ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 1, стр. 122–134

КОНЕЧНО-РАЗМЕРНЫЙ СКЕЙЛИНГ ИЗ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

*И. М. Суслов**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 апреля 2011 г.

В предположении справедливости самосогласованной теории локализации Вольхардта – Вольфле выводится процедура конечно-размерного скейлинга, основанная на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем и используемая для численного анализа критического поведения в d-мерном случае. Полученные скейлинговые функции при $d = 2$ и $d = 3$ хорошо согласуются с результатами численного моделирования, что означает отсутствие противоречий с теорией Вольхардта – Вольфле на уровне первичных данных. Результаты $\nu = 1.3$–1.6, обычно получаемые при $d = 3$ для критического индекса ν радиуса локализации, связаны с тем, что зависимость $L + L_0$ с $L_0 > 0$ (L — поперечный размер системы) интерпретируется как $L^{1/\nu}$ с $\nu > 1$. Для размерностей $d \geq 4$ справедлив модифицированный скейлинг, демонстрирующий неправильность используемой обработки численных данных при $d = 4$ и $d = 5$, но устанавливающий для нее конструктивный алгоритм. Обсуждаются следствия для других вариантов конечно-размерного скейлинга.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная ситуация в исследовании перехода Андерсона характеризуется тем, что результаты численного моделирования (см. обзор [1]) противоречат всей прочей информации о критическом поведении [1–3]. На наш взгляд, такая ситуация является недопустимой, так как подрывает доверие к аналитической теории.

Критическое поведение проводимости σ и корреляционного радиуса ξ

$$\sigma \propto \tau^s, \quad \xi \propto |\tau|^{-\nu} \tag{1}$$

(τ — расстояние до перехода) может быть получено из самосогласованной теории локализации Вольхардта – Вольфле [4, 5], которая дает

$$\nu = \begin{cases} 1/(d-2), & 2 < d < 4, \\ 1/2, & d > 4, \\ s = 1, & 2 < d < \infty \end{cases} \tag{2}$$

(где d — размерность пространства) и фактически суммирует все известные результаты. Действительно, выражение (2)

а) выделяет значения $d_{c1} = 2$ и $d_{c2} = 4$ как нижнюю и верхнюю критические размерности, которые известны из независимых соображений (см. подробнее [2, 6]);

б) согласуется с теорией для $d = 2 + \epsilon$ [7]

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} + 0 \cdot \epsilon^0 + 0 \cdot \epsilon^1 + O(\epsilon^2), \tag{3}$$

в) удовлетворяет скейлинговому соотношению $s = (d-2)\nu$ [8] для $d < d_{c2}$;

г) дает не зависящие от d критические индексы для $d > d_{c2}$, что характерно для теории среднего поля;

д) согласуется с результатами $\nu = 1/2$ [9, 10] и $s = 1$ [11] для $d = \infty$;

е) согласуется с экспериментальными результатами $s \approx 1$, $\nu \approx 1$ для $d = 3$, полученными из измерений проводимости и диэлектрической проницаемости [12, 13][1)].

Из сказанного ясно, что теория Вольхардта – Вольфле как минимум представляет собой удачное приближение, удовлетворяющее общим

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

1) Работа [13] особенно интересна, так как измерения выполнены для невырожденного электронного газа, где влияние взаимодействия можно проконтролировать.

принципам и воспроизводящее все известные результаты. Более того, возникают подозрения, что результат (2) является точным [14][2)]. Это подтверждается работой [16], где он выводится без модельных приближений на основе симметрийного анализа.

Что касается численных результатов [17–31], то они могут быть суммированы эмпирической формулой $\nu \approx 0.8/(d-2)+0.5$ [25], содержащей очевидные фундаментальные дефекты. Позднейшие тенденции в численном счете еще более усугубляют ситуацию, приводя при $d=3$ к значениям $\nu = 1.54 \pm 0.08$ [24], $\nu = 1.45 \pm 0.08$ [26], $\nu = 1.40 \pm 0.15$ [27], $\nu = 1.57 \pm 0.02$ [29] и т. д.

На наш взгляд, это означает наличие серьезных дефектов в используемых численных алгоритмах. Конечно, неразумно подвергать сомнению первичные данные, которые независимо воспроизводятся многими исследователями; но можно сомневаться в самих алгоритмах, под которыми нет серьезной теоретической основы. Так, результаты могут существенно искажаться за счет грубого нарушения скейлинга [32] или существования большого масштаба длины [3, 33].

Предлагаемый ниже подход состоит в следующем. Будем исходить из справедливости теории Вольхардта – Вольфле (для чего имеются реальные основания [16]) и вычислим величины, которые непосредственно «измеряются» в численном эксперименте. Это позволит провести сопоставление на уровне первичных данных, минуя сомнительную процедуру обработки.

Мы ограничимся обсуждением одного из вариантов конечно-размерного скейлинга (finite-size scaling), основанного на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем [34]. Так, вместо бесконечной трехмерной системы рассматривается система с размерами $L \times L \times L_z$, где $L_z \to \infty$. Такая система топологически одномерна и потому не обладает дальним порядком: поэтому соответствующий корреляционный радиус ξ_{1D} является конечным. Поведение ξ_{1D} при $L \to \infty$ позволяет судить о существовании фазового перехода в $3D$-системе, так как $\xi_{1D}/L \to \infty$ в фазе с дальним порядком и $\xi_{1D}/L \to 0$ в фазе с короткодействием [32, 34]. Обычно в чис-

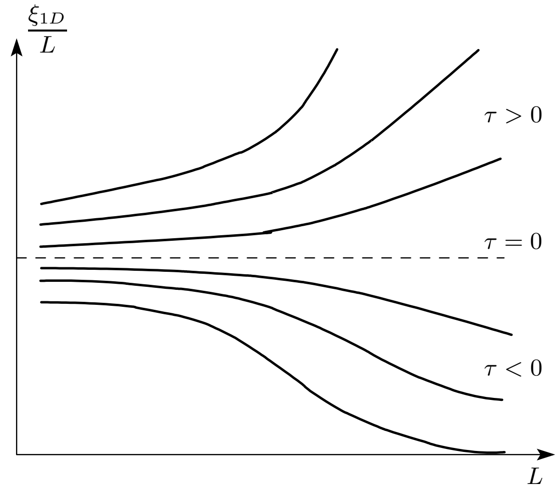

Рис. 1. Зависимость скейлингового параметра ξ_{1D}/L от поперечного размера системы L

ленных исследованиях постулируется скейлинговое соотношение

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right), \tag{4}$$

предполагающее, что корреляционный радиус ξ исследуемой d-мерной системы является единственным существенным масштабом длины, так что L входит лишь в комбинации L/ξ. В этом случае зависимость ξ_{1D}/L от L имеет вид, показанный на рис. 1: в точке перехода она постоянна, тогда как все кривые при $\tau > 0$ (и соответственно $\tau < 0$) могут быть сведены в одну универсальную кривую путем изменения масштаба. Соотношение (4) позволяет исследовать критическое поведение корреляционного радиуса; действительно, вычисляя зависимости от L для двух значений τ и совмещая кривые путем изменения масштаба, можно определить отношение двух соответствующих корреляционных длин. Производя эту процедуру для последовательности значений τ_0, τ_1, $\tau_2, \ldots$, можно установить зависимость ξ от τ с точностью до постоянного коэффициента.

Ниже показано, что скейлинговое соотношение (4) действительно имеет место в пределе больших ξ и L для размерностей пространства $d < 4$, а вычисление скейлинговой функции F при $d=2$ и $d=3$ обнаруживает хорошее согласие с результатами численного моделирования (разд. 3). Это означает, что теория Вольхардта – Вольфле подтверждается на уровне первичных численных данных. В разд. 4 выясняется, почему значение индекса ν в трехмерном случае получается больше единицы: в окрестности перехода скейлинговый параметр ξ_{1D}/L ведет

[2)] Согласно Вегнеру [15], член порядка ϵ^2 в формуле (3) конечен и имеет большую отрицательную величину. Однако этот результат получен для нуль-компонентной σ-модели, соответствие которой с исходной неупорядоченной системой может быть обосновано лишь при малых ϵ, так что различие может возникать в некотором порядке по ϵ.

себя как $\tau(L+L_0)$ с $L_0>0$, что при обычной обработке интерпретируется как $\tau L^{1/\nu}$ с $\nu>1$.

Для высших размерностей соотношение (4) не может быть правильным, что можно утверждать на уровне теоремы. Задача о переходе Андерсона математически точно сводится к теории ϕ^4 [6, 35–37], которая неперенормируема при $d>4$ [38, 39]. Поэтому параметр обрезания (соответствующий атомному масштабу длины) не может быть исключен из результатов и ξ заведомо не является единственным существенным параметром. Однако удается вывести модифицированные скейлинговые соотношения (разд. 5)

$$y = F(x), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} y=\frac{\xi_{1D}}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}, \\ x=\frac{\xi}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}, \quad d>4 \end{gathered} \tag{6}$$

и

$$\begin{gathered} y=\frac{\xi_{1D}}{L}\left[\ln\left(\frac{L}{a}\right)\right]^{-1/3}, \\ x=\frac{\xi}{L}\,\frac{[\ln(L/a)]^{1/6}}{[\ln(\xi/a)]^{1/2}}, \quad d=4, \end{gathered} \tag{7}$$

указывающие на неправильность интерпретации численных данных при $d=4$ и $d=5$ [1], но предлагающие конструктивную процедуру обработки. Модифицированный скейлинг можно вывести также для $d=4-\epsilon$,

$$\begin{gathered} y=\frac{\xi_{1D}}{L}\left[\frac{\epsilon}{1-(L/a)^{-\epsilon}}\right]^{1/3}, \\ x=\frac{\xi}{L}\,\frac{[1-(L/a)^{-\epsilon}]^{1/6}}{[(\xi/a)^{\epsilon}-1]^{1/2}}\,\frac{\epsilon^{1/3}}{(L/a)^{-\epsilon/2}}, \quad d=4-\epsilon, \end{gathered} \tag{8}$$

что полезно использовать в качестве альтернативной обработки при $d=3$ для исследования систематических ошибок, связанных с возможным существованием большого масштаба длины. Наконец, в разд. 6 обсуждаются следствия проведенного анализа для других вариантов конечно-размерного скейлинга.

2. ТЕОРИЯ ВОЛЬХАРДТА – ВОЛЬФЛЕ

Теория Вольхардта – Вольфле основана на существовании диффузионного полюса в неприводимой четыреххвостке $U_{\mathbf{kk}'}(\mathbf{q})$:

$$U_{\mathbf{kk}'}(\mathbf{q}) = U^{reg}_{\mathbf{kk}'}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega,\mathbf{k}+\mathbf{k}')(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}, \tag{9}$$

входящей в уравнение Бете – Солпитера и играющей роль вероятности перехода $W_{\mathbf{kk}'}$ в квантовом кинетическом уравнении. Пренебрегая пространственной дисперсией коэффициента диффузии[3)] и используя аппроксимацию типа τ-приближения, $D\propto\langle U\rangle^{-1}$, где $\langle\ldots\rangle$ — усреднение по импульсам, легко получить уравнение самосогласования теории Вольхардта – Вольфле

$$D \sim \left[U_0 + F_0\int \frac{d^dq}{-i\omega + D(\omega,q)q^2}\right]^{-1}, \tag{10}$$

которое можно вывести путем приближенного решения уравнения Бете – Солпитера [4] или в результате детального анализа спектральных свойств квантового оператора столкновений [16]. Его можно записать в физически более наглядном виде, оценивая коэффициенты для области слабого беспорядка (что актуально для низших размерностей) и имея в виду ситуацию вблизи центра зоны в модели Андерсона:

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D}{D_{min}} + \Lambda^{2-d}\int\limits_{|q|<\Lambda}\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(-i\omega/D)+q^2}, \tag{11}$$

где E — энергия порядка ширина зоны, W — амплитуда беспорядка, Λ — параметр обрезания по импульсу, D_{min} — характерный масштаб коэффициента диффузии, соответствующий моттовской минимальной проводимости. В общем случае левая часть содержит более сложную функцию W, но это не будет существенно для дальнейшего.

Введем в рассмотрение базовый интеграл

$$I(m) = \int\limits_{|q|<\Lambda}\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{m^2+q^2}, \tag{12}$$

для которого при $m\ll\Lambda$ справедливы результаты

$$I(m) = \begin{cases} c_d/m^{2-d}, & d<2, \\ c_2\ln(\Lambda/m), & d=2, \\ I(0)-c_dm^{d-2}, & 2<d<4, \\ I(0)-c_4m^2\ln(\Lambda/m), & d=4, \\ I(0)-c_dm^2\Lambda^{d-4}, & d>4, \end{cases} \tag{13}$$

---

3) Возможность этого обоснована в работе [16]. Попытки связать пространственную дисперсию коэффициента диффузии с мультифрактальностью волновых функций [41] игнорируют комплексность коэффициента диффузии и сложную перестройку его аналитической структуры вблизи перехода [42].

где

$$c_d = \begin{cases} \pi K_d/(2\sin(\pi d/2)), & d<2, \\ 1/2\pi, & d=2, \\ \pi K_d/|2\sin(\pi d/2)|, & 2<d<4, \\ 1/(8\pi^2), & d=4, \\ K_d/(d-4), & d>4 \end{cases} \qquad (14)$$

и $K_d = \left[2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)\right]^{-1}$ — площадь единичной сферы в d-мерном пространстве, деленная на $(2\pi)^d$. Металлический режим возможен лишь при $d>2$, когда значение $I(0)$ конечно. Принимая, что $D = \mathrm{const} > 0$ при $\omega \to 0$ и вводя расстояние до перехода τ, имеем

$$D = D_{min}\,\tau, \quad \tau = \frac{E^2}{W^2} - I(0)\Lambda^{2-d}, \qquad (15)$$

т. е. индекс проводимости s равен единице в соответствии с формулой (2). В диэлектрическом режиме справедлива подстановка

$$D = -i\omega\xi^2, \quad \xi = m^{-1}, \qquad (16)$$

где ξ — корреляционный радиус. Тогда уравнение (11) дает

$$\begin{gathered} \xi \sim a\,\frac{E^2}{W^2}, \quad d=1, \\ \xi \sim a\,\exp\left(2\pi\frac{E^2}{W^2}\right), \quad d=2, \\ \xi \sim a\,|\tau|^{-\nu}, \quad d>2, \end{gathered} \qquad (17)$$

где ν дается выражением (2). В дальнейшем полагаем $a=\Lambda^{-1}$, так что a является атомным масштабом длины, не обязательно совпадающим с постоянной решетки.

3. СКЕЙЛИНГОВЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ $D<4$

3.1. Определение скейлинговых функций

Для описания квазиодномерных систем базовый интеграл (12) достаточно представить в виде

$$I(m) = \frac{1}{L^{d-1}} \sum_{|q_\perp|<\Lambda} \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dq_{||}}{2\pi}\,\frac{1}{m^2+q_{||}^2+q_\perp^2}, \quad m^{-1} = \xi_{1D}, \qquad (18)$$

где вместо исходного d-мерного вектора $q = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$ введены его поперечная и продольная компоненты

$$q_\perp = (q_1, q_2, \ldots, q_{d-1}), \quad q_{||} = q_d, \qquad (19)$$

причем первая считается дискретной. Член с $q_\perp = 0$ имеет расходимость m^{-1} при $m\to 0$, ввиду которой система всегда оказывается в локализованном режиме.

Проинтегрируем по $q_{||}$ и проведем следующее разбиение:

$$\begin{aligned} I(m) &= \frac{1}{L^{d-1}}\,\frac{1}{\pi m}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda}{m} + \frac{1}{\pi L^{d-1}} \times \\ &\times \sum_{\substack{q_\perp\neq 0 \\ |q_\perp|<\Lambda}} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+q_\perp^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda}{\sqrt{m^2+q_\perp^2}} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{|q_\perp|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda}{|q_\perp|}\right) + \frac{1}{\pi L^{d-1}} \sum_{\substack{q_\perp\neq 0 \\ |q_\perp|<\Lambda}} \frac{1}{|q_\perp|} \times \\ &\times \mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda}{|q_\perp|} \equiv I_1(m) + I_2(m) + I_3(0), \end{aligned} \qquad (20)$$

где мы выделили член с $q_\perp = 0$, а к оставшейся сумме добавили и вычли такую же сумму с $m=0$. Для первого члена имеем, очевидно,

$$I_1(m) = \frac{1}{L^{d-2}}\left\{\frac{1}{2mL} + O\left(\frac{a}{L}\right)\right\}. \qquad (20')$$

Во втором члене можно перейти к пределу $\Lambda\to\infty$ и положить $q_\perp = 2\pi\mathbf{s}/L$, где $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_{d-1})$ — вектор с целочисленными компонентами $s_i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$:

$$\begin{gathered} I_2(m) = \frac{1}{L^{d-2}} H_0(mL) + O\left(m^2\Lambda^{d-4}\right), \\ H_0(z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{s}\neq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{s}|^2+(z/2\pi)^2}} - \frac{1}{|\mathbf{s}|}\right). \end{gathered} \qquad (21)$$

Третий член при $L\to\infty$ может быть вычислен путем перехода от суммирования к интегрированию. При конечных L и $d>2$ он имеет структуру

$$I_3(0) = \Lambda^{d-2}\left\{b_0 + b_1\left(\frac{a}{L}\right)^{d-2} + b_2\left(\frac{a}{L}\right)^{d-1} + \ldots\right\}. \qquad (22)$$

Подставляя формулы (20)–(22) в уравнение самосогласования (11), получим при $d>2$

$$\left(\frac{L}{a}\right)^{d-2}\left[\tau + O(m^2a^2)\right] + O\left(\frac{a}{L}\right) = b_1 + H_0(mL) + \frac{1}{2mL}, \qquad (23)$$

где мы положили

$$\tau = \frac{E^2}{W^2} - b_0, \qquad (24)$$

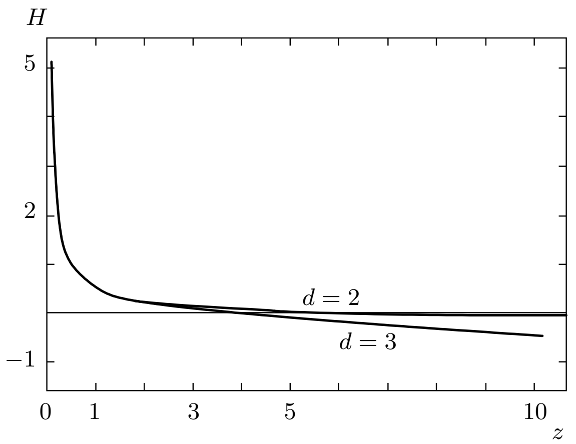

Рис. 2. Функция $H(z)$ при $b_1 = 0$ в двумерном и трехмерном случаях

что совпадает с прежним определением (15), так как b_0 соответствует значению $I(0)$, вычисленному в интегральном приближении. Выражая τ через корреляционный радиус ξ исследуемой d-мерной системы ($\xi^{-1/\nu} \sim |\tau| = \pm\tau$) и опуская члены, исчезающие при $a \to 0$, имеем

$$\pm c_d \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{1D}}\right), \tag{25}$$

$$H(z) = b_1 + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{s}\neq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{s}|^2 + (z/2\pi)^2}} - \frac{1}{|\mathbf{s}|}\right) + \frac{1}{2z}, \tag{26}$$

что и дает скейлинговое соотношение (4), связывающее ξ_{1D}/L с ξ/L и состоящее из двух ветвей.

При $d = 2$ имеем вместо (22)

$$I_3(0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{L}{a} + b_1 + \ldots \tag{22$'$}$$

и полагаем в соответствии с разд. 2

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\xi}{a},$$

что дает

$$\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\xi}{L}\right) = H\left(\frac{L}{\xi_{1D}}\right) \tag{27}$$

с прежним определением $H(z)$. Функция $H(z)$ при $d = 2$ и $d = 3$ для $b_1 = 0$ показана на рис. 2.

3.2. Двумерный случай

При $d = 2$ роль константы b_1 сводится к изменению общего масштаба ξ (см. ниже) и можно положить $b_1 = 0$. При $z \ll 1$ асимптотика $H(z)$ определяется последним членом в формуле (26), тогда как при $z \gg 1$ сумму в (26) можно заменить интегралом

$$H(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z}, & z \ll 1, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln z + \text{const}, & z \gg 1. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда в переменных $y = \xi_{1D}/L$ и $x = \xi/L$ имеем

$$y = \begin{cases} (1/\pi)\ln x, & x \gg 1, \\ \text{const}\cdot x, & x \ll 1. \end{cases} \tag{29}$$

Зависимость y от x при произвольных значениях находится численно на основе определения (26), (27).

Определение ξ_{1D} и ξ в теории Вольхардта–Вольфле не совпадает с тем, которое используется в численных экспериментах. В первом случае ξ^2 (и аналогично ξ_{1D}^2) определяется как среднее $\langle r^2\rangle$ для локализованного состояния $\psi(r)$ [16]. Во втором случае имеется в виду определение по асимптотике $\exp\{-r/\xi\}$ корреляционных функций, так как ξ_{1D} вычисляется как величина, обратная минимальному показателю Ляпунова; масштаб же ξ в численных исследованиях вообще произволен. Таким образом, при сопоставлении теории с численным экспериментом общие масштабы ξ_{1D} и ξ подбираются из лучшего согласия, что в двойных логарифмических координатах сводится к параллельному сдвигу вдоль двух осей; сама же форма скейлинговой кривой определяется без подгоночных параметров.

На рис. 3 полученная зависимость ξ_{1D}/L от ξ/L сравнивается с результатами пионерской работы Маккиннона и Крамера [18] и более поздней работы Шрайбера и Оттомейера [19], которая цитируется как наиболее детальное исследование двумерных систем в рамках обсуждаемого алгоритма.

3.3. Трехмерный случай

Введенное выше определение интеграла $I_3(0)$ подразумевало выбор обрезания в виде цилиндрической области ($|q_\perp| < \Lambda$, $|q_{||}| < \Lambda$). Нетрудно определить его также для сферической ($|q| < \Lambda$) и кубической ($|q_i| < \Lambda$) областей

$$I_3^{(cub)}(0) = \frac{1}{2\pi^2 L^{d-2}}\sum_{\substack{\mathbf{s}\neq 0\\ |s_i|<\Lambda L/2\pi}}\frac{1}{|\mathbf{s}|}\,\text{arctg}\left(\frac{\Lambda L}{2\pi|\mathbf{s}|}\right),$$

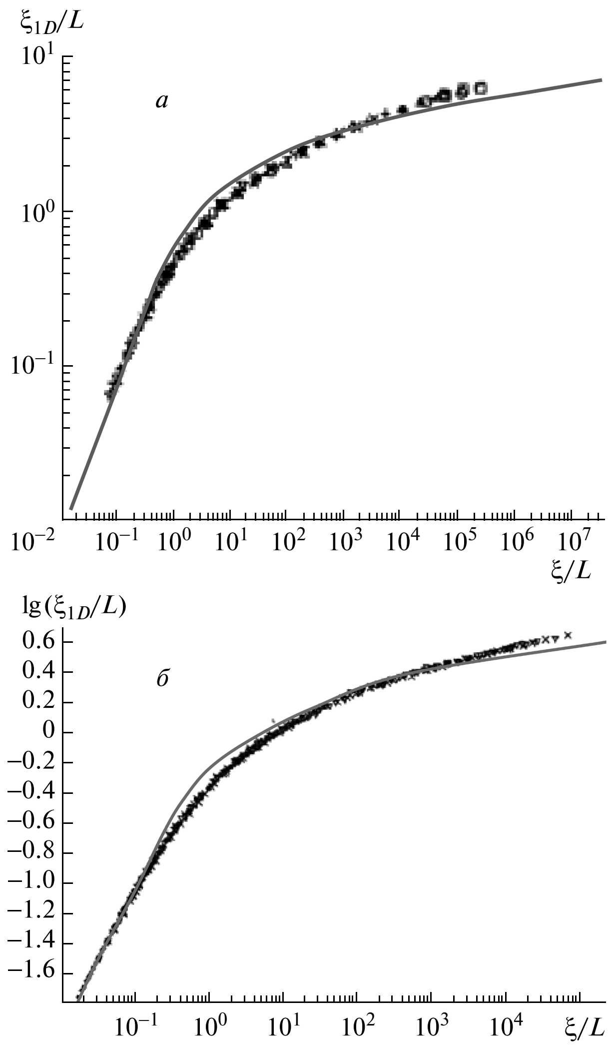

Рис. 3. Сопоставление теоретической скейлинговой кривой для $d = 2$ с численными данными работы Маккиннона – Крамера [18, Fig. 2*a*] (*a*) и Шрайбера – Оттомейера [19, Fig. 4] (*б*)

$$I_3^{(cyl)}(0) = \frac{1}{2\pi^2 L^{d-2}} \times \times \sum_{\substack{\mathbf{s}\neq 0 \\ |\mathbf{s}|<\Lambda L/2\pi}} \frac{1}{|\mathbf{s}|}\operatorname{arctg}\left(\frac{\Lambda L}{2\pi|\mathbf{s}|}\right), \quad (30)$$

$$I_3^{(sph)}(0) = \frac{1}{2\pi^2 L^{d-2}} \times \times \sum_{\substack{\mathbf{s}\neq 0 \\ |\mathbf{s}|<\Lambda L/2\pi}} \frac{1}{|\mathbf{s}|}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{(\Lambda L/2\pi)^2 - |\mathbf{s}|^2}}{|\mathbf{s}|}\right).$$

В зависимости от этого имеем численно

$$I_3(0) = \begin{cases} 0.0618\Lambda - 0.180L^{-1}, & \text{куб}, \\ 0.0573\Lambda - 0.314L^{-1}, & \text{цилиндр}, \\ 0.0507\Lambda - 0.310L^{-1}, & \text{сфера}, \end{cases} \quad (31)$$

т. е. значение константы b_1 не является универсальным, а зависит от характера обрезания. Ее изменение позволяет делать скейлинговую кривую более симметричной или менее симметричной; она выбиралась из лучшего согласия, хотя ее изменение в интервале $(-0.3, 0)$ влияло на результаты не очень существенно[4)]. Общие масштабы для ξ и ξ_{1D}, как и выше, теорией не фиксируются.

Используя асимптотики для $H(z)$

$$H(z) = \begin{cases} 1/2z, & z \ll 1, \\ -A(z - z^*), & z \to z^*, \\ -c_d z^{d-2}, & z \gg 1, \end{cases} \quad (32)$$

имеем в переменных $y = \xi_{1D}/L$ и $x = \xi/L$

$$y = \begin{cases} 2c_d/x^{d-2}, & y \gg 1, \\ y^* \pm B/x^{d-2}, & y \to y^*, \\ x, & y \ll 1, \end{cases} \quad (33)$$

где z^* и $y^* = 1/z^*$ — значения переменных z и y в критической точке. Та же зависимость, но в переменных y и $1/x$, определяет поведение скейлингового параметра как функции L (рис. 1), давая две базовые кривые, к которым путем изменения масштаба сводятся все зависимости для $\tau > 0$ и $\tau < 0$:

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L} = \begin{cases} \sim \tau L^{d-2}, & y \gg 1, \\ y^* + \mathrm{const}\cdot\tau L^{d-2}, & y \to y^*, \\ \xi/L, & y \ll 1. \end{cases} \quad (34)$$

На рис. 4 полученные скейлинговые кривые сопоставляются с ранними результатами Маккиннона и Крамера [18] и более точными результатами Маркоша [1]. В первом случае согласие удовлетворительное, во втором имеются расхождения на уровне двух–трех стандартных отклонений. Нужно, однако, иметь в виду, как строятся скейлинговые кривые: зависимости, соответствующие разным τ, «измеряются» в некотором интервале (L_{min}, L_{max}), а затем подгоняются друг к другу путем изменения масштаба (рис. 5). Полная скейлинговая кривая никогда не возникает в одном эксперименте: всегда измеряется лишь некоторый ее отрезок. На рис. 4*б* видно, что изменением масштаба вдоль горизонтальной оси (что

4) Подгонка проводилась вручную по нескольким реперным точкам и, возможно, не является оптимальной.

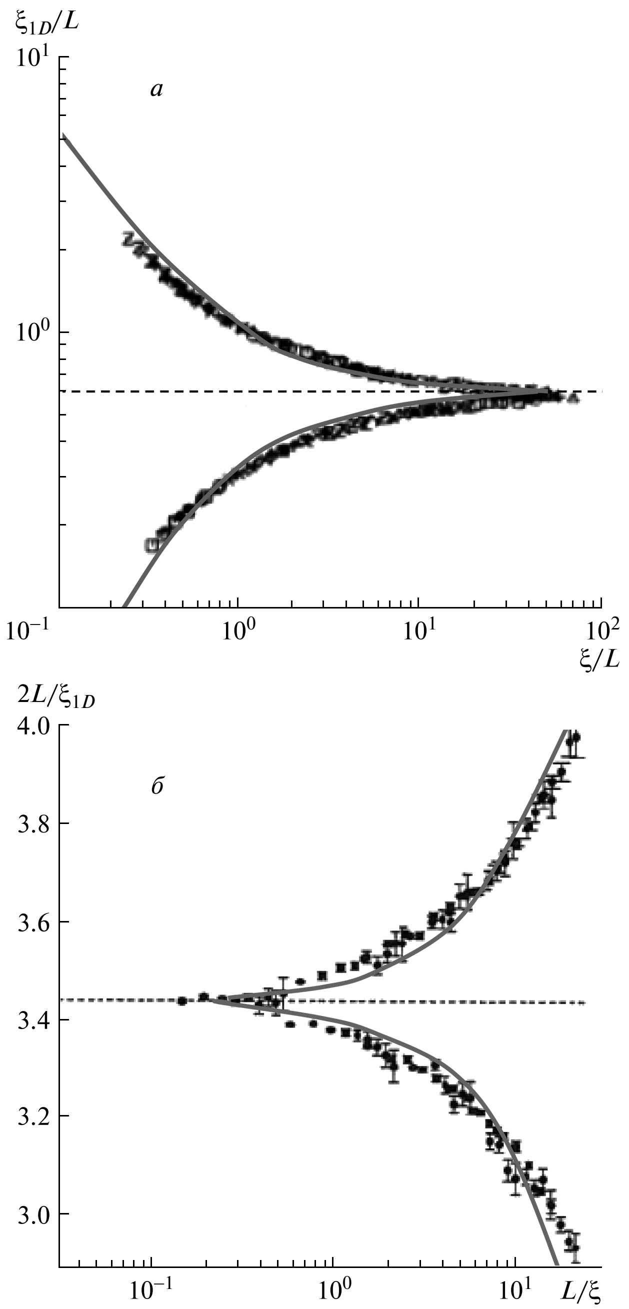

Рис. 4. Сопоставление теоретических скейлинговых кривых для $d = 3$ с численными данными работы Маккиннона – Крамера [18, Fig. 2b] (a) и Маркоша [1, Fig. 53, справа] ($б$). В первом случае использовалось значение $b_1 = -0.240$, во втором — $b_1 = -0.0718$

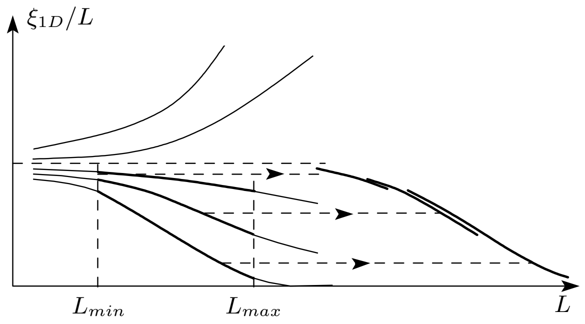

Рис. 5. Построение скейлинговых кривых

сводится к параллельному сдвигу в логарифмических координатах) можно удовлетворительно подогнать правую, левую или среднюю часть кривой. Поэтому на уровне первичных данных никаких серьезных противоречий с теорией Вольхардта – Вольфле не возникает.

4. ОБСУЖДЕНИЕ СИТУАЦИИ ДЛЯ $D = 3$

Возникает интересный вопрос: если теория Вольхардта – Вольфле удовлетворительно описывает первичные данные, то почему во всех численных исследованиях получается $\nu > 1$ при $d = 3$?

История этого вопроса восходит к двум работам [17] и [18] Маккиннона и Крамера, основанным на одном и том же массиве данных. В первой из них приводится результат

$$\nu = 1.2 \pm 0.3, \tag{35}$$

совместимый со значением $\nu = 1$; во второй работе он подтверждается для определенного способа обработки, но в качестве основного приводится «уточненный» результат

$$\nu = 1.50 \pm 0.05, \tag{36}$$

практически совпадающий с наиболее экстремальными значениями последнего времени. Первый результат основан на анализе скейлинговой кривой, совместимость которой с теорией Вольхардта – Вольфле очевидна из рис. 4a и подтверждается самими авторами. При этом они отмечают, что в малой окрестности критической точки скейлинг неудовлетворителен и эту окрестность приходится отбрасывать при обработке. В действительности это вполне естественно, так как в малой окрестности перехода становятся существенны поправки к скейлингу (см. формулу (23)): последние хотя и малы, но должны сравниваться с малой величиной τ. Однако авторы сочли такую ситуацию внутренне противоречивой и предложили другой способ обработки, специально основанный на анализе той малой окрестности, в которой скейлинг отсутствует. Уже на этом этапе можно понять, что второй способ обработки является неудовлетворительным.

Действительно, при использовании систем конечного размера L непосредственно можно работать лишь в режиме $\xi \lesssim L$: в противном случае конечность системы искажает корреляционные функции. Использование конечно-размерного скейлинга позволяет «прыгнуть выше головы» и исследовать область $\xi \gtrsim L$; но это возможно лишь при условии того, что скейлинг существует теоретически и хорошо подтверждается эмпирически. При нарушении любого из этих условий продвижение в область больших ξ становится невозможным, а все манипуляции в этой области оказываются неуместными. Поскольку отсутствие скейлинга в окрестности критической точки подтверждено самими авторами, указанный вывод справедлив в отношении результата (36). Фактически это ясно и просто из здравого смысла: если значение $\nu = 1$ совместимо со скейлинговой кривой, то оно тем более совместимо со всеми первичными данными (см. конец разд. 3). Результатом же (36) это значение отрицается, а следовательно, он должен квалифицироваться как неправильный.

Отмеченные тенденции продолжались в других работах. Обработка, основанная на скейлинговых кривых, приводила к достаточно консервативным результатам[5)], не слишком отличающимся от (35), и лишь повсеместный переход к обработке по малой окрестности критической точки (и отказ от контроля скейлинга) привел к стабилизации результатов типа (36).

Последний способ обработки основан на том, что скейлинговое соотношение (4) переписывается в виде

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = F\left(\frac{L^{1/\nu}}{\xi^{1/\nu}}\right) = F\left(\tau L^{1/\nu}\right) \approx \approx y^* + A\tau L^{1/\nu} + \ldots \qquad (37)$$

и регулярным образом раскладывается по τ, что возможно ввиду отсутствия фазового перехода в квазиодномерных системах. Тогда производная по τ ведет себя как $L^{1/\nu}$ и непосредственно определяет индекс ν. Такая процедура безусловно правильна, если соотношение (4) является точным. Однако точным оно не является: линеаризуя (23), имеем

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = y^* + A\left(\frac{L}{a}\right)^{d-2}\left[\tau - c\frac{a^2}{\xi_{1D}^2}\right] + O\left(\frac{a}{L}\right). \qquad (38)$$

Дифференцируя по τ и исключая $(\xi_{1D})'_\tau$ из правой части итерационным образом, имеем

$$\left(\frac{\xi_{1D}}{L}\right)'_\tau = A_0 L^{d-2} + A_1 L^{d-6}. \qquad (39)$$

Дальнейшие итерации с учетом дальнейших поправок к скейлингу дают

$$\frac{\xi_{1D}}{L} - y^* = \tau\left\{A_0 L^{1/\nu} + A_1 L^{\omega_1} + A_2 L^{\omega_2} + \ldots\right\} + + B_1 L^{-y_1} + B_2 L^{-y_2} + \ldots, \qquad (40)$$

что можно получить и из общих соображений, используя вильсоновскую ренормгруппу [2].

В трехмерном случае главная поправка к скейлингу сводится к константе, так что

$$\frac{\xi_{1D}}{L} - y^* = A\tau\left(L + L_0\right) \qquad (41)$$

с точностью до членов, исчезающих при $L \to \infty$. Как видно на рис. 6*а*, данные Маркоша [1] хорошо описываются такой зависимостью; сам же автор обрабатывал их по формуле (37), что также давало удовлетворительные результаты (рис. 6*б*).

Такая неоднозначность обработки имеет общий характер. Если комбинация $A_1 L^{\beta_1} + A_2 L^{\beta_2}$ в дважды логарифмических координатах дает линейную зависимость с наклоном $(\beta_1 + \beta_2)/2$ в пределах точности ϵ, то вариация $\beta_1 \to \beta_1 + \delta$, $\beta_2 \to \beta_2 - \delta$ сохраняет линейность на том же уровне точности, пока $|\delta| \lesssim |\beta_1 - \beta_2|/2$. При учете же в формуле (40) нескольких степенных членов ситуация и вовсе становится неконтролируемой: при нелинейной подгонке с минимизацией χ^2 обнаруживается наличие огромного числа минимумов, окрестность любого из которых является допустимой, если удовлетворяет критерию χ^2. Поскольку перебор всех таких минимумов является нереальным, не существует корректной процедуры обработки, применимой для такой ситуации[6)]. Из сказанного ясно, что стандартный подход основан на предположении, что в формуле (40) существен лишь главный член; если же поправочные члены не пренебрежимо малы, то ситуация сразу становится безнадежной.

Заметим, что в рамках теории Вольхардта–Вольфле картина является полностью согласованной. Поскольку эмпирически $L_0 \approx 5$ (в единицах

5) Как подробно обсуждалось в работе [22], это связано с тем, что результат для ν существенно зависит от того, какой отрезок скейлинговой кривой подвергается обработке.

6) Эти вопросы подробно обсуждались в работе [2] в связи с работой [29]. Тем не менее последняя работа продолжает цитироваться [1] как выдающееся достижение.

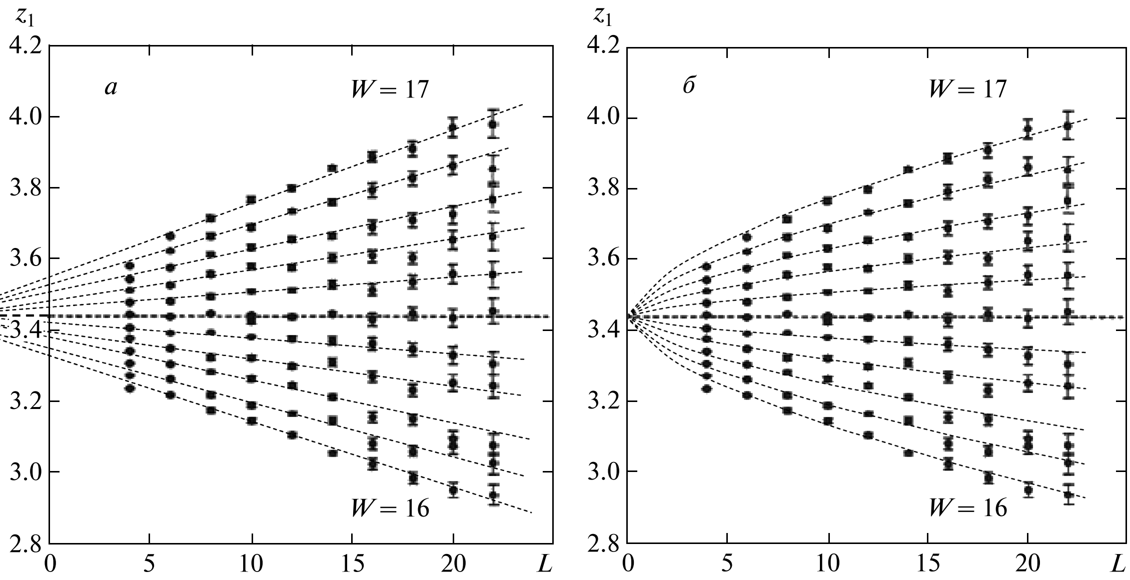

Рис. 6. Численные данные Маркоша для $z_1 = 2L/\xi_{1D}$ в малой окрестности критической точки [1, Fig. 53, слева] и их обработка законом $(L + L_0)$ (a) и $L^{0.63}$ ($б$)

постоянной решетки), хороший скейлинг возможен лишь при $L \gg 5$ и даже для максимально используемых значений $L = 20$–30 параметр L_0/L оказывается на уровне $1/5$. Поэтому некоторое несовпадение скейлинговых кривых на рис. 4*б* не должно вызывать удивления. Теоретическое значение L_0 оказывается порядка Λ^{-1} с коэффициентом, зависящим от способа обрезания; существенно, что оно положительно и ограничено снизу атомным масштабом.

5. СКЕЙЛИНГ ДЛЯ ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

5.1. Размерности $d > 4$

При $d \geq 4$ в сумме для $I_2(m)$ параметр обрезания Λ нельзя считать бесконечным. Для ее аккуратного преобразования введем масштаб Λ_1 такой, что

$$m \ll \Lambda_1 \ll \Lambda, \tag{42}$$

и разобьем суммирование в $I_2(m)$ на области $|q_\perp| < \Lambda_1$ и $|q_\perp| > \Lambda_1$. В первой области воспользуемся тем, что $|q_\perp| \ll \Lambda$, так что

$$I_2^{(1)}(m) = -m^2 \frac{1}{2L^{d-1}} \times \\ \times \sum_{\substack{q_\perp \neq 0 \\ |q_\perp| < \Lambda_1}} \frac{1}{|q_\perp|\sqrt{m^2+q_\perp^2}\left(|q_\perp| + \sqrt{m^2+q_\perp^2}\right)} \tag{43}$$

и

$$I_2^{(1)}(m) = \\ = \begin{cases} -m^2 \left\{ \dfrac{K_{d-1}\Lambda_1^{d-4}}{4(d-4)} + O\left(m^{d-4}\right) \right\}, & m \gtrsim L^{-1}, \\ -m^2 \left\{ \dfrac{K_{d-1}\Lambda_1^{d-4}}{4(d-4)} + O\left(L^{4-d}\right) \right\}, & m \lesssim L^{-1}, \end{cases} \tag{44}$$

т. е. в главном приближении аналитическое вычисление возможно при произвольном соотношении m и L^{-1}. Действительно, при $m \gg L^{-1}$ сумму можно оценить интегралом, который сходится на нижнем пределе уже при $m = 0$; поэтому с конечностью m связаны лишь малые поправки. При $m \lesssim L^{-1}$ главный эффект от конечности L связан с отсутствием члена $q_\perp = 0$, что в интегральном приближении можно оценить как ограничение $|q_\perp| \gtrsim L^{-1}$.

В области $|q_\perp| > \Lambda_1$ воспользуемся тем, что $|q_\perp| \gg m$, и проведем разложение по $m/|q_\perp|$; после выделения общего множителя m^2 можно положить $m = 0$ в оставшейся сумме и заменить ее интегралом,

$$I_2^{(2)}(m) = m^2 \frac{K_{d-1}\Lambda_1^{d-4}}{4(d-4)} - cm^2\Lambda^{d-4}, \tag{44$'$}$$

где константа c зависит от способа обрезания. Нетрудно видеть, что в сумме $I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$ зависимость от Λ_1 исчезает.

Результаты для $I_1(m)$ и $I_3(0)$ остаются теми же, что в разд. 3. В результате уравнение самосогласования принимает вид

$$\tau\Lambda^{d-2} = \frac{1}{L^{d-2}}\,\frac{1}{2mL} - cm^2\Lambda^{d-4}. \tag{45}$$

Подставляя $\tau \propto \xi^{-2}$ и вводя переменные

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}, \quad x = \frac{\xi}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}, \tag{46}$$

получим скейлинговое соотношение

$$\pm\frac{1}{x^2} = y - \frac{1}{y^2}, \tag{47}$$

где мы переопределили общие масштабы ξ_{1D} и ξ так, чтобы сделать все коэффициенты единичными. Таким образом, связь между y и x находится аналитически. Как и ожидалось (см. разд. 1), скейлинговые соотношения (46), (47) содержат атомный масштаб a, что связано с неперенормируемостью теории.

Согласно формулам (46), (47), роль скейлингового параметра переходит от ξ_{1D}/L к величине y; ее зависимость от L аналогична рис. 1, т. е. все кривые путем изменения масштаба сводятся к двум универсальным кривым, соответствующим $\tau > 0$ и $\tau < 0$. Точка перехода соответствует условию $y = \text{const}$, так что

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \sim \left(\frac{L}{a}\right)^{(d-4)/3}, \quad \tau = 0 \tag{48}$$

и фиксация перехода условием $\xi_{1D}/L = \text{const}$ является некорректной.

5.2. Четырехмерный случай

При $d = 4$ имеем аналогично предыдущему

$$I_2(m) = \begin{cases} -c_4 m^2 \ln\dfrac{\Lambda}{m} + O(1), & m \gtrsim L^{-1}, \\ -c_4 m^2 \ln(\Lambda L) + O(1), & m \lesssim L^{-1}, \end{cases} \tag{49}$$

и два результата отличаются в меру $\ln(mL)$, что в актуальной области (см. ниже) сводится к дважды логарифмической величине. В пренебрежении такими величинами можно получить скейлинг и при $d = 4$. Уравнение самосогласования имеет вид

$$\tau\Lambda^2 = \frac{1}{2mL^3} - c_4\, m^2 \ln\frac{\Lambda}{m} \tag{50}$$

или после перехода к ξ и ξ_{1D}

$$\pm\frac{c_4}{\xi^2}\ln\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{\xi_{1D}}{2L^3} - \frac{c_4}{\xi_{1D}^2}\ln\left(\frac{\xi_{1D}}{a}\right). \tag{51}$$

Скейлинговое соотношение (47) получится, если положить

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left[\ln\left(\frac{L}{a}\right)\right]^{-1/3}, \qquad x = \frac{\xi}{[\ln(\xi/a)]^{1/2}}\,\frac{[\ln(L/a)]^{1/6}}{L}, \tag{52}$$

т. е. скейлинговый параметр y, логарифмически модифицированный по сравнению с ξ_{1D}/L, должен рассматриваться как функция «модифицированной длины» $\mu(L) = L\,[\ln(L/a)]^{-1/6}$; тогда изменение масштаба $\mu(L)$ позволяет свести все кривые, аналогичные рис. 1, к двум универсальным, соответствующим $\tau > 0$ и $\tau < 0$. Точка перехода соответствует условию $y = \text{const}$, так что

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \sim \left(\ln\frac{L}{a}\right)^{1/3}, \quad \tau = 0 \tag{53}$$

и параметр ξ_{1D}/L логарифмически растет в точке перехода.

5.3. Модифицированный скейлинг при $d = 4 - \epsilon$

Методически интересен вопрос о скейлинге при $d = 4-\epsilon$; при этом сумма в $I_2(m)$ формально сходится на верхнем пределе, но конечность Λ приводит к существенным поправкам. Аналогично (49) имеем

$$I_2(m) = \begin{cases} -c_4\, m^2 \dfrac{m^{-\epsilon} - \Lambda^{-\epsilon}}{\epsilon}, & m \gtrsim L^{-1}, \\ -c_4\, m^2 \dfrac{L^{\epsilon} - \Lambda^{-\epsilon}}{\epsilon}, & m \lesssim L^{-1}. \end{cases} \tag{54}$$

Скейлинговое соотношение (47) получится, если положить

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left[\frac{\epsilon}{1 - (L/a)^{-\epsilon}}\right]^{1/3}, \qquad x = \frac{\epsilon^{1/3}(\xi/a)}{[(\xi/a)^{\epsilon} - 1]^{1/2}}\,\frac{[1 - (L/a)^{-\epsilon}]^{1/6}}{(L/a)^{1-\epsilon/2}}, \tag{55}$$

т. е. опять возникает «модифицированная длина» $\mu(L) = L^{1-\epsilon/2}\,[1 - (L/a)^{-\epsilon}]^{-1/6}$, от которой зависит скейлинговый параметр y, приводя к зависимостям типа рис. 1. В критической точке имеем $y = \text{const}$ и

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = \left[\frac{1 - (L/a)^{-\epsilon}}{\epsilon}\right]^{1/3} = \begin{cases} [\ln(L/a)]^{1/3}, & \ln(L/a) \lesssim 1/\epsilon, \\ (1/\epsilon)^{1/3}, & \ln(L/a) \gtrsim 1/\epsilon, \end{cases} \tag{56}$$

т. е. параметр ξ_{1D}/L логарифмически растет до достижения большого масштаба $L_0 \sim a\exp\{\mathrm{const}/\epsilon\}$, после чего принимает постоянное значение. Скейлинг такого типа полезно использовать в качестве альтернативной обработки при $d = 3$ для исследования систематических погрешностей, связанных с возможным существованием большого масштаба. При этом параметр a (фактически соответствующий L_0) может существенно отличаться от постоянной решетки и его нужно использовать в качестве подгоночного, выбирая из условия максимального качества скейлинга. При этом нет оснований ориентироваться на соотношение (47), верное при малых ϵ, поэтому функция $y = F(x)$ должна определяться эмпирически. Что касается соотношений (55), то для них экстраполяция к $\epsilon = 1$ не приводит к проблемам: основанный на них скейлинг при L, $\xi \gg a$ благополучно переходит в равенство (4) и фактически совпадает с (4) при отсутствии большого масштаба L_0. Однако при наличии большого масштаба такой скейлинг является более адекватным.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенного анализа можно заключить, что теория Вольхардта – Вольфле не имеет противоречий с численными результатами на уровне первичных данных. Другое критическое поведение, получаемое обычно при численном моделировании, связано с тем, что с некоторого времени чисто «экспериментальный» подход к проблеме был фактически отвергнут и заменен феноменологическим анализом, который в соответствующей области является совершенно безнадежным. В частности, зависимость $L + L_0$ с $L_0 > 0$ интерпретируется как $L^{1/\nu}$ с $\nu > 1$.

Кроме обсуждавшегося численного алгоритма, основанного на использовании вспомогательных квазиодномерных систем, используются другие алгоритмы, основанные на статистике уровней [20], распределении кондактанса, параметре Таулеса, «отношениях участия» (participation ratios) и пр. [1]. Полученные выше скейлинговые функции не являются универсальными и не могут использоваться для сопоставления с такими результатами. Меняется скейлинг и для высших размерностей: так, для поведения параметра Таулеса в критической точке ожидаются зависимости, отличные от (48), (53) [40]. Сохраняется лишь структура результата (40), который может быть получен из вильсоновской ренормгруппы [2]. При этом показатели $\omega_1, \omega_2, y_1, y_2, \ldots$ определя-

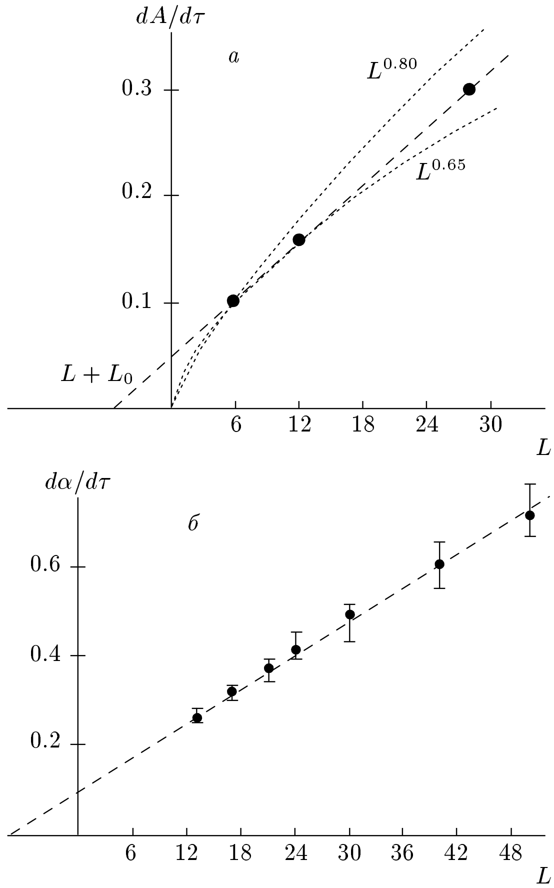

Рис. 7. Обработка по закону $(L + L_0)$ (штриховые линии) для численных данных, основанных на исследовании статистики уровней: a — данные из работы Жарекешева и Крамера [27]; точки — средние значения производной скейлингового параметра A (в произвольных единицах), определенные по рис. 4 этой работы в интервале $16 < W < 17$; статистическая ошибка, связанная с каждой точкой, может оцениваться очень консервативно (см. таблицу в работе [2]) ввиду нерегулярности кривых, приведенных на указанном рисунке; неопределенность, допускаемая самими авторами, соответствует зазору между зависимостями $L^{0.80}$ и $L^{0.65}$, определяющими верхнюю и нижнюю границы результата для критического индекса, $\nu = 1.40 \pm 0.15$; $б$ — данные, полученные группой Шрайбера [43]; точки соответствуют производной скейлингового параметра α (в произвольных единицах), определенной по наклону сплошных кривых на вставке к рис. 3 в работе [43]; их неопределенность соответствует вариации угла наклона в пределах размера экспериментальных точек

ются масштабными размерностями несущественных параметров и потому являются универсальными. Следовательно, сохраняется и результат (41), объясняющий появление эффективных значений $\nu > 1$ (рис. 7).

Рисунок 7*а* может рассматриваться как эталонный пример, соответствующий большинству численных работ. Действительно, имеется полный консенсус по поводу того, что данные для $L \lesssim 5$ выпадают из скейлинговой картины и должны быть отброшены; системы с размерами $L \gtrsim 30$ используются крайне редко; коридор ошибок между зависимостями $L^{0.80}$ и $L^{0.65}$ соответствует оценкам индекса ν, характерным для подавляющего большинства работ. Рисунок 7*б* иллюстрирует одну из немногих работ, в которых использовались рекордно большие размеры систем[7)].

В заключение заметим следующее: даже если в дальнейшем выяснится, что теория Вольхардта – Вольфле не является точной, то к опубликованным значениям ν [17–31] все равно не может быть никакого доверия: рис. 6 наглядно демонстрирует, что значения $\nu \approx 1.6$ и $\nu = 1$ одинаково совместимы с первичными данными, а следовательно, процедура обработки крайне неоднозначна.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Markos, Acta Physica Slovaca **56**, 561 (2006); arXiv:cond-mat/0609580.
2. I. M. Suslov, arXiv:cond-mat/0105325, arXiv: cond-mat/0106357.
3. I. M. Suslov, arXiv:cond-mat/0610744.
4. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982); D. Vollhardt, P. Wölfle, in: *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, Vol. 32, North-Holland, Amsterdam (1992).
5. A. Kawabata, Sol. St. Comm. **38**, 823 (1981); B. Shapiro, Phys. Rev. B **25**, 4266 (1982); А. В. Мясников, М. В. Садовский, ФТТ **34**, 3569 (1982).
6. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
7. F. Wegner, Z. Phys. B **35**, 207 (1979); L. Schäfer and F. Wegner, Z. Phys. B **38**, 113 (1980); S. Hikami, Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981); К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980); K. B. Efetov, Adv. Phys. **32**, 53 (1983).
8. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishman, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
9. H. Kunz and R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L411 (1983).
10. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **93**, 1125 (1987); **94**, 357 (1988).
11. B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **50**, 747 (1983).
12. D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
13. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, Е. Г. Ландсберг, ЖЭТФ **117**, 761 (2000).
14. H. Kunz and R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L506 (1983).
15. F. Wegner, Nucl. Phys. B **316**, 663 (1989).
16. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
17. A. MacKinnon and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
18. A. MacKinnon and B. Kramer, Z. Phys. **53**, 1 (1983).
19. M. Schreiber and M. Ottomeier, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 1959 (1992).
20. B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears et al., Phys. Rev. B **47**, 11487 (1993).
21. K. Slevin, Y. Asada, L. I. Deych, arXiv:cond-mat/ /0404530.
22. B. Kramer, K. Broderix, A. MacKinnon, and M. Schreiber, Physica A **167**, 163 (1990).
23. E. Hofstetter and M. Schreiber, Europhys. Lett. **21**, 933 (1993).
24. A. MacKinnon, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 2511 (1994).
25. M. Schreiber and H. Grussbach, Phys. Rev. Lett. **76**, 1687 (1996).
26. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, Phys. Rev. B **51**, 17239 (1995).
27. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **79**, 717 (1997).
28. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 442 (1998).
29. K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
30. P. Markos, J. Phys. A: Math & Gen **33**, L393 (2000).

[7)] Редкий пример прецизионных данных иллюстрируется на цветном рис. 8 в электронной версии работы [44].

31. P. Markos and M. Heneke, J. Phys.: Condens. Matter **6**, L765 (1994).

32. И. М. Суслов, ЖЭТФ **128**, 768 (2005).

33. И. М. Суслов, ЖЭТФ **129**, 1064 (2006).

34. J. L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C: Sol. St. Phys. **14**, L127 (1981); **14**, L617 (1981).

35. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).

36. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).

37. М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).

38. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).

39. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.

40. И. М. Суслов, ЖЭТФ **113**, 1460 (1998).

41. T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, Ann. Phys. **5**, 633 (1996).

42. I. M. Suslov, arXiv:cond-mat/0612654.

43. F. Milde, R. A. Romer, and M. Schreiber, Phys. Rev. B **61**, 6028 (2000).

44. I. M. Suslov, arXiv:1104.0432.