

# ЗОННАЯ СТРУКТУРА И ШИРОКОПОЛОСНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ УСИЛЕНИЕМ В СЛОИСТЫХ ОПТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

*Н. Н. Розанов<sup>a,b\*</sup>, С. В. Федоров<sup>a,b</sup>, Р. С. Савельев<sup>a</sup>, А. А. Сухоруков<sup>a,c</sup>, Ю. С. Кившарь<sup>a,c</sup>*

*<sup>a</sup> Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики  
197101, Санкт-Петербург, Россия*

*<sup>b</sup> ФГУП НПК «Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова»  
199034, Санкт-Петербург, Россия*

*<sup>c</sup> Центр нелинейной физики, Австралийский национальный университет  
АСТ 0200, Канберра, Австралия*

Поступила в редакцию 14 августа 2011 г.

Для слоистой структуры, состоящей из чередующихся слоев с поглощением и усилением, определена частотная зависимость коэффициента усиления, необходимая для компенсации поглощения. Показано, что выполнение тех же условий требуется для существования зонной структуры — чередующихся разрешенных и запрещенных для распространения оптического излучения зон в области параметров частота — волновой вектор. Найден условия, при которых требуемое для компенсации усиление меньше пороговых значений для абсолютной (паразитная лазерная генерация) и конвективной (волноводное усиление излучения) неустойчивостей.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В средах, периодических в одном или нескольких направлениях, распространение волн — как классических (электродинамических, акустических и т. д.), так и квантовых (волновая функция электронов в кристаллах) — приобретает новые свойства, принципиально отличающиеся от присущих случаю однородной среды. Одним из основных таких свойств является появление разрешенных и запрещенных для распространения волн зон в области параметров частота — обобщенный волновой вектор волны [1]. Основная часть исследований в этом направлении проводится для прозрачных сред, однако для оптики весьма важен учет поглощения и/или усиления в периодических средах. Примерами служат лазеры с распределенной обратной связью [2] и активные световодные периодические структуры, в которых могут формироваться диссипативные брэгговские солитоны [3]. Особо следует выделить фотонные кристаллы и слоистые метаматериалы, одним из главных препятствий к эффективному функционирова-

нию которых служат существенные потери, которые тем самым необходимо компенсировать введением усиления [4]. В последнее время достигнуты значительные успехи в методах введения слоев с усилением в метаматериалы [5–8], что делает актуальными дальнейшие исследования схем с активными метаматериалами.

Задачей настоящей работы является анализ линейного распространения оптического излучения в системе, состоящей из чередующихся слоев с поглощением и усилением. Линейность режима достигается, если интенсивность излучения в среде меньше характерной для среды интенсивности насыщения, и именно такие режимы необходимы для ряда приложений метаматериалов, включая сверхразрешение [5]. Как мы увидим, наличие диссипации — поглощения и усиления — принципиально меняет характер распространения волн в таких средах и в том числе само понятие разрешенных и запрещенных зон. Будет показано, что зоны с нулевым коэффициентом ослабления в этой схеме реализуются именно в условиях компенсации поглощения усилением. Еще одной важной особенностью сред с усилением

\*E-mail: nrosanov@yahoo.com

является возможность возникновения в них неустойчивостей, проявляющихся в генерации или неограниченном усилении спонтанного излучения в усиливающих средах с бесконечной протяженностью [9]. Указанная задача компенсации может считаться решенной, если усиление в системе не достигает пороговых значений развития неустойчивостей. Определение условий выполнения этого требования также является целью данной работы.

## 2. ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ СЛОЕВ С УСИЛЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

Рассматриваем изотропную немагнитную среду (магнитная проницаемость  $\mu = 1$ ) с комплексной линейной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\varepsilon}(z)$  и монохроматическое электромагнитное излучение с частотой  $\omega$ . Мы анализируем главным образом случай  $s$ -поляризации (напряженность электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y \operatorname{Re}\{E(z) \exp(ik_x n_0 x - i\omega t)\}$ , где  $\mathbf{e}_y$  — единичный вектор, направленный по декартовой координате  $y$ ,  $k_x n_0$  —  $x$ -компонента волнового вектора,  $n_0$  — показатель преломления прозрачной и однородной при  $z \rightarrow -\infty$  среды). Соответствующее одномерное уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды поля  $E(z)$  имеет вид ( $c$  — скорость света в вакууме)

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}(z) - k_x^2 n_0^2 \right] E = 0. \quad (1)$$

Однако для проверки устойчивости режима с  $s$ -поляризацией необходимо рассмотрение и возмущений с  $p$ -поляризацией. Для последних в линейном режиме удобнее проводить операции с напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \operatorname{Re}\{H(z) \times \exp(ik_x n_0 x - i\omega t)\}$ . При этом в аналоге уравнения (1) возникает дополнительное слагаемое [10, 11]

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{d \ln \tilde{\varepsilon}}{dz} \frac{dH}{dz} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}(z) - k_x^2 n_0^2 \right] H = 0. \quad (1a)$$

Среда представляет систему неограниченных в поперечном направлении плоскопараллельных слоев, разделяемых координатами  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_N$ . Внешние слои ( $z < z_0$  и  $z > z_N$ ) полубесконечные, а внутренние слои обладают толщиной  $d_j = z_j - z_{j-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $z_{-1} = -\infty$ ,  $z_{N+1} = +\infty$ . Диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j + ie_j$ , если  $z_{j-1} < z < z_j$ , причем  $\varepsilon_j$  и  $e_j$  — зависящие от частоты вещественная и мнимая части диэлектрической проницаемости (для вещественных положительных частот  $e_j > 0$  для слоев с поглощением и

$e_j < 0$  для слоев с усилением). Комплексный показатель преломления  $\tilde{n}_j = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_j} = n_j + ik_j$ , причем ветвь квадратного корня выбирается так, что знаки  $\kappa_j$  и  $e_j$  совпадают ( $\varepsilon_j = n_j^2 - \kappa_j^2$ ,  $e_j = 2n_j \kappa_j$ ,  $n_j > 0$ ). Внешние слои считаем прозрачными, для них  $e_0 = 0$ ,  $e_{N+1} = 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_{N+1} > 0$ . Для простоты будем считать также совпадающими показатели преломления внешних полубесконечных слоев,  $n_0 = n_{N+1} > 0$ .

В каждом из слоев среда однородна, так что решение (1) и (1a) внутри  $j$ -го слоя отвечает сумме двух встречных плоских волн ( $G = E$  или  $H$ )

$$G_j(z) = F_j \exp [ik_z \bar{n}_j (z - z_{j-1})] + B_j \exp [-ik_z \bar{n}_j (z - z_{j-1})]. \quad (2)$$

Здесь  $k_z \bar{n}_j = \sqrt{k_0^2 \tilde{n}_j^2 - k_x^2 n_0^2}$ ,  $k_0 = \omega/c$  — волновое число в вакууме, а выбор ветви корня для внутренних слоев, вообще говоря, непринципиален, поскольку слагаемые в (2) представляют оба варианта выбора (от выбора знака зависит интерпретация отвечающих этим слагаемым волн). Для внешних (полубесконечных) слоев выбор ветви требует уточнения. Действительно, основная интересующая нас задача — описание прохождения через слоистую систему волны, падающей на систему из левого внешнего слоя  $z < z_0$ . В этом случае частота падающего излучения  $\omega$  вещественна и распространяющиеся волны ( $k_x^2 < k_0^2$ ) характеризуются углом падения  $\theta$  (в левом полубесконечном слое). Тогда во внешних слоях

$$\begin{aligned} G_0(z) &= F_0 \exp [ik_z n_0 (z - z_0)] + B_0 \exp [-ik_z n_0 (z - z_0)], \\ G_{N+1}(z) &= F_{N+1} \exp [ik_z \bar{n}_{N+1} (z - z_N)], \\ B_{N+1} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_x = k_0 \sin \theta$ ,  $k_z = k_0 \cos \theta$ ,  $\bar{n}_j^2 = \tilde{n}_j^2 + (\tilde{n}_j^2 - n_0^2) \operatorname{tg}^2 \theta$ ,  $F_0$  и  $B_0$  имеют смысл амплитуд падающей и отраженной волн и отсутствует волна, падающая на систему справа. Для эванесцентных волн ( $k_x^2 > k_0^2$ ) поля во внешних слоях имеют тот же вид (3), но ветвь корня для  $k_z$  выбирается так, что  $\operatorname{Im} k_z > 0$ . Условия непрерывности на границах слоев  $E(z)$  и  $dE/dz$  для  $s$ -поляризации и  $H(z)$  и  $\varepsilon^{-1} dH/dz$  для  $p$ -поляризации позволяют решить задачу прохождения излучения через систему поглощающих и усиливающих слоев.

Поскольку в системе присутствуют слои с усилением, обладающие к тому же бесконечной поперечной протяженностью, режим прохождения может срываться из-за абсолютных и конвективных неустойчивостей [12]. Абсолютные неустойчивости

отвечают экспоненциальному (в принятом линейном приближении) росту амплитуды поля в каждой пространственной точке системы, т. е. комплексной частоте  $\omega$  с положительной мнимой частью  $\text{Im } \omega > 0$ . В нашей задаче это означает превышение порога генерации для продольных мод «лазера», для которых поперечный волновой вектор  $k_x = 0$ , а во внешних слоях имеются только уходящие от системы волны,  $F_0 = 0, B_{N+1} = 0$ . На пороге лазерной генерации  $\text{Im } \omega = 0$ , а вещественная часть частоты принимает ряд дискретных значений (различные частоты продольных мод). Пороговое значение усиления определяется минимальным значением для порогов генерации различных продольных мод. Выше этого порога даже в отсутствие падающего излучения возникает генерация, начинающаяся от уровня шумов (спонтанного излучения) и устанавливающаяся на уровне, определяемом нелинейным эффектом насыщения (в данной работе нелинейные режимы, включая установившийся режим генерации, не рассматриваются). Отметим также, что выше порога, когда  $\text{Im } \omega > 0$ , поток энергии в лазерной моде во внешних слоях направлен от центральных слоев к периферии и амплитуда уходящих волн экспоненциально убывает с ростом  $|z|$  (на самом пороге амплитуда этих волн не зависит от  $z$ ).

Конвективная неустойчивость в рассматриваемой системе отвечает волноводным модам, для которых частота вещественна,  $\text{Im } \omega = 0$ , и излучение распространяется в поперечном направлении с экспоненциальным ростом амплитуды по мере распространения (усиленное спонтанное излучение). В этом случае волновое число является комплексным. В данной статье мы не затрагиваем случай обратных волн с противоположным направлением фазовой и групповой скоростей, поэтому рост амплитуды при  $\text{Re } k_x > 0$  соответствует условию  $\text{Im } k_x < 0$ . Порог неустойчивости достигается, когда хотя бы для одного значения вещественной частоты выполняется условие  $\text{Im } k_x = 0$ . Выше порога поток энергии направлен, как и в случае лазерной генерации, от центральных слоев к периферии. Вообще говоря, конвективная неустойчивость со сплошным спектром частот превращается в абсолютную (генерация поперечных мод лазера, дискретный спектр частот), если учесть паразитное отражение волн на краях сло-

ев или на каких-либо поперечных неоднородностях системы, реализующих обратную связь в поперечном направлении. Однако мы не будем рассматривать такие режимы, считая паразитное отражение достаточно слабым. Основной режим прохождения падающего излучения через систему устойчив, только если не достигнут порог ни для одной продольной лазерной моды (отсутствует абсолютная неустойчивость) и ни для одной частоты применительно к усиленному спонтанному излучению (отсутствует конвективная неустойчивость).

### 3. МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ввиду линейности задачи характеристики поля в различных слоях могут быть связаны друг с другом матрицей преобразования. Более распространен вариант матрицы преобразования, связывающей значения электрической и магнитной напряженностей на границах слоев [11], но нам удобнее вариант матрицы, действующей на амплитуды волн  $F_j$  и  $B_j$ , поскольку они имеют наглядный физический смысл и при этом легко проводится переход к уравнениям связанных волн (для движущихся неоднородностей см. [13]). Матрицы преобразования на  $j$ -м слое  $\hat{M}_j$  и на всей системе  $\hat{M}$  вводятся соотношениями

$$\begin{pmatrix} F_j \\ B_j \end{pmatrix} = \hat{M}_j \begin{pmatrix} F_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} F_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{M} = \hat{M}_0 \times \hat{M}_1 \times \hat{M}_2 \times \dots \times \hat{M}_{N-1} \times \hat{M}_N.$$

В задаче о прохождении волны через систему амплитудные коэффициенты пропускания  $\tau$  и отражения  $r$  выражаются через элементы матрицы преобразования следующим образом:

$$\tau = \frac{F_{N+1}}{F_0} = \frac{1}{M_{11}}, \quad r = \frac{B_0}{F_0} = \frac{M_{21}}{M_{11}}. \quad (5)$$

Модуль коэффициентов пропускания и отражения ввиду наличия в системе усиления может превышать единицу. Матрицы преобразования имеют следующий вид (полагаем  $d_0 = 0$ ):

$$\hat{M}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\bar{n}_{j+1}}{\bar{n}_j} \right) \exp[-ik_z \bar{n}_j d_j], & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{n}_{j+1}}{\bar{n}_j} \right) \exp[-ik_z \bar{n}_j d_j] \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{n}_{j+1}}{\bar{n}_j} \right) \exp[ik_z \bar{n}_j d_j], & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\bar{n}_{j+1}}{\bar{n}_j} \right) \exp[ik_z \bar{n}_j d_j] \end{pmatrix} \quad (s\text{-поляризация}), \quad (6a)$$

$$\hat{M}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_j \bar{n}_{j+1}}{\tilde{\varepsilon}_{j+1} \bar{n}_j} \right) \exp[-ik_z \bar{n}_j d_j], & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_j \bar{n}_{j+1}}{\tilde{\varepsilon}_{j+1} \bar{n}_j} \right) \exp[-ik_z \bar{n}_j d_j] \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_j \bar{n}_{j+1}}{\tilde{\varepsilon}_{j+1} \bar{n}_j} \right) \exp[ik_z \bar{n}_j d_j], & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_j \bar{n}_{j+1}}{\tilde{\varepsilon}_{j+1} \bar{n}_j} \right) \exp[ik_z \bar{n}_j d_j] \end{pmatrix} \quad (p\text{-поляризация}). \quad (66)$$

Порог абсолютной неустойчивости (лазерной генерации) отвечает условиям  $\text{Im } \omega = 0, k_x = 0$  и

$$M_{11} = 0, \quad (7)$$

а при конвективной неустойчивости  $k_x \neq 0$  (поперечный волновой вектор комплексный, тогда как частота даже выше порога вещественна) и сохраняется условие (7).

Теперь рассмотрим систему, в которой чередуются одинаковые слои с поглощением и усилением, так что основная часть системы получается периодическим повторением пары слоев. Будем считать, что «нечетные» внутренние слои (с нечетными номерами) обладают поглощением и характеризуются толщиной  $d_1$  и комплексной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + ie_1, e_1 \geq 0$ , а «четные» слои с параметрами  $d_2$  и  $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + ie_2, e_2 \leq 0$  обеспечивают усиление. Период повторения структуры  $d = d_1 + d_2$ . Матрица преобразования на одном периоде  $\hat{M}_{12} = \hat{M}_1 \times \hat{M}_2$ , причем определитель этой матрицы  $\text{Det } \hat{M}_{12} = 1$ , как это следует из (6). Собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \lambda_c \mp i\sqrt{1 - \lambda_c^2}$$

матрицы  $\hat{M}_{12}$  находятся из квадратного уравнения  $\lambda^2 - 2\lambda_c \lambda + 1 = 0$ , в котором величина  $\lambda_c$  выражается через след матрицы  $\hat{M}_{12}$  как

$$\lambda_c = \frac{1}{2} \text{Tr } \hat{M}_{12} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right)^2 \times \cos[k_z (d_1 \bar{n}_1 + d_2 \bar{n}_2)] - \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} - \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right)^2 \cos[k_z (d_1 \bar{n}_1 - d_2 \bar{n}_2)], \quad (8)$$

где  $q_j = \bar{n}_j / \tilde{\varepsilon}_j$  для случая  $p$ -поляризации,  $q_j = \bar{n}_j$  для случая  $s$ -поляризации. При изменении поляризации значения  $\lambda_c$  и диагональных элементов  $m_{11}, m_{22}$  матрицы  $\hat{M}_{12}$ , не меняются, а недиагональные матричные элементы меняют знак.

Матрица преобразования для  $p$  одинаковых пар слоев  $\hat{M}^{(p)} = (\hat{M}_{12})^p$  рассчитывается приведением  $\hat{M}_{12}$  к диагональному виду. В частности, ее диагональный элемент

$$M_{11}^{(p)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \lambda_c^2}} \left( (\lambda_s + \sqrt{1 - \lambda_c^2}) \times \lambda_1^p - (\lambda_s - \sqrt{1 - \lambda_c^2}) \lambda_2^p \right), \quad (9)$$

где

$$\lambda_c = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right)^2 \cos[k_z (d_1 \bar{n}_1 + d_2 \bar{n}_2)] - \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} - \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right)^2 \sin[k_z (d_1 \bar{n}_1 - d_2 \bar{n}_2)]. \quad (10)$$

Матрица преобразования всей системы с нечетным числом слоев  $N = 2p + 1$  имеет вид  $\hat{M} = \hat{M}_0 \times \hat{M}^{(p)} \times \hat{M}_N$ . Переход к неограниченному фотонному кристаллу или метаматериалу достигается в пределе  $p \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , следует различать два случая, как и для прозрачных (без поглощения и усиления) периодических структур. В первом модули двух собственных чисел различаются и тогда один из модулей обязательно превышает единицу. При этом, в соответствии с (9), в пределе  $p \rightarrow \infty$  элемент матрицы преобразования  $M_{11}^{(p)} \rightarrow \infty$ , а коэффициент пропускания  $\tau_p = 1/M_{11}^{(p)} \rightarrow 0$  (идеальная запрещенная зона). Во втором случае модули обоих собственных чисел равны единице, что отвечает идеальной разрешенной зоне (зоне прозрачности). Разрешенная зона реализуется при одновременном выполнении двух условий: во-первых, величина  $\lambda_c$  должна быть вещественной и, во-вторых, ее модуль не должен превышать единицу:

$$\text{Im } \lambda_c = 0, \quad |\text{Re } \lambda_c| \leq 1. \quad (11)$$

Нарушение хотя бы одного из этих условий отвечает запрещенной зоне.

В периодической структуре прозрачных слоев с вещественными показателями преломления разрешенные и запрещенные зоны чередуются при изменении частоты излучения, как это показано на рис. 1а. Однако при наличии сколь угодно слабого поглощения величина  $\lambda_c$  становится комплексной, так что, строго говоря, разрешенные и запрещенные зоны не определены или же весь спектральный диапазон принадлежит единой запрещенной зоне (рис. 1б). Это естественно, так как излучение

полностью затухает при прохождении через поглощающую среду бесконечной протяженности. Отметим, что замена поглощения на усиление, при которой величины  $\bar{n}_{1,2}$  заменяются на комплексно сопряженные ( $\bar{n}_{1,2}^*$ ), приводит в соответствии с (8) также к комплексному сопряжению собственных значений, что, естественно, сохраняет их модули. Поэтому неограниченная структура периодически повторяющихся усиливающих слоев тоже оказывается непрозрачной при любой частоте излучения (см. также [14]).

Последний вывод может вызвать сомнения, так как при переходе к однородной усиливающей среде пропускание не только не равно нулю, но неограниченно (экспоненциально) растет с увеличением толщины единого усиливающего слоя (в линейном приближении). Противоречие связано с тем, что пропускание определяется не только толщиной (числом периодов) слоистой структуры, но и ответственным за переотражения волн контрастом, который в общем случае мы определим как  $\delta = (\bar{n}_2^2 - \bar{n}_1^2) / \text{Re} \bar{n}_1^2$ . В более простом случае нормального падения  $\delta = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) / \varepsilon_1$ , т. е. это контраст комплексной диэлектрической проницаемости в периодически чередующихся слоях. Для однородной среды контраст равен нулю и тогда пропускание

$$\tau_p(0) = \exp(ipk_0 d \sqrt{\varepsilon_1 + ie_1}).$$

Из формулы (9) следует, что структуру можно считать близкой к однородной, если  $p|\delta| \ll 1$ . Заметим, что зоны характеризуют неограниченную периодическую структуру ( $p \rightarrow \infty$ ), поэтому затруднительно говорить о приближенном сохранении зонной структуры даже при малых значениях поглощения или усиления.

Таким образом, в структурах с периодическим повторением пассивных (с поглощением) и активных (с усилением) слоев идеальные разрешенные зоны (зоны прозрачности) в общем случае отсутствуют. Однако, если имеются одновременно и пассивные, и активные слои, то оказывается возможным восстановление чередования разрешенных и запрещенных зон в условиях, когда усиление компенсирует поглощение. Определение условий такой компенсации и является задачей последующего изложения.

Разрешенные зоны, или спектральные диапазоны, в которых достигается компенсация поглощения усилением в структуре с большим числом слоев, определяется теперь таким образом. Прежде всего, для неограниченной структуры (предел  $p \rightarrow \infty$ ) должны выполняться условия прозрачности (11).

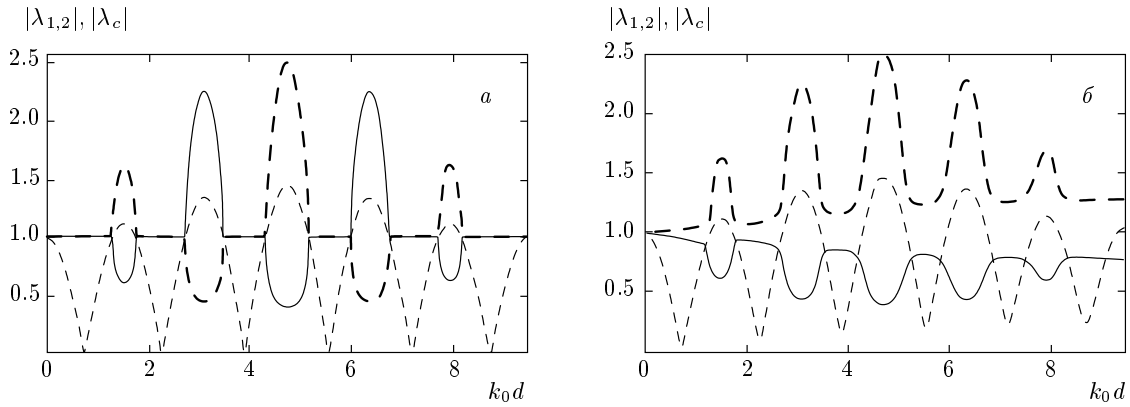
Это может быть обеспечено подбором частотной зависимости коэффициента усиления в активных слоях при заданной частотной зависимости коэффициента поглощения пассивных слоев. Дополнительно при выбранной зависимости коэффициента усиления не должны быть превышены пороги абсолютной и конвективной неустойчивости. Естественно, что при большом числе периодических повторений пары пассивного и активного слоев условия прозрачности и компенсации определяются именно этими внутренними слоями, тогда как характеристики небольшого числа обрамляющих слоев не влияют на критерий компенсации.

В важных в данной задаче случаях, когда мнимая часть диэлектрической проницаемости активных и пассивных слоев заметно меньше вещественной части (малое поглощение и усиление), решение уравнений упрощается и может быть получено по теории возмущений, причем нулевое приближение отвечает полностью прозрачным средам. Так, задача о конвективной неустойчивости в нулевом приближении сводится к определению мод планарного волновода с заданным профилем вещественной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^{(0)}(z)$ , т. е. к нахождению при заданной вещественной частоте  $\omega$  структуры поля в моде  $E^{(0)}(z)$  для  $s$ -поляризации или  $H^{(0)}(z)$  для  $p$ -поляризации (это распределение можно считать вещественным) и соответствующего вещественного собственного значения  $q^{(0)} = (k_x^{(0)} n_0)^2$  (локализованных мод в зависимости от параметров может быть несколько). В первом порядке теории возмущений по малой добавке к диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}^{(1)}(z)$  собственное значение для  $s$ -поляризации получает приращение [15]

$$q^{(1)} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^{(1)}(z) E^{(0)2}(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)2}(z) dz}. \quad (12)$$

Знаменатель в правой части (12) отвечает нормировке поля волноводной моды, а числитель представляет интеграл от усиления и поглощения с весовой функцией — интенсивностью поля. Порог неустойчивости достигается при  $\text{Im} q^{(1)} = 0$ . Ввиду (12) пороговое значение усиления линейно зависит от коэффициента поглощения в пассивных слоях:

$$e_1 \int_{\text{odd}} E^{(0)2}(z) dz + e_2 \int_{\text{even}} E^{(0)2}(z) dz = 0. \quad (13)$$



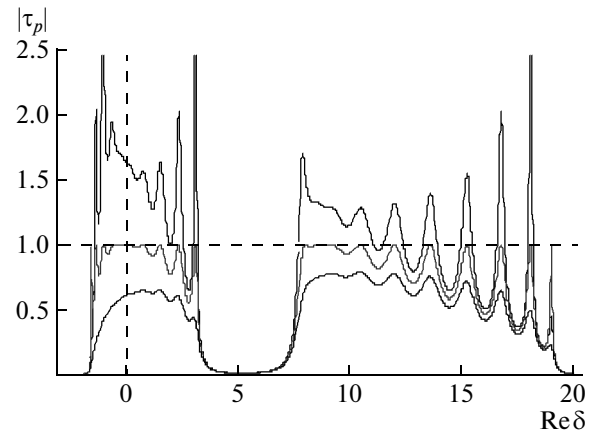
**Рис. 1.** Частотные зависимости модулей собственных значений  $|\lambda_{1,2}|$  матрицы преобразования  $\hat{M}_{12}$  для одного периода структуры, состоящего из двух слоев среды (сплошная и жирная штриховая линии), и величины  $|\lambda_c|$  (тонкая штриховая линия, в запрещенных зонах  $|\lambda_c| > 1$ );  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 6.25$ ,  $d_2/d_1 = 2$ , нормальное падение,  $e_2 = 0$  (а),  $\pm 0.2$  (б). При «идеальной» компенсации потерь вновь получаем зависимости вида (а)

При наличии поглощения во внешних слоях в выражении (13) возникают дополнительные слагаемые, не меняющие линейный характер зависимости порогового усиления от коэффициента поглощения. Таким образом, для определения порога усиления возмущений с  $s$ -поляризацией достаточно решить волноводную задачу на собственные значения в отсутствие поглощения и усиления, а затем вычислить интегралы в (13) (в первом слагаемом интегрирование ведется по пассивным слоям, а во втором — по активным). Для возмущений с  $p$ -поляризацией такой подход требует уточнений (см. разд. 4).

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

##### 4.1. Нормальное падение

Расчеты распространения для  $s$ -поляризации излучения проводились на основе матрицы преобразования (разд. 2). Порог неустойчивости в виде лазерной генерации находился численным решением комплексного уравнения (7). Порог неустойчивости в форме волноводных мод в общем случае также определялся численным решением уравнения (7). При этом для  $s$ -поляризации эффективным оказалось применение описанной в разд. 3 теории возмущений. Но в более сложном случае  $p$ -поляризации вместо теории возмущений использовалось прямое решение уравнения (7) с заданием начального приближения для корней уравнения, отвечающих вещественным поперечным волновым векторам для прозрачной слоистой среды.



**Рис. 2.** Зависимости модуля коэффициента пропускания структуры из  $p = 10$  периодов от контраста вещественной части диэлектрической проницаемости для трех значений мнимой части диэлектрической проницаемости четных слоев: поглощение (нижняя кривая,  $e_2 = 0.1$ ), прозрачность (средняя кривая,  $e_2 = 0$ ) и усиление (верхняя кривая,  $e_2 = -0.1$ ); нечетные слои прозрачны ( $e_1 = 0$ ). Вертикальная штриховая линия указывает нулевое значение вещественной части контраста

В расчетах основными являются параметры, указанные в подписи к рис. 1, где приведены частотные зависимости модулей собственных значений и величины  $|\lambda_c|$  для бесконечной периодической системы двух прозрачных (рис. 1а) и усиливающих или поглощающих (рис. 1б) слоев. Расчеты показывают, что введение слоев с поглощением или усилением в

структуру с конечным числом пар слабо меняет пропускание и отражение в зонах, которые для структуры с прозрачными средами соответствовали запрещенным. При этом в зоне прозрачности глубина интерференционных осцилляций коэффициентов пропускания и отражения увеличивается при введении усиления и уменьшается для слоев с поглощением. Однако максимальная величина коэффициента пропускания существенно изменяется, превышая единицу для структуры с конечным числом усиливающих слоев и стремясь к нулю для структур как с поглощением, так и усилением, если число периодов  $p$  неограниченно возрастает. Более подробно этот вывод подтверждается зависимостями коэффициента пропускания от контраста вещественной части диэлектрической проницаемости  $\tau_p(\text{Re } \delta)$ , которые рассчитаны для фиксированной частоты света, так что  $k_0 d \approx 0.48\pi$  (рис. 2). Отрицательные значения контраста  $\text{Re } \delta < -1$  соответствуют отрицательной вещественной части диэлектрической проницаемости,  $\text{Re } \varepsilon_2 < 0$  (металл). Отметим, что нулевое значение вещественной части контраста здесь не означает, что среда однородна, так как для нижней и верхней кривых рис. 2 сохраняется контраст мнимой части диэлектрической проницаемости. В определенной мере зависимость от контраста аналогична частотной зависимости, так что здесь уже при  $p = 10$  просматриваются разрешенные и запрещенные зоны. Согласно расчетам наличие вещественной части контраста, т. е. перепада показателей преломления в чередующихся слоях, может существенно увеличить пропускание или уменьшить отражение по сравнению со случаем однородной среды. Но это происходит лишь в выделенной части зоны прозрачности, вырождающейся в точку при  $p \rightarrow \infty$ . В основной части зоны прозрачности относительный коэффициент пропускания  $\tau_p(\delta)/\tau_p(0)$  уменьшается по сравнению со слоем однородной среды (для которой контраст  $\delta = 0$ ).

Теперь при наличии поглощения в нечетных слоях выберем усиление в четных слоях так, чтобы оно скомпенсировало поглощение для заданного значения контраста. Если вводится усиление, не зависящее от частоты (достаточно широкий контур усиления), то пропускание имеется практически только в тех условиях, при которых для прозрачных сред реализуются разрешенные зоны. В то же время коэффициент пропускания существенно осциллирует вблизи выбранной рабочей точки по частоте. Поэтому потребуем «идеальной» компенсации, т. е. компенсации при любом значении частоты во всех зонах прозрачности. Соответствующая спектральная зависимость  $\kappa_2$  представлена на рис. 3. В этом слу-

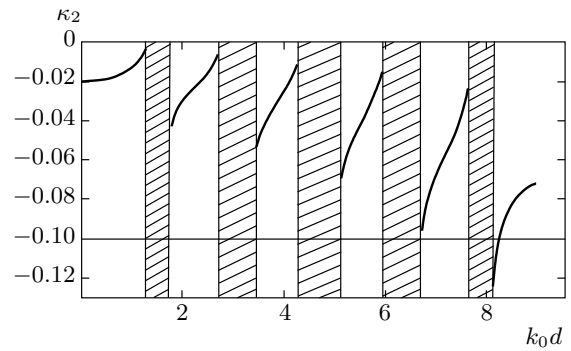
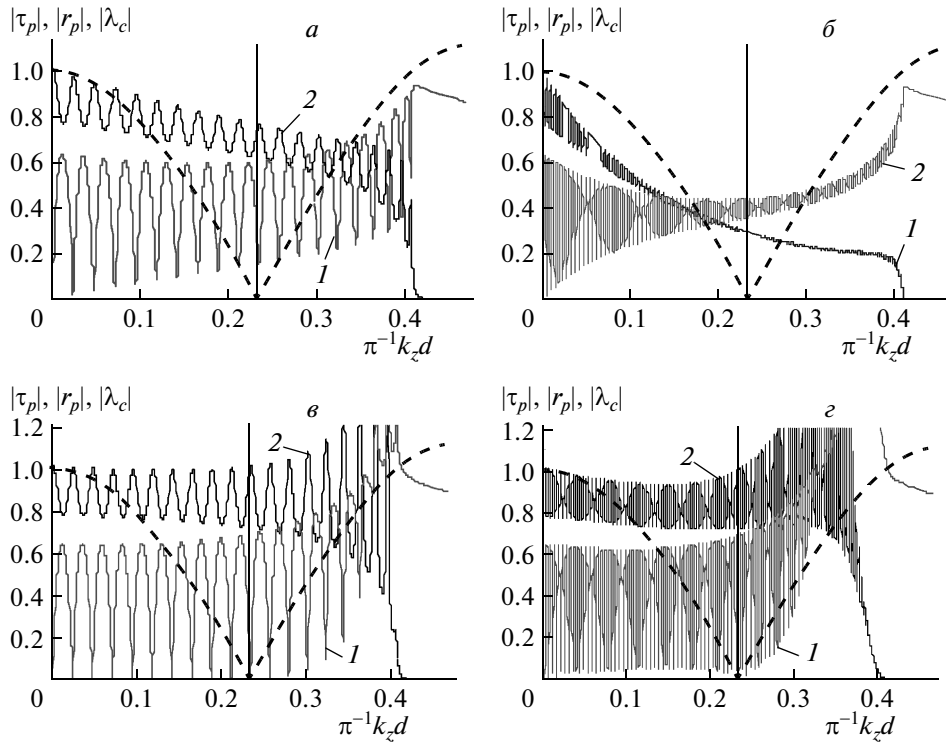


Рис. 3. Зависимость усиления в четных слоях, необходимого для идеальной компенсации поглощения в нечетных слоях, от частоты;  $\kappa_1 = 0.1$ . В разрешенных зонах модули собственных значений  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , как на рис. 1а. Заштрихованы запрещенные зоны, в которых компенсация невозможна

чае условия компенсации (11) строго выполняются в спектральных диапазонах, близких к зонам прозрачности в системе слоев без поглощения и усиления. Эти диапазоны, возможные только в условиях «идеальной» компенсации, и являются зонами прозрачности рассматриваемой системы. При этом частотная зависимость модулей собственных значений  $|\lambda_{1,2}|$  вновь принимает вид, показанный на рис. 1а, т. е. снова возникают чередующиеся разрешенные зоны, в которых  $|\lambda_{1,2}| = 1$ .

Рассмотрим теперь подробнее частотные зависимости коэффициента пропускания слоистой структуры при фиксированных показателях преломления чередующихся слоев,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2.5$ , и поглощения в нечетных слоях,  $\kappa_1 = 0.1$ ,  $\tilde{\varepsilon}_1 = 1 + 0.2i$ . Скомпенсировать поглощение для выделенной частоты в середине зоны прозрачности ( $k_0 d = 0.23\pi$ ) можно, введя небольшое усиление в четных слоях,  $\kappa_2 \approx -0.0174$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 \approx 6.25 - 0.087i$ . Частотные зависимости коэффициентов пропускания  $|\tau_p(k_z)|$  и отражения  $|r_p(k_z)|$  приведены на рис. 4. Как видно из рисунка, компенсация для числа периодов  $p = 10$  несколько повышает пропускание при сохранении интерференционных осцилляций. При  $p = 100$  эффект компенсации более выражен, но требует внимания задача подавления лазерной генерации (см. ниже разд. 4.3).

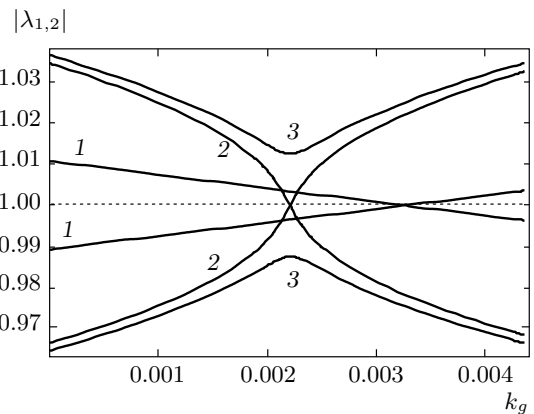
Граница первой запрещенной зоны при заданном значении поглощения в нечетных слоях  $\kappa_1$  ( $\kappa_1 = 0.1$ ) определяется как значение  $k_0 d = k_{bnd}$ , удовлетворяющее соотношению  $\text{Re}[\lambda_c(k_0, \kappa_1, \kappa_2)] = 1$ , но только для компенсационного значения усиления  $\kappa_2 = -\kappa_g$ , для которого справедливо дополнительное условие



**Рис. 4.** Зависимости модулей коэффициентов пропускания (1) и отражения (2) от нормированной компоненты волнового вектора  $\pi^{-1}k_z(d_1 + d_2)$  для случая некомпенсированного (а,б) и скомпенсированного (в,г) поглощения во втором слое;  $p = 10$  (а,в),  $100$  (б,г), вертикальной прямой отмечена середина зоны прозрачности, соответствующая минимуму величины  $|\lambda_c|$  (штриховая линия). Случай нормального падения,  $k_z = k_0$

$\text{Im}[\lambda_c(k_0, \kappa_1, -\kappa_g)] = 0$ . Для принятых параметров  $k_{bnd} = 1.287$ . При этом в разрешенной зоне ( $k_0 d \leq k_{bnd}$ ) можно подобрать такое значение усиления в четных слоях, чтобы модули собственных значений были равны единице,  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , что и обеспечивает компенсацию. Компенсация в запрещенной зоне ( $k_0 d > k_{bnd}$ ) невозможна, так как тогда  $|\lambda_{1,2}| \neq 1$ , как это видно из рис. 5.

В приведенной форме «идеальная» компенсация отвечает подбору спектральной зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости (коэффициента усиления) при заданной вещественной части диэлектрической проницаемости (показателя преломления). Вообще говоря, принцип причинности устанавливает определенные соотношения между вещественной и мнимой частями диэлектрической проницаемости (соотношения Крамерса–Кронига) [10], которые несколько модифицируются в случае среды с усилением. Особенности рассматриваемой ситуации заключаются в следующем. Во-первых, поглощение и усиление малы, т. е. мала мнимая часть диэлектрической проница-



**Рис. 5.** Зависимости модуля собственных значений от усиления в четных слоях  $k_g = -\kappa_2$  для различных значений частоты:  $k_0 d = 0.99k_{bnd}$  (1),  $k_{bnd}$  (2),  $1.0001k_{bnd}$  (3)

емости. Во-вторых, сравнительно узок спектральный диапазон усиления, в пределах которого только и возможна компенсация более широкополосного



поглощения. В-третьих, в пределах ограниченного спектрального диапазона с любой точностью может быть аппроксимирована произвольная частотная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости без нарушения принципа причинности [16]. Из-за этого принцип причинности не является принципиальным препятствием для реализации компенсации поглощения усилением.

#### 4.2. Наклонное падение, распространяющиеся и эванесцентные волны

Угловая зависимость пропускания эванесцентных волн особенно важна, когда задачей является передача изображений. Для распространяющихся волн, которые характеризуются углом падения  $\theta$  на вход системы ( $z = 0$ ), угловая зависимость пропускания показана на рис. 6 (области слева от вертикальной штриховой прямой). Из этой зависимости следует, что компенсация поглощения приводит к повышению пропускания, но при большом числе слоев выражены интерференционные осцилляции. Также на рис. 6 представлены отвечающие эванесцентным волнам зависимости модуля пропускания от поперечного волнового числа  $k_x$  для случая системы прозрачных слоев и скомпенсированного поглощения в сравнении со случаем нескомпенсированного поглощения. Видно, что компенсация поглощения позволяет сохранить большие коэффициенты прохождения мод ( $\sim 10$ ), но эти значения конечны, так как, в отличие от системы прозрачных слоев, вещественные значения  $k_x$  не отвечают полюсам функции прохождения,  $\tau_p(k_x)$  (нулям матричного элемента  $M_{11}(k_x)$ ). Кроме того, коэффициент пропускания как функция  $k_x$  осциллирует вблизи полюсов волноводных мод (см. ниже разд. 4.3), отвечающих расположенным в верхней полуплоскости комплексным значениям  $k_x$ . При этом, чем ближе условия компенсации к пороговому условию возбуждения волноводных мод, тем больше коэффициент прохождения волноводных мод. Конечное число волноводных мод, соответствующих полюсам коэффициента прохождения  $\tau_p(k_x)$ , расположено на конечном интервале значений  $k_x$ . Для заданных параметров набора слоев коэффициент прохождения  $\tau_p$  приближается к нулю при  $k_x d > 2.2$ , что определяет минимальные масштабы разрешения изображений. В принятых условиях  $k_x d < 9.6k_0$ , поэтому величина  $\delta x \sim \lambda/9.6$  характеризует предел разрешения, который не зависит от количества слоев.

Расчеты показывают, что при наклонном падении выполнение условия компенсации (11) только

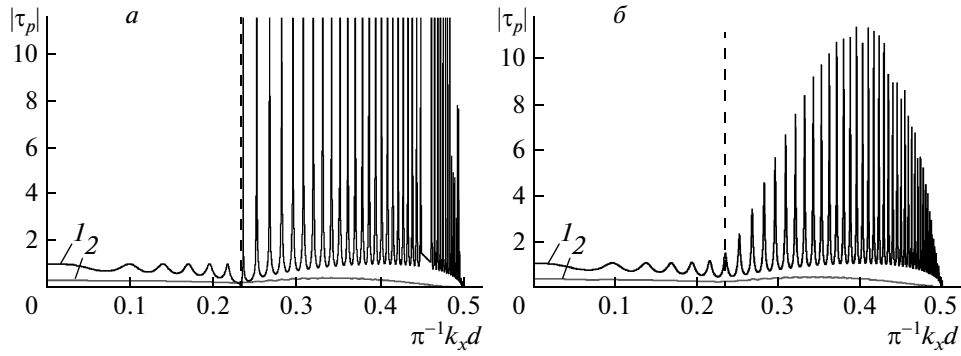
для одного значения  $k_0$  позволяет скомпенсировать поглощение усилением практически во всей первой зоне прозрачности, причем это относится и к области волноводных мод.

#### 4.3. Компенсация и неустойчивости

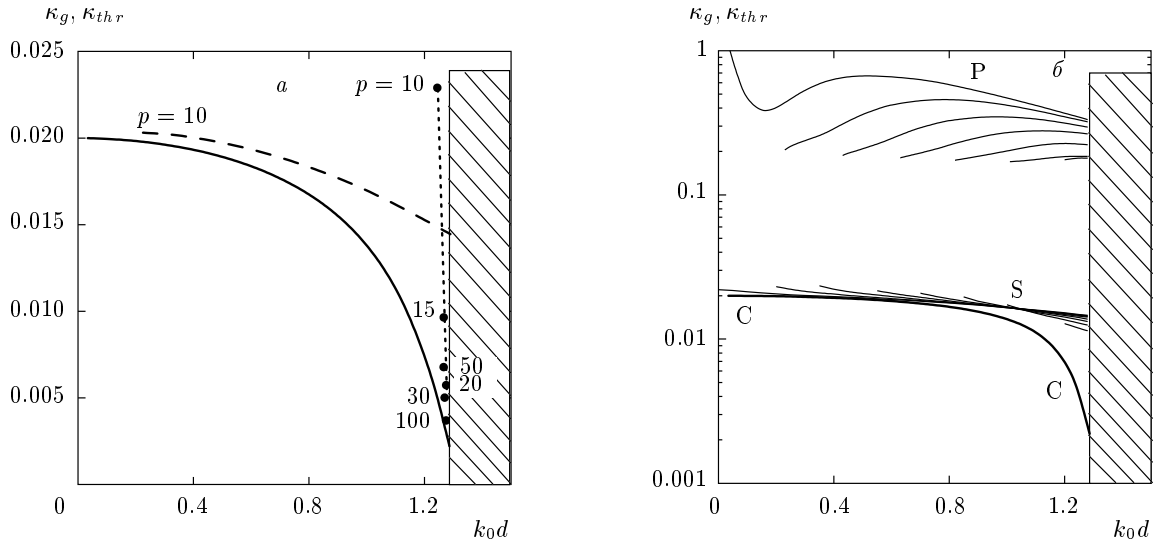
Представленные выше численные результаты по компенсации поглощения усилением были получены без учета возможности развития неустойчивостей, связанных с наличием слоев среды с усилением. Как указывалось выше, анализу подлежат неустойчивости двух типов — абсолютные (генерация на продольных лазерных модах, дискретный набор комплексных частот,  $k_x = 0$ ) и конвективные (сплошной спектр вещественных частот, при фиксированной частоте дискретный набор волноводных мод с комплексными  $k_x$ ). Определение волноводных мод упрощается ввиду малости модуля мнимой части диэлектрической проницаемости, когда эффективная теория возмущений по поглощению и усилению (см. разд. 3). Поиск лазерных мод в общем случае требует полного учета дисперсии, т. е. зависимости диэлектрической проницаемости не только от вещественной, но и от мнимой части (искомой) частоты излучения. Отметим, что при приближении комплексной частоты излучения к также комплексным частотам, отвечающим полюсам диэлектрической проницаемости среды, возможны проявления эффекта комплексного резонанса [17]. Однако на самом пороге интересующей нас лазерной генерации частота излучения вещественна. Кроме того, как указывалось выше, в пределах спектрального диапазона усиления показатель преломления сред меняется слабо. Эти обстоятельства позволяют при нахождении лазерных мод считать заданными спектральные характеристики среды.

В принятых условиях требуемое для компенсации поглощения усиление всегда ниже порогового для волноводного усиления ( $s$ -поляризация возмущений), хотя последнее и приближается к нему в пределе  $p \rightarrow \infty$ . Тем более требуемое для компенсации усиление меньше порога волноводных мод с  $p$ -поляризацией (см. рис. 7). Порог лазерной генерации заметно выше при небольшом числе слоев, но с увеличением  $p$  он уменьшается и асимптотически выходит на постоянное значение. Для «идеальной» компенсации (большое число периодов) необходимо, чтобы этот постоянный уровень был выше усиления, требуемого для компенсации.

На рис. 7 показаны частотные зависимости усиления, необходимого для «идеальной» компенсации,



**Рис. 6.** Зависимости модулей коэффициентов пропускания от поперечной компоненты волнового вектора для фиксированной частоты. Область эванесцентных волн расположена справа от вертикальной штриховой линии. Для системы прозрачных слоев (*a*, кривая 1) полюсы при выделенных значениях  $k_x$  соответствуют волноводным модам. Кривая 2 соответствует нескомпенсированному поглощению,  $\kappa_1 = 0.1$ ,  $\kappa_2 = 0$ . Кривая 1 (*б*) соответствует случаю скомпенсированного поглощения,  $\kappa_1 = 0.1$ ,  $\kappa_2 \approx -0.0174$ ,  $p = 100$



**Рис. 7.** Частотные зависимости коэффициента усиления в четных слоях  $\kappa_g$ , необходимого для «идеальной» компенсации заданного поглощения  $\kappa_1 \approx 0.1$  в нечетных слоях (сплошная жирная линия), порогов волноводного усиления (*a*, штриховая кривая,  $s$ -поляризация,  $p = 10$ , зависимость от  $p$  слаба) и лазерной генерации (*a*, пунктирная линия, соединяющая черные кружки, у которых указано число периодов  $p$ ). Заштрихована запрещенная зона, внутри которой компенсация поглощения усилением невозможна. На рис. *б* сравниваются требуемое для компенсации усиление (С) и пороги волноводного усиления (S для  $s$ -поляризованных волноводных мод и P для мод с  $p$ -поляризацией)

и порогов неустойчивостей. На рис. 7а порог усиления волноводных мод с  $s$ -поляризацией изображен упрощенно огибающей по порогам наиболее опасных мод, которые более детально показаны на рис. 7б. Видно, что волноводные моды с  $p$ -поляризацией обладают более высоким порогом и потому не столь существенны в задаче компенсации поглощения усилением. При низких частотах ( $k_0 d \rightarrow 0$ ) пороги компенсации и усиления  $s$ -поляризованной волноводной моды сближаются, хотя режим компенсации

сохраняет устойчивость. Более точно, в пределе малых фазовых набегов (квазистатическое приближение) для  $s$ -поляризации порог по усилению волноводных мод с  $s$ -поляризацией определяется условием  $\sum_j d_j \text{Im} \tilde{\epsilon}_j = 0$ , и малое отличие от порога компенсации связано только с наличием дополнительного слоя, симметризирующего набор слоев. Из рисунка также видно, что при больших частотах (вблизи края первой зоны) к порогу компенсации приближается порог лазерной генерации в случае большого

числа периодов системы  $p \rightarrow \infty$ , но и здесь устойчивость режима компенсации сохраняется. Тем самым, режим компенсации может быть реализован в сравнительно широком спектральном диапазоне, охватывающем почти всю зону пропускания. Для устойчивости режима компенсации предпочтительнее выбор частоты вблизи запрещенной зоны, где удаление от порога неустойчивости максимально. Для передачи изображения со сверхразрешением удобнее компенсировать поглощение при малых значениях  $k_0 d$  (например, с помощью тонких слоев), поскольку там достигается наибольшая величина коэффициента прохождения эванесцентных волн из-за того, что порог усиления волноводных мод близок к условию компенсации (см. рис. 6).

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для системы периодически чередующихся слоев с поглощением и усилением реализация режима прохождения излучения требует подавления неустойчивостей — абсолютной, отвечающей лазерной генерации, и конвективной, проявляющейся в волноводном усилении излучения. Режимы прохождения и неустойчивостей тесно связаны друг с другом; в частности, режимы волноводного распространения ответственны за глубокую модуляцию коэффициента пропускания эванесцентных волн. Зонная структура пропускания (чередующиеся разрешенные и запрещенные зоны), вообще говоря, нарушается при введении поглощения или усиления, при этом с увеличением числа слоев пропускание системы стремится к нулю даже в случае системы с усилением. Однако зонная структура восстанавливается и коэффициент пропускания системы в разрешенных зонах не стремится к нулю при увеличении числа слоев, если специально подобрать частотную зависимость коэффициента усиления в активных слоях, чтобы поглощение компенсировалось усилением. В запрещенных зонах такая компенсация невозможна. Определены условия, когда компенсация реализуется в отсутствие собственной лазерной генерации и волноводного усиления. Для обеспечения практической прозрачности в первой разрешенной зоне достаточно выполнить условие компенсации вблизи высокочастотной границы этой зоны. Необходимые для сверхразрешения большие коэффициенты пропускания эванесцентных волн могут быть достигнуты в пределе низких частот или тонких слоев ( $k_0 d \ll 1$ ), при котором порог усиления волноводных мод приближается к усилению, требующемуся для компенсации потерь.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, грантов РФФИ №№ 09-02-00848а и 10-02-01016а, а также гранта Министерства образования и науки РНП № 2.1.1/9824.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бриллюэн, М. Пароди, *Распространение волн в периодических структурах*, Изд-во иностр. лит., Москва (1959).
2. О. Звелто, *Принципы лазеров*, Мир, Москва (1990).
3. С. Чан, Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **104**, 620 (2008).
4. S. A. Ramakrishna and J. B. Pendry, *Phys. Rev. B* **67**, 201101(R) (2003).
5. S. Xiao, V. P. Drachev, A. V. Kildishev, X. Ni, U. K. Chettiar, H.-K. Yuan, and V. M. Shalaev, *Nature* **466**, 735 (2010).
6. A. Fang, Th. Koschny, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **82**, 121102(R) (2010).
7. S. Wuestner, A. Pusch, K. L. Tsakmakidis, J. M. Hamm, and O. Hess, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 127401 (2010).
8. E. I. Kirby, J. M. Hamm, T. W. Pickering, K. L. Tsakmakidis, and O. Hess, *Phys. Rev. B* **84**, 041103(R) (2011).
9. D. J. Bergman and M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027402 (2002).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
11. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
13. Н.Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **106**, 487 (2009).
14. Л. А. Мельников, О. Н. Козина, *Опт. и спектр.* **94**, 454 (2003).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
16. B. Nistad and J. Skaar, *Phys. Rev. E* **78**, 036603 (2008).
17. Н. Н. Розанов, *ЖЭТФ* **138**, 605 (2010).