

СРАВНЕНИЕ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКОГО И ПОЛУКЛАССИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СПИНОВОЙ ДИНАМИКИ В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

М. Ю. Петров, С. В. Яковлев*

*Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Петродворец, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 7 ноября 2011 г.

Сопоставлены два подхода к описанию спиновой динамики электронно-ядерной системы в квантовых точках: квантовомеханический, основанный на точной диагонализации модельного гамильтониана, и полуклассический, основанный на связанных уравнениях прецессии среднего спина электрона и среднего спина ядерных флуктуаций. Проведено сравнение подходов в модельной задаче, описывающей периодическую накачку электронно-ядерной системы оптическим возбуждением. Результаты расчетов показали, что наличие разброса параметров в ядерной системе, обусловленного ядерными спиновыми флуктуациями, приводит к возникновению в ней упорядоченного состояния, навязанного периодическим возбуждением, и эффекту синхронизации мод прецессии электронных спинов во внешнем магнитном поле. Сделан вывод о том, что обе модели позволяют качественно описать эффект синхронизации мод, однако дают существенно различные количественные результаты. Это может свидетельствовать об ограниченной применимости прецессионной модели к описанию спиновой динамики в квантовых точках при наличии оптической накачки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Точное решение задачи эволюции квантовомеханической системы, содержащей большое количество взаимодействующих частиц, оказывается, как правило, исключительно громоздкой и практически нереализуемой процедурой. В связи с этим, квантовомеханический расчет часто заменяется расчетом эволюции классического аналога такой системы, в котором движение каждой частицы строго детерминировано. Границы применимости такого подхода в каждом конкретном случае требуют соответствующего обоснования. Настоящее сообщение посвящено рассмотрению одного из таких случаев, а именно, эволюции пространственно-локализованной системы, содержащей электронный спин и большое число ядерных спинов.

Реальным прототипом такой системы может служить полупроводниковая квантовая точка, содержащая один избыточный электрон (резидентный электрон). Возбуждение системы циркулярно поляризованным светом рождает электрон-дырочную па-

ру, после высвечивания которой спин резидентного электрона ориентируется. При этом степень циркулярной поляризации излученного фотона отражает информацию о поляризации резидентного электрона непосредственно перед актом возбуждения.

Спиновая динамика резидентных электронов в квантовых точках существенно определяется их сверхтонким взаимодействием с $N \sim 10^4$ – 10^5 ядрами кристаллической решетки, покрываемыми волновой функцией локализованного электрона [1]. Результат этого взаимодействия можно наглядным образом представить как прецессию спина в эффективном магнитном поле, создаваемом ансамблем ядерных спинов [2]. В том случае, когда ядерные спины не ориентированы, их случайное сложение приводит к появлению флуктуации эффективного поля, величина которого может достигать нескольких десятков миллитесла [2]. Это приводит к быстрой дефазировке электронного спина в ансамбле квантовых точек за время порядка нескольких наносекунд [2, 3].

Оригинальный способ подавления эффекта случайных полей ядерных спинов в условиях периодической оптической накачки был продемонстрирован в работе [4]. Было показано, что периодиче-

*E-mail: m.petrov@spbu.ru

ская накачка приводит к синхронизации мод прецессии электронных спинов в магнитном поле, направленном перпендикулярно оси оптического возбуждения. Конструктивная интерференция различных мод прецессии сопровождается частичным восстановлением электронной спиновой поляризации к моменту прихода каждого последующего импульса накачки — банчинг. Позже было продемонстрировано сохранение банчинга в течение довольно продолжительного времени (десятки минут) после выключения накачки [5], что не может быть объяснено никакими эффектами в электронной подсистеме. Исходя из этого, авторы предположили, что синхронизация мод спиновой прецессии обусловлена формированием особого состояния ядерной спиновой системы, однако точного теоретического описания этого состояния представлено не было. Отметим, что феноменологические подходы, описывающие механизм формирования стабильных состояний в ядерной спиновой системе, развивались в нескольких работах [6–8].

Спиновую динамику электронно-ядерной системы наиболее точно можно было бы описать, используя прямую диагонализацию соответствующего гамильтониана, однако такой расчет возможен только для ограниченного количества ядерных спинов $N \sim 10^2$ [9–11]. Поскольку квантовомеханическая задача описания динамической поляризации ядерных спинов не может быть прямым образом решена, многие авторы используют феноменологические модели, либо модели, основанные на уравнениях прецессии классических моментов [8, 12].

В данной работе приводятся результаты теоретического моделирования эффекта синхронизации мод прецессий электронных спинов в однородном ансамбле квантовых точек при их оптической накачке последовательностью периодически следующих импульсов. Мы ограничимся рассмотрением временных интервалов, существенно меньших времен релаксации ядерной спиновой системы. Мы также исключим из рассмотрения разброс g -факторов электрона, присутствующий в ансамбле реальных квантовых точек [4, 5].

Тем самым, мы рассмотрим физику эффекта синхронизации мод, обусловленного модификацией состояния ядерной спиновой системы при воздействии периодической накачки электронного спина в ансамбле квантовых точек. В то же время мы постараемся рассмотреть задачу при максимально возможном сохранении строгости квантовомеханических рассуждений. Для этого мы будем использовать «модель ящика» [2, 13, 14], допускающую точное решение. Результаты квантовомеханическо-

го расчета будут сопоставлены с результатами, полученными с помощью полуклассического подхода, основанного на уравнениях прецессии средних спинов [8]. Такое сравнение подходов позволяет показать границы применимости полуклассической модели к описанию ядерной спиновой динамики в квантовых точках.

Мы будем использовать следующую последовательность изложения материала. Сначала будут сформулированы общие положения квантовомеханического и полуклассического подходов и записаны уравнения, результаты решения которых будут обсуждаться в последующих разделах. Затем мы проанализируем частный случай — динамику электронного спина, инициированную единичным актом возбуждения. Будет дано качественное и количественное сравнение двух подходов, а также сравнение с известным теоретическим решением, основанным на результатах работы [2]. После этого мы проанализируем динамику электронного спина и ядерной спиновой поляризации при периодической ориентации электронного спина. Будет проведено качественное и количественное сравнение результатов расчетов в квантовомеханическом и полуклассическом подходах. Громоздкие аналитические выкладки приведены в трех приложениях.

2. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ И ПРЕЦЕССИОННАЯ МОДЕЛИ

В квантовомеханическом представлении гамильтониан системы, состоящей из одного электрона со спином $\hat{\mathbf{S}}$ и N ядер со спинами $\hat{\mathbf{I}}^j$, во внешнем постоянном магнитном поле \mathbf{B} , выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H} = -\gamma_e \hbar (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B}) - \hbar \sum_{j=1}^N \gamma_n^j (\hat{\mathbf{I}}^j \cdot \mathbf{B}) + \sum_{j=1}^N A^j |\psi(\mathbf{R}_j)|^2 (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^j), \quad (1)$$

где γ_e и γ_n^j — гиромагнитные отношения электрона и ядер, A^j — константа сверхтонкого взаимодействия электрона с j -м ядром, $|\psi(\mathbf{R}_j)|^2$ — амплитуда электронной плотности в точке расположения j -го ядра. Для простоты будем рассматривать случай, когда в квантовой точке присутствует только один тип ядер:

$$\gamma_n^j = \gamma_n, \quad A^j = A, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Также будем использовать приближение модели ящика [14]:

$$|\psi(\mathbf{R}_j)|^2 = |\psi(\mathbf{R}_i)|^2 = \frac{1}{N}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Если ввести оператор полного спинового момента ядер $\hat{\mathbf{J}} = \sum_j \hat{\mathbf{I}}^j$, то гамильтониан (1) принимает вид

$$\mathcal{H} = -\gamma_e \hbar (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B}) - \gamma_n \hbar (\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{B}) + \frac{A}{N} (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{J}}). \quad (4)$$

Состояние электронно-ядерной системы на языке квантовой механики может быть описано матрицей плотности $\rho(t)$, являющейся решением уравнения фон Неймана [15]

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)] \quad (5)$$

с начальным условием $\rho(t=0) = \rho_0$. Средние значения наблюдаемых физических величин могут тогда быть вычислены обычным образом, например,

$$\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle(t) = \text{Tr} [\rho(t) \hat{\mathbf{S}}], \quad \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle(t) = \text{Tr} [\rho(t) \hat{\mathbf{J}}]. \quad (6)$$

Величины $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$ ($\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$) характеризуют в эксперименте электронную (ядерную) спиновую поляризацию, которые могут быть зарегистрированы.

Альтернативным способом описания спиновой динамики является использование уравнений совместной прецессии электронного и ядерного спинов [8, 12]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{S} = \alpha [\mathbf{J} \times \mathbf{S}] + [\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S}], \\ \frac{d}{dt} \mathbf{J} = \alpha [\mathbf{S} \times \mathbf{J}] + [\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{J}]. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь \mathbf{S} и \mathbf{J} — классические векторные величины, имеющие смысл магнитных моментов, ассоциированных со спином электрона и ядерным спином. Другие параметры в уравнениях (7), $\alpha = A/(N\hbar)$, $\boldsymbol{\omega}_{e,n} = -\gamma_{e,n} \mathbf{B}$, определяют частоты взаимной прецессии электронного и ядерного спинов, а также прецессии спинов во внешнем магнитном поле. Система уравнений (7), вообще говоря, постулируется, хотя из уравнения фон Неймана может быть получен ее квантовомеханический аналог (см. детали в Приложении А). Кроме того, для системы уравнений (7) можно получить приближенное аналитическое решение в условиях, когда внешнее магнитное поле велико (см. Приложение С).

В этом способе описания будем рассматривать ансамбль одинаковых квантовых точек, в которых начальные условия \mathbf{S}_0 и \mathbf{J}_0 распределены с плотностью вероятности

$$w(\mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0) = w_e(\mathbf{S}_0) w_n(\mathbf{J}_0), \quad (8)$$

где $w_e(\mathbf{S}_0)$ и $w_n(\mathbf{J}_0)$ — плотности вероятности для электронной и ядерной подсистем.

Решая систему уравнений (7), можно получить множество решений, зависящих от начальных условий:

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0), \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0). \quad (9)$$

Интегрируя эти решения с весами $w(\mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0)$ по начальным условиям, получим средние по ансамблю величины:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \iint \mathbf{S}(t, \mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0) w(\mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0) d\mathbf{S}_0 d\mathbf{J}_0, \\ \mathbf{J}(t) &= \iint \mathbf{J}(t, \mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0) w(\mathbf{S}_0, \mathbf{J}_0) d\mathbf{S}_0 d\mathbf{J}_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для простоты будем рассматривать случай, соответствующий в эксперименте нерезонансной накачке электронных спинов [16], при которой электронный спин после каждого импульса накачки приобретает определенное значение \mathbf{S}_i (в рассматриваемом случае $1/2$ вдоль оси z), не зависящее от предыстории. В этом случае плотность распределения по начальным значениям электронного спина превращается в δ -функцию:

$$w_e(\mathbf{S}_0) = \delta(\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_i). \quad (11)$$

Тем самым усреднение по \mathbf{S}_0 в выражениях (10) можно опустить:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \int \mathbf{S}(t, \mathbf{S}_i, \mathbf{J}_0) w_n(\mathbf{J}_0) d\mathbf{J}_0, \\ \mathbf{J}(t) &= \int \mathbf{J}(t, \mathbf{S}_i, \mathbf{J}_0) w_n(\mathbf{J}_0) d\mathbf{J}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

3. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПОЛНОГО СПИНОВОГО МОМЕНТА ЯДЕР

При решении квантовомеханической задачи в случае модели ящика мы будем использовать представление собственных волновых функций полного углового момента ядерной системы [14]. В таком представлении гамильтониан имеет блочно-диагональный вид, причем в каждом блоке реализуется определенное значение J полного ядерного момента. Матрица плотности имеет такой же блочно-диагональный вид, причем динамика конкретного блока матрицы плотности определяется соответствующим этому блоку блоком гамильтониана. Таким образом, определив статистику распределения по возможным

значениям суммарного ядерного момента (в дальнейшем, квантовая статистика), мы существенно сокращаем количество вычислений в квантовомеханическом подходе.

У системы из N одинаковых ядер со спином I существует $(2I+1)^N$ квантовых состояний. Суммарный спин по абсолютной величине может принимать значения $J = 0, 1, 2, \dots, NI$. При этом каждая реализация J может иметь $2J+1$ проекцию на ось квантования, т. е. существует $2J+1$ состояние с данным J . Пусть $\Gamma_I^N(J)$ — количество способов, которыми можно получить реализацию J сложением N элементарных моментов величиной I каждый. Величина $\Gamma_I^N(J)$ удовлетворяет нормировке

$$\frac{1}{(2I+1)^N} \sum_{I=0}^{NI} \Gamma_I^N(J)(2J+1) = 1. \quad (13)$$

Коэффициенты $\Gamma_I^N(J)$ известны и для четных N имеют вид (см. детали в Приложении В)

$$\Gamma_{1/2}^N(J) = C_{N/2}^{N/2-J} - C_{N/2}^{N/2-J-1}, \quad (14)$$

$$\Gamma_{3/2}^N(J) = \sum_{k,m=0}^{N/2} C_{N/2}^k C_{N/2}^m [\delta(2m+k-3N/4+J) - \delta(2m+k-3N/4+J+1)]. \quad (15)$$

Здесь C_n^k — биномиальный коэффициент, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Отметим, что проекция полного ядерного момента J на ось квантования может принимать $2J+1$ дискретное значение. Однако поскольку для большинства блоков J велико ($J \sim \sqrt{N}I$ в максимуме распределения), при численном моделировании его можно заменить на непрерывное распределение по углам и описанное выше распределение с весами

$$W_I(J) = \frac{2J+1}{(2I+1)^N} \Gamma_I^N(J), \quad J = 0, \dots, NI. \quad (16)$$

Здесь $W_I(J)$ — вероятность реализации состояния ядерной системы с полным моментом J .

Как обсуждалось в работе [2], в рамках полуклассической модели случайное сложение спинов ядер \mathbf{I}_j приводит к возникновению ненулевой флуктуации суммарного момента $\mathbf{J} = \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_j$, величина которого отлична от нуля для квантовой точки, содержащей хотя и большое, но конечное число ядер. Рассмотрим случай полностью разупорядоченной (неполяризованной) ядерной спиновой системы, в которой распределения величин и направлений \mathbf{I}_j будем считать равномерными и не зависящими друг

от друга. Из теории вероятности известно, что величина, являющаяся суммой одинаково распределенных случайных величин, имеет гауссово распределение. Поэтому для неполяризованной ядерной системы распределение декартовых проекций ядерного момента по начальным реализациям будет нормальным:

$$w(\mathbf{J}) = w(J_x, J_y, J_z) = \prod_{i=x,y,z} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta_I} \times \exp\left(-\frac{J_i^2}{2\Delta_I^2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \Delta_I)^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{J}^2}{2\Delta_I^2}\right), \quad (17)$$

где [2]

$$\Delta_I^2 = \frac{I(I+1)}{3} N. \quad (18)$$

В сферической системе координат

$$w(\mathbf{J}) = w(J, \theta, \phi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \Delta_I)^3} \exp\left(-\frac{J^2}{2\Delta_I^2}\right) \times J^2 \sin \theta = w_I(J) w(\theta, \phi), \quad (19)$$

где $w_I(J)$ и $w(\theta, \phi)$ — нормированные на единицу радиальное и угловое распределения:

$$w_I(J) = \frac{4\pi}{(\sqrt{2\pi} \Delta_I)^3} J^2 \exp\left(-\frac{J^2}{2\Delta_I^2}\right), \quad (20)$$

$$w(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta. \quad (21)$$

Радиальная часть $w_I(J)$ гауссова распределения имеет тот же смысл, что и величина $W_I(J)$, данная уравнением (16). На рис. 1 приведено сравнение статистик для нескольких частных случаев. На рисунке видно, что уже для нескольких десятков ядер величины $W_I(J)$ и $w_I(J)$ неплохо воспроизводят друг друга. Таким образом, ансамбль ядерных спинов, состоящий из нескольких десятков ядер, является уже достаточно большим, чтобы его можно было описывать полуклассической векторной моделью. Остановимся на случае 100 ядер со спинами $I = 1/2$ как на оптимальном, с точки зрения информативности, результатов и времени расчетов. Все приведенные в работе результаты получены именно для этого случая.

4. ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОННОГО СПИНА, ОРИЕНТИРОВАННОГО ОДИНОЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ НАКАЧКИ

Воспользовавшись результатами предыдущего параграфа, мы рассчитали динамику системы,

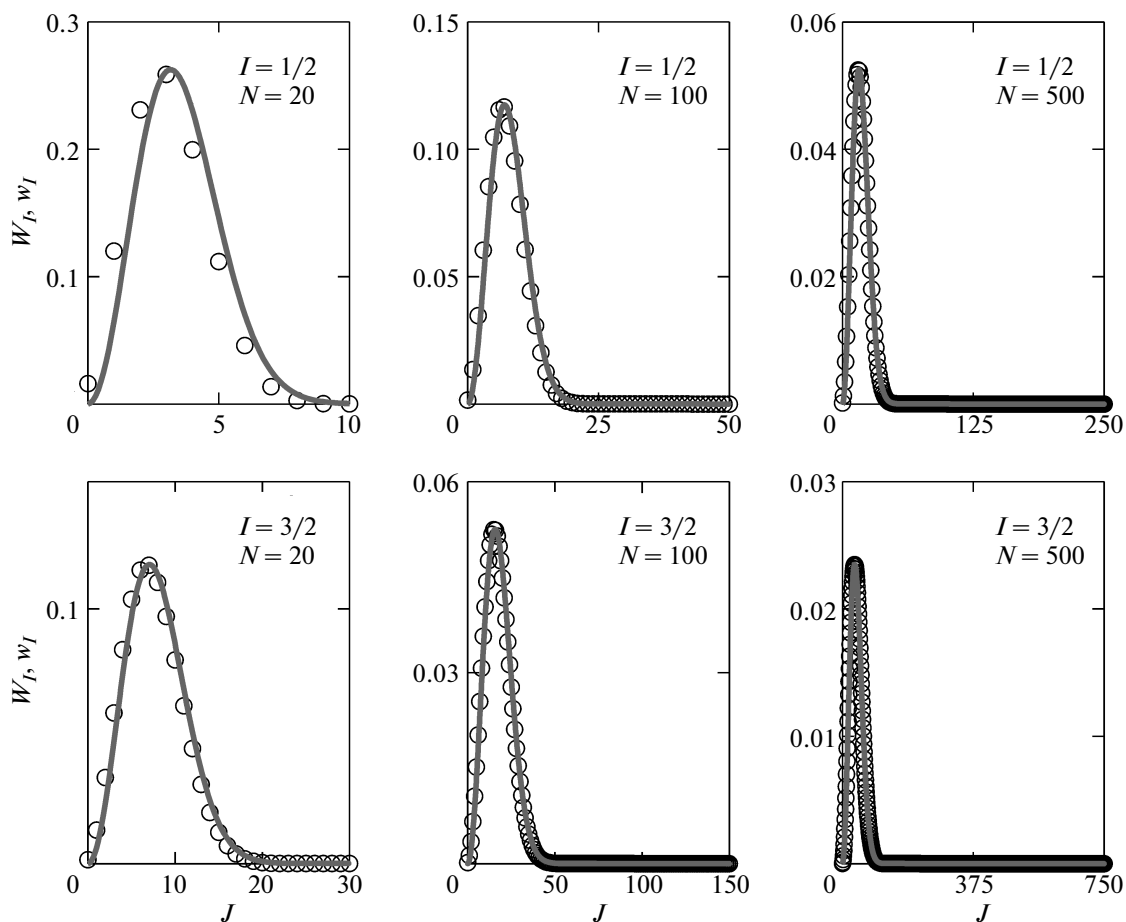


Рис. 1. Сравнение квантовой статистики (о) и радиальной части гауссова распределения (—) для разного количества ядер N с разным элементарным спином I

состоящей из исходно неполяризованных электрона и ста идентичных ядер со спинами $I = 1/2$. Мы предполагаем, что импульс накачки переводит электрон в полностью поляризованное состояние, а состояние ядерной системы не изменяется за время действия импульса.

На рис. 2а представлены временные зависимости среднего значения z -компоненты электронного спина, рассчитанные для случая нулевого магнитного поля как в рамках квантовомеханической модели, так и с использованием полуклассического подхода.

Видно, что оба варианта расчетов дают практически одинаковые результаты. Сначала, за время $T_2^* = T_\Delta \sqrt{6}$ (время T_Δ определено ниже), электронная спиновая поляризация почти полностью исчезает. Затем она частично восстанавливается к моменту $6T_\Delta$ до величины равной примерно $1/6$. При этом и в квантовомеханической, и в полуклассической моделях суммарный момент системы не изменяется, про-

исходит лишь перераспределение внесенного в электронно-ядерную систему момента \mathbf{S}_0 между электронной и ядерной подсистемами.

В приближении замороженных флуктуаций, рассмотренном впервые Меркуловым и др. [2], ядерные моменты предполагаются неподвижными, что позволяет исключить из рассмотрения второе уравнение системы (7). При этом решение первого уравнения легко находится:

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{J}_0) = (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + [\mathbf{S}_i - (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \cos \omega t + [\mathbf{S}_i \times \mathbf{n}] \sin \omega t, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(t = 0) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{J}_0}{|\mathbf{J}_0|}, \quad \omega = |\alpha \mathbf{J}_0|. \quad (23)$$

Интегрируя это решение с плотностью $w(\mathbf{J}_0)$ (17) по \mathbf{J}_0 , получаем [2]

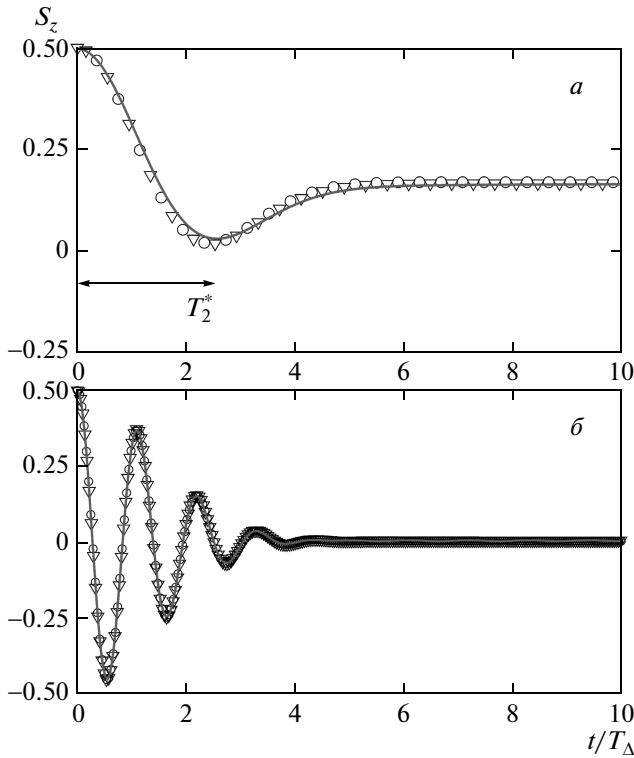


Рис. 2. Кривые дефазировки электронного спина за счет сверхтонкого взаимодействия со спинами ядер в нулевом магнитном поле (а) и в присутствии сильного поперечного магнитного поля (б), рассчитанные в трех разных подходах: строгий квантовомеханический подход (о); полуклассический подход (—); приближение замороженных ядерных спиновых флуктуаций (∇)

$$S_z(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left[1 - 2 \left(\frac{t}{2T_\Delta} \right)^2 \right] \times \exp \left\{ - \left(\frac{t}{2T_\Delta} \right)^2 \right\}, \quad (24)$$

где

$$T_\Delta = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha \Delta_I}. \quad (25)$$

В динамике электронного спина в этом случае наблюдается такой же процесс, как и в предыдущих случаях, — деполаризация спина с характерным временем $T_2^* = T_\Delta \sqrt{6}$ (которое получается при минимизации выражения (24)) и последующее восстановление примерно до 1/6 (см. рис. 2а). В этом подходе, однако, не предполагается поляризация ядерной системы, т. е. суммарный момент не сохраняется, и совпадение с предыдущими данными можно объяснить

тем, что малое изменение ядерного момента под действием одиночного импульса почти не отражается на динамике электронного спина.

На рис. 2б представлены результаты расчетов динамики электронного спина после одиночного импульса в сильном поперечном (по отношению к начальному направлению электронного спина) магнитном поле B_x . В динамике электронного спина, по-прежнему совпадающей во всех трех подходах, наблюдаются осцилляции с частотой $|\omega_e| = |\gamma_e B_x|$ и амплитудой, затухающей за время порядка $6T_\Delta$. В классическом представлении затухание вызвано разбросом частот прецессии электронного спина в суммарном поле, складывающемся из внешнего магнитного поля и эффективного поля ядерных спиновых флуктуаций.

5. СЛУЧАЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАКАЧКИ

5.1. Нулевое магнитное поле

Для описания динамики электронно-ядерной системы в условиях периодической накачки будем считать, что на систему действует серия строго периодических лазерных импульсов, следующих с периодом T_R . Выберем период следования импульсов $T_R \approx 10T_\Delta$, что приблизительно соответствует условиям типичных экспериментов с квантовыми точками [5], в которых T_R составляет величину порядка 10 нс, а T_Δ — порядка единиц наносекунд. Предполагаем также, что каждый импульс накачки переводит электронный спин в состояние с полной поляризацией вдоль оси z , что соответствует в эксперименте нерезонансному возбуждению электронной спиновой подсистемы [16]. В квантовой механике это состояние определено матрицей плотности $\rho_e = |1/2\rangle\langle 1/2|$. В полуклассической модели это состояние будет определяться соотношением (11). Будем также считать, что состояние ядерной системы не изменяется в момент действия импульса, тем самым начальное условие для полной матрицы плотности в момент действия n -го импульса накачки можно записать как $\rho(nT_R + 0) = \text{Tr}_e \rho(nT_R - 0) \otimes \rho_e$, где Tr_e означает частичное усреднение полной матрицы плотности по электронным квантовым числам [14]. В полуклассической модели $\mathbf{J}(nT_R + 0) = \mathbf{J}(nT_R - 0)$. В промежутках между импульсами накачки система эволюционирует согласно тому, как это рассматривалось выше.

Обсудим сначала результаты расчетов для слу-

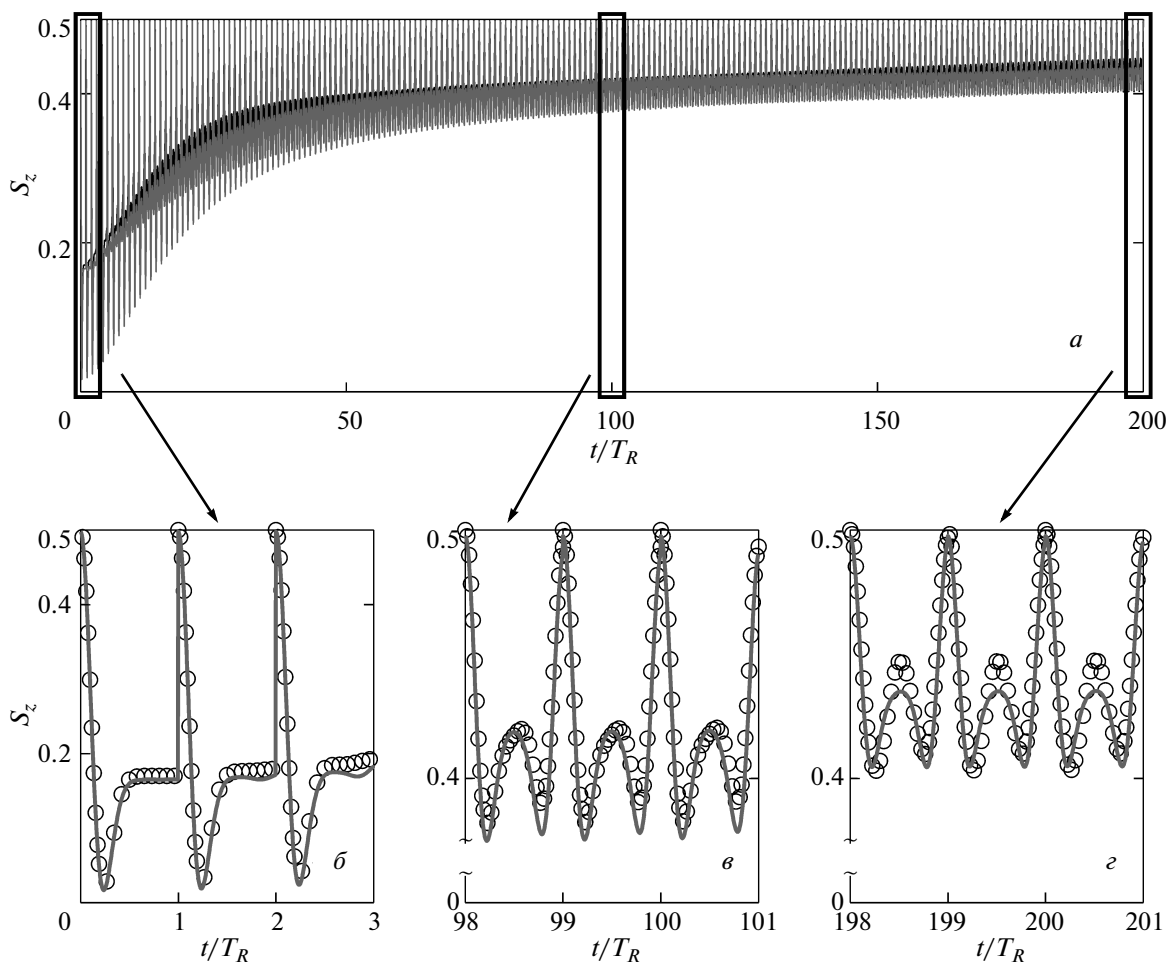


Рис. 3. Сравнение результатов квантовомеханического (○) и полуклассического (—) подходов для случая периодической накачки в нулевом магнитном поле. На рис. *a* приведен общий профиль динамики *z*-компоненты электронной спиновой поляризации. На рис. *б, в, г* в увеличенном масштабе показаны отдельные временные промежутки, изображенные рамками на рис. *a*

чая продолжительной (более 100 импульсов) строго периодической накачки в нулевом магнитном поле. Ненулевыми при этом оказываются только *z*-компоненты электронного и ядерного моментов, что и следует ожидать для этого случая. Представленные на рис. 3 результаты показывают, что квантовомеханический и полуклассический подходы дают практически идентичные результаты. По T_R электронная поляризация достаточно быстро возрастает, практически достигая насыщения после 200 импульсов. Вместе с тем, между соседними лазерными импульсами наблюдается немонотонное поведение электронной поляризации, хорошо воспроизводимое в обоих подходах. В частности, помимо провала поляризации после каждого импульса, уже обсуждавшегося выше, перед приходом следующего импульса наблюда-

ется аналогичный провал, сопровождаемый нарастанием поляризации практически до предельного значения. Такая динамика электронного спина связана определенным состоянием ядерной спиновой системы, в которое она переходит после длительной накачки. Как было показано в работах [14, 17], сформированная периодической накачкой специфическая трансформация статистики ядерных спиновых флуктуаций приводит к показанному на рис. 3 эффекту повторения в динамике электронной спиновой поляризации.

Результаты расчетов также показывают, что среднее значение *z*-компоненты полного ядерного момента по мере накачки увеличивается, асимптотически приближаясь к предельно возможному значению ядерной спиновой поляризации, возможному

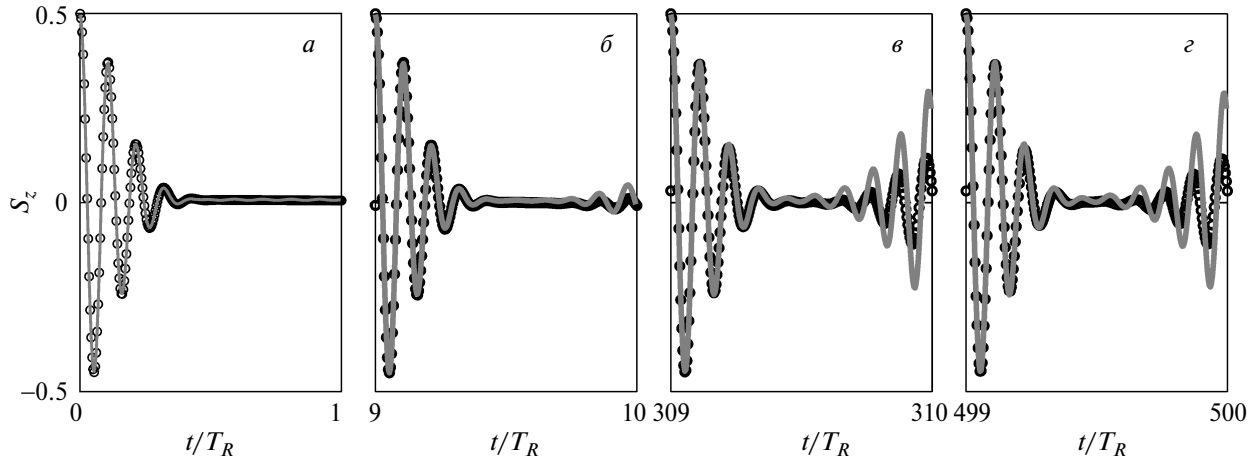


Рис. 4. Динамика z -компоненты электронного спина в промежутках между импульсами накачки в поперечном магнитном поле, рассчитанная в квантовомеханической модели (о) и в полуклассической модели (—) после действия первого импульса (а), после действия 10-го импульса (б), после действия 310-го импульса (в), после действия 500-го импульса (г)

в модели ящика при накачке из высокотемпературного состояния [14].

5.2. Поперечное магнитное поле

Теперь рассмотрим действие периодической накачки на динамику электронных и ядерных спинов в присутствии поперечного магнитного поля (рис. 4). Характерной особенностью периодической накачки в поперечном поле является появление банчинга в обеих моделях. Эффект состоит в том, что электронная спиновая поляризация восстанавливается перед приходом очередного импульса. Амплитуда банчинга быстро возрастает, фактически насыщаясь за несколько десятков импульсов.

В рассматриваемых условиях результаты расчета в рамках двух подходов качественно похожи, однако количественно сильно различаются уже после нескольких импульсов накачки. Амплитуда банчинга, полученная в расчете в рамках полуклассической модели, оказывается существенно большей, чем в квантовомеханической. Следует подчеркнуть, что указанные различия в поведении спиновой системы воспроизводятся при вариации параметров расчета — периода повторения импульсов, величины магнитного поля, числа ядер, рассмотренных в обеих моделях.

Эти различия отражают принципиальную разницу двух подходов. В полуклассической модели каждой начальной реализации ядерных спиновых флуктуаций соответствует жестко детерминированная

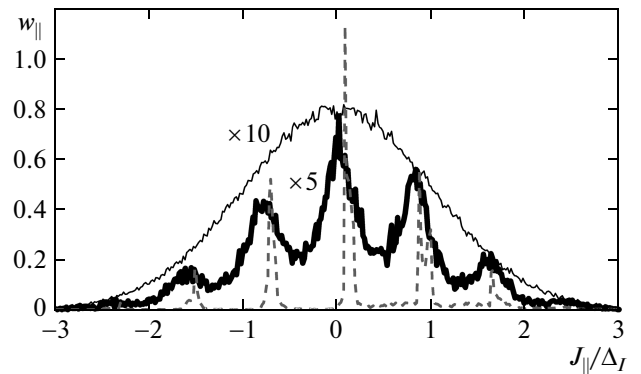


Рис. 5. Плотность распределения продольной компоненты ядерной спиновой поляризации в различных точках временного протокола накачки электронно-ядерной спиновой системы: в нулевой момент времени (тонкая линия), после 20-го импульса (жирная линия) и после действия 500-го импульса (штриховая линия). Расчет выполнен в рамках полуклассического подхода

эволюция ядерного момента, описываемая системой уравнений (7). Эволюция продолжается до тех пор, пока прецессия электронного спина в данной реализации не синхронизируется с последовательностью импульсов накачки [8]. После этого накачка связанной электронно-ядерной системы полностью прекращается и значения ядерного момента перестают меняться. В итоге, в распределении полного спинового момента ядер сохраняются только те значе-

ния момента, которые соответствуют условию синхронизации. Это отчетливо видно на рис. 5, где показано распределение продольной компоненты ядерной поляризации J_{\parallel} (x -компоненты), рассчитанной в полуклассической модели после первого, 20-го и 500-го импульсов накачки. Как и следует ожидать, после первого импульса накачки распределение слабо отличается от нормального (см. выражение (17)), соответствующего начальному условию. К двадцатому импульсу формируется периодическая структура, которая при дальнейшей накачке усиливается, так что статистика превращается в набор дельтаобразных пиков. Анализ статистик, полученных при различных условиях накачки и параметрах системы (изменялись период накачки T_R , постоянная α , число ядер N), показал, что пики эквидистантны (с точностью до ширины пиков) и расстояние между ними определяется соотношением

$$\alpha \Delta J_{\parallel} = \frac{2\pi}{T_R}. \quad (26)$$

После достаточно быстрой структуризации ядерной статистики накачка ядерной системы прекращается и компоненты суммарного ядерного момента практически перестают меняться.

В квантовомеханической модели динамика электронно-ядерной спиновой системы рассматривается как эволюция спутанного состояния этой системы и описывается матрицей плотности. Зная элементы матрицы плотности в некоторый момент времени, можно получить информацию о распределении проекций полного спинового момента ядерной системы в этот момент. Воспользуемся для этого следующими соображениями. Введем величину

$$\mathcal{W}_{\parallel}(J) = \langle \delta(\hat{J}_{\parallel} - J) \rangle = \text{Tr}[\rho \delta(\hat{J}_{\parallel} - J)], \quad (27)$$

где в рассматриваемой геометрии $\hat{J}_{\parallel} = \hat{J}_x$. Исключительно для визуализации, сделаем также замену в уравнении (27) δ -функции на функцию Лоренца $\mathcal{L}_{\delta}(x) = \delta/[\pi(\delta^2 + x^2)]$, которая в пределе $\delta \rightarrow 0$ дает δ -функцию. Выберем δ так, чтобы ширина лоренциана была много меньше Δ_I . При этом амплитуда лоренциана будет иметь смысл вероятности реализации состояния с заданной величиной проекции полного момента J_{\parallel} .

Результаты расчета функции \mathcal{W}_{\parallel} приведены на рис. 6. На рисунке видно, что плотность распределения полного спинового момента ядерной системы дискретна, разрешенными остаются только состояния с фиксированной величиной проекции J_{\parallel} . Этот факт следует из общего положения о квантовании

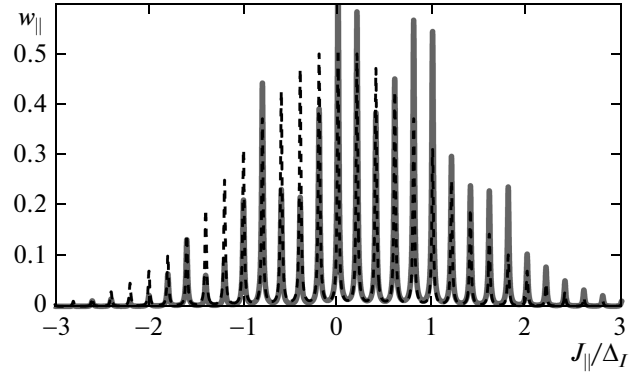


Рис. 6. Плотность распределения продольной компоненты ядерной спиновой поляризации неполяризованной системы (штриховая линия) и после сотого импульса накачки (сплошная линия), рассчитанные в квантовомеханическом подходе

углового момента [15]. Число пиков и частота их расположения зависят от числа ядер: чем больше N , тем больше пиков и тем гуще они расположены. Для неполяризованной ядерной системы огибающая пиков имеет гауссову форму, аналогично тому, как распределены классические моменты (см. рис. 5). Огибающая распределения полного спинового момента ядерной системы меняется в процессе накачки аналогично тому, как это происходит в классической статистике — в ней возникают максимумы на значениях, удовлетворяющих уравнению (26) (см. рис. 7). Однако, в отличие от классического случая, структуризация ядерной статистики происходит существенно медленнее, и при этом одновременно с формированием максимумов центр огибающей заметно смещается, т. е. происходит заметное увеличение среднего значения продольной компоненты ядерной спиновой поляризации (см. рис. 7). К десяти тысячному импульсу накачки происходит ее асимптотическое приближение к величине около $\sqrt{2}\Delta_I$, соответствующее предельной поляризации ядерной системы, возможное в модели ящика [14].

Таким образом, эволюция электронно-ядерной спиновой системы при периодической накачке в поперечном магнитном поле, рассчитанная в квантовомеханической и полуклассической моделях, оказывается различной не только количественно, но в определенном смысле и качественно.

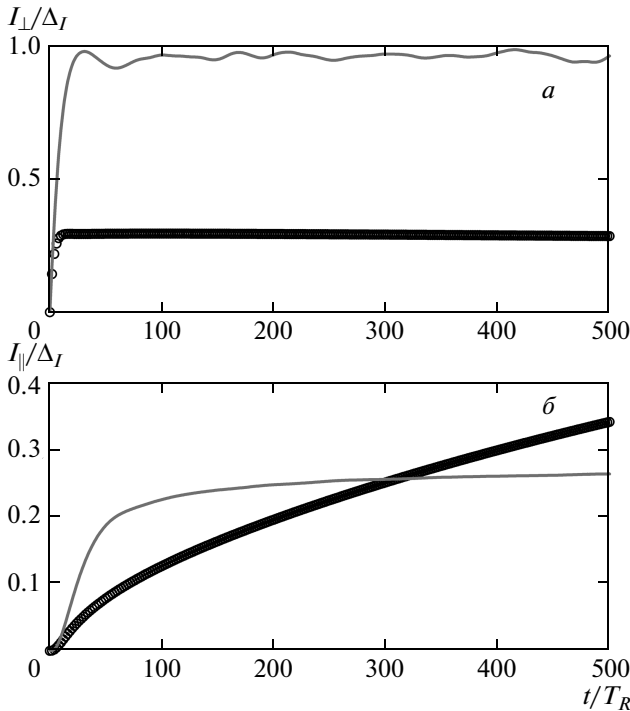


Рис. 7. Динамика компонент ядерной спиновой поляризации, поперечной внешнему полю (а) и продольной (б), рассчитанные в квантовомеханической модели (о) и полуклассической модели (—). Результаты расчета приведены в единицах флуктуации Δ_I

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение динамики связанной электронно-ядерной спиновой системы ансамбля идентичных квантовых точек в двух подходах, квантовомеханическом, основанном на численном решении уравнения Неймана, и полуклассическом, основанном на решении уравнений Блоха, описывающих прецессию средних спинов электрона и ядерной спиновой поляризации, позволяет сделать следующие выводы. Оба подхода дают не только качественное, но и количественное согласие результатов при описании воздействия на систему одиночного поляризирующего импульса. Они одинаково хорошо описывают эффект дефазировки изначально поляризованного по спину электрона за счет его взаимодействия с неполяризованной ядерной спиновой системой как в отсутствие, так и при наличии поперечного внешнего магнитного поля.

Рассчитанное в обоих моделях поведение спиновой системы под действием периодически следующих импульсов накачки в отсутствие внешнего маг-

нитного поля проявляется в практически идентичном накоплении электронной и ядерной спиновой поляризации, а также в появлении временных особенностей, обусловленных синхронизацией мод прецессии электронного спина в поле ядерных спиновых флуктуаций за счет формирования специального ядерного спинового состояния. Обе модели предсказывают также эффект синхронизации мод прецессий электронных спинов в поперечном магнитном поле при периодической накачке системы, однако здесь величина эффекта и его поведение во времени сильно различаются в двух моделях, что является следствием различной динамики компонент ядерной спиновой поляризации.

Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что хотя прецессионная модель и дает наглядное представление о поведении ядерной спиновой системы в квантовых точках, использование ее для количественного анализа результатов экспериментов по оптической накачке ядерной спиновой поляризации требует большой осторожности.

Авторы благодарят И. Я. Герловина и И. В. Игнатьева за обсуждение основных результатов работы и ценные комментарии к тексту статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования и РФФИ. Один из авторов (М. Ю. П.) благодарит фонд некоммерческих программ «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения движения спинов

Получим систему уравнений движения двух спинов, связанных между собой сверхтонким взаимодействием. Матричное представление гамильтониана сверхтонкого взаимодействия может быть записано в виде

$$H = A \sum_{\eta} S_{\eta} \otimes I_{\eta}, \tag{A.1}$$

где S_{η} (I_{η}) — матрицы η -проекции электронного спина (ядерного спина), удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[S_{\alpha}, S_{\beta}] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma}$ ($[I_{\alpha}, I_{\beta}] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} I_{\gamma}$); \otimes — знак прямого произведения; $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный тензор Леви-Чивиты; $\eta = (x, y, z)$ и аналогично для других греческих индексов. В общем виде двухчастичная матрица плотности может быть записана в виде линейной комбинации [10]

$$\begin{aligned} \rho(t) = & p_{00}(t) \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_I + \sum_{\gamma} p_{\gamma 0}(t) S_{\gamma} \otimes \mathbf{1}_I + \\ & + \sum_{\gamma} p_{0\gamma}(t) \mathbf{1}_S \otimes I_{\gamma} + \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(t) S_{\alpha} \otimes I_{\beta}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Подставляя разложение (A.2) в уравнение Неймана $i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho(t)]$ и переставляя слагаемые, можно получить

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & \frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} [p_{\gamma 0}(t) - p_{0\gamma}(t)] S_{\alpha} \otimes I_{\beta} + \\ & + \frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta}(t) [(S_{\alpha})^2 \otimes I_{\gamma} - S_{\gamma} \otimes (I_{\beta})^2] + \\ & + \frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} [p_{\beta\beta}(t) (S_{\alpha} S_{\beta}) \otimes I_{\gamma} - \\ & - p_{\alpha\alpha}(t) S_{\gamma} \otimes (I_{\alpha} I_{\beta})] - \frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta}(t) \times \\ & \times [(S_{\gamma} S_{\alpha}) \otimes I_{\alpha} - S_{\beta} \otimes (I_{\beta} I_{\gamma})]. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Определим теперь средние значения наблюдаемых величин выражениями

$$\begin{aligned} \langle S_{\gamma} \rangle = & \text{Tr}[\rho(t) \cdot S_{\gamma} \otimes \mathbf{1}_I] = \\ = & p_{\gamma 0}(t) \text{Tr}(S_{\gamma})^2 \text{Tr} \mathbf{1}_I, \quad (\text{A.4a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle I_{\gamma} \rangle = & \text{Tr}[\rho(t) \cdot \mathbf{1}_S \otimes I_{\gamma}] = \\ = & p_{0\gamma}(t) \text{Tr} \mathbf{1}_S \text{Tr}(I_{\gamma})^2, \quad (\text{A.4b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_{\gamma} \rangle = & \text{Tr}[\dot{\rho}(t) \cdot S_{\gamma} \otimes \mathbf{1}_I] = \\ = & -\frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta}(t) \text{Tr}(S_{\gamma})^2 \text{Tr}(I_{\beta})^2, \quad (\text{A.4c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{I}_{\gamma} \rangle = & \text{Tr}[\dot{\rho}(t) \cdot \mathbf{1}_S \otimes I_{\gamma}] = \\ = & \frac{A}{\hbar} \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta}(t) \text{Tr}(S_{\alpha})^2 \text{Tr}(I_{\gamma})^2. \quad (\text{A.4d}) \end{aligned}$$

Определив также

$$\langle S_{\alpha} I_{\beta} \rangle = \text{Tr}[\rho(t) \cdot S_{\alpha} \otimes I_{\beta}] = p_{\alpha\beta}(t) \text{Tr}(S_{\alpha})^2 \text{Tr}(I_{\beta})^2$$

и подставляя отсюда значение $p_{\alpha\beta}(t)$ в уравнения (A.4c) и (A.4d), нетрудно получить выражения

$$\langle \dot{S}_{\gamma} \rangle = -\frac{A}{\hbar} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle S_{\alpha} I_{\beta} \rangle, \quad (\text{A.5a})$$

$$\langle \dot{I}_{\gamma} \rangle = \frac{A}{\hbar} \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle S_{\alpha} I_{\beta} \rangle. \quad (\text{A.5b})$$

Следует отметить, что правые части этих уравнений на первый взгляд сходны с обыкновенным векторным произведением, однако таковыми не являются.

Зеemanовское взаимодействие электронного спина (ядерного спина) с внешним полем может быть

описано на языке классической прецессии магнитных моментов, связанных со спинами вокруг этого поля. Этот процесс описывается хорошо известными уравнениями Блоха:

$$\langle \dot{S}_{\gamma} \rangle = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} w_{\alpha}^e \langle S_{\beta} \rangle, \quad (\text{A.6a})$$

$$\langle \dot{I}_{\gamma} \rangle = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} w_{\alpha}^I \langle I_{\beta} \rangle, \quad (\text{A.6b})$$

где $w_{\eta}^{e(I)} = -\gamma_{e(I)} B_{\eta}$. Комбинируя эти уравнения с уравнениями (A.5a) и (A.5b), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = -\alpha \langle [\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{J}}] \rangle + [\boldsymbol{\omega}_e \times \hat{\mathbf{S}}], \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle = \alpha \langle [\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{J}}] \rangle + [\boldsymbol{\omega}_e \times \hat{\mathbf{J}}]. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Эта система уравнений является квантовым аналогом системы уравнений (7). Принципиальным отличием квантовой системы от классической является тот факт, что в уравнениях (A.7) коррелятор сверхтонкого взаимодействия $\langle [\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{J}}] \rangle$ не может быть факторизован как $[\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle \times \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle]$, в то время как в классической системе (7) сверхтонкое взаимодействие расщепляется на классическое векторное произведение $[\mathbf{S} \times \mathbf{J}]$. Такая факторизация может быть проведена для случая больших моментов, $S, J \gg 1$, и хорошо описывает динамику двух моментов с величиной порядка 10 и более, однако является весьма спорной для случая электронного спина $S = 1/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Статистика сложения моментов

Для вычисления функции $\Gamma_I^N(J)$ воспользуемся процедурой, описанной в работе Козлова [14]. Согласно правилу сложения моментов [15], аргумент J может принимать значения $J = 0, 1, \dots, NI$. Пусть функция $\Gamma_I^N(J)$ определяет количество способов получить момент равный J путем сложения N моментов I . При этом $\Gamma_I^N(J) = 0$ при $J > NI$. Добавляя к системе из N моментов еще пару моментов I , можно получить рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{N+2}(J) = & \Gamma_I^N(J - 2I) + 2\Gamma_I^N(J - 2I + 1) + \dots \\ & \dots + 2\Gamma_I^N(J - 1) + (2I + 1)\Gamma_I^N(J) + \\ & + 2I\Gamma_I^N(J + 1) + \dots + \Gamma_I^N(J + 2I) \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

при $J = 2I, \dots, IN + 1$. Ввиду громоздкости рекуррентных соотношений в общем случае, мы ограничимся здесь только приведением частного случая.

Случай $I = 1/2$ был рассмотрен в работе [14]. Для спинов $I = 3/2$ имеем

$$\Gamma_{3/2}^{N+2}(J) = \Gamma_{3/2}^N(J-3) + 2\Gamma_{3/2}^N(J-2) + 3\Gamma_{3/2}^N(J-1) + 4\Gamma_{3/2}^N(J) + 3\Gamma_{3/2}^N(J+1) + 2\Gamma_{3/2}^N(J+2), \Gamma_{3/2}^N(J+3) \quad \text{при } J = 3, \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_{3/2}^{N+2}(2) = \Gamma_{3/2}^N(0) + 3\Gamma_{3/2}^N(1) + 4\Gamma_{3/2}^N(2) + 3\Gamma_{3/2}^N(3) + 2\Gamma_{3/2}^N(4) + \Gamma_{3/2}^N(5), \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{3/2}^{N+2}(1) = \Gamma_{3/2}^N(0) + 3\Gamma_{3/2}^N(1) + 3\Gamma_{3/2}^N(2) + 2\Gamma_{3/2}^N(3) + \Gamma_{3/2}^N(4), \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{3/2}^{N+2}(0) = \Gamma_{3/2}^N(0) + \Gamma_{3/2}^N(1) + \Gamma_{3/2}^N(2) + \Gamma_{3/2}^N(3). \quad (\text{B.5})$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [14], решение можно искать в виде

$$\Gamma_{3/2}^N(J) = \int_{-\pi}^{\pi} g_I^N(\phi) e^{i\phi J} F(\phi) d\phi, \quad (\text{B.6})$$

где

$$g_I^N = (e^{-2I\phi i} + 2e^{-(2I-1)\phi i} + \dots + 2Ie^{-i\phi} + (2I+1) + 2Ie^{i\phi} + \dots + 2e^{(2I-1)\phi i} + e^{2I\phi i}). \quad (\text{B.7})$$

Можно показать, что после подстановки $F(\phi)$ в виде $F(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k e^{ik\phi}$ ненулевыми коэффициентами этого ряда оказываются лишь коэффициенты $F_0 = -F_1 = 1/(2\pi)$. Таким образом,

$$\Gamma_{3/2}^N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_I^N(\phi) e^{i\phi J} (1 - e^{i\phi}) d\phi. \quad (\text{B.8})$$

Вычисление интегралов приводит к формулам (14) и (15). Отметим также, что подобные вычисления легко могут быть обобщены на случай больших элементарных спинов $I = 5/2, I = 7/2, I = 9/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Приближенное аналитическое решение системы уравнений (7)

Полагая для удобства, что внешнее поле направлено по оси x , перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} S'_x &= \alpha(J_y S_z - S_y J_z), \\ J'_x &= \alpha(S_y J_z - J_y S_z), \\ S'_y &= \alpha J_z S_x - S_z(\alpha J_x + \omega_e), \\ S'_z &= (\alpha J_x + \omega_e) S_y - \alpha S_x J_y, \\ J'_y &= \alpha S_z J_x - J_z(\alpha S_x + \omega_n), \\ J'_z &= (\alpha S_x + \omega_n) J_y - \alpha J_x S_y. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Из двух первых уравнений видно, что проекция суммарного углового момента на направление внешнего поля сохраняется:

$$S_x(t) + J_x(t) = S_x(0) + J_x(0). \quad (\text{C.2})$$

Для удобства введем полный угловой момент

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{J}(t)$$

и следующие две величины:

$$J_+ = J_y + iJ_z, \quad L_+ = L_y + iL_z. \quad (\text{C.3})$$

Из системы (C.1) получим

$$J_+ = \frac{1}{\omega_e - \omega_n} (iL'_+ + \omega_e L_+), \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} L''_+ - i(\omega_e + \beta)L'_+ + \\ + [\alpha(\omega_e - \omega_n)J_x - \omega_e\beta]L_+ = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

где

$$\beta \equiv \alpha L_x(0) + \omega_n.$$

Фурье-анализ численного решения системы (C.1) показывает, что при достаточно малых значениях поля Оверхаузера, $\mathbf{B}_N = -\alpha \mathbf{J}/\gamma_e$, величина которого не должна превышать одной трети величины внешнего поля, $J_x(t)$ и $L_+(t)$ можно искать в виде

$$J_x = A + B \cos \delta t + C \sin \delta t, \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} L_+ &= D \cos \delta_1 t + E \sin \delta_1 t + \\ &+ F \cos(\delta - \delta_1)t + G \sin(\delta - \delta_1)t + \\ &+ H \cos(\delta + \delta_1)t + K \sin(\delta + \delta_1)t. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Здесь

$$|\delta| = |\omega_e + \alpha \mathbf{J}(0)|.$$

Неизвестные, а именно амплитуды A, B, \dots, K , частота δ_1 , а также знак δ , нужно определить. Подставляя этот анзац в систему (С.1) и в уравнение (С.5), получаем

$$B = \frac{\alpha}{\delta^2} \left\{ \alpha J_x(0) [L_y^2(0) + L_z^2(0)] - (\omega_e - \omega_n) [I_y^2(0) + I_z^2(0)] + (\omega_e - \beta) [L_y(0)J_y(0) + L_z(0)J_z(0)] \right\};$$

$$A = J_x(0) - B.$$

Здесь удобно ввести новые обозначения

$$\Gamma \equiv \omega_e + \beta, \quad \xi_1 \equiv \alpha A(\omega_e - \omega_n) - \omega_e \beta,$$

$$\xi_2 \equiv \alpha B(\omega_e - \omega_n), \quad s \equiv \text{sign}(\xi_1 \Gamma).$$

Далее имеем

$$\delta = |\omega_e + \alpha \mathbf{J}(0)| \text{sign} \xi_1; \quad \delta_1 = \left| \frac{\xi_1}{\Gamma} \right|;$$

$$C = \frac{\alpha}{\delta} [S_y(0)J_z(0) - J_y(0)S_z(0)],$$

$$E = -isD, \quad G = isF.$$

Введем еще обозначения

$$\xi_3 \equiv \alpha C(\omega_e - \omega_n),$$

$$f_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{\xi_2 - is\xi_3}{(\delta - \delta_1)^2 + s\Gamma\delta},$$

$$k_1 = -\frac{i\Gamma(\delta + \delta_1)(1 + f_1) - \frac{1}{2}(\xi_3 - is\xi_2)}{(\delta + \delta_1)^2 - \xi_1},$$

$$k_0 = \frac{i\Gamma(\delta + \delta_1)}{(\delta + \delta_1)^2 - \xi_1} L_+(0).$$

Теперь выразим оставшиеся неизвестные:

$$D = \frac{\omega_e L_+(0) - (\omega_e - \omega_n)J_+(0) + i(\delta + \delta_1)k_0}{sf_1(\delta - \delta_1) - s\delta_1 - i(\delta + \delta_1)k_1},$$

$$F = f_1 D, \quad H = L_+(0) - D - F, \quad K = k_1 D + k_0.$$

Зная $L_+(t)$, из уравнения (С.4) легко можно найти $J_+(t)$.

Еще раз подчеркнем, что это приближенное решение во избежание сильной потери точности следует использовать только в ограниченной области,

где поле Оверхаузера невелико по сравнению с внешним:

$$|\mathbf{B}_N| \leq \frac{1}{3} |\mathbf{B}| \quad (\text{С.8})$$

или, что то же самое,

$$|\alpha \mathbf{J}(0)| \leq \frac{1}{3} |\omega_e|. \quad (\text{С.8a})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spin Physics in Semiconductors*, ed. by M. I. Dyakonov, Springer-Verlag, Berlin (2008).
2. I. A. Merkulov, Al. L. Efros, and M. Rosen, *Phys. Rev. B* **65**, 205309 (2002).
3. A. V. Khaetskii, D. Loss, and L. Glazman, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 186802 (2002).
4. A. Greulich, D. R. Yakovlev, A. Shabaev et al., *Science* **313**, 341 (2006).
5. A. Greulich, A. Shabaev, D. R. Yakovlev et al., *Science* **317**, 1896 (2007).
6. J. Danon and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 056603 (2008).
7. V. L. Korenev, *Phys. Rev. B* **83**, 235429 (2011).
8. M. M. Glazov, I. A. Yugova, and Al. L. Efros, *Phys. Rev. B* **85**, 041303(R) (2012).
9. A. Imamoglu, E. Knill, L. Tian, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 017402 (2003).
10. K. A. Al-Hassanieh, V. V. Dobrovitski, E. Dagotto, and B. N. Harmon, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 037204 (2006).
11. H. Christ, J. I. Cirac, and G. Giedke, *Phys. Rev. B* **75**, 155324 (2007).
12. Y. G. Semenov and K. W. Kim, *Phys. Rev. B* **67**, 073301 (2003).
13. С. М. Рябченко, Ю. Г. Семенов, *ЖЭТФ* **84**, 1419 (1983).
14. Г. Г. Козлов, *ЖЭТФ* **132**, 918 (2007).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Теоретическая Физика, т. III, Наука, Москва (1974).
16. I. A. Yugova, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, and Al. L. Efros, *Phys. Rev. B* **80**, 104436 (2009).
17. M. Yu. Petrov, G. G. Kozlov, I. V. Ignatiev et al., *Phys. Rev. B* **80**, 125318 (2009).