

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА БЫСТРЫХ ВОЛН УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ

А. С. Кюрегян*

Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина
111250, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 июля 2011 г.

Проведен теоретический анализ поперечной неустойчивости плоского фронта быстрых волн ударной ионизации (ВУИ) в полупроводниковых структурах p^+-n-n^+ с конечной концентрацией N доноров в n -слое. Предполагалось, что высокая скорость u ВУИ обеспечивается за счет лавинного размножения однородного фона электронов и дырок, концентрация σ_b которых перед фронтом достаточно велика для применимости континуального приближения. Проблема вычисления инкремента s нарастания малого гармонического возмущения с волновым числом k сведена к задаче на собственные значения своеобразного однородного уравнения типа Вольтерра второго рода, содержащего сумму двукратных и трехкратных интегралов от неизвестной собственной функции. Эта задача решалась методом последовательных приближений. Показано, что при малых k функция $s(k)$ монотонно возрастает в соответствии с аналитической теорией [12], достигает максимума s_M при $k = k_M$, после чего уменьшается и становится отрицательной при $k > k_{01}$. Такой характер зависимости $s(k)$ коротковолновых возмущений обусловлен ослаблением искажения поля из-за конечной толщины области пространственного переноса носителей заряда и «размазыванием» возмущения концентраций за счет поперечного переноса носителей заряда. Установлены законы подобия для возмущений с $k \gtrsim k_M$: при фиксированных значениях σ_b и максимальной напряженности поля на фронте E_{0M} инкремент s зависит только от отношения k/N , а граничное волновое число $k_{01} \propto N$. Приведены зависимости от E_{0M} параметров s_M , k_M и k_{01} , определяющих динамику нарастания возмущений и верхнюю границу области неустойчивости ВУИ. Эти зависимости указывают на то, что модель плоской ВУИ оказывается недостаточной для описания работы лавинных обострителей напряжения и что в рамках континуального приближения фронты быстрых стримеров должны быть устойчивыми по отношению к поперечным возмущениям в соответствии с опубликованными ранее результатами численного моделирования. Полученные результаты подтверждены путем численного моделирования эволюции малых гармонических возмущений плоской стационарной ВУИ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Импульсный электрический пробой различных сред обычно обусловлен возникновением и распространением волн ударной ионизации (ВУИ) [1–3]. Среди них простейшими являются стационарные плоские ВУИ, которые, однако, на практике почти никогда не наблюдаются. Одна из причин этого состоит в том, что фронты плоских ВУИ оказываются неустойчивыми относительно поперечных возмущений даже в рамках полностью детерминированного континуального приближения. Именно эволюция возмущений приводит в конце концов к различным картинам импульсного пробоя, наблюдае-

мым экспериментально. Поэтому теоретический анализ условий устойчивости ВУИ и динамики развития возмущений весьма актуален.

Решению этой проблемы посвящено значительное число работ [4–12]. Наиболее общие аналитические результаты были недавно получены автором [12] при изучении устойчивости стационарных плоских ВУИ в обратно-смещенных полупроводниковых структурах p^+-n-n^+ . Было показано, что в длинноволновом пределе инкремент s нарастания гармонического поперечного возмущения увеличивается с ростом волнового числа k по закону

$$s(k) = E_{0M} u'_{0M} (k \operatorname{cth} kL - w^{-1}), \quad (1)$$

где $w = \varepsilon E_{0M} / qN$, q — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость, N — концентрация

*E-mail: ask@vei.ru, askureg@rambler.ru

доноров в n -слое, E_{0M} — максимальная напряженность поля на невозмущенном фронте, движущемся с постоянной скоростью¹⁾ u_{0M} , $u'_{0M} = \partial u_{0M} / \partial E_{0M}$, L — расстояние от фронта до электрода (сильнолегированного n^+ -слоя), в направлении которого распространяется ВУИ.

Из выражения (1) следует, что $s(0) < 0$ при $L > w$ [5]. В этом случае плоская ВУИ устойчива к поперечным возмущениям, волновое число которых меньше некоторого критического значения $k_{00} \approx L^{-1} \sqrt{3(L/w - 1)}$ [12]. В частном случае $N \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ (распространение ВУИ в однородном поле E_0 между бесконечно удаленными друг от друга плоскими электродами) из (1) следует формула

$$s(k) = kE_0u'_0,$$

полученная ранее для случая анодно-направленной ВУИ в газах [11] в рамках «минимальной модели» (учитываются дрейф, диффузия и ударная ионизация электронами, фоновые электроны отсутствуют, дополнительные механизмы ионизации среды не учитываются [13]). Если еще пренебречь и диффузией, то $u_0 = \mu_e E_0$ и $s(k) = k\mu_e E_0$, где μ_e — дрейфовая подвижность электронов. Этот результат был впервые получен в [4] (см. также [7, 8]).

Формула (1) была выведена в предположении, что фронт представляет собой эквипотенциальную поверхность, а его скорость является локальной и мгновенной функцией E_{0M} . Очевидно, эти допущения оправданы, если волновое число k возмущения и инкремент s его нарастания достаточно малы:

$$k \ll l_f^{-1}, \quad s \ll u_{0M}/l_f, \quad (2)$$

где полная толщина фронта $l_f = l_i + l_{si} + l_s$ равна сумме толщин трех качественно различных областей, Ω_i , Ω_{si} и Ω_s (рис. 1). В лидирующей области Ω_i происходит лавинное размножение электронов и дырок (или ионов в газах), концентрация которых увеличивается на много порядков, но остается недостаточной для заметного искажения поля. Именно процессы в области Ω_i главным образом определяют скорость фронта. В области Ω_s сосредоточен почти весь заряд фронта, который подавляет поле настолько, что ударная ионизация пренебрежимо мала. Между ними расположена промежуточная область Ω_{si} , в которой поле близко к максимальному и важны оба эти эффекта.

¹⁾ Ее следует вычислять с помощью теории стационарных плоских ВУИ в газах [3, 13] (при $N = 0$) или полупроводниках [14, 15].

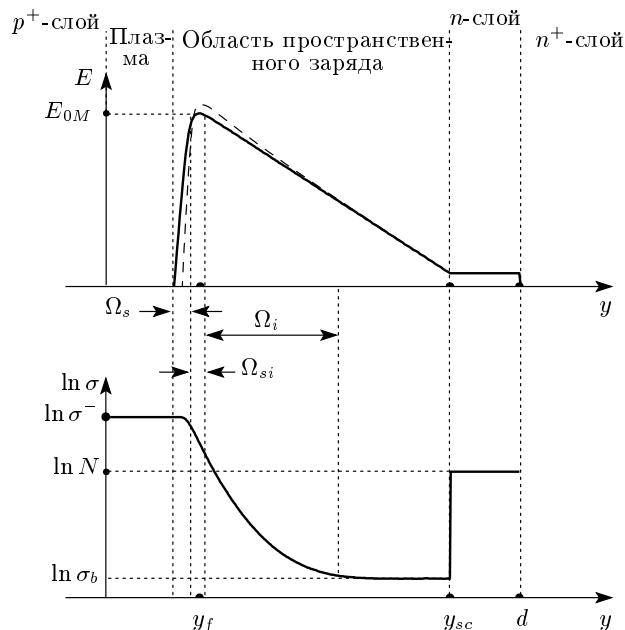


Рис. 1. Распределения электрического поля $E(y)$ и концентрации носителей заряда $\sigma(y)$ на оси $x = 0$ в n -слое структуры p^+n-n^+ при распространении невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (штриховая линия) быстрой ВУИ. Вертикальными пунктирными линиями обозначены границы между различными областями

При больших k начинают проявляться механизмы, подавляющие рост возмущения: «короткодействие» искривления фронта, заметно искажающего поле в области Ω_i лишь на расстоянии менее или порядка $1/k$ от Ω_s , ослабление искажения поля за счет конечной толщины $l_{si} + l_s$ областей пространственного заряда Ω_{si} , Ω_s и, наконец, поперечный перенос носителей заряда, «размазывающий» возмущение концентраций. Вследствие этого линейный рост функции $s(k)$ замедляется, она достигает максимума s_M при $k = k_M \sim 1/l_f$, а далее уменьшается и становится отрицательной при $k > k_{01}$. Именно знание величин s_M , k_M и k_{01} , определяющих эволюцию возмущения и условия устойчивости плоских фронтов, особенно важно.

Однако, как и в большинстве подобных случаев, получить аналитические формулы для закона дисперсии при $k \gtrsim 1/l_f$ не удастся, поскольку для этого нужно решать весьма сложные линеаризованные краевые задачи на собственные значения. Авторами работы [11] это было сделано численными методами с использованием функций Эванса для «минимальной модели» ВУИ в однородном поле E_0 в газах. Полученные в [11] зависимости $s(k)$ хорошо описы-

ваются эмпирической формулой

$$s(k) = kE_0u'_0 \frac{k_{01} - k}{k_{01} + ka}, \quad (3)$$

где k_{01} и a — подгоночные параметры, зависящие от кинетических коэффициентов электронов в поле E_0 . Оказалось [12], что эта формула обеспечивает приемлемую точность и для «минимальной модели» ВУИ в полупроводниках, если надлежащим образом [14] учесть биполярность переноса и ударной ионизации. Таким образом, задачу о неустойчивости медленных ВУИ, описываемых в рамках «минимальной модели» (и поэтому распространяющихся со скоростью, лишь немного превосходящей среднюю скорость $v(E_0)$ носителей заряда, дрейфующих в том же направлении [3, 13, 14]), можно считать решенной. Результаты работ [11, 12], в частности, позволяют объяснить неустойчивость фронта с малой кривизной, обнаруженную при численном моделировании начальной стадии эволюции стримеров в газах [16–18] и полупроводниках [19].

Однако область применимости этих результатов крайне ограничена. Действительно, в наиболее интересных и практически важных случаях [1–3] перед фронтом присутствуют изначально или появляются за счет дополнительных (кроме ударного) механизмов ионизации среды (например, фотоионизации или межзонного туннелирования) затравочные носители заряда. Вследствие этого толщина l_i области Ω_i определяется законом уменьшения напряженности поля перед фронтом и может быть очень большой, скорость фронта $u_{0M} \gg v_{0M}$ и зависит не только от E_{0M} , но и от всего распределения поля $E(y)$ перед фронтом. Если $l_i \gg l_{si}, l_s$, то именно это обстоятельство следует учитывать в первую очередь, вычисляя $s(k)$ при $k \sim 1/l_f$, что и было сделано в работе [12] для случая равных коэффициентов α ударной ионизации и дрейфовых скоростей v электронов и дырок. Оказалось, что если перед фронтом имеется однородный фон электронов и дырок, то при $u_{0M} \gg v_{0M}$ вместо (1) получается закон дисперсии

$$s(k) = E_{0M}u'_{0M} (k \operatorname{cth} kL - w^{-1}) - u_{0M}k^2 w f(kw), \quad (4)$$

где последнее слагаемое с функцией

$$f(K) = \int_0^{E_{0M}} \operatorname{sh} \left[K \left(\frac{L}{w} - 1 + \frac{E}{E_{0M}} \right) \right] \times \\ \times \alpha(E) dE \left[\operatorname{sh} \left(K \frac{L}{w} \right) \int_0^{E_{0M}} \alpha(E) dE \right]^{-1}$$

учитывает «короткодействие» искривления фронта и приводит к насыщению зависимости $s(k)$ при $\exp(kw) \gg 1$ (см. ниже рис. 4). Формула (4) существенно уточняет и обобщает ранние работы по неустойчивости быстрых ВУИ [5, 6], авторы которых ограничились анализом возмущений с $k \rightarrow 0$, ошибочно считая их самыми быстронарастающими. Однако она неприменима для описания эволюции коротковолновых возмущений с $1/k \lesssim l_{si} + l_s$ и, следовательно, для определения самых важных параметров s_M, k_M и k_{01} закона дисперсии. Их можно вычислить лишь на основе теории, учитывающей конечность толщин l_{si}, l_s , поперечный перенос носителей заряда и инерционность процесса нарастания возмущения. Решению этой задачи для быстрых ВУИ в полупроводниках посвящена настоящая работа. Показано, что характер зависимости $s(k)$ остается таким же, как и в случае медленных ВУИ [11, 12], но есть и существенные отличия. Во-первых, характерные волновые числа k_M и k_{01} оказываются значительно (примерно в u_{0M}/v_{0M} раз) меньшими. Во-вторых, нарастающие зависимости параметров s_M, k_M, k_{01} от E_{0M} [11, 12] сменяются убывающими. Эти результаты приводят к двум важным заключениям о неприменимости как модели плоской ВУИ для описания работы уникальных по своим характеристикам коммутаторов — лавинных обострителей напряжения [20, 21], — так и континуального приближения для объяснения наблюдаемого экспериментально ветвления быстрых стримеров.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим эволюцию возмущения фронта плоской стационарной ВУИ, распространяющейся с постоянной скоростью u_{0M} в перенапряженной обратно-смещенной структуре $p^+ - n - n^+$ вдоль оси y в направлении n^+ -слоя (см. рис. 1). Будем считать, что дополнительные механизмы ионизации (кроме ударной) отсутствуют, а ВУИ распространяется за счет лавинного размножения фоновых электронов и дырок, концентрация которых σ_b далеко перед фронтом достаточно велика для применимости континуального приближения. В этом случае толщина фронта оказывается настолько большой, что можно пре-

небредь диффузией электронов и дырок. Соответствующие оценки приведены в работе [15]. Распределения электронов $n(t, \mathbf{r})$ и дырок $p(t, \mathbf{r})$ описываются системой уравнений непрерывности, которые при указанных выше допущениях удобно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) = 2\alpha v\sigma, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{v}\sigma) = 0, \quad (6)$$

где $\sigma = n+p$, $\rho = n-p$, $\mathbf{v} = \mu(E)\mathbf{E}$, $\alpha = \tilde{\alpha} \exp(-\tilde{E}/E)$ и $\mu(E) = v_s/(E + E_s)$ — коэффициенты ударной ионизации и дрейфовые подвижности электронов и дырок, которые для простоты считаются равными²⁾, $\tilde{\alpha}$, \tilde{E} , v_s и E_s — константы материала, $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla\varphi$, φ — электрический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\varepsilon}(\rho - \rho_N), \quad (7)$$

$$\rho_N = \begin{cases} N, & 0 < y < y_{sc}, \\ 0, & y_{sc} < y < d, \end{cases}$$

y_{sc} — граница между областью пространственного заряда и нейтральной областью $y_{sc} < y < d$ (которая может существовать на начальной стадии распространения ВУИ при достаточно большой толщине n -слоя [6]) или областью $y_{sc} = d$ (если нейтральной области нет).

При анализе неустойчивости ВУИ мы, как обычно, используем систему координат (x, z) , движущуюся вместе с невозмущенным фронтом, и будем искать решения системы уравнений (5)–(7) в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma(t, \mathbf{r}) \\ \rho(t, \mathbf{r}) \\ \varphi(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0(z) \\ \rho_0(z) \\ \varphi_0(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1(z) \\ \rho_1(z) \\ \varphi_1(z) \end{pmatrix} \times \exp\left(ikx + \int_0^t s dt\right), \quad (8)$$

где $z = (y - y_{f0} - u_{0M}t)/w$, y_{f0} — положение плоскости, на которой невозмущенное поле $E_0(y)$ максимально в момент времени $t = 0$, индексом «1» обозначены начальные амплитуды малых поперечных

возмущений. Невозмущенные распределения σ_0, ρ_0 и φ_0 описываются системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_{0M}\sigma_0 - v_0\rho_0) = 2\alpha_0 v_0 \sigma_0 w, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_{0M}\rho_0 - v_0\sigma_0) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = \frac{q}{\varepsilon}(\rho_0 - \rho_N)w^2 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_0(z_{sc}) &= \sigma_b, & \rho_0(z_{sc}) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_0(0)}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial \varphi_0(z_{sc})}{\partial z} &= -E_{0M}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$z_{sc} = (y_{sc} - y_{f0} - u_{0M}t)/w, \quad v_0 = v(E_0(z)),$$

$$\alpha_0 = \alpha(E_0(z)).$$

Таким образом, мы подразумеваем, что при $z \gtrsim z_{sc}$ напряженность поля настолько мала, что ударной ионизацией можно пренебречь, и поэтому $\rho = 0$.

Общее решение этой краевой задачи было получено в работе [15] для произвольной зависимости $v(E)$ и любой величины отношения $u_{0M}/v_{0M} > 1$. Однако здесь нас интересуют в первую очередь быстрые ВУИ, распространяющиеся со скоростью $u_{0M} \gg v_{0M}$. Это сильное неравенство позволяет использовать еще два существенных упрощения. Во-первых, распространение стационарной ВУИ сопровождается протеканием через структуру постоянного тока с плотностью $j = qNu_{0M} \gg qNv_s$, поэтому везде перед фронтом (в том числе и в нейтральной области $y_{sc} < y < d$, если таковая существует) напряженность поля значительно больше E_s и дрейфовая скорость v практически не зависит от E . Так как обычно $E_s < 0.1E_{0M}$, то $v \approx v_s$ почти везде внутри фронта за исключением переходной области на его задней границе, где плотность объемного заряда резко уменьшается от $q\rho_0^-$ до нуля. Толщина этой области примерно в E_s/E_{0M} меньше l_s [15], поэтому ее влияние на распространение волны пренебрежимо мало и можно считать, что везде с хорошей точностью $v \approx v_s$. Использование этого приближения не позволяет вычислить напряженность поля E_0^- за фронтом. Однако обычно $E_0^- \lesssim 0.1E_s$ [15], поэтому будем считать, что $E_0^- = 0$ и потенциал φ_0 на задней границе фронта $z = -\mathcal{L}^-$ равен нулю. Во-вторых, интегрирование выражения (10) приводит к соотношению

²⁾ Учет различия между кинетическими коэффициентами электронов и дырок сильно усложняет все формулы, но не дает ничего качественно нового.

$$\sigma_0 = \frac{u_{0M}}{v_s} \rho_0 + \sigma_b, \quad (13)$$

из которого следует, что второе слагаемое в левой части уравнения (9), описывающее изменение σ за счет дрейфа, оказывается меньше первого в $(v_s/u_{0M})^2$ раз и при $u_{0M} \gg v_s$ может быть отброшено³⁾. В этом случае решение краевой задачи (9)-(12) в области $z < z_{sc}$ представимо в виде [15]

$$\sigma_0(z) = N \frac{u_{0M}}{v_s} \exp \left[-\frac{A}{\tilde{\alpha}} \int_0^z \alpha(E_0(z)) dz \right], \quad (14)$$

$$z = \frac{1}{E_{0M}} \int_{E_0}^{E_{0M}} \frac{dE}{1 - e^{-\tau}}, \quad (15)$$

где $A = 2\varepsilon\tilde{\alpha}E_{0M}v_s/qNu_{0M}$, $\tau = \tau(E)$ — положительный (при $z > 0$) или отрицательный (при $z < 0$) корень уравнения

$$\tau - 1 + e^{-\tau} = \frac{A}{\tilde{\alpha}E_{0M}} \int_E^{E_{0M}} \alpha dE. \quad (16)$$

Максимальная напряженность E_{0M} поля на фронте связана с его скоростью u_{0M} и плотностью $q\rho_0^-$ объемного заряда за фронтом соотношениями

$$\ln \left(\frac{Nu_{0M}}{\sigma_b v_s} \right) - 1 = \frac{A}{\tilde{\alpha}E_{0M}} \int_0^{E_{0M}} \alpha dE = 2 \frac{\rho_0^-}{N}, \quad (17)$$

а задняя граница фронта, определяемая при $v(E) = v_s$ из условия $E_0(z < 0) = 0$, расположена в плоскости

$$z = -\mathcal{L}^- \equiv \frac{1}{E_{0M}} \int_0^{E_{0M}} \frac{dE}{1 - e^{-\tau}}, \quad \tau < 0. \quad (18)$$

Важно отметить, что в актуальном диапазоне значений $E_{0M} = (0.2-1.0)\tilde{E}$ и $\sigma_b = 10^8-10^{10}$ см⁻³ безразмерная толщина $\mathcal{L}^- = 0.100 \pm 0.015$ очень слабо зависит от параметров задачи.

Подстановка (8) в уравнения (5)-(7) и линеаризация по амплитудам возмущений приводит с учетом (9)-(12) к системе уравнений

$$\frac{d\sigma_1}{dz} + \left(2\alpha_0 w \frac{v_s}{u_{0M}} - S \right) \sigma_1 = -2 \frac{v_s}{u_{0M}} \sigma_0 \alpha'_0 \frac{d\varphi_1}{dz}, \quad (19)$$

³⁾ В этом приближении (ранее оно использовалось при построении теории быстрых стримеров [22] и экспоненциально-автомодельных ВУИ [23]) величина σ изменяется только за счет ударной ионизации, а роль дрейфа сводится к образованию объемного заряда, подавляющего поле за фронтом.

$$\frac{d\rho_1}{dz} - S\rho_1 = \frac{v_s}{u_{0M}} \frac{d\sigma_1}{dz} - K^2 \sigma_0 \frac{v_s}{u_{0M}} \frac{\varphi_1}{wE_0}, \quad (20)$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} - K^2\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon} \rho_1 w^2 \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_1(z_{sc}) = 0 = \rho_1(z_{sc}), \\ \varphi_1(\mathcal{L}^+) = 0 = \varphi_1(-\mathcal{L}^-), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\alpha'_0 = \left. \frac{d\alpha}{dE} \right|_{E=E_0}, \quad \mathcal{L}^+ = \frac{L}{w} = \frac{d - y_{f0} - u_{0M}t}{w}$$

и введены безразмерные волновое число $K = kw$ и инкремент $S = sw/u_{0M}$. Второе слагаемое в правой части уравнения (20) описывает «расплывание» возмущения ρ за счет дрейфа в поперечном поле. Последнее из условий (22) задано на невозмущенной задней границе фронта. Учет ее искривления приводит к квадратичной по амплитудам возмущения поправке к $\varphi_1(-\mathcal{L}^-)$ вследствие того, что в области Ω_s

$$E_0 = q\rho_0^- w(\mathcal{L}^- + z)/\varepsilon.$$

Пренебрежение вторым слагаемым в левой части уравнения (5) по сравнению со первым⁴⁾ «отщепляет» уравнение (19) от уравнения (20) и позволяет решать их последовательно. Пренебрежение слагаемыми порядка $|v - v_s|/v_s \sim E_s/E_0$ существенно упрощает уравнение (20), а также позволяет считать границу $y = y_{sc}$ плоской даже при наличии возмущения и вследствие этого использовать уравнение (21) во всей области $-\mathcal{L}^- < z < \mathcal{L}^+$.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Выполняя формальные решения уравнений (19)-(21) с граничными условиями (22) легко получить следующие интегральные соотношения между искомыми функциями $\sigma_1(z)$, $\rho_1(z)$ и $\varphi_1(z)$:

$$\sigma_1(z) = 2\sigma_0 \frac{v_s}{u_{0M}} \int_z^{z_{sc}} \alpha'_0 \frac{d\varphi_1}{dz'} \exp[S(z - z')] dz', \quad (23)$$

$$\rho_1(z) = \rho_1(-\mathcal{L}^-) R(K, S, z), \quad (24)$$

⁴⁾ Это можно делать, так как, очевидно, соотношение между ними сохраняется по порядку величины и при наличии малого возмущения.

$$\varphi_1(z) = \frac{q}{\varepsilon} \rho_1(-\mathcal{L}^-) w^2 \Phi(K, z), \quad (25)$$

где

$$R(K, S, z) = \frac{v_s}{u_{0M} \rho_1(-\mathcal{L}^-)} \times \int_z^{z_{sc}} \left(K^2 \sigma_0 \frac{\varphi_1}{E_0 w} - \frac{d\sigma_1}{dz'} \right) \exp[S(z - z')] dz',$$

$$\Phi[K, z, R(K, S, z)] = f(K, S, z) - \{f(K, S, -\mathcal{L}^-) \times \text{sh}[K(\mathcal{L}^+ - z)] + f(K, S, \mathcal{L}^+) \text{sh}[K(\mathcal{L}^- + z)]\} \times \{ \text{sh}[K(\mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-)] \}^{-1},$$

$$f(K, S, z) = \frac{1}{K} \int_0^z R(K, S, z') \text{sh}[K(z - z')] dz'.$$

Подстановка выражений (23) и (25) в (24) приводит после несложных преобразований к задаче на собственные значения S однородного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода,

$$R(K, S, z) = \mathfrak{F}[K, S, z, R(K, S, z)], \quad (26)$$

$$R(K, S, -\mathcal{L}^-) = 1,$$

где

$$\mathfrak{F}[K, S, z, R] = \frac{Av_s E_{0M}}{Nu_{0M} \tilde{\alpha}} \exp(Sz) \times \left[\sigma_0 \int_z^{z_{sc}} \alpha'_0 \frac{d\Phi}{dz'} \exp(-S z') dz' + \int_z^{z_{sc}} \left(\frac{K^2 \tilde{\alpha}}{AE_0} \Phi \exp(-S z') - S \int_{z'}^{z_{sc}} \alpha'_0 \frac{d\Phi}{dz''} \exp(-S z'') dz'' \right) \sigma_0 dz' \right].$$

Его своеобразие состоит в том, что функционал $\mathfrak{F}[K, S, z, R]$ представляет собой сумму двукратных и трехкратного интегралов от неизвестной собственной функции $R(K, S, z)$. Задача (26) решалась методом последовательных приближений с помощью рекуррентной формулы

$$R_{m+1}(K, S_m, z) = \mathfrak{F}[K, S_m, z, R_m(K, S_{m-1}, z)], \quad (27)$$

где S_m — корень уравнения

$$1 = \mathfrak{F}[K, S_m, -\mathcal{L}^-, R_m(K, S_{m-1}, z)]. \quad (28)$$

В качестве нулевого приближения $\hat{R}_0(z)$ можно выбрать любую правдоподобную функцию, например, $\hat{R}_0(z) = \rho_0(z)/\rho_0^-$ или приближенное решение, полученное ранее для близких, но иных значений параметров K и/или E_{0M} . Процедура вычислений состояла в следующем. Вся область $-\mathcal{L}^- \leq z \leq \mathcal{L}^+$ разбивалась на M равных отрезков (z_i, z_{i+1}) . На первом этапе для каждой точки z_i вычислялись значения $E_0(z)$, $\sigma_0(z)$ и $\Phi_0[k, z_i, \hat{R}_0(z)]$, которые интерполировались кубическими сплайнами $\hat{E}_0(z)$, $\hat{\sigma}_0(z)$ и $\hat{\Phi}_0(z)$. Эти сплайны использовались для вычисления S_0 и $R_1(K, S_0, z_i)$ по формулам (28) и (27). Значения $R_1(K, S_0, z_i)$ также интерполировались кубическим сплайном $\hat{R}_1(z)$, который использовался для вычисления следующих приближений $\hat{\Phi}_1(z)$, S_1 и $\hat{R}_2(z)$ соответственно функционала $\Phi[K, z, R(K, S, z)]$, собственного значения $S(K)$ и собственной функции $R(K, S, z)$. После каждого такого цикла вычислялись величины

$$\delta_S^m = \left| \frac{S_m}{S_{m-1}} - 1 \right|, \quad \delta_R^m = \left\langle \left| \frac{R_m(z_i)}{R_{m-1}(z_i)} - 1 \right| \right\rangle_i,$$

характеризующие сходимость последовательностей S_m и $\hat{R}_m(z)$ к точным собственным значениям $S(K)$ и собственным функциям $R(K, S, z)$. Эти величины сначала уменьшались приблизительно по экспоненте $\exp(-m/m_0)$ с $m_0 = 4-6$, но при достаточно больших значениях m переставали изменяться. Минимально достижимые погрешности δ_S^{min} и δ_R^{min} , очевидно, определяются точностью использованных интерполяций, т. е. числом M . Типичный пример такой зависимости, полученный при $M = 400$ приведен на рис. 2. В этом случае насыщение происходит при $m \approx 20$ и $\delta_{R,S}^{20} \lesssim 0.002$, так что различия между истинными значениями S, R и S_{20}, \hat{R}_{20} , равные $\delta_{R,S}^{20} [1 - \exp(-1/m_0)]^{-1}$, составляют примерно 1%.

Для вычисления значений K_{00} и K_{01} , определяющих нижнюю и верхнюю границы области неустойчивости фронта, использовалась аналогичная процедура. Различие состояло в том, что мы заранее полагали $S = 0$ в (26) и считали волновое число искомым собственным значением, которое в каждом цикле определялось как корень уравнения

$$\mathfrak{F}[K_m, 0, -\mathcal{L}^-, R_m(K_{m-1}, 0, z)] = 1.$$

В рамках принятой нами модели эволюция возмущения, вообще говоря, определяется тремя постоянными параметрами E_{0M}, N, σ_b и расстоянием L от фронта до n^+ -слоя, линейно уменьшающимся со временем. Однако если $\exp(kL) \gg 1$ (как будет показано в следующем разделе, то это неравенство

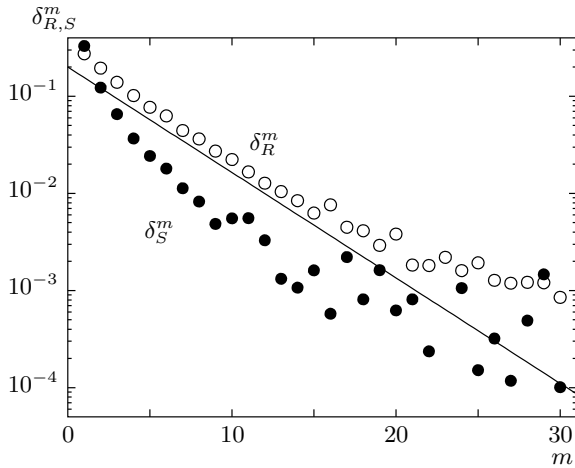


Рис. 2. Зависимости δ_R^m и δ_S^m от номера m цикла, полученные при решении задачи на собственные значения интегрального уравнения (26) методом последовательных приближений для значений $E_{M0} = 0.4\tilde{E}$ и $K = K_M = 11.0$ при нулевом приближении $R_0(z) = \rho_0(z)/\rho_0^-$ и $M = 400$; прямая — $0.2 \exp(-m/4)$

выполняется при наиболее актуальных значениях $k \gtrsim k_M$, то функционал $\Phi[K, z, R(K, S, z)]$ практически не зависит от \mathcal{L}^+ и уравнение (26) не содержит концентрацию N в явном виде. Вследствие этого собственные функции $R(K, S, z)$ и собственные значения $S(K)$ (или K_{01} при $S = 0$) также не зависят от N и L (а, значит, и от времени), т. е. выполняются законы подобия⁵⁾

$$s = \Psi_S(E_{0M}, \sigma_b, k/N), \quad k_{01} = N\Psi_K(E_{0M}, \sigma_b). \quad (29)$$

Этот результат является следствием двух принятых нами упрощений. Во-первых, пренебрегая слагаемыми порядка $(v_s/u_{0M})^2$, мы получаем соотношение $u_{0M} \propto 1/N$, которое следует из (17) и обеспечивает независимость входящих в (26) функций $E_0(z)$, $\sigma_0(z)$ и безразмерной длины \mathcal{L}^- от N (см. выражения (14)–(16), (18)). Во-вторых, полагая поле $E_0(z_{sc})$ достаточно малым, мы пренебрегаем очень слабой ударной ионизацией в области $z \gtrsim z_{sc}$ и тем самым фактически исключаем зависимость функционала $\mathfrak{F}[K, S, z, R]$ от верхних пределов интегрирования z_{sc} . По мере приближения фронта к n^+ -слою условие $\exp(kL) \gg 1$ нарушается, а напряженность поля при $z \gtrsim z_{sc}$ увеличивается настолько, что ударная ионизация в этой области становится существен-

ной. Поэтому законы подобия выполняются только на начальной стадии распространения ВУИ, когда расстояние z_{sc} от фронта до границы области пространственного заряда с нейтральной частью n -слоя (если таковая существует) или с n^+ -слоем достаточно велико.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Описанный выше метод последовательных приближений использовался для вычисления собственных функций и собственных значений уравнения (26) при актуальных значениях $E_{0M} = (0.25-0.85)\tilde{E}$, $\mathcal{L}^+ = 0.7-1.3$ и $N = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Пересчет собственных значений для других N осуществляется с помощью законов подобия (29). От величины σ_b результаты зависят логарифмически слабо⁶⁾, поэтому большинство расчетов выполнялось при $\sigma_b = 10^9 \text{ см}^{-3}$. Для вычисления постоянной A и перехода к размерным величинам использовались обычные значения параметров: $\varepsilon = 11.8\varepsilon_0$, $v_s = 10^7 \text{ см/с}$, $\tilde{\alpha} = 10^6 \text{ см}^{-1}$, $\tilde{E} = 1.5 \text{ МВ/см}$.

Типичные примеры полученных таким образом приближенных решений приведены на рис. 3. Как и следовало ожидать, амплитуды возмущений уменьшаются экспоненциально по мере удаления от фронта в сторону n^+ -слоя, причем тем быстрее, чем больше K . Очевидно, это обусловлено короткодействием возмущения плотности объемного заряда, который сосредоточен главным образом в областях Ω_s , Ω_{si} и существенно искажает поле лишь на расстояниях $z \lesssim 1/K$. Возмущение напряженности поля $d\Phi/dz$ положительно перед фронтом на оси x , что и приводит к экспоненциальному нарастанию со временем σ_1 и ρ_1 . При уменьшении z функция $d\Phi/dz$ сначала растет, достигает максимума \mathcal{E}_M в точке $z = z_M$, после чего быстро убывает и становится отрицательной при некотором $z > -\mathcal{L}^-$. Ослабление поля на оси x вблизи задней границы фронта приводит к ее искривлению, которое, как уже отмечалось, не оказывает влияния на развитие возмущения в линейном приближении. Однако положение поверхности $z = z_M$ оказывается существенным. На рис. 3б видно, что $z_M > 0$ при малых k и $z_M < 0$ при больших k , т. е. в обоих этих случаях наибольшее усиление поля происходит там, где $E_0(z)$ заметно меньше E_{0M} . В то же время существует некоторое промежуточное значение $k \approx k_M$, при котором $z_M = 0$ и больше все-

⁵⁾ Нетрудно убедиться, что первый из них следует также из (4), поскольку (см. (17)) отношение u'_{0M}/u_{0M} не зависит от N .

⁶⁾ Изменение σ_b в пределах $10^8-10^{10} \text{ см}^{-3}$ приводит к уменьшению значений S_M и K_{01} примерно на 25%.

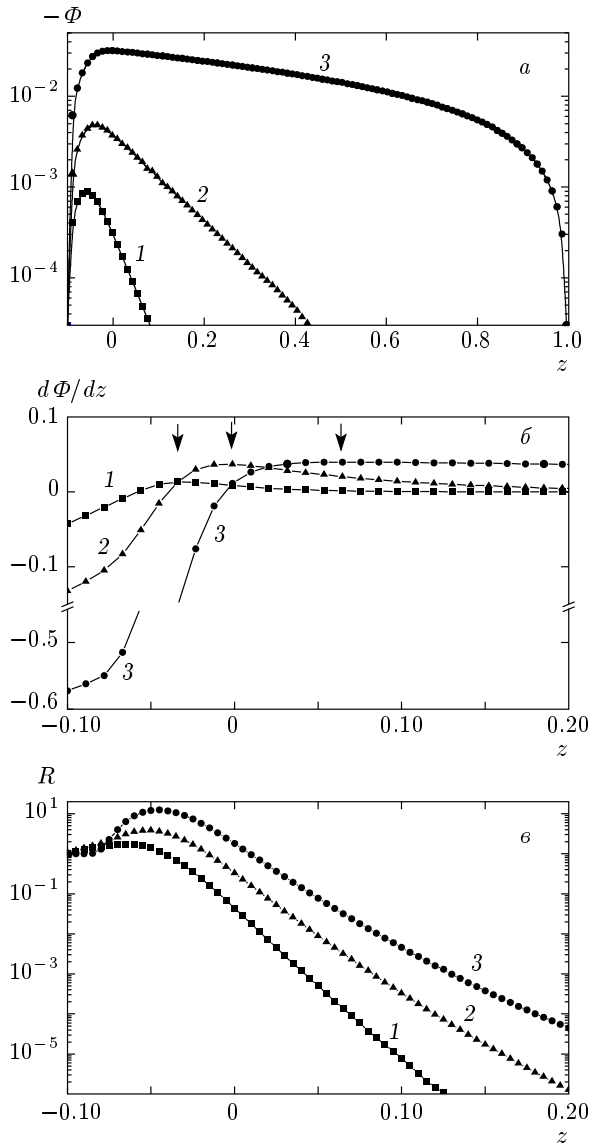


Рис. 3. Нормированные распределения амплитуд возмущения потенциала (а), напряженности поля (б) и плотности объемного заряда (в) при $E_{M0} = 0.4\tilde{E}$, $L/w = 1$ и значениях $K = K_{01} = 28.5$, $S = 0$ (кривые 1), $K = K_M = 11.0$, $S = 5.92$ (кривые 2) и $K = 1.0$, $S = 0.41$ (кривые 3). Вертикальными стрелками указаны положения z_M максимумов функции $d\Phi/dz$

го увеличивается именно максимальная напряженность поля. Естественно, что при почти таком же значении k инкремент нарастания достигает максимума s_M . Амплитуда возмущения плотности объемного заряда экспоненциально увеличивается при уменьшении z до тех пор, пока существенна удар-

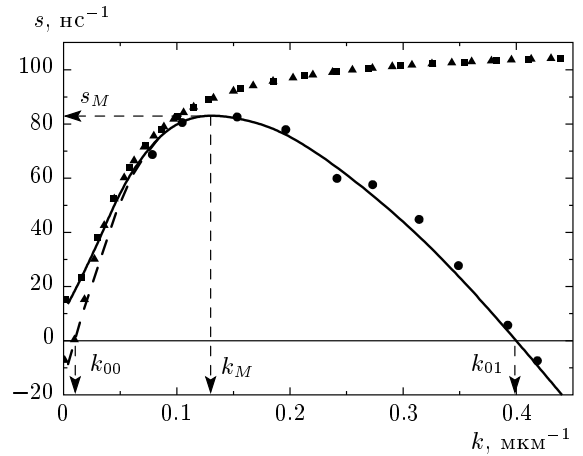


Рис. 4. Зависимости инкремента s нарастания поперечного возмущения ВУИ от волнового числа k для $N = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $E_{0M} = 0.43 \text{ МВ/см}$, $w = 95 \text{ мкм}$, $u_f = 8.05 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ при $L/w = 0.745$ (сплошная линия, кружки, квадраты) и $L/w = 1.2$ (штриховая линия, треугольники). Линии — результаты решения задачи на собственные значения интегрального уравнения (26), треугольники и квадраты — расчет по формуле (1), кружки — результаты численного моделирования эволюции возмущения

ная ионизация, т. е. примерно до границы между областями Ω_s и Ω_{si} . После этого ρ_1 начинает уменьшаться за счет поперечного дрейфа и (если $s > 0$) экспоненциального нарастания возмущения по мере продвижения фронта, которое описывается множителем $\exp(Sz)$ в (26).

Пример зависимостей $s(k)$ для двух значений отношения L/w приведен на рис. 4. Как видно, при $k < 0.1 \text{ мкм}^{-1}$ они практически совпадают с результатами аналитической теории [12], но при больших k различия становятся принципиальными. Максимум $s_M \approx 83 \text{ нс}^{-1}$ достигается при длине волны возмущения $\lambda = 2\pi/k_M \approx 48 \text{ мкм}$, почти в два раза меньшей w , а возмущения с $\lambda < 2\pi/k_{01} \approx 16 \text{ мкм}$ затухают. Для других значений E_{0M} основные параметры закона дисперсии K_M, K_{01} и S_M приведены на рис. 5. Как видно, все они монотонно уменьшаются с ростом E_{0M} . Причина этого состоит в том, что волновые числа $k_{M,01}$, очевидно, должны уменьшаться с ростом l_f . В нашем случае⁷⁾ $l_s + l_{si} \approx w\mathcal{L}^-$, а $l_i \approx wE_{0M}/\tilde{E}$, поэтому полная толщина фронта

⁷⁾ В этом отношении рассматриваемые нами быстрые ВУИ принципиально отличаются от медленных, толщина фронта которых не только очень мала, но и уменьшается с ростом E_{0M} . Именно по этой причине в работах [11, 12] получились возрастающие зависимости $k_{M,01}(E_{0M})$.

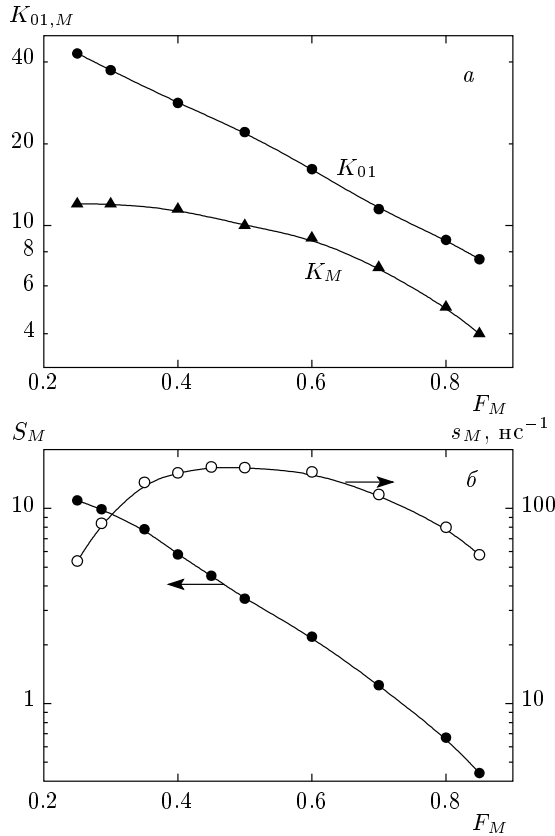


Рис. 5. Зависимости приведенных волновых чисел K_{01} и K_M (а) и максимального инкремента нарастания поперечного возмущения S_M (б) от максимальной напряженности поля на фронте $F_M = E_{0M}/\tilde{E}$

$l_f \approx (\mathcal{L}^- + E_{0M}/\tilde{E})w$ и увеличивается с ростом E_{0M} быстрее, чем w . Кроме того, в относительно слабых полях функция $\alpha(E)$ резко экспоненциальна, поэтому даже небольшое усиление поля приводит к значительному увеличению темпа ионизации и, следовательно, к нарастанию возмущения. В очень сильных полях этот эффект существенно ослабляется из-за насыщения зависимости $\alpha(E)$, что является дополнительным фактором, замедляющим развитие неустойчивости.

Особенно сильно с ростом E_{0M} уменьшается безразмерный инкремент $S_M = s_M w / u_{0M}$ нарастания самых быстрых возмущений, поскольку он содержит в своем определении быстрорастущий делитель u_{0M} . Так как обычно толщина n -слоя $d \sim w$, за время $t_d = d/u_{0M}$ продвижения фронта через весь n -слой амплитуда возмущения увеличивается примерно в $\exp(S_M)$ раз. Это означает, что рассматрива-

емый нами тип неустойчивости особенно важен в относительно слабых полях ($S_M > 5$ при $E_{0M} < 0.4\tilde{E}$, см. рис. 5б), тогда как в сильных полях величина $S_M < 1$ и даже самое быстрое возмущение фактически не успевает развиваться. Эти результаты приводят к двум важным заключениям.

Во-первых, типичный кремниевый лавинный обостритель напряжения работает при таких условиях, что $E_{0M} = (0.2-0.3)\tilde{E} = (3.0-4.5)$ кВ/см и $w \approx 200$ мкм [24]. Поэтому амплитуда начального возмущения с $k \sim k_M$ должна (в линейном приближении) увеличиться в $2 \cdot 10^4$ раз за время t_d (см. рис. 5а). Это возмущение может быть вызвано, в частности, статистическими флуктуациями концентрации фоновых носителей заряда, которые приводят к дисперсии $0.01\sigma_b w^3$ распределения числа электронов и дырок в кубе со стороной $w = 200$ мкм при $\sigma_b = 10^9$ см $^{-3}$. Кроме того, технологическая неоднородность легирования n -слоя вполне может обеспечить изменения E_{0M} более чем на 0.2% (при этом неоднородность темпа ионизации будет в \tilde{E}/E_{0M} раз больше) на расстояниях порядка w . В обоих случаях линейный анализ неустойчивости станет неприменимым уже при $t \lesssim t_d/2$. После этого изначально плоская ВУИ должна преобразоваться⁸⁾ в новую диссипативную структуру — гофрированную ВУИ — в соответствии с общими законами самоорганизации неравновесных распределенных систем. Вопрос о характере дальнейшей эволюции такой гофрированной ВУИ и о величинах основных ее параметров E_{0M} , σ^- и u_f должен решаться путем анализа полной нелинейной задачи. Однако заранее очевидно, что все эти параметры существенно увеличатся, а ток через структуру будет протекать главным образом по тонким шнурам, удаленным друг от друга на расстояния большие или порядка $2\pi/k_M \sim w/2$. Таким образом, модель плоской ВУИ оказывается недостаточной для описания работы обострителей даже при наличии однородного в среднем фона носителей заряда перед фронтом. Это заключение вполне согласуется с результатами единственной известной нам экспериментальной работы, в которой изучалась однородность пробоя обострителей напряжения и была обнаружена множественная локализация протекающего через прибор тока [26].

Во-вторых, рассмотренный нами тип плоской ВУИ во многих отношениях подобен быстрым

⁸⁾ Подобное преобразование периодически возмущенной плоской ВУИ в стационарную волну с гофрированным фронтом ранее было обнаружено в работе [9] при численном моделировании в рамках «минимальной» модели ВУИ в газах (см. также [25]).

стримерам, распространяющимся в предварительно ионизированной среде. В обоих случаях скорость фронта определяется лавинным размножением фоновых носителей заряда в протяженной области Ω_i , где напряженность поля существенно уменьшается на расстоянии порядка w или радиуса r_f кривизны фронта стримера. Кривые фронты обычно более устойчивы к возмущениям, чем плоские, поэтому, заменяя в наших обозначениях w на r_f и используя данные рис. 5, можно получить оценку верхней границы возможных значений k_{01} и s_M для стримеров. Учитывая типичное для стримеров неравенство $E_{0M} \gtrsim \tilde{E}$ [19, 22], мы приходим к выводу о том, что фронты быстрых стримеров должны быть устойчивыми по отношению к поперечным возмущениям, так как для них максимальный инкремент $s_M \ll u_{0M}/r_f$, а пороговая длина волны возмущения $2\pi/k_{01} \gtrsim r_f$. Это заключение, справедливое не только для полупроводников, но и для любых других диэлектриков, согласуется с результатами численного моделирования [19, 23, 27] и указывает на то, что механизмы наблюдаемого в экспериментах ветвления стримеров нужно искать за пределами континуального приближения.

В заключение отметим, что использованный нами метод решения краевой задачи (19)–(21) на собственные значения не является математически строго обоснованным. Вопрос о том, к чему именно сходятся последовательности S_m и \hat{R}_m , остается, насколько нам известно, в общем случае открытым даже для обычных хорошо изученных интегральных уравнений Вольтерра второго рода [28]. Поэтому, для того чтобы убедиться в правильности полученных результатов, было проведено численное моделирование эволюции ВУИ в обратномсменной структуре p^+-n-n^+ с очень сильнолегированными p^+ - и n^+ -слоями и концентрацией доноров $N = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ в n -слое.

Использовался метод решения задачи Коши, аналогичный примененному в работе [19] для моделирования стримеров. Отличия состояли в том, что решалась двумерная (а не трехмерная аксиально-симметричная) задача и предполагалось, что в n -слое имеется не одна пара, а однородный фон электронов и дырок с концентрацией $\sigma_b = 10^9 \text{ см}^{-3}$. Область решения представляла собой прямоугольник, вытянутый вдоль оси y со сторонами $Y_0 = d = 100 \text{ мкм}$ и $X_0 = 5 - 50 \text{ мкм}$. На боковых границах $x = 0$ и $x = X_0$ задавались естественные условия равенства нулю всех нормальных производных. Между границами $y = 0$ и $y = Y_0$ поддерживалась постоянная разность потенциалов

1000 В, так что в начальный момент область пространственного заряда заполняла весь n -слой. После завершения (примерно через 50 пс) переходного процесса формирования ВУИ определялась скорость u_f фронта и в уравнения непрерывности вводились дополнительные слагаемые $-u_f \partial(\sigma, \rho)/\partial y$. Таким образом мы фактически переходили в систему координат, движущуюся вместе с фронтом. При этом сама структура p^+-n-n^+ оказывалась привязанной к той же системе координат, поэтому решение задачи становилось полностью стационарным.

Такой искусственный прием, исключая зависимость инкремента s от времени из-за уменьшения $L = d - y_f$ и изменения E_{0M} , существенно облегчал обработку результатов и повышал точность определения s , особенно при $k \sim k_{01}$. Далее, в узкой области перед фронтом на короткое время вводилось искусственное поперечное возмущение скорости ударной ионизации вида $\alpha(E) [1 + \xi_\alpha \cos(\pi x/X_0)]$ с амплитудой $\xi_\alpha = 10^{-4} - 10^{-2}$. Это порождало малые периодические поперечные возмущения концентрации σ , плотности объемного заряда $q\rho$ и напряженности поля E , продольные структуры которых были аналогичны изображенным на рис. 3, а амплитуды увеличивались (при $k < k_{01}$) или уменьшались (при $k > k_{01}$) со временем по экспоненциальному закону $\exp(st)$.

Обработка этих зависимостей методом наименьших квадратов позволяла определить инкремент s для каждого значения $k = \pi/X_0 \gtrsim k_M/2$. При меньших k (больших X_0) этого сделать не удавалось, так как на искусственное возмущение накладывалось «естественное» возмущение с $k \approx k_M$, спонтанно возникающее вследствие ограниченной точности вычислений и нарастающее значительно быстрее по закону $\exp(s_M t)$. Таким образом, результаты численного эксперимента и изложенной выше теории неустойчивости быстрых плоских фронтов полностью согласуются между собой, причем не только в качественном, но и в количественном отношении. Для иллюстрации этого на рис. 4 приведен пример сравнения «экспериментального» и теоретического законов дисперсии $s(k)$. Хорошее совпадение между ними является «эмпирическим» обоснованием решения задачи (26) методом последовательных приближений.

Автор благодарен А. В. Горбатюку за многочисленные плодотворные обсуждения проблемы устойчивости неравновесных систем. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-08-00406).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Королев, Г. А. Месяц, *Физика импульсного пробоя газов*, Наука, Москва (1991).
2. Э. М. Базелян, Ю. П. Райзер, *Искровой разряд*, Изд-во МФТИ, Москва (1997).
3. А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, *Волны электрического пробоя в ограниченной плазме*, Наука, Москва (1989).
4. Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов, *Теория искры*, Атомиздат, Москва (1975).
5. А. М. Минарский, П. Б. Родин, *Письма в ЖТФ* **20**, 38 (1994).
6. А. М. Минарский, П. Б. Родин, *ФТП* **31**, 432 (1997).
7. M. Arrayás and U. Ebert, *Phys. Rev. E* **69**, 036214 (2004).
8. M. Arrayás, M. A. Fontelos, and J. L. Trueba, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 165001 (2005).
9. M. Arrayás, S. Betelu, M. A. Fontelos, and J. L. Trueba, *SIAM J. Appl. Math.* **68**, 1122 (2008).
10. U. Ebert and G. Derks, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 139501 (2007).
11. G. Derks, U. Ebert, and B. Meulenbroek, *J. Nonlin. Sci.* **18**, 551 (2008).
12. А. С. Кюреган, *Изв. РАН, сер. Энергетика* № 4, 7 (2011).
13. U. Ebert, W. Van Saarloos, and C. Caroli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4178 (1996); *Phys. Rev. E* **55**, 1530 (1997).
14. А. С. Кюреган, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 360 (2007).
15. А. С. Кюреган, *ФТП* **41**, 761 (2007).
16. M. Arrayás, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 174502 (2002).
17. A. Rocco, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. E* **66**, 035102(R) (2002).
18. C. Montijn, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. E* **73**, 065401(R) (2006).
19. А. С. Кюреган, *ЖЭТФ* **136**, 962 (2009).
20. I. V. Grekhov, *Sol. St. Electron.* **32**, 923 (1989).
21. R. J. Focia, E. Schamiloghu, C. B. Fledermann et al., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 138 (1997).
22. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, *ЖЭТФ* **95**, 1850 (1989).
23. А. С. Кюреган, *ЖЭТФ* **138**, 721 (2010).
24. С. В. Шендерей, *Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, ФТИ им. А. Ф. Иоффе, Ленинград* (1985).
25. A. Luque, F. Brau, and U. Ebert, *Phys. Rev. E* **78**, 016206 (2008).
26. С. Н. Вайнштейн, Ю. В. Жилиев, М. Е. Левинштейн, *Письма в ЖТФ* **14**, 1527 (1988).
27. А. А. Kulikovsky, *J. Phys. D* **30**, 441 (1997).
28. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1976).