где верхний знак соответствует электронному нейтрино (при этом вклад в процесс дает обмен как Z -, так и W -бозоном), а нижние знаки — мюонному и тау-нейтрино (при этом вклад обусловлен только Z -бозоном), θ_W — угол Вайнберга. Нейтринный оператор Ψ_{ν} и фотонный оператор A_{α} определяются в виде разложения по плоским волнам де Бройля, а электронный оператор Ψ_e представляется разложением по полному набору решений уравнения Дирака в постоянном однородном магнитном поле. В пределе сильного поля лидирующий вклад в амплитуду процесса дают электроны, находящиеся на основном уровне Ландау [10], поэтому в разложении оператора Ψ_e можно ограничиться только электронами на основном уровне Ландау. Отметим, что таким решениям соответствует поляризованное состояние электрона со спином, направленным против поля. При этом аксиально-векторный ток можно представить в виде

$$\bar{\Psi}_e\gamma_{\alpha}\gamma_5\Psi_e = \bar{\Psi}_e\Pi_{-}\gamma_{\alpha}\gamma_5\Pi_{-}\Psi_e, \quad (6)$$

где проекционный оператор Π_{-} записывается как

$$\Pi_{-} = \frac{1 - i\gamma_1\gamma_2}{2}.$$

Легко проверить, что выражение (6) не равно нулю только при $\alpha = 0, 3$ и, кроме того, в обкладках между проекционными операторами Π_{-} справедливо следующее «эффективное» равенство:

$$\gamma_{\alpha}\gamma_5 = (\tilde{\varphi}\gamma)_{\alpha},$$

с помощью которого лагранжиан (5) преобразуется к виду

$$L = e(\bar{\Psi}_e\gamma^{\alpha}\Psi_e)V_{\alpha} + e(\bar{\Psi}_e\tilde{\varphi}^{\alpha}\Psi_e)A_{\alpha}. \quad (7)$$

Здесь локальный векторный оператор V_α определяется выражением

$$V_\alpha = -\frac{G_F}{e\sqrt{2}} \left(C_V (\tilde{\Lambda} j^{(\nu)})_\alpha - C_A (\tilde{\varphi} j^{(\nu)})_\alpha \right). \quad (8)$$

Отметим, что матрица $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$ играет роль метрического тензора в подпространстве Минковского $(0, 3)$. Лагранжиан (7) показывает, что амплитуда процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ определяется поляризационным оператором в магнитном поле $\Pi_{\alpha\beta}$ как

$$M = -\varepsilon_\alpha^* \Pi^{\alpha\beta} V_\beta = -(\varepsilon^* \Pi V), \quad (9)$$

где ε_α^* — вектор поляризации фотона в магнитном поле. Поляризационный оператор фотона имеет четыре собственных вектора, только два из которых [11] соответствуют векторам поляризации физических фотонов (1). Поскольку в пределе сильного магнитного поля индексы поляризационного оператора пробегает значения только 0 и 3, из двух фотонных мод только мода 2 рождается при радиационном «распаде» нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$.

Амплитуда процесса в итоге приобретает вид

$$M = \frac{G_F}{e\sqrt{2}} \Pi \left(C_V (\varepsilon^{(2)} \tilde{\Lambda} j) - C_A (\varepsilon^{(2)} \tilde{\varphi} j) \right), \quad (10)$$

где j_β — матричный элемент нейтринного тока,

$$j_\beta = \bar{U}(p') \gamma_\beta (1 + \gamma_5) U(p),$$

Π — собственное значение поляризационного оператора фотона, соответствующего второй моде.

Подставляя в выражение (10) вектор поляризации моды 2 из выражения (1), получаем

$$M = \frac{G_F}{e\sqrt{2}q_\parallel^2} \times \frac{\Pi}{\sqrt{1 - \partial\Pi/\partial q_\parallel^2}} \left(C_V (q\tilde{\varphi}j) - C_A (q\tilde{\Lambda}j) \right). \quad (11)$$

Вероятность радиационного «распада» нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ определяется интегралом по фазовому объему:

$$W = \int \frac{(2\pi)^4 |M|^2 \delta^4(P - P' - q)}{8E} \times \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 E'}. \quad (12)$$

Квадрат модуля амплитуды процесса вычисляется стандартными методами, при этом нужно учесть,

однако, что закон дисперсии фотона соответствует дисперсионной ветви, расположенной практически горизонтально (рис. 2). Отметим, что вычисления удобно проводить в системе отсчета, в которой начальное нейтрино распространяется поперек магнитного поля. Принимая во внимание, что масса электрона является самым малым параметром задачи, закон дисперсии фотона приблизительно можно представить в виде $\omega(k) \approx |k_3|$. После несложных, хотя и громоздких, вычислений получаем

$$|M|^2 \approx \frac{G_F^2 \Pi^2 E^2 \omega^2}{2\pi \alpha m_e^2 \left(1 - \partial\Pi/\partial q_\parallel^2\right)} \times (C_V^2 + C_A^2 - 2n_z C_A C_V), \quad (13)$$

где $n_z = k_3/|k_3| = \pm 1$. После подстановки выражения для квадрата модуля амплитуды (13) в (12) и интегрирования по \mathbf{p}' и k_3 с учетом закона сохранения энергии и импульса вероятность распада сводится к двукратному интегралу по поперечному к магнитному полю импульсу фотона:

$$W = \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2)}{4(2\pi)^3 \alpha m_e^2} \times \int \frac{d^2k_\perp \kappa \Pi^2}{1 - \partial\Pi/\partial q_\parallel^2} \Theta(2E \cos \varphi - k_\perp). \quad (14)$$

Здесь φ — полярный угол в поперечной плоскости к магнитному полю, так что вектор $\mathbf{k}_\perp = k_\perp (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, κ — корень уравнения $E - E' - \omega = 0$ относительно $|k_3|$:

$$|k_3| \equiv \kappa = \frac{(2E \cos \varphi - k_\perp) k_\perp}{2E}.$$

Вводя безразмерную переменную $x = k_\perp/2E$ и интегрируя по полярному углу φ , удается выразить ответ в виде однократного интеграла:

$$W = \frac{G_F^2 E^3 (C_V^2 + C_A^2)}{2\pi^3 \alpha m_e^2} \int_0^1 \frac{x^2 \Pi^2}{1 - \partial\Pi/\partial q_\parallel^2} \times \left(\sqrt{1 - x^2} - x \arccos x \right) dx. \quad (15)$$

Собственное значение поляризационного оператора Π и его производная $\partial\Pi/\partial q_\parallel^2$ зависят от k_\perp^2 и q_\parallel^2 [11]. Чтобы проинтегрировать выражение (15), необходимо поляризационный оператор и его производную $\partial\Pi/\partial q_\parallel^2$ выразить только через одну переменную k_\perp^2 , используя закон дисперсии:

$$q^2 = q_\parallel^2 - q_\perp^2 = \Pi(k_\perp^2, q_\parallel^2). \quad (16)$$

Таким образом, для дальнейшего вычисления необходимо знать явный вид собственного значения поляризационного оператора.

В качестве примера приведем расчет, при котором в поляризационном операторе учтен только петлевой вклад свободной e^+e^- -пары. Поляризационный оператор в этом случае исследовался в ряде работ, см., например, [9, 10, 12, 13]. В сильном магнитном поле его собственное значение для фотона второй моды приближенно можно представить в виде

$$\Pi \approx -\frac{2\alpha}{\pi} (eB) \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2}{2eB}\right) H\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m_e^2}\right), \quad (17)$$

где функция $H(v)$ в интересующей нас области $0 < v < 1$ определена следующим образом:

$$H(v) = \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v}{1-v}} - 1. \quad (18)$$

В окрестности $q_{\parallel}^2 \approx 4m_e^2$ собственное значение поляризационного оператора моды 2 имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi \approx & -\alpha (eB) \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2}{2eB}\right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - q_{\parallel}^2/4m_e^2}} - \frac{4}{\pi}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя выражение (19) и закон дисперсии (16), находим

$$\begin{aligned} \frac{\Pi^2}{1 - \partial\Pi/\partial q_{\parallel}^2} & \approx \\ & \approx \frac{2\alpha^2 m_e^2 (eB)^2 x^4}{E^2 \left(x^2 + \frac{\alpha eB}{\pi E^2} \exp\left(-\frac{2E^2 x^2}{eB}\right)\right)^3} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{4E^2 x^2}{eB}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, подставляя (20) в выражение для вероятности (15), получаем:

$$W = \frac{\alpha G_F^2 E}{8\pi^2} (C_V^2 + C_A^2) (eB)^2 f(\xi), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \frac{8}{\pi} \int_0^1 \exp(-4\xi x^2) (\sqrt{1-x^2} - x \arccos x) \times \\ & \times \left(\frac{x^2}{x^2 + \frac{\alpha}{\pi\xi} \exp(-2\xi x^2)}\right)^3 dx, \end{aligned} \quad (22)$$

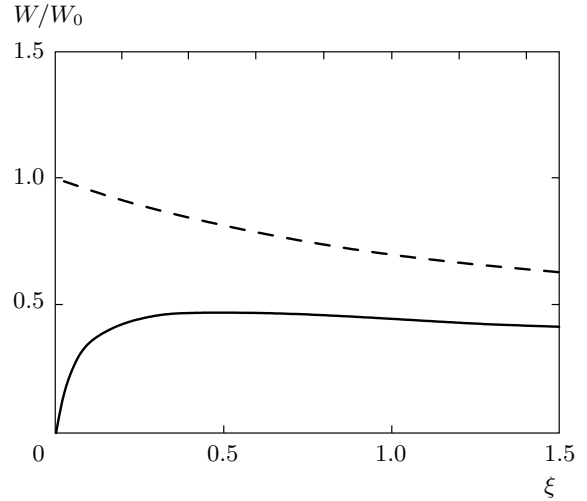


Рис. 4. Вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в случае, когда в поляризационном операторе учтен только петлевой вклад свободной e^+e^- -пары. Сплошная линия соответствует вероятности (23), штриховая линия — результат, полученный ранее в работе [4]

$$\xi = \frac{E^2}{eB} \gg \frac{1}{b}, \quad b = \frac{B}{B_e} \gg 1.$$

Вероятность (21) вычислена в системе отсчета, в которой нейтрино движется поперек магнитного поля. Учитывая, что произведение энергии начального нейтрино на вероятность в единицу времени рассматриваемого процесса, EW , является инвариантом относительно преобразований Лоренца вдоль магнитного поля, выражение для вероятности распада (21) можно переписать в произвольной системе отсчета. Для этого в произведении EW необходимо провести замену $E^2 \rightarrow (p\varphi p) \equiv E_{\perp}^2 = E^2 \sin^2 \theta$, где θ — угол между вектором импульса \mathbf{p} начального нейтрино и вектором магнитного поля \mathbf{B} . Окончательный ответ в системе отсчета, в которой нейтрино распространяется под углом θ к магнитному полю, равен:

$$\begin{aligned} W & = \frac{\alpha G_F^2 E \sin^2 \theta}{8\pi^2} (C_V^2 + C_A^2) (eB)^2 f(\xi), \\ \xi & = \frac{E^2 \sin^2 \theta}{eB}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что процесс $\nu \rightarrow \nu\gamma$ исследовался ранее в работе [4], однако полученный там результат существенно завышает вероятность процесса, особенно при малых значениях параметра ξ , как это видно из графиков на рис. 4, где вероятности представлены в долях W_0 :

$$W_0 = \frac{\alpha G_F^2 (eB)^2 E \sin^2 \theta}{8\pi^2} (C_V^2 + C_A^2). \quad (24)$$

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР ФОТОНА С УЧЕТОМ ПОЗИТРОНИЯ

Чтобы определить вероятность распада $\nu \rightarrow \nu \gamma$ с учетом влияния позитрония на дисперсию фотона, необходимо вычислить вклад связанной e^+e^- -пары в поляризационный оператор фотона. Для этого удобно воспользоваться соотношением между мнимой частью поляризационного оператора и вероятностью перехода фотона в позитроний [14]:

$$\text{Im}(\Delta\Pi_\pi) = -\omega W_{\gamma \rightarrow \pi}, \quad (25)$$

где $\Delta\Pi_\pi$ — часть поляризационного оператора, обусловленная позитронием, а $W_{\gamma \rightarrow \pi}$ — вероятность перехода фотона в позитроний, которая относительно легко вычисляется в адиабатическом приближении [5, 15, 16]. Это приближение состоит в том, что в сильном магнитном поле, когда ларморовский радиус $a_H = 1/\sqrt{eB}$ гораздо меньше боровского $a_B = 1/m_e\alpha$, зависимость волновой функции связанных электрона и позитрона от степеней свободы, соответствующих релятивистскому движению в поперечной к магнитному полю плоскости, можно считать такой же, как и в случае, когда частицы не связаны в позитроний. При этом кулоновское взаимодействие между ними модифицирует волновую функцию относительного нерелятивистского движения вдоль магнитного поля (движение центра масс в этом направлении остается свободным).

Матричный элемент, описывающий переход фотона второй моды в позитроний, $\gamma \rightarrow \pi$, в адиабатическом приближении в системе отсчета, где 4-импульс фотона имеет вид $q_\alpha = (\omega, k_\perp, 0, 0)$, может быть представлен как

$$\begin{aligned} S_{\gamma \rightarrow \pi} &= e \int d^4x \langle \pi | (\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \Psi_e) A_\alpha | \gamma \rangle \approx \\ &\approx e (2\pi)^3 \delta(M - \omega) \delta(P_\perp - k_\perp) \delta(P_z) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{k_\perp^2}{4eB}\right) \frac{1}{\sqrt{2\omega V} \sqrt{L_y^2 L_z}} \chi(0). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $V = L_x L_y L_z$ — нормировочный объем, M — масса позитрония, которая в пределе сильного поля, когда электрон и позитрон занимают основной уровень Ландау, выражается через массу электрона m_e и энергию связи ε , $M = 2m_e - \varepsilon$, P_\perp и P_z — импульсы позитрония (суммарный импульс позитрона и электрона) соответственно в поперечном и продольном

направлениях к магнитному полю, $\chi(0)$ — волновая функция относительного движения электрона и позитрона вдоль магнитного поля в совпадающих точках.

Отметим, что в адиабатическом приближении сохраняется вырождение по относительному поперечному импульсу электрона и позитрона $(p_{e^-} - p_{e^+})_\perp$. Это приводит к тому, что при вычислении вероятности перехода фотона в позитроний $W_{\gamma \rightarrow \pi}$ не хватает числа степеней свободы в конечном состоянии, чтобы убрать все δ -функции, соответствующие законам сохранения. Таким образом, остается одна «непринтегрированная» δ -функция:

$$\begin{aligned} W_{\gamma \rightarrow \pi} &= \frac{4\pi\alpha M e B |\chi(0)|^2}{\omega} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{k_\perp^2}{2eB}\right) \delta(q_\parallel^2 - M^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее для восстановления поляризационного оператора по его мнимой части удобно воспользоваться дисперсионным соотношением с одним вычитанием:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}(\Pi(t')) dt'}{t' - t - i0} - \Pi(0), \quad t = q_\parallel^2. \quad (28)$$

Подставляя в интеграл (28) мнимую часть (25) с использованием (27), получим

$$\Delta\Pi_\pi = -\frac{4\alpha(eB)|\chi(0)|^2 q_\parallel^2}{M(M^2 - q_\parallel^2 - i0)} \exp\left(-\frac{k_\perp^2}{2eB}\right). \quad (29)$$

Таким образом, теперь можем выписать полный поляризационный оператор фотона второй моды с учетом вклада свободной e^+e^- -пары и позитрония:

$$\begin{aligned} \Pi &= -2\alpha(eB) e^{-\rho} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\pi} H(v) + \frac{|\chi(0)|^2 v}{m_e (1 - \varepsilon/m_e - v)} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\rho = \frac{k_\perp^2}{2eB}, \quad v = \frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}.$$

Для дальнейшего анализа необходимо вычислить значение волновой функции в нуле $|\chi(0)|^2$ и энергию связи ε . Волновая функция $\chi(z)$ удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера:

$$\left(-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_{eff}(z) + \varepsilon \right) \chi(z) = 0, \quad (31)$$

где $\mu = m_e/2$ — приведенная масса, а «эффективную» потенциальную энергию U_{eff} можно извлечь

из работ [5, 16] и выразить в виде двукратного интеграла:

$$U_{eff}(z) = -\frac{\alpha}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy}{\sqrt{\frac{x^2}{eB} + \left(y + \frac{P_{\perp}}{\sqrt{eB}}\right)^2 \frac{1}{eB} + z^2}}. \quad (32)$$

Напомним, что P_{\perp} — импульс, соответствующий движению позитрония поперек магнитного поля. Именно эта величина при переходе фотона в позитроний равна, как это видно из (26), поперечному импульсу фотона, $P_{\perp} = k_{\perp}$.

Уравнение (31) симметрично по отношению к замене $z \rightarrow -z$. Как следствие, мы имеем два типа решений: четные и нечетные, из которых нас интересуют только четные решения, поскольку для нечетных решений $\chi(0) = 0$ и, таким образом, они не дают вклада в вероятность процесса (27).

Нетрудно видеть, что выражение для эффективного потенциала (32) в пределе $z^2 \gg 1/eB$ имеет вид кулоновского потенциала:

$$U_{eff}(z) \approx -\frac{\alpha}{|z|}. \quad (33)$$

С другой стороны, экспоненциально убывающее при больших z решение уравнения (31) с кулоновским потенциалом описывается функцией Уиттекера [17]:

$$\chi(z) = \chi(0) \frac{W_{\nu,1/2}\left(\frac{\alpha m_e}{\nu} |z|\right)}{W_{\nu,1/2}(0)}, \quad (34)$$

где ν определяет энергию связи и играет роль главного квантового числа:

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 m_e}{4} \frac{1}{\nu^2}. \quad (35)$$

Используя методику шивки, развитую при решении задачи о спектре атома водорода в сильном магнитном поле [18], получаем трансцендентное уравнение для нахождения ν :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} - 2 \ln \nu + 2\psi(1 - \nu) &= \\ &= \ln \frac{2b}{\alpha^2} - \ln \rho + E_i(-\rho) - 4\gamma_E, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$b = B/B_e, \quad \rho = P_{\perp}^2/2eB,$$

$\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\gamma_E = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера, E_i — интегральная показательная функция:

$$E_i(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{\exp t}{t} dt.$$

Уравнение (36) хорошо описывает спектр четных состояний позитрона до тех пор, пока его правая часть, не зависящая от ν , велика:

$$\ln \frac{2b}{\alpha^2} - \ln \rho + E_i(-\rho) - 4\gamma_E \gg 1. \quad (37)$$

Учитывая, что в нашем анализе процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ поперечный импульс фотона ограничен, $k_{\perp}^2 \leq 4E_{\perp}^2$, видим, что параметр ρ также ограничен:

$$\rho = \frac{P_{\perp}^2}{2eB} = \frac{k_{\perp}^2}{2eB} \leq 2,$$

согласно условию (4). Таким образом, условие (37) в сильном магнитном поле, $b \gg 1$, заведомо выполняется.

Специфика спектра позитрония в сильном магнитном поле состоит в том, что в дополнение к спектру, близкому к водородоподобному, возникает глубокий уровень с энергией связи ε_0 , много большей типичной ε_n :

$$\varepsilon_0 \gg \varepsilon_n \approx \frac{\alpha^2 m_e}{4n^2} \approx \frac{6.8 \text{ эВ}}{n^2}. \quad (38)$$

Существенно также, что этому уровню соответствует самое большое значение волновой функции при $z = 0$ [5]:

$$\frac{|\chi_0(0)|^2}{|\chi_n(0)|^2} \sim \frac{b}{\alpha^2} \gg 1. \quad (39)$$

Таким образом, влияние позитрония на дисперсию фотона ограничивается практически только основным уровнем.

Численное решение уравнения (36), которое соответствует основному уровню энергии

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha^2 m_e}{4\nu_0^2}, \quad (40)$$

можно аппроксимировать относительно простой формулой:

$$\begin{aligned} \nu_0(b, \rho) &\approx [\ln(4.5u) - 2.44 \ln(\ln(0.15u))]^{-1}, \\ u &= \frac{b}{\alpha^2} \frac{\exp(E_i(-\rho))}{\rho} \gg 1. \end{aligned} \quad (41)$$

Отметим, что интегральная показательная функция может быть представлена в виде, удобном для численных оценок:

$$E_i(-\rho) = \gamma_E + \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\rho)^k}{k k!}, \quad \rho < 1,$$

$$E_i(-\rho) = -\frac{\exp(-\rho)}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(-\rho)^k}, \quad \rho \gg 1.$$

Функция $\nu_0(b, \rho)$ (41) описывает решение уравнения (36) с погрешностью не больше, чем 0.2%, в области $\rho \lesssim 5$, $b \gtrsim 10$. Отметим, однако, что в сверхсильных полях $b > 10^4$ ($B > 10^{17}$ Гс) могут становиться существенными радиационные поправки к закону Кулона и релятивистские поправки.

Аппроксимационная формула (41) при $\rho \rightarrow 0$ и замене $u \rightarrow u/4$ (что соответствует пересчету приведенной массы) с хорошей точностью воспроизводит энергию основного уровня атома водорода в сильном магнитном поле (см. для сравнения [18], табл. 1).

Квадрат модуля волновой функции $|\chi_0(z)|^2$ при $z = 0$ находим из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\chi_0(z)|^2 = 1. \quad (42)$$

Учитывая, что функция Уиттекера (34) хорошо описывает волновую функцию $\chi_0(z)$ за исключением узкой области $|z| \sim 1/\sqrt{eB}$, дающей пренебрежимо малый вклад в интеграл нормировки, имеем

$$|\chi_0(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{W_{\nu_0, 1/2} \left(\frac{\alpha m_e}{\nu_0} |z| \right)}{W_{\nu_0, 1/2}(0)} \right)^2 = 1.$$

В приближении $\nu_0 \ll 1$ интеграл легко вычисляется:

$$|\chi_0(0)|^2 \approx \frac{\alpha m_e}{2\nu_0} (1 - 2\nu_0 + O(\nu_0^2)). \quad (43)$$

Подставляя найденные энергию связи позитрония (40) и волновую функцию в нуле (43) в выражение для поляризационного оператора (30), получаем

$$\Pi \approx -\alpha e V e^{-\rho} \left(\frac{2}{\pi} H(v) + \frac{2\lambda v}{1 - \lambda^2 - v} \right), \quad (44)$$

где

$$v = \frac{q_{\parallel}^2}{4m_e^2} = \frac{\omega^2 - k_{\parallel}^2}{4m_e^2}, \quad 0 < v < 1,$$

функция $H(v)$ определена в (18), $\rho = k_{\perp}^2/2eB$, $\lambda = \alpha/2\nu_0$. Напомним, что ν_0 определяется формулой (41) и, хотя и слабо, но зависит от ρ , как это было отмечено в работе [5].

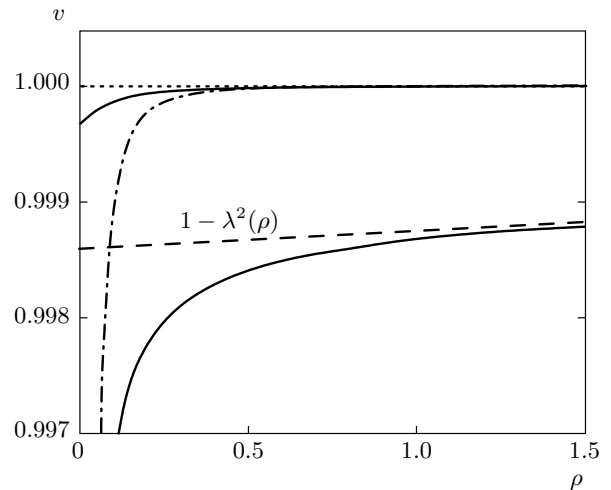


Рис. 5. Дисперсионные линии фотона в окрестности циклотронного резонанса. Штрихпунктирная линия соответствует спектральной линии фотона без учета вклада позитрония, сплошные линии — спектральным линиям фотона с учетом вклада позитрония

5. ДИСПЕРСИЯ ФОТОНА И РАДИАЦИОННЫЙ РАСПАД НЕЙТРИНО С УЧЕТОМ ПОЗИТРОНИЯ

Полученный в предыдущей главе поляризационный оператор (44), в котором учтен вклад как свободной e^+e^- -пары, так и позитрония, позволяет найти закон дисперсии фотона второй моды (16), $v = v(\rho)$, в интересующей нас узкой окрестности $v = 1$ (рис. 5).

На рис. 5 видно, что спектральная линия, соответствующая дисперсии фотона с учетом только вклада свободной e^+e^- -пары, при учете вклада позитрония расщепляется на две спектральные линии (в пренебрежении вкладом возбужденных уровней позитрония), одна из которых с ростом ρ асимптотически стремится к спектральной линии свободной покоящейся относительно друг друга e^+e^- -пары, $v(\rho) = 1$, а другая — к спектральной линии позитрония, $v(\rho) = 1 - \lambda^2(\rho)$.

Подставляя в формулу (15) поляризационный оператор фотона с учетом вклада позитрония (44) и учитывая закон дисперсии (16), можно вычислить вероятность радиационного распада нейтрино в сильном магнитном поле. Несмотря на то что иерархия параметров (4) значительно упрощает расчет, аналитического выражения для вероятности радиационного «распада» нейтрино найти не удалось. Результат численного расчета приведен на рис. 6,

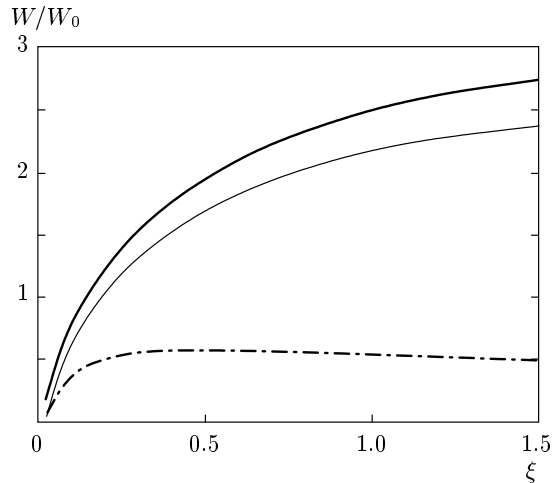


Рис. 6. Вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$. Сплошные линии соответствуют вероятности с учетом вклада позитрония, штрихпунктирная линия — вероятности без учета вклада позитрония. Магнитное поле $b = 1000$ (жирная линия), 100 (тонкая линия)

где вероятности представлены в долях W_0 (24). Из рисунка видно, что учет вклада позитрония в дисперсию фотона второй моды существенно увеличивает вероятность процесса распада $\nu \rightarrow \nu\gamma$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследован процесс радиационного «распада» нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в сильном магнитном поле с учетом вклада связанной электрон-позитронной пары в дисперсию фотона второй моды. Анализ показывает, что учет позитрония приводит к существенному изменению закона дисперсии. Как видно из рис. 5, дисперсионная линия с учетом вклада позитрония расщепляется на две линии, которые с ростом $\rho = k_{\perp}^2/2eB$ асимптотически стремятся к спектральной линии свободной покоящейся относительно друг друга электрон-позитронной пары и к спектральной линии позитрония. Результат численного расчета вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ представлен на рис. 6, из которого видно, что в сильном магнитном поле учет влияния позитрония значительно усиливает вероятность радиационного распада нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$.

Авторы выражают глубокую благодарность А. В. Кузнецову и Е. Н. Нарынской за плодотворную дискуссию и полезные замечания.

Работа выполнена в рамках государственного задания вузу (проект № 2.4176.2011), при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00394-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Гальцов, Н. С. Никитина, ЖЭТФ **62**, 2008 (1972).
2. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **71**, 1263 (1976).
3. A. N. Ioannisian and G. G. Raffelt, Phys. Rev. D **55**, 7038 (1997).
4. A. A. Gvozdev, N. V. Mikheev, and L. A. Vassilevskaya, Phys. Lett. B **410**, 211 (1997).
5. A. E. Shabad and V. V. Usov, Astrophys. Space Sci. **128**, 377 (1986).
6. В. Н. Ораевский, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский, Письма в ЖЭТФ **43**, 549 (1986).
7. W. Grimus and H. Neufeld, Phys. Lett. B. **315**, 129 (1993).
8. S. L. Adler, J. N. Bahcall, and C. G. Callan, Phys. Rev. Lett. **25**, 1061 (1970).
9. A. E. Shabad, Ann. Phys. (N. Y.) **90**, 166 (1975).
10. В. В. Скобелев, Изв. вузов. Физика **10**, 142 (1975).
11. И. А. Баталин, А. Е. Шабад, ЖЭТФ **60**, 894 (1971).
12. A. E. Shabad, Lett. Nuovo Cim. **3**, 457 (1972).
13. А. Е. Шабад, Препринт ФИАН **60**, 44 (1974).
14. Н. А. Weldon, Phys. Rev. D **28**, 2007 (1983).
15. Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский, ЯФ **42**, 401 (1985).
16. L. B. Leinson and A. Perez, J. High Energy Phys. **11**, 039 (2000).
17. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, Наука, Москва (1977).
18. Б. М. Карнаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **124**, 996 (2003).