

# СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ И ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*М. Л. Зайцев\**, *В. Б. Аккерман\*\**

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 февраля 2011 г.

Предложена точная замкнутая система уравнений, описывающая форму свободной поверхности вязкой стационарной жидкости в двумерном случае в терминах самой поверхности. Продемонстрирован метод снижения размерности в уравнениях Навье–Стокса и его применение в задачах стационарного обтекания твердых тел.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы современной науки и техники в той или иной мере связаны с решением уравнений гидродинамики [1–3]. Получено много важных, интересных и «изящных» результатов. Однако общих методов решения гидродинамических задач не существует. Более того, пока нет даже доказательств существования и единственности решения. Это объясняется сложностью уравнений гидродинамики и прежде всего их нелинейностью. В приложениях нелинейность часто является одним из препятствий для изучения многих явлений, таких как турбулентность, движение гидродинамических разрывов, в частности, распространение фронтов химических реакций и др. [1–6]. При их моделировании в практических задачах часто приходится составлять очень тонкую численную сетку по пространству и времени, что требует больших вычислительных мощностей и затрат времени [7]. Большой интерес поэтому представляют различные способы сведения полной системы гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности [8–12]. Подобная процедура позволяет уменьшить размерность задачи на единицу ( $3D \rightarrow 2D$ ,  $2D \rightarrow 1D$ ), что существенно сокращает необходимые вычислительные мощности.

Хорошо известны классические уравнения для описания двумерного течения на плоскости с помощью уравнений, записанных на границе обла-

сти [1–3, 13, 14]. Например, при исчезающе малой вязкости задача описания потенциального обтекания на плоскости сводится к интегральному уравнению на границе области (задачи Дирихле, Неймана) [1–3, 6]. Это уравнение связывает тангенциальную и нормальную составляющие скорости. Зная одну из них на границе обтекаемого тела, можно определить весь внешний поток [1–3]. Это имеет место и для случая очень большой вязкости («ползучее течение»). Ползучие вязкие течения — это медленные течения, в которых все гидродинамические характеристики определяются вязкими напряжениями, а инерционные эффекты пренебрежимо малы (ускорения настолько малы, что ими пренебрегают) [15]. Они встречаются в течении ледников (вязкость льда велика настолько, что многокилометровые массы льда движутся очень медленно), при смазке в технических устройствах, при движении мелких частиц суспензии и т. д. Давление и завихренность в ползучих течениях являются гармоническими функциями, а следовательно, их нахождение во всем пространстве также сводится к интегральному уравнению на границе области.

В данной работе предложен способ переопределения уравнений Навье–Стокса в двумерном случае, что теоретически позволяет свести их к замкнутой системе уравнений на любой поверхности [16–18]. Это показано на примере свободной поверхности вязкой стационарной жидкости и задачи обтекания. Тем самым, для произвольной геометрической конфигурации достигается снижение размерности уравнений на единицу, что делает их удобными для мо-

\*E-mail: mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru

\*\*E-mail: slava.akkerman@gmail.com, slava.akkerman@mail.ru

делирования. В простейших случаях показано, что результаты использования данного метода согласуются с известными результатами.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением несжимаемого вязкого потока в двумерном пространстве в поле силы тяжести  $\mathbf{g}$ . В этом случае описывающие его уравнения Навье – Стокса примут вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left( P + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

Как известно, уравнения (1)–(3) определяют вектор скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и профиль давления  $P(\mathbf{r}, t)$  в любом месте пространства и в произвольный момент времени, т. е. для любого значения  $(\mathbf{r}, t)$ .

Рассмотрим движение свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости в двумерном случае, как показано на рис. 1. Граничные условия на поверхности жидкости имеют вид [1]

$$\sigma'_{ik} n_k - n_i P = 0, \quad (4)$$

$$V + u_n = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль,  $V$  — проекция скорости фронта на отрицательное направление вектора  $\mathbf{n}$ , а

$$\sigma'_{ik} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

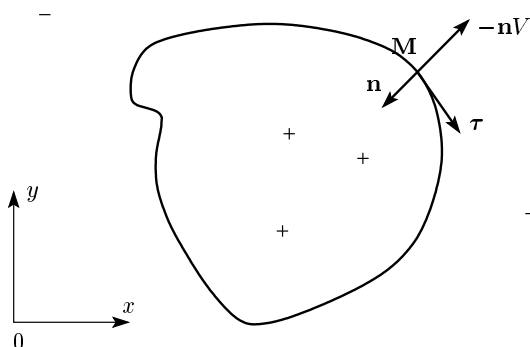


Рис. 1. Свободная поверхность вязкой несжимаемой жидкости

— тензор вязких напряжений. Уравнение (4) представляет собой третий закон Ньютона на границе жидкости, уравнение (5) — условие непроницаемости. Следовательно, в декартовой системе координат  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$

$$P = 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = -2\nu \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}, \quad (7)$$

$$\nu \left( \frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (8)$$

(см. рис. 1) или

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial u_\tau}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + 2 \frac{u_\tau}{R}, \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — завихренность,  $R$  — радиус кривизны. Формула (9) означает равенство нулю вязкого касательного напряжения на свободной поверхности жидкости (условие Рэлея).

### 3. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Рассмотрим теперь уравнения Навье – Стокса двумерной несжимаемой жидкости в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega, \quad (10)$$

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (10) следует, что

$$u_y = -\beta u_x - \alpha, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial \omega / \partial t - \nu \Delta \omega}{\partial \omega / \partial y}, \quad \beta = \frac{\partial \omega / \partial x}{\partial \omega / \partial y}.$$

После подстановки (13) в (11), (12) получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \beta \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \omega = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta \frac{\partial u_x}{\partial y} - u_x \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Выражая  $\partial u_x / \partial x$ ,  $\partial u_x / \partial y$ , из (14) и (15) находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + A u_x + B = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + C u_x + D = 0, \quad (17)$$

где

$$A = \frac{\beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}}{1 + \beta^2}, \quad B = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \omega}{1 + \beta^2},$$

$$C = \frac{\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}}{1 + \beta^2}, \quad D = \frac{\beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \omega}{1 + \beta^2}.$$

Дифференцируя (16) и (17) соответственно по  $x$  и  $y$ , находим

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} - AC \right) u_x + \frac{\partial B}{\partial x} - AD = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial C}{\partial y} - AC \right) u_x + \frac{\partial D}{\partial y} - CB = 0. \quad (19)$$

Из формул (18), (19) следует, что

$$u_x = \frac{\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD}{\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}}. \quad (20)$$

Подставив (20) в (16), (17), можно записать выражения (16), (17) для  $\omega$ . Они получены строго из соотношений (10)–(12). При этом уравнения (16) и (17) не являются следствиями друг друга. Таким образом, мы имеем переопределенную систему уравнений (16), (17) для  $\omega$ , где возможно сократить размерность на единицу [16–18]. При этом можно свести систему уравнений (16), (17) на плоскости к системе на любой кривой.

#### 4. СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Выведем систему уравнений, определяющую форму свободной поверхности стационарной вязкой жидкости. Пусть  $y = f(x)$  — уравнение стационарной поверхности (см. рис. 1). В этом случае зависимость от времени в уравнениях (10)–(12) будет отсутствовать, а параметр  $\alpha$  упрощается и принимает вид

$$\alpha = -\frac{\nu \Delta \omega}{\partial \omega / \partial y}.$$

Выражения (16), (17) для  $\omega$ , если туда подставить (20), можно записать в виде

$$H \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial x^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial y^5} \right) = 0, \quad (21)$$

$$G \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial x^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial y^5} \right) = 0. \quad (22)$$

Перейдем в точке  $M$  в систему координат  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$  (см. рис. 1). Тогда уравнения (21), (22) запишутся в виде

$$H \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \mathbf{n}^5} \right) = 0, \quad (23)$$

$$G \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \mathbf{n}^5} \right) = 0. \quad (24)$$

Продифференцируем уравнения (23) и (24) в направлении  $\mathbf{n}$  четыре раза. Тогда получим десять уравнений вида

$$\left[ H \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \mathbf{n}^5} \right) \right]_n^{(s)} = 0, \quad (25)$$

$$\left[ G \left( \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \boldsymbol{\tau}^5}, \frac{\partial^5 \omega}{\partial \mathbf{n}^5} \right) \right]_n^{(s)} = 0, \quad (26)$$

$s = 0, \dots, 4.$

Обозначим

$$S_m = \partial^m \omega / \partial n^m, \quad (27)$$

где  $m = 0, \dots, 9$ ,  $S_0 = \omega$ . Тогда десять уравнений системы (25), (26) можно записать в виде

$$O_k \left( S_m, \frac{\partial S_m}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial^2 S_m}{\partial \boldsymbol{\tau}^2}, \dots \right) = 0, \quad (28)$$

$m = 0, \dots, 9, \quad k = 1, \dots, 10.$

Таким образом, зависимость от производной по  $\mathbf{n}$  в преобразованной системе дифференциальных уравнений (28) будет отсутствовать и мы получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений строго вдоль поверхности.

Из формулы (9) следует, что

$$S_0 = \omega = 2 \frac{u_\tau}{R}. \quad (29)$$

Из уравнений (1)–(3) находим, что в системе координат  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$

$$u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \nu \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (30)$$

После подстановки в (30) выражения для давления  $P$  из формулы (7) получаем

$$\nu S_1 = \nu \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} - 2\nu \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}^2} - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (31)$$

Добавим к системе уравнений (28) уравнения (29), (31), из которых выражаются  $u_\tau$  и  $f(x)$ . В итоге будем иметь систему интегродифференциальных

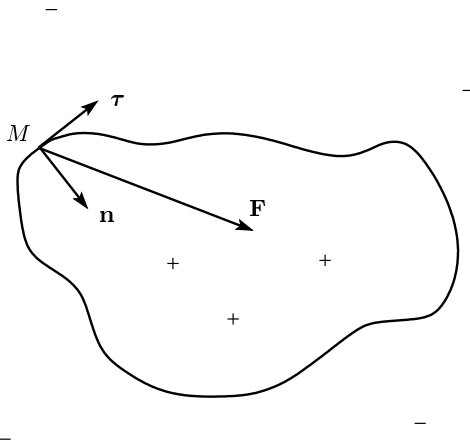


Рис. 2. Твердое тело, обтекаемое вязкой несжимаемой жидкостью

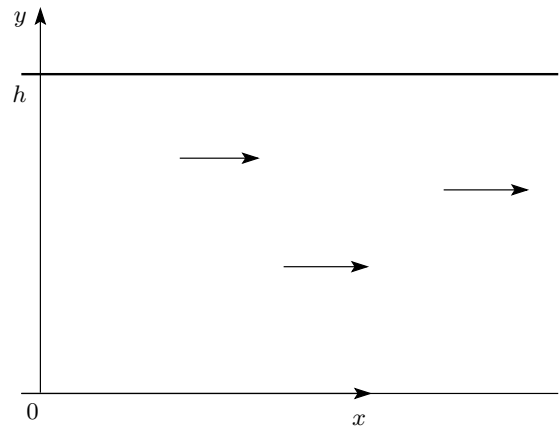


Рис. 3. Стационарное течение жидкости между двумя параллельными плоскостями

уравнений для свободной поверхности стационарной вязкой жидкости и помимо этого определим, как меняются на данном разрыве все остальные параметры, характеризующие течение, такие как  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ,  $\omega$  и т. д.

Выкладки показывают, что выражения (28) в аналитическом виде получаются чрезвычайно сложными и громоздкими. Их выписывание не входит в цели данной работы. Здесь указан подробный алгоритм их получения.

### 5. ВЯЗКОЕ ОБТЕКАНИЕ

Стационарное обтекание неподвижных твердых тел в вязких средах характеризуется нулевыми условиями для скорости на границе [1]:  $V = 0$  и  $\mathbf{u} = 0$ . Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на единицу площади поверхности, равна [1]

$$F_i = Pn_i - \sigma'_{ik}n_k, \tag{32}$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности (см. рис. 2). Следовательно, согласно уравнению (32), в этом случае для любой точки  $M$  на поверхности тела в декартовой системе координат  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$  имеем

$$F_n = P, \tag{33}$$

$$F_\tau = \nu \left( \frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) = \nu\omega. \tag{34}$$

Для этого случая система уравнений на поверхности будет отличаться от системы (28), (29), (31), полученной выше, условиями на границе (33), (34), т. е.

вместо формул (29), (31) к уравнениям (28) добавится соотношение (30), которое сводится к виду

$$\nu S_1 = \nu \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial \tau} - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{35}$$

С помощью этой системы уравнений по формулам (33), (34) мы сможем найти возникающее распределение напряжений на поверхности этого твердого тела.

Рассмотрим для примера стационарное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $h$  друг от друга, при наличии постоянного градиента давления (см. рис. 3). Ось  $x$  направлена вдоль плоскости по направлению движения жидкости. Решение этой задачи имеет следующий вид [1]:

$$u_x = -\frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx} y(y-h), \quad u_y = 0, \tag{36}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{const}, \quad \omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx} (2y-h).$$

Подставим в формулы (16), (17) выражение для  $\omega$  (20) и после упрощения получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial C}{\partial y} B + C \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} D - A \frac{\partial D}{\partial y} \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + A \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + B \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 = 0, \tag{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial x} B + C \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} D - A \frac{\partial D}{\partial x} \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + D \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Если продифференцировать уравнения (37) и (38) в направлении оси  $y$ , играющей роль нормали, четыре раза, то можно заметить, что полученная система относительно переменных (27) вдоль оси  $x$  допускает решение

$$\begin{aligned} S_0 &= \omega = \text{const}, \quad S_1 = \partial\omega/\partial y = \text{const} \neq 0, \\ S_m &= \partial^m \omega / \partial y^m = 0, \quad m = 2, \dots, 9. \end{aligned} \quad (39)$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial^i \beta}{\partial y^i} = \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial y} \right) = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^i A}{\partial y^i} = \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\beta \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}}{1 + \beta^2} \right) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^i C}{\partial y^i} = \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\beta \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}}{1 + \beta^2} \right) = 0, \quad i = 0, \dots, 9. \quad (42)$$

Из формул (37), (38) следует, что в каждом слагаемом присутствует множитель

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \quad (43)$$

или его производные. Из формул (40)–(42) следует, что множитель (43) обращается в нуль. Следовательно, соотношения (37), (38), а также все соотношения, полученные из них дифференцированием в направлении оси  $y$ , сразу выполняются.

Сравнивая (36) и (39), находим, что распределение завихренности на неподвижной плоскости (36) является частным решением нашей системы уравнений, где размерность задачи снижена на единицу.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы предложили способ снижения размерности уравнений Навье–Стокса на единицу, что делает их удобными для упрощения расчетов в самых различных приложениях. На примере

свободной поверхности вязкой стационарной жидкости получена точная замкнутая система уравнений, описывающая форму свободной поверхности вязкой стационарной жидкости в двумерном случае, в терминах самой поверхности. Также это продемонстрировано в задаче обтекания твердых тел в вязких средах, имеющей большое практическое значение. Условие стационарности жидкости не является существенным. Например, в случае нестационарного вязкого обтекания неподвижных тел формула (28) обобщается следующим образом:

$$\begin{aligned} O_k \left( S_m, \frac{\partial S_m}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 S_m}{\partial \tau^2}, \frac{\partial S_m}{\partial t}, \frac{\partial^2 S_m}{\partial \tau \partial t}, \dots \right) &= 0, \\ m &= 0, \dots, 9, \quad k = 1, \dots, 10. \end{aligned} \quad (44)$$

В выражения (44) добавляются слагаемые, связанные со временем. Формулы (33)–(35) остаются в силе. Влияние внешнего потока и условий на бесконечности может происходить через начальные и краевые условия к полученным системам неявных дифференциальных уравнений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Гидродинамика*, т. VI, Наука, Москва (1986).
2. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 1, 2, Наука, Москва (1978).
3. Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Наука, Москва (1987).
4. F. A. Williams, *Combustion Theory*, Benjamin Cummings, Menlo Park, CA (1985).
5. Я. Б. Зельдович, Я. Б. Баренблат, В. Б. Либрович и др., *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, Москва (1980).
6. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).
7. А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, Москва (1980).
8. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, *ЖЭТФ* **135**, 800 (2009).
9. V. Bychkov, M. Zaytsev, and V. Akkerman, *Phys. Rev. E* **68**, 026312 (2003).
10. G. Joulin, H. El-Rabii, and K. Kazakov, *J. Fluid Mech.* **608**, 217 (2008).

11. E. Ott, Phys. Rev. Lett. **29**, 1429 (1972).
12. D. L. Book, E. Ott, and A. L. Sulton, Phys. Fluids **17**, 676 (1974).
13. М. Ван-Дайк, *Альбом течений жидкости и газа*, Мир, Москва (1986).
14. Дж. Мейз, *Теория и задачи механики сплошных сред*, Мир, Москва (1974).
15. Д. Хашпель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, Москва (1976).
16. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, *Труды 52-й научн. конф. МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»*, ч. VI, *Аэромеханика и летательная техника*, МФТИ, Москва (2009), с. 10.
17. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, *Труды 53-й научн. конф. МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»*, ч. VII, *Управление и прикладная математика*, т. 3, МФТИ, Москва (2010), с. 41.
18. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, Письма в ЖЭТФ **92**, 813 (2010).