

ПОГЛОЩЕНИЕ ГАММА-КВАНТОВ В ВАКУУМНОЙ МАГНИТОСФЕРЕ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ. I. РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Я. Н. Истомин*, Д. Н. Собьянин**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2010 г.

Исследовано рождение электрон-позитронных пар в вакуумной магнитосфере нейтронной звезды как для случая малых (по сравнению со швингеровским), так и для случая больших магнитных полей. Рассмотрен случай сильного продольного электрического поля, когда рождающиеся электроны и позитроны за короткое время приобретают стационарный лоренц-фактор. Вычислен источник электрон-позитронных пар с учетом рождения пар изгибными и синхротронными фотонами. Показано, что в слабом магнитном поле вклад синхротронных фотонов в общую интенсивность рождения пар является основным. В то же время, вкладом тормозных фотонов можно пренебречь. Наличие временной задержки из-за конечности времени ускорения электронов и позитронов приводит к сильному ослаблению интенсивности генерации электрон-позитронной плазмы по сравнению со случаем нулевой временной задержки. Построен эффективный локальный источник электрон-позитронных пар, который можно использовать в гидродинамических уравнениях, описывающих развитие каскада после поглощения фотона космического гамма-фона в магнитосфере нейтронной звезды.

1. ВВЕДЕНИЕ

За более чем сорокалетнюю историю изучения радиопульсаров основное внимание уделялось исследованию стационарно работающих радиопульсаров. Однако существуют нестационарные источники радиоизлучения, ассоциируемые с нейтронными звездами. Характеристики их радиоизлучения изменяются с течением времени, а само радиоизлучение может на некоторое время исчезать. К нестационарным источникам радиоизлучения, в частности, можно отнести выключающиеся пульсары и вращающиеся радиотранзиенты. Данные о наблюдении первого выключающегося пульсара были опубликованы в 2006 г. [1]. Существенным обнаруженным эффектом является различие скоростей замедления вращения нейтронной звезды в периоды излучения и молчания. Анализ архивных данных многолучевого обзора пульсаров на австралийском радиотелескопе в Парксе позволил обнаружить вращающиеся радиотранзиенты (RRAT) — источники коротких и

относительно ярких одиночных радиовспышек [2]. Ширина отдельных вспышек составляет 2–30 мс, а спектральная плотность потока излучения достигает 10 Ян на частоте 1.4 ГГц [3]. Для большинства радиопульсаров спектральная плотность потока излучения на данной частоте не превышает нескольких мЯн ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{Гц}$). Отметим, что наблюдение RRAT возможно и на низкой радиочастоте 111 МГц [4]. Промежуток времени между двумя последовательными вспышками хотя и случаен, но кратен некоторому фиксированному периоду, который лежит в пределах $0.1\text{--}6.7 \text{ с}$ и, как считается, является периодом вращения нейтронной звезды. Данный период превышает период типичных радиопульсаров, по порядку величины равный 0.3 с .

Нестационарные источники радиоизлучения обычно довольно трудно обнаружить и получить их характеристики. Одной из основных причин этого является их длительное пребывание в состоянии «молчания». Такое «молчание» наблюдается и у пульсаров, обладающих нуллингем, причем отношение времени нуллинга к полному времени наблюдения пульсара может достигать 95% [5].

*E-mail: istomin@lpi.ru

**E-mail: sobyanin@lpi.ru

Однако само «молчание» не является необходимым условием нестационарности, потому что нестационарность радиоизлучения проявляется и у обычных радиопульсаров в виде переключения мод излучения. Наблюдения, проведенные в последнее время, позволяют говорить об изменении темпа замедления пульсара и при отсутствии его выключения [6]. Данное изменение происходит скачкообразно, часто носит квазипериодический характер и у шести пульсаров коррелирует с наблюдаемым изменением формы импульса.

Транзиентность радиоизлучения характерна и для магнитаров. Магнитары — это нейтронные звезды со сверхсильным магнитным полем на поверхности, порядка и выше швингеровского магнитного поля. Основное проявление их активности состоит в ярких вспышках в рентгеновском и гамма-диапазоне. Их радиоизлучение наблюдается как на низких [7–10], так и на высоких [11, 12] радиочастотах. Радиоизлучение могло быть связано с рентгеновскими вспышками, однако существует магнитар PSR J1622–4950, не обладающий наблюдаемой вспышечной активностью в рентгеновском диапазоне [13]. Более того, по архивным данным можно утверждать, что данный радиоисточник может выключаться на время около нескольких сотен дней. Поскольку по современным представлениям за наблюдаемое радиоизлучение нейтронных звезд ответственны потоки плазмы, истекающей из магнитосферы (см., например, обзор [14]), активность упомянутых радиоисточников свидетельствует о возможном прекращении генерации плазмы в их магнитосфере [15]. Анализ наблюдений выключающихся радиопульсаров PSR B1931+24 и PSR J1832+0029 показывает, что наблюдаемое изменение торможения вращения нейтронной звезды при отсутствии радиоизлучения может быть объяснено, только если магнитосфера нейтронной звезды становится вакуумной: плазма не только не генерируется в магнитосфере, но и не поступает с поверхности нейтронной звезды [15]. Однако в вакуумной магнитосфере может происходить рождение плазмы в результате поглощения фотонов внешнего космического гамма-фона [16–18].

Пусть мы имеем первичный галактический фотон, энергия и направление распространения которого таковы, что поперечная компонента импульса превышает $2m_e c$, где m_e — масса электрона, c — скорость света. Тогда этот фотон может родить в магнитном поле электрон-позитронную пару. Частицы пары рождаются, вообще говоря, на высоких уровнях Ландау и, переходя на нулевой уровень Ландау,

излучают синхротронные фотоны. В вакуумной магнитосфере имеется сильное продольное электрическое поле E_{\parallel} , характерная величина которого определяется соотношением

$$E_{\parallel}/B \sim \Omega R_S/c = R_S/R_L \sim 10^{-4},$$

где $R_S \approx 10$ км — радиус нейтронной звезды, $R_L = c/\Omega$ — радиус светового цилиндра, Ω — угловая частота вращения нейтронной звезды. В таком поле частицы приобретают некоторый стационарный лоренц-фактор γ_0 . Данный лоренц-фактор определяется из условия баланса между работой продольного электрического поля и мощностью изгибного излучения и в вакуумном поле достигает значений $\gamma_0 \sim 10^7$ – 10^8 [16, 17]. Мы имеем изгибные и синхротронные фотоны, которые, в свою очередь, рождают электрон-позитронные пары. Вторичные частицы также излучают синхротронные фотоны, приобретают стационарный лоренц-фактор γ_0 и излучают изгибные фотоны, что продолжают делать и частицы первичной пары. Далее рождается очередное поколение частиц и т.д. Для изучения развития каскада генерации электрон-позитронной плазмы, запускаемого поглощением фотона внешнего космического гамма-фона, необходимо вычислить источник электрон-позитронных пар. Этому и посвящена данная работа. Здесь следует указать на существенное отличие рассматриваемой задачи от задачи о стационарной генерации электрон-позитронной плазмы в магнитосфере нейтронной звезды, заполненной плотной плазмой [19, 20]. Сильное продольное электрическое поле во втором случае существует только в полярной области магнитосферы вблизи поверхности нейтронной звезды, так что рождение плазмы происходит только в этой ограниченной области, и каскад генерации обычно ограничивается двумя поколениями.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разд. 2 выводится интегральное уравнение для самосогласованного источника электрон-позитронных пар с учетом рождения частиц изгибными и синхротронными фотонами, а также находится его решение. В разд. 3 рассматривается начальная стадия развития каскада рождения пар, когда гидродинамические уравнения еще не применимы. В разд. 4 исследуется влияние временной задержки между рождением частиц и поглощением в магнитном поле излучаемых ими фотонов на интенсивность генерации электрон-позитронной плазмы и вычисляется эффективный локальный источник электрон-позитронных пар. В Заключение приводятся основные выводы работы.

2. РОЖДЕНИЕ ПАР

Рассмотрим заполнение магнитосферы нейтронной звезды с магнитным полем $B \sim 10^{12}$ Гс на ее поверхности. Первоначальное состояние магнитосферы мы предполагаем вакуумным. Это соответствует малости имеющейся плотности заряда в магнитосфере по сравнению с плотностью Гольдрайха–Джулиана $\rho_{GJ} = -\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{B}/2\pi c$, когда происходит экранирование продольного электрического поля. Соответствующее электромагнитное поле вычислено в работе [21]. Если считать, что свободного выхода заряда с поверхности звезды не происходит, то заполнение магнитосферы возможно только за счет рождения электрон-позитронных пар гамма-квантами высоких энергий внешнего галактического фона. Необходимость учета влияния этих фотонов на процессы рождения частиц в пульсарах была показана в работе [22]. В ней отмечено, что в модели Рудермана–Сазерленда [23] для запуска каждой новой «искры» в полярном зазоре магнитосферы пульсара необходим приток новых зарядов, который может обеспечиваться поглощением фотонов внешнего космического гамма-фона. Добавим, что при рассмотрении полярной шапки радиопулсара исследуется и случай свободного выхода частиц с поверхности нейтронной звезды с недипольным магнитным полем [24, 25].

Здесь и далее условимся измерять напряженность магнитного поля в единицах швингеровского, или критического, поля

$$B_{cr} = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \approx 4.414 \cdot 10^{13} \text{ Гс},$$

где e — заряд позитрона. В качестве единиц массы, длины и времени будем брать значения соответственно массы электрона $m_e \approx 9.109 \cdot 10^{-28}$ г, комптоновской длины волны электрона $\lambda = \hbar/m_e c \approx 3.862 \cdot 10^{-11}$ см и ее отношения к скорости света $\lambda/c \approx 1.288 \cdot 10^{-21}$ с. Формально это означает, что $\hbar = \lambda = c = 1$. Таким образом, длина будет измеряться в единицах λ , скорость — в единицах c , время — в единицах λ/c , энергия — в единицах $m_e c^2$. Сразу отметим, что в этих единицах $1 \text{ см} \approx 2.590 \cdot 10^{10}$ и $1 \text{ с} \approx 7.763 \cdot 10^{20}$.

Мы рассматриваем рождение электрон-позитронной плазмы в слабом магнитном поле $B \ll 1$. В этом случае число электрон-позитронных пар, рождающихся за единицу времени в единице объема в единичном интервале продольных лоренц-факторов, дается выражением [26]

$$q_p = \frac{2a}{\Lambda} q_{ph} \left(2\gamma_{\parallel} \frac{a}{\Lambda} \right), \quad (1)$$

где $q_{ph}(k)$ — число фотонов, рождающихся за единицу времени в единице объема в единичном интервале энергий, $a = 4/3B \sim 100$, γ_{\parallel} — продольный лоренц-фактор частицы, $\Lambda \sim 10 \gg 1$ — логарифмический фактор. Мы видим, что источник частиц q_p пропорционален источнику фотонов q_{ph} , который представляется в виде суммы источника изгибных фотонов q_{curv} и источника синхротронных фотонов q_{syn} :

$$q_{ph}(k) = q_{curv}(k) + q_{syn}(k). \quad (2)$$

Изгибные фотоны рождаются ультрарелятивистскими частицами при движении вдоль искривленных силовых линий магнитного поля и обладают характерной энергией

$$k_{curv} = \frac{3}{2} \frac{\gamma_{\parallel}^3}{\rho}, \quad (3)$$

где ρ — радиус кривизны траектории частицы, практически совпадающий с радиусом кривизны магнитных силовых линий. Число изгибных фотонов, рожденных за единицу времени в единичном интервале энергий около значения k , дается выражением

$$P_{curv}(\gamma_{\parallel}, k) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\alpha}{\gamma_{\parallel}^2} \varphi \left(\frac{k}{k_{curv}} \right), \quad (4)$$

где

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} K_{5/3}(y) dy, \quad (5)$$

$K_{5/3}(y)$ — функция Макдональда порядка $5/3$, $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Введем спектральную плотность распределения частиц $F(\gamma_{\parallel})$, равную количеству частиц в единице объема, отнесенному к единичному интервалу продольных лоренц-факторов. Тогда источник изгибных фотонов представляется в виде

$$q_{curv}(k) = \int_{\gamma_{min}}^{\infty} P_{curv}(\gamma_{\parallel}, k) F(\gamma_{\parallel}) d\gamma_{\parallel}, \quad (6)$$

где $\gamma_{min} \sim 100$ — минимальный лоренц-фактор рождающихся частиц [26].

Займемся вычислением источника синхротронных фотонов $q_{syn}(k)$. Пусть первоначально имеется фотон с энергией k_i , распространяющийся под углом χ к направлению магнитного поля. После

его поглощения рождается электрон-позитронная пара, частицы которой первоначально обладают лоренц-фактором γ_i и движутся под углом θ_i к направлению магнитного поля. Далее частицы за счет синхротронного излучения теряют поперечную компоненту скорости и переходят на нулевой уровень Ландау, обладая при этом некоторым конечным лоренц-фактором $\gamma_f = \gamma_{\parallel}$, который мы именуем продольным. В момент рождения электрон-позитронной пары выполнены закон сохранения энергии $\gamma_i = k_i/2$ [27] и закон сохранения продольной компоненты импульса $k_i \cos \chi = 2\gamma_i v_{\parallel}$, где $v_{\parallel} = v_i \cos \theta_i$ — продольная компонента скорости электрона или позитрона, v_i — начальная скорость частицы. Важно отметить, что в процессе излучения синхротронных фотонов продольная компонента скорости остается неизменной: $v_{\parallel} = v \cos \theta$, где $v = \sqrt{1-1/\gamma^2}$ и θ — некоторые промежуточные значения скорости частицы и ее питч-угла, γ — промежуточный лоренц-фактор частицы. Фотоны распространяются под малыми углами к магнитному полю, $\chi \ll 1$, следовательно, питч-углы рожденных ими частиц также малы, потому что $0 \leq \theta \leq \theta_i < \chi$. Пользуясь тем, что в этом случае $\sin \theta \approx \theta$, имеем следующую зависимость питч-угла частицы от ее текущего лоренц-фактора:

$$\theta^2 = \chi^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2 \chi^2}\right). \quad (7)$$

Обращение в нуль питч-угла дает значение продольного лоренц-фактора:

$$\gamma_{\parallel} = 1/\chi. \quad (8)$$

Для упрощения вычислений удобно ввести угол η посредством соотношения $\cos \eta = 1/\gamma\chi$. Тогда, как видно из формулы (7), питч-угол дается выражением

$$\theta = \chi \sin \eta, \quad (9)$$

причем начальному питч-углу θ_i соответствует угол $\eta_i = \arccos(2/k_i\chi)$.

Число синхротронных фотонов, излучаемых частицей с лоренц-фактором γ и питч-углом θ за единицу времени в единичном интервале энергий около значения k , равно

$$P_{syn}(\theta, \gamma, k) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\alpha}{\gamma^2} \varphi\left(\frac{k}{k_{syn}}\right), \quad (10)$$

где

$$k_{syn} = \frac{3}{2} B \theta \gamma^2$$

— характерная энергия синхротронных фотонов. В процессе излучения синхротронных фотонов энергия частицы уменьшается:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2}{3} \alpha (B\theta\gamma)^2. \quad (11)$$

Здесь в правой части стоит полная интенсивность синхротронного излучения, получаемая интегрированием формулы (10) с весом k по всем энергиям от 0 до ∞ .

Для того чтобы найти полное количество фотонов \mathcal{N}_{syn} в единичном интервале энергий около энергии k , излучаемых одной частицей за время синхротронного высвечивания, необходимо проинтегрировать выражение (10) по всем временам с учетом зависимости лоренц-фактора частицы и ее питч-угла от времени. Интегрированию по времени от 0 до ∞ соответствует интегрирование по углу η от η_i до 0. С учетом формул (7), (9) и (11) легко получить выражение

$$\mathcal{N}_{syn}(k_i, \chi, k) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\chi}{B^2} \int_0^{\eta_i} d\eta \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta} \varphi\left(a \frac{k\chi}{2} \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta}\right).$$

Спектральное распределение \mathcal{N}_{syn} зависит от энергии начального фотона k_i , родившего электрон-позитронную пару, и его питч-угла χ . Однако эти две величины не являются независимыми, а их связь дается условием поглощения фотона в магнитном поле [26]:

$$\frac{k_i \chi}{2} = \frac{a}{\Lambda} = \frac{1}{\cos \eta_i}.$$

Благодаря выполнению соотношения $a/\Lambda \sim 10 \gg 1$ угол η_i близок к $\pi/2$, а именно,

$$\eta_i \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\Lambda}{a}.$$

С учетом соотношения (8) источник синхротронных фотонов запишется в виде

$$q_{syn}(k) = 2 \int_{\gamma_{min}}^{\infty} q_p(\gamma_{\parallel}) \mathcal{N}_{syn}\left(2\gamma_{\parallel} \frac{a}{\Lambda}, \frac{1}{\gamma_{\parallel}}, k\right) d\gamma_{\parallel}. \quad (12)$$

Интенсивность рождения электрон-позитронных пар q_p пропорциональна суммарному источнику фотонов q_{ph} , содержащему часть, отвечающую за синхротронные фотоны. Сама же интенсивность рождения синхротронных фотонов q_{syn} , в свою очередь, пропорциональна интенсивности рождения пар q_p .

Данное условие самосогласования с учетом формул (1), (2) и (12) позволяет получить интегральное уравнение для нахождения источника электрон-позитронных пар q_p :

$$q_p(\gamma_{\parallel}) = \frac{2a}{\Lambda} q_{curv} \left(2\gamma_{\parallel} \frac{a}{\Lambda} \right) + \frac{a^3}{\Lambda} \xi \times \\ \times \int_{\gamma_{min}}^{\infty} \frac{d\gamma'}{\gamma'} q_p(\gamma') \int_0^{\eta_i} d\eta \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta} \varphi \left(\frac{a^2}{\Lambda} \frac{\gamma_{\parallel} \cos^2 \eta}{\gamma' \sin \eta} \right), \quad (13)$$

где

$$\xi = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}.$$

Рассмотрим некоторый объем электрон-позитронной плазмы в магнитном поле. Процесс рождения плазмы можно представить следующим образом. Пусть мы имеем некоторый фотон, изгибный или синхротронный, который рождает электрон-позитронную пару. После излучения синхротронных фотонов частицы, находясь на нулевом уровне Ландау, обладают некоторым продольным лоренц-фактором и, следовательно, излучают изгибные фотоны. Как видно из формулы (6), источник изгибных фотонов зависит от спектрального распределения частиц по продольным лоренц-факторам. Далее мы будем рассматривать случай, когда существует достаточно сильное продольное электрическое поле. Тогда электрон и позитрон за время

$$\tau_{st} = \frac{\gamma_0}{E_{\parallel}}$$

ускоряются и движутся в противоположных направлениях с характерными лоренц-факторами

$$\gamma_0 = \left(\frac{3}{2\alpha} E_{\parallel} \rho^2 \right)^{1/4}$$

(см. работы [16, 17]). Здесь мы не предполагаем, что поле E_{\parallel} равняется внешнему электрическому полю в вакуумной магнитосфере. Данное поле представляет собой суммарное продольное электрическое поле, являющееся суммой внешнего поля и собственного экранирующего поля плазмы. Величина поля предполагается достаточной для того, чтобы происходило эффективное рождение электрон-позитронных пар. Итак, мы можем записать совокупную функцию распределения частиц в виде

$$F(\gamma_{\parallel}) = (n_+ + n_-) \delta(\gamma_{\parallel} - \gamma_0), \quad (14)$$

где n_+ и n_- — соответственно плотности числа позитронов и электронов, $\delta(x)$ — дельта-функция. Это

отноудь не означает, что источник частиц $q_p(\gamma_{\parallel})$ должен быть пропорционален дельта-функции, потому что он зависит от источника фотонов, не обладающего моноэнергетическим спектром. Тем не менее, рождающиеся частицы будут приобретать лоренц-фактор γ_0 независимо от первоначального спектра частиц. Вследствие этого, для нас важно найти суммарное количество электрон-позитронных пар, рождающихся за единицу времени в единице объема.

Функция распределения частиц (14) пропорциональна суммарной концентрации частиц. В силу линейности интегрального уравнения (13) источник электрон-позитронных пар также пропорционален $n_+ + n_-$. Далее удобно отнести функцию q_p к одной частице, формально полагая во всех предыдущих формулах $n_+ + n_- = 1$. В частности, источник изгибных фотонов $q_{curv}(k)$ будет даваться формулой (4), в которой следует положить $\gamma_{\parallel} = \gamma_0$. Тогда приходящееся на одну частицу число электрон-позитронных пар, рождающихся за единицу времени, равно

$$Q(\gamma_{min}) = \int_{\gamma_{min}}^{\infty} q_p(\gamma_{\parallel}) d\gamma_{\parallel}. \quad (15)$$

Выше мы не упомянули, что рождающиеся частицы, кроме изгибных и синхротронных фотонов, излучают также и тормозные фотоны из-за испытываемого ускорения в продольном электрическом поле E_{\parallel} . Интенсивность тормозного излучения равна [28]

$$W_{brems} = \frac{2}{3} \alpha E_{\parallel}^2.$$

Ее необходимо сравнить с интенсивностью изгибного излучения

$$W_{curv} = \frac{2}{3} \alpha \frac{\gamma^4}{\rho^2}, \quad (16)$$

где γ — лоренц-фактор частицы. При выполнении условия квазистационарного движения $W_{curv} = E_{\parallel}$, соответствующего $\gamma = \gamma_0$, имеем

$$\frac{W_{brems}}{W_{curv}} = \frac{2}{3} \alpha E_{\parallel} \ll 1. \quad (17)$$

При значениях $E_{\parallel} \sim 10^{-4}$ данное отношение по порядку величины равно $W_{brems}/W_{curv} \sim 10^{-6}$. Очевидно, что условие (17) всегда выполнено, потому что продольное электрическое поле заведомо меньше швингеровского, $E_{\parallel} < 1$. В противном случае мы имели бы прямое рождение электрон-позитронных

пар из вакуума, что тотчас привело бы к экранировке электрического поля.

Однако первоначально частица обладает лоренц-фактором, значительно меньшим γ_0 . Тогда интенсивность тормозного излучения будет все же превышать интенсивность изгибного, пока лоренц-фактор не достигнет значения $\sqrt{\rho E_{\parallel}}$. Для $E_{\parallel} \sim 10^{-4}$ и $\rho \sim 10^{17}$ характерное значение переходного лоренц-фактора равно 10^6 . Чтобы оценить суммарный вклад тормозных фотонов, найдем полную энергию тормозного излучения за все время ускорения частицы до стационарного лоренц-фактора γ_0 . При этом мы предполагаем, что начальный лоренц-фактор частицы значительно меньше γ_0 . Это позволит нам получить верхнюю оценку для энергии тормозного излучения, потому что она, очевидно, пропорциональна разности конечного и начального лоренц-факторов ускоряемой частицы. Совокупная энергия излученных за время τ_{st} тормозных фотонов будет равна

$$E_{brem s} = W_{brem s} \tau_{st}.$$

Полная энергия изгибного излучения за время ускорения частицы получается интегрированием по времени от 0 до τ_{st} формулы (16), в которой вместо γ следует взять текущий лоренц-фактор $\gamma_{\parallel} = E_{\parallel} t$:

$$E_{curv} = W_{curv} \frac{\tau_{st}}{5}.$$

Теперь легко получить соотношение

$$\frac{E_{brem s}}{E_{curv}} = 5 \frac{W_{brem s}}{W_{curv}} \ll 1.$$

Итак, отношение суммарной энергии тормозных фотонов к суммарной энергии изгибных фотонов, излучаемых за время ускорения частицы до стационарного лоренц-фактора γ_0 , очень мало и не зависит от самого значения γ_0 . Добавим, что в относительно слабом поле $B \ll 1$ имеется дополнительный вклад синхротронных фотонов в общую интенсивность рождения пар, который, как правило, превышает вклад изгибных фотонов. Следовательно, наличие тормозных фотонов можно не учитывать.

2.1. Преобразование Меллина

К решению интегрального уравнения (13) можно подойти следующим образом. Рассмотрим второе слагаемое в правой части уравнения (13). В этом двойном интеграле переменим порядок интегрирования и сначала рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\gamma_{min}}^{\infty} \frac{d\gamma'}{\gamma'} q_p(\gamma') \varphi\left(\frac{\Upsilon}{\gamma'}\right),$$

где

$$\Upsilon = \frac{a^2}{\Lambda} \gamma_{\parallel} \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta}.$$

Величина Υ ограничена снизу значением

$$\Upsilon \geq \Lambda \gamma_{\parallel} \geq \Lambda \gamma_{min} \gg 1$$

и в любом случае $\Upsilon \geq 1000$. Интеграл I является повторным (см. (5)) и после перемены порядка интегрирования представляется в виде

$$I = \varphi\left(\frac{\Upsilon}{\gamma_{min}}\right) q i_p(\gamma_{min}) + \int_0^{\Upsilon/\gamma_{min}} dy K_{5/3}(y) q i_p\left(\frac{\Upsilon}{y}\right), \quad (18)$$

где введена функция

$$q i_p(x) = \int_x^{\infty} q_p(y) \frac{dy}{y}.$$

Далее будем рассматривать функции $q_p(x)$ и $q i_p(x)$ при всех значениях аргумента x от 0 до ∞ . Мы не ограничиваемся значениями $x \geq \gamma_{min}$, при которых функция $q_p(x)$ первоначально определена, и считаем, что $q(x)$ каким-либо образом продолжена на интервал $(0, \gamma_{min})$. Для нас важно только, чтобы при $x \equiv \gamma_{\parallel} \geq \gamma_{min}$ функция $q(x)$ совпадала с решением интегрального уравнения (13).

Возьмем в качестве пробной функции степенную:

$$q i_p(x) = x^{-s}. \quad (19)$$

Здесь s — некоторое комплексное число, причем такое, что интеграл (18) априори предполагается сходящимся. Введем степенные моменты функции Макдональда $K_{5/3}(x)$ с помощью соотношений

$$M_s(x) = \int_x^{\infty} y^s K_{5/3}(y) dy,$$

$$M_s \equiv M_s(0) = 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{3}\right),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера [29]. Тогда интеграл в правой части выражения (18) будет иметь вид

$$\int_0^{\Upsilon/\gamma_{min}} dy K_{5/3}(y) q i_p\left(\frac{\Upsilon}{y}\right) = \Upsilon^{-s} \left(M_s - M_s\left(\frac{\Upsilon}{\gamma_{min}}\right) \right).$$

Соотношение

$$\frac{\Upsilon}{\gamma_{min}} \geq \Lambda \gg 1$$

позволяет упростить вычисления и воспользоваться асимптотическим представлением функции Макдональда при больших значениях аргумента [30]:

$$K_{5/3}(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

С помощью данного соотношения получаем асимптотическое выражение для неполных моментов функции Макдональда и, в частности, для функции $\varphi(x)$:

$$M_s(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{s-1/2} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$\varphi(x) \equiv M_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Тогда с помощью формул (18)–(21) получаем

$$I \approx \Upsilon^{-s} M_s$$

или, представляя I как линейный интегральный оператор $I[q_i p(x)](\gamma_{||})$ (см. формулу (18)),

$$I[x^{-s}](y) \approx L(s)y^{-s}, \quad (22)$$

где

$$L(s) = \left(\frac{a^2}{\Lambda} \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta} \right)^{-s} M_s.$$

Пусть мы имеем некоторую функцию $f(x)$, определенную на интервале $(0, \infty)$. Данной функции можно поставить в соответствие функцию

$$g(s) = \mathfrak{M}[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx, \quad (23)$$

где $s = \sigma + i\tau$ — комплексный параметр. Интегральное преобразование (23) называется преобразованием Меллина функции $f(x)$. Если образ $g(s)$ известен, то оригинал $f(x)$ находится по формуле обратного преобразования Меллина:

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} g(s) ds, \quad (24)$$

где $\sigma = \text{Re } s$ и $x > 0$. Функция $f(x)$ должна удовлетворять некоторым весьма слабым ограничениям, в качестве которых можно взять следующие [31].

Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном интервале $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \infty$ и удовлетворяет ограничениям $|f(x)| < Ax^{-\sigma_1}$ при $0 < x \leq \varepsilon_1$, $|f(x)| < Ax^{-\sigma_2}$ при $x \geq \varepsilon_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, $A = \text{const} > 0$. Тогда образ $g(s)$ существует и является аналитической функцией в полосе $\sigma_1 < \text{Re } s < \sigma_2$. Формула (24) верна в каждой точке непрерывности функции $f(x)$. Интегрирование в формуле (24) ведется по любой вертикальной прямой в полосе аналитичности, а интеграл на бесконечности понимается в смысле главного значения. Отметим, что существуют обобщения интегрального преобразования (23) и на пространство обобщенных функций [32].

Теперь мы можем рассмотреть случай произвольных функций $q_p(x)$ и $qi_p(x)$, полагая, что

$$q_p(x) = \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}(s)](x), \quad qi_p(x) = \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}i(s)](x).$$

Искомые функции $\mathcal{M}(s)$ и $\mathcal{M}i(s)$ связаны очевидным соотношением

$$\mathcal{M}i(s) = \frac{\mathcal{M}(s)}{s}.$$

Интегральное уравнение (13) после представления в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}(s)](\gamma_{||}) &= \frac{2a}{\Lambda} q_{curv} \left(2\gamma_{||} \frac{a}{\Lambda} \right) + \\ &+ \frac{a^3}{\Lambda} \xi \int_0^{\eta_i} d\eta \frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta} I [\mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}i(s)](x)] (\gamma_{||}) \end{aligned} \quad (25)$$

легко решается. Линейность оператора I и соотношение (22) позволяют получить выражение

$$\begin{aligned} I [\mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}i(s)](x)] (\gamma_{||}) &= \\ &= \mathfrak{M}^{-1}[L(s)\mathcal{M}i(s)](\gamma_{||}). \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь необходимо учесть формулу (26) и далее применить оператор прямого преобразования Меллина \mathfrak{M} к обеим частям уравнения (25). Используя при вычислении преобразования Меллина источника изгибных фотонов q_{curv} формулу

$$\mathfrak{M}[\varphi(x)](s) = \frac{M_s}{s} \quad (27)$$

и свойство

$$\mathfrak{M}[f(Ax)](s) = A^{-s} \mathfrak{M}[f(x)](s), \quad A > 0, \quad (28)$$

окончательно получаем выражение для преобразования Меллина $\mathcal{M}(s)$ функции $q_p(x)$:

$$\mathcal{M}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\alpha}{\gamma_0^2} \frac{2a}{\Lambda} \left(\frac{2a}{\Lambda k_0} \right)^{-s} \times \frac{M_s}{s} \left(1 - \frac{a^3}{\Lambda} \xi \left(\frac{a^2}{\Lambda} \right)^{-s} \nu_s \frac{M_s}{s} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Здесь $k_0 = 3\gamma_0^3/2\rho$ — характерная энергия изгибных фотонов (см. (3)), соответствующая $\gamma_{||} = \gamma_0$, а функция ν_s определена посредством соотношения

$$\nu_s = \int_0^{\eta_i} d\eta \left(\frac{\cos^2 \eta}{\sin \eta} \right)^{1-s}.$$

В работе [33] показано, что $\mathcal{M}(s)$ является мероморфной функцией и, следовательно, не имеет в комплексной плоскости других особых точек, кроме полюсов. Для выбора пути интегрирования в формуле (24) необходимо найти полосу аналитичности функции $\mathcal{M}(s)$. Очевидно, что эта полоса должна ограничиваться слева и справа вертикальными прямыми, на которых функция имеет особые точки, в рассматриваемом случае являющиеся полюсами. Будем искать ограничивающие полюсы на действительной оси. Кроме того, нас будут интересовать значения $s > 2/3$. Тогда полюсы будут задаваться уравнением

$$P(s) = 1, \quad (30)$$

где введена функция

$$P(s) = \frac{a^3}{\Lambda} \xi \left(\frac{a^2}{\Lambda} \right)^{-s} \nu_s \frac{M_s}{s}.$$

Пусть s_{min} и s_{max} — соответственно левый и правый ограничивающие полюсы. Громоздкие вычисления, проведенные в работе [33], позволяют найти, что

$$s_{min} = 2 - \frac{\Lambda}{a \ln \Lambda}, \quad (31)$$

$$s_{max} = 2 + e\Lambda. \quad (32)$$

Мы видим, что левый ограничивающий полюс всегда находится левее точки $s = 2$. Величина $\Lambda/a \ln \Lambda \approx 0.05$. Для правого ограничивающего полюса имеем $s_{max} \gg 1$. При $\Lambda \sim 10$ имеем $s_{max} \approx 30$. Оценка сверху модуля функции $P(s)$ позволяет заключить, что $|P(s)| < 1$ внутри полосы $s_{min} < \text{Re } s < s_{max}$ [33]. В силу выполнения в полюсах соотношения (30) функция $\mathcal{M}(s)$ внутри той

же полосы полюсов не имеет. Итак, функция $\mathcal{M}(s)$ является регулярной в полосе $s_{min} < \text{Re } s < s_{max}$ и контур интегрирования в формуле (24) можно брать в виде вертикальной прямой, параллельной мнимой оси и находящейся внутри данной полосы.

Прежде чем заняться вычислением функции $Q(\gamma_{min})$, исследуем свойства спектра рождающихся частиц $q_p(x)$. Мы можем рассмотреть поведение данной функции при малых и при больших значениях аргумента. В первую очередь нас будет интересовать низкоэнергетическая асимптотика спектра. Чтобы иметь право ее рассматривать, будем считать, что существует некоторый переходный лоренц-фактор γ_{tr} , разделяющий весь спектр на две области: область низких энергий и область высоких энергий. Весь спектр простирается от γ_{min} до ∞ , поэтому для возможности подобного разделения необходимо считать, что, по крайней мере, $\gamma_{min} < \gamma_{tr}$.

Займемся вычислением низкоэнергетической асимптотики $q_p(x)$. Для этого удобно выразить преобразование Меллина \mathfrak{M} через эквивалентное ему двустороннее преобразование Лапласа \mathfrak{L} , которое задается формулой

$$g(s) = \mathfrak{L}[f(x)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Соответствующее ему обратное двустороннее преобразование Лапласа имеет вид

$$f(x) = \mathfrak{L}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs} g(s) ds. \quad (33)$$

Тогда

$$q_p(x) = \mathfrak{L}^{-1}[\mathcal{M}(s)](-\ln x).$$

Рассмотрим область малых x . Если $x \rightarrow 0$, то число $-\ln x > 0$ и, более того, $-\ln x \gg 1$. Как следует из формулы (33), выгодно иметь такие s , чтобы величины $\text{Re } s$ были как можно меньше. Этому можно добиться переносом контура интегрирования как можно левее. Очевидно, что интеграл при этом неизменен, если переносить контур в пределах полосы регулярности. Чтобы получить главный член в асимптотическом разложении функции $q_p(x)$ в точке $x = 0$, необходимо перенести контур через левый ограничивающий полюс s_{min} . Тогда первоначальный интеграл будет равен сумме вычета подынтегральной функции в точке $s = s_{min}$, умноженного на $2\pi i$, и интеграла по перенесенному контуру. Первое слагаемое будет давать главный член асимптотического

разложения, а второе будет иметь следующий порядок малости. Теперь можно записать

$$q_p(x) \sim \operatorname{res}_{s=s_{min}} x^{-s} \mathcal{M}(s), \quad x \rightarrow 0.$$

Формула (31) позволяет пользоваться при вычислениях соотношением

$$s_{min} \approx 2.$$

Обратившись к формуле (29), получим окончательное выражение для низкоэнергетической асимптотики функции $q_p(x)$:

$$q_p(x) \sim \frac{\alpha}{\sqrt{3}\pi} \frac{\Lambda}{2a} \left(\frac{k_0}{\gamma_0}\right)^2 \frac{x^{-2}}{\xi \ln \Lambda}, \quad x \rightarrow 0. \quad (34)$$

Однако вспомним, что функция $q_p(x)$ определена при $x \geq \gamma_{min} \gg 1$, поэтому необходимо понять, почему в данном случае можно пользоваться соотношением (34). Выражение $x \rightarrow 0$ подразумевает малость рассматриваемых значений аргумента по сравнению с γ_{tr} . Вспомним, что в полосе регулярности $|P(s)| < 1$. Для качественной оценки значения γ_{tr} положим в формуле (29) $P(s) = 0$, что формально соответствует $\xi = 0$. Из формул (27), (28) вытекает, что оригинал получившейся функции пропорционален функции $\varphi(x/\gamma_{tr})$, где

$$\gamma_{tr} = \frac{k_0 \Lambda}{2a}.$$

Для функции $\varphi(y)$ переходной областью является $y \approx 1$, поэтому область низких энергий задается неравенствами $\gamma_{min} < \gamma_{\parallel} < \gamma_{tr}$. Для корректного рассмотрения данная область не должна быть исчезающе малой, поэтому необходимо считать, что

$$\gamma_{min} \ll \gamma_{tr}. \quad (35)$$

Для типичных значений $k_0 \sim 10^5$, $a \sim 100$, $\Lambda \sim 10$ имеем характерное значение переходного лоренц-фактора $\gamma_{tr} \sim 10^4$. Мы видим, что для типичного значения минимального лоренц-фактора $\gamma_{min} \sim 100$ критерий (35) заведомо выполнен.

Что касается высокоэнергетической асимптотики, то в дальнейших вычислениях она нам не понадобится. При необходимости ее можно получить методом, аналогичным описанному выше, но контур интегрирования следует переносить через правый ограничивающий полюс. Отметим лишь, что высокоэнергетическая асимптотика пропорциональна $x^{-s_{max}}$, где s_{max} определяется формулой (32). Она имеет степенной, а не экспоненциальный вид,

что согласуется с условиями, описанными после формулы (24).

Наконец, вычислим нужную нам функцию $Q(\gamma_{min})$ (15). Непосредственное интегрирование функции $q_p(x)$ не представляется возможным. Однако возможно вычислить преобразование Меллина функции $Q(x)$ с помощью соотношения

$$\mathcal{M}^{int}(s) = \mathfrak{M}[Q(x)](s) = \frac{\mathcal{M}(s+1)}{s}.$$

Тогда для функции $Q(x)$ имеем

$$Q(x) = \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{M}^{int}(s)](x).$$

Функция $\mathcal{M}^{int}(s)$ мероморфна во всей комплексной плоскости и регулярна в полосе $s_{min}^{int} < \sigma < s_{max}^{int}$, где $s_{min}^{int} = s_{min} - 1$ и $s_{max}^{int} = s_{max} - 1$ — соответственно левый и правый ограничивающие полюсы. Осталось перенести контур интегрирования за левый ограничивающий полюс $s_{min}^{int} \approx 1$ и найти, что

$$Q(x) \sim x q_p(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Данное асимптотическое выражение имеет смысл рассматривать при $x \ll \gamma_{tr}$. Пользуясь критерием (35) и беря в качестве x значение γ_{min} , имеем

$$Q(\gamma_{min}) = \frac{\alpha}{3} \frac{\Lambda}{a} \frac{\gamma_0^4}{\rho^2} \frac{\gamma_{min}^{-1}}{\ln \Lambda}. \quad (36)$$

Легко видеть, что источник электрон-позитронных пар Q линейно зависит от полной интенсивности изгибного излучения (16):

$$Q = \lambda W_{curv} B, \quad (37)$$

где

$$\lambda = \frac{3}{8} \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \frac{1}{\gamma_{min}} \ll 1.$$

По порядку величины $\lambda \sim 0.1$.

Выше мы рассматривали рождение электрон-позитронных пар изгибными и синхротронными фотонами. Наличие синхротронных фотонов существенно при рассмотрении электрон-позитронного каскада в полярной шапке в случае полностью заполненной плазмой замкнутой магнитосферы. При этом, даже несмотря на экранировку электрического поля, кроме первичных частиц, ускоренных в полярном зазоре, имеются два поколения вторичных частиц: первое поколение вторичных частиц, рожденных изгибными фотонами от первичных частиц, и второе поколение частиц, рожденных синхротронными фотонами, излученными в результате перехода частиц первого поколения на нулевой уровень

Ландау. В нашем случае мы имеем значительное продольное электрическое поле, постоянно ускоряющее вновь рождающиеся частицы. Из-за этого не имеет смысла рассматривать каскад рождения плазмы по последовательным поколениям, так как рожденные частицы, какому бы поколению они формально ни принадлежали, после ускорения сразу же начинают играть роль первичных частиц. Следовательно, наличие синхротронных фотонов в рассматриваемом нами случае тем более существенно, так как формально мы имеем случай, соответствующий бесконечному количеству поколений частиц. Иными словами, в правой части интегрального уравнения (13) второе слагаемое значительно больше первого. Из качественных соображений можно записать неравенство

$$Q \gg \frac{W_{curv}}{k_0}, \quad (38)$$

в правой части которого стоит характерное число рождающихся за единицу времени изгибных фотонов. Неравенство (38) означает, что имеющееся синхротронное излучение дает основной вклад в общую интенсивность рождения пар. С помощью формул (37) и (38) получаем

$$\gamma_{min} \ll \frac{\gamma_{tr}}{\ln \Lambda}. \quad (39)$$

Из неравенства (39) с учетом неравенства $\ln \Lambda > 1$, в частности, вытекает условие (35). Поскольку $\Lambda \sim 10$, можно считать неравенства (35) и (39) практически эквивалентными. Оба они всегда выполнены, так как подразумевается выполнение неравенства (38). В противном случае, соответствующем наличию только изгибного излучения, следовало бы формально положить в уравнении (13) $\xi = 0$, что сразу бы и дало решение.

При выполнении условия квазистационарного движения $W_{curv} = E_{\parallel}$ имеем

$$Q = \lambda |\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}|. \quad (40)$$

3. НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ РАЗВИТИЯ КАСКАДА

Пусть мы имеем первичную электрон-позитронную пару, рожденную фотоном внешнего космического гамма-фона в магнитосфере нейтронной звезды. Имеющееся внешнее продольное электрическое поле приводит к тому, что частицы, двигаясь практически по магнитной силовой линии, начинают разлетаться в противоположные стороны и испыты-

вать ускорение, достигая лоренц-фактора γ_0 . Возникающее изгибное излучение будет поглощаться в магнитном поле за счет рождения вторичных электрон-позитронных пар. Мы не можем пользоваться выражением (36) с начального момента времени $t = 0$, потому что для этого необходимо, чтобы плотность числа частиц мало изменялась на длине свободного пробега фотонов. Следовательно, для возможности рассмотрения процессов генерации электрон-позитронной плазмы с помощью гидродинамических уравнений по меньшей мере требуется, чтобы с начального момента $t = 0$ прошло время, в безразмерных единицах равное длине свободного пробега фотона. Тогда частицы электрон-позитронной пары, рожденной данным фотоном, будут давать вторичное изгибное и синхротронное излучение, также рождающее пары, и далее можно пользоваться источником частиц из интегрального уравнения (13).

Найдем характерное расстояние l_1 от точки рождения первичной электрон-позитронной пары до точки рождения первой вторичной электрон-позитронной пары. Его можно представить в виде суммы трех частей,

$$l_1 = l_a + l_e + l_{curv},$$

где $l_a = \gamma_1/E$ — расстояние, на котором частица приобретает некоторый лоренц-фактор $\gamma_1 \gg \gamma_{\parallel}$, $l_e = \rho/\gamma_1$ — длина формирования изгибного излучения, $l_{curv} = l_f(k_{curv})$ — длина свободного пробега излученной частицей изгибного фотона. Здесь мы ввели длину свободного пробега

$$l_f(k) = \frac{2\rho}{k} \frac{a}{\Lambda},$$

зависящую от энергии фотона k [26]. Расстояние l_1 является функцией лоренц-фактора γ_1 . Из различных значений l_1 необходимо выбрать минимальное, поскольку при временах $t > \min_{\gamma_1} l_1(\gamma_1)$ начинается эффективное размножение плазмы. Условие экстремальности $dl_1/d\gamma_1 = 0$ дает значения лоренц-фактора

$$\gamma_1 = (2\rho)^{1/2} \left(\frac{aE_{\parallel}}{\Lambda} \right)^{1/4} \quad (41)$$

и расстояния

$$l_1 = \frac{4}{3} \frac{\gamma_1}{E_{\parallel}}. \quad (42)$$

Формулы (41) и (42) получены в приближении

$$\sqrt{\frac{\Lambda E_{\parallel}}{a}} \ll 1. \quad (43)$$

При $E_{\parallel} \sim 10^{-6}$, $B \sim 10^{-2}$ и $\Lambda \sim 10$ выражение в левой части неравенства (43) по порядку величины равно 10^{-4} – 10^{-3} , поэтому само неравенство всегда выполнено. Возьмем $\rho \sim 10^{17}$. Тогда лоренц-фактор $\gamma_1 \approx 3 \cdot 10^7$, а соответствующее ему расстояние $l_1 \approx 3 \cdot 10^{13}$, что соответствует $l_1 \sim 10$ м в размерных единицах.

Далее можно рассматривать рождение электрон-позитронной плазмы в гидродинамическом приближении, задавая в качестве начальных условий линейные плотности электронов и позитронов вида

$$N_{\pm}^{init} = \frac{3}{2l_1} \theta(l_1 - |z|), \quad (44)$$

где $\theta(x)$ — тета-функция. Важно отметить, что плотности электронов и позитронов как функции продольной координаты z определяются с точностью до расстояний порядка длины свободного пробега фотона относительно рождения электрон-позитронной пары. В рассматриваемом случае роль данной длины выполняет расстояние l_1 и совершенно не важно, какую конкретную функцию $N_{\pm}^{init}(z)$ брать на таких малых масштабах. Единственное требование состоит в том, чтобы интегрирование данной функции по продольной координате давало полное количество электрон-позитронных пар. В формуле (44) мы взяли равномерное распределение частиц по продольной координате.

В работе [33] показано, что за промежуток времени от момента $\tau_1 \approx l_1$ рождения первой вторичной пары до момента τ_{st} полного ускорения частицы рождается всего несколько десятков электрон-позитронных пар при $E_{\parallel} \sim 10^{-6}$ и $a/\Lambda \sim 10$. Соответствующее отношение времен $\tau_1/\tau_{st} \approx 0.9$. По прошествии времени τ_{st} частица перестает ускоряться и излучает за единицу времени

$$Q_{curv} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{\alpha\gamma_0}{\rho} \quad (45)$$

изгибных фотонов. Данное выражение получается интегрированием формулы (4) по всем энергиям k от 0 до ∞ . Характерная длина свободного пробега дается выражением

$$l_{curv} = \frac{8}{9} \alpha \tau_{st} \frac{a}{\Lambda}.$$

Для $a/\Lambda \sim 10$ отношение длины свободного пробега изгибного фотона ко времени ускорения частицы равно $l_{curv}/\tau_{st} \approx 0.06 \ll 1$. Следовательно, после достижения стационарного лоренц-фактора γ_0 практически сразу начинается рождение электрон-позитронных пар с источником Q_{curv} . При этом отноше-

ние длины свободного пробега к длине формирования изгибного излучения велико и по порядку величины составляет 10^3 , поэтому длиной формирования излучения можно пренебречь. Брать Q_{curv} в качестве источника электрон-позитронных пар можно лишь при временах $\tau_{st} < t < 2\tau_1$, потому что далее появится вклад от изгибных фотонов, рожденных вторичными частицами.

Итак, далее начнется каскадный процесс размножения электрон-позитронной плазмы. При этом можно считать, что эффективное включение изгибного излучения происходит через время τ_{st} после рождения частицы, если $\gamma_{\parallel} \ll \gamma_0$. Важно отметить, что при $\Lambda \sim 10$ минимальная длина свободного пробега синхротронных фотонов по порядку величины совпадает (в безразмерных единицах) со временем полного ускорения частицы [33]. Значит, рождение вторичных электрон-позитронных пар изгибными и синхротронными фотонами, излученными частицей, начинается практически одновременно.

4. ВРЕМЕННАЯ ЗАДЕРЖКА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК

Из предыдущего раздела можно заключить, что частицы каждой вновь рожденной электрон-позитронной пары дают вклад в полную интенсивность рождения пар спустя некоторое время задержки τ после рождения. Тогда можно записать дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dN_{\Sigma}(t)}{dt} = 2QN_{\Sigma}(t - \tau) \quad (46)$$

с начальными условиями

$$N_{\Sigma}(t) = N_0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где N_0 — количество электрон-позитронных пар в начальный момент времени. Здесь введено обозначение для полного количества электрон-позитронных пар

$$N_{\Sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\pm}(z, t) dz,$$

где $N_{+}(z, t)$ и $N_{-}(z, t)$ — линейные плотности соответственно позитронов и электронов. Пусть $N_{\tau} = 2Q\tau$ — количество частиц, рождаемых за время τ фотонами, излучаемыми одной частицей. Также удобно перейти ко времени $t_n = t/\tau$, нормированному на время задержки. Уравнение (46) решается с помощью преобразования Лапласа (см., например, [34]):

$$N_{\Sigma}(t) = N_0 \sum_{p=0}^{[t_n]} \frac{N_{\tau}^p}{p!} (t_n - p)^p, \quad t \geq \tau. \quad (47)$$

Данное точное решение позволяет находить полное число электрон-позитронных пар, но не позволяет найти распределение электронов и позитронов по продольной координате. Кроме того, оно применимо до тех пор, пока не начинаются процессы экранировки внешнего продольного электрического поля. Гидродинамические уравнения предполагают наличие зависимости интенсивности рождения пар в некоторой точке z и в некоторый момент времени t от плотностей электронов и позитронов, взятых в той же точке и в тот же момент времени. Иными словами, рассматриваемые уравнения являются локальными по пространству и по времени. Тем не менее, существует как пространственное, так и временное разнесение точки рождения фотона и точки его поглощения. При условии малого изменения плотностей электронов и позитронов на характерных длинах свободного пробега фотонов условие пространственной нелокальности не накладывает существенных ограничений на применимость гидродинамических уравнений, за исключением невозможности рассмотрения генерации плазмы на малых временах (см. предыдущий раздел). Условие же временной нелокальности является значимым, потому что за время задержки, как мы увидим ниже, рождается большое количество фотонов:

$$N_{\tau} \gg 1.$$

Следовательно, неучет временной нелокальности привел бы к сильному завышению интенсивности рождения электрон-позитронных пар.

Нам необходимо найти некоторый эффективный локальный источник Q^{eff} , который можно использовать в гидродинамических уравнениях. Для вычисления Q^{eff} будем считать, что все параметры, характеризующие плазменную трубку, мало изменяются на расстоянии порядка длины свободного пробега фотона l_f . Тогда можно выделить некоторый отрезок трубки, имеющий длину, равную нескольким l_f , в котором выполняется условие локальной однородности. Для рассматриваемого отрезка трубки источник Q и линейные плотности электронов и позитронов N_{\pm} практически неизменны как функции продольной координаты z . Тогда для полного числа электрон-позитронных пар в рассматриваемом отрезке трубки можно записать уравнение (46).

Исследуем решение (47). Введем функцию

$$S(p) = p \ln(eN_{\tau}\xi(p)),$$

где

$$\xi(p) = \frac{t_n}{p} - 1.$$

Замена суммирования интегрированием по переменной p в формуле (47) приводит к асимптотической оценке ряда

$$N_{\Sigma}^{ap}(t) \sim N_0 \int_0^{t_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp(S(p)) dp. \quad (48)$$

Пусть точка p_0 является точкой максимума функции $S(p)$, т. е.

$$S(p_0) = \max_{0 \leq p \leq t_n} S(p).$$

Тогда из условия экстремальности $S'(p_0) = 0$ вытекает уравнение

$$\frac{1}{\xi_0} \exp \frac{1}{\xi_0} = N_{\tau}, \quad (49)$$

где $\xi_0 = \xi(p_0)$. При $N_{\tau} \gg 1$ выполняется неравенство $\xi_0 \ll 1$, и значение ξ_0 легко находится с помощью метода последовательных приближений:

$$\xi_0 \approx [\ln N_{\tau} - \ln(\ln N_{\tau})]^{-1}.$$

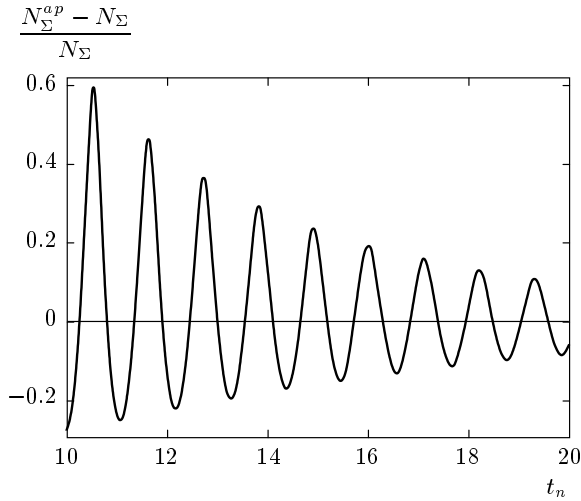
Тогда имеем точку максимума

$$p_0 = \frac{t_n}{1 + \xi_0}.$$

Теперь можно оценить интеграл в уравнении (48) с помощью метода Лапласа [35] и получить

$$N_{\Sigma}^{ap}(t) = \frac{N_0 \xi_0}{1 + \xi_0} (eN_{\tau} \xi_0)^{p_0}. \quad (50)$$

На рисунке приведена зависимость величины $(N_{\Sigma}^{ap}(t) - N_{\Sigma}(t))/N_{\Sigma}(t)$ от времени для $N_{\tau} = 10^5$. Мы видим, что при условии $t_n \gg 1$ полученная асимптотическая оценка хорошо приближается к точному решению, причем величина ошибки стремится к нулю с ростом t . При меньших N_{τ} относительная величина ошибки только уменьшается. Функция $N_{\Sigma}(t)$ является лишь непрерывной, а не бесконечно дифференцируемой. Это связано со ступенчатым «включением» через каждый временной промежуток τ очередного поколения частиц, дающего вклад в полную интенсивность рождения электрон-позитронных пар. Самым существенным здесь является то, что на произвольно выбранном интервале $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, график функции $N_{\Sigma}^{ap}(t)$ пересекает график функции $N_{\Sigma}(t)$.



Зависимость точности аппроксимации N_{Σ}^{ap} числа электрон-позитронных пар N_{Σ} от нормированного времени $t_n = t/\tau$ при $N_{\tau} = 10^5$

Следовательно, полученная гладкая монотонная аппроксимация $N_{\Sigma}^{ap}(t)$ обеспечивает сглаживание $N_{\Sigma}(t)$. Даже отличаясь от точного решения на определенных временных интервалах, она корректно описывает средний темп нарастания числа частиц и позволяет избежать накопления ошибки в числе рожденных пар на больших временах.

Дифференцирование уравнения (50) по времени с учетом соотношения (49) дает

$$\frac{dN_{\Sigma}^{ap}(t)}{dt} = 2Q^{eff} N_{\Sigma}^{ap}(t),$$

где определен эффективный источник электрон-позитронных пар

$$Q^{eff} = \frac{1}{2\xi_0\tau}. \tag{51}$$

Итак, в каждом выделенном отрезке плазменной трубки будет происходить экспоненциальное нарастание числа электрон-позитронных пар с эффективным локальным источником Q^{eff} .

Осталось определить время задержки τ и первоначальный источник Q . Рассмотрим одну из частиц родившейся электрон-позитронной пары. Если отвлечься от рассмотрения синхротронных фотонов, то излучаемые частицей изгибные фотоны начнут давать вклад в рождение вторичных электрон-позитронных пар спустя время τ_{st} полного ускорения частицы. При этом в качестве источника Q необходимо брать выражение Q_{curv} , определяемое формулой (45). Данный случай соответствует

наличию сильного магнитного поля $B \gtrsim 1$. Если же мы включим в рассмотрение и синхротронные фотоны, то, как следует из предыдущего раздела, их вклад в рождение пар начнется на временах того же порядка. Кроме того, при выводе интегрального уравнения (13) мы считали, что каждая вновь рожденная частица ускоряется до лоренц-фактора γ_0 и в выражении для q_{curv} начинает играть роль источника первичных изгибных фотонов. Это также будет происходить через время τ_{st} после рождения частицы. До этого момента времени рассматриваемая частица не участвует в рождении вторичных электрон-позитронных пар и, следовательно, не дает вклада в виде приходящейся на нее доли полной интенсивности рождения пар, определяемой формулой (36) и вытекающей из нее формулой (40). Итак, в качестве источника Q необходимо брать выражение (40), а в качестве времени задержки — время τ_{st} . Этот случай соответствует наличию слабого магнитного поля $B \ll 1$. При этом имеем

$$N_{\tau_{st}} = 2\lambda\gamma_0 B \gg 1.$$

При $B \sim 0.01$ и $\gamma_0 \sim 10^8$ получаем $N_{\tau_{st}} \sim 10^5$, т. е. выполняется неравенство $N_{\tau_{st}} \gg 1$. Соответствующее значение $\xi_0 \approx 0.1$. Отметим, что при последующей экранировке электрического поля данное неравенство будет выполнено и при постепенном уменьшении продольного лоренц-фактора вплоть до значений $\gamma_0 \sim 10^3$. Нужный нам локальный эффективный источник будет определяться формулой (51), в которой $\tau = \tau_{st}$, а ξ_0 является решением уравнения (49) для $N_{\tau} = N_{\tau_{st}}$. Окончательно можно записать

$$Q^{eff} = \frac{\alpha}{3\xi_0} \frac{\gamma_0^3}{\rho^2}. \tag{52}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поглощение фотона высокой энергии внешнего космического гамма-фона во внутренней магнитосфере нейтронной звезды приводит к запуску процессов генерации вторичной электрон-позитронной плазмы. Необходимым условием развития каскада является наличие сильного продольного электрического поля. Учет рождения пар изгибными и синхротронными фотонами в слабом (по сравнению со швингеровским) магнитном поле приводит к необходимости рассмотрения интегрального уравнения (13). Вклад синхротронных фотонов в источник электрон-позитронных пар в случае слабого магнитного поля является определяющим. При этом вкладом тормозных фотонов можно пренебречь.

Решение интегрального уравнения осуществляется с помощью преобразования Меллина. Перенос контура интегрирования за полюс, ограничивающий слева полосу аналитичности образа решения, и метод вычетов позволяют получить низкоэнергетическую асимптотику решения и показать ее применимость для характерных условий в магнитосфере нейтронной звезды. В случае выполнения условия квазистационарного движения решение сводится к формуле (40). В случае сильного магнитного поля $B \gtrsim 1$ из-за отсутствия синхротронных фотонов источник электрон-позитронных пар определяется интенсивностью изгибного излучения и имеет вид (45).

Сразу после поглощения в магнитосфере первичного гамма-кванта, запускающего каскад, гидродинамические уравнения не применимы. Частицы рожденной первичной электрон-позитронной пары начинают двигаться в противоположные стороны практически вдоль магнитной силовой линии и в первоначально вакуумном электрическом поле достигают лоренц-фактора порядка 10^8 . Время ускорения заряженной частицы, длина формирования изгибного излучения и длина свободного пробега фотона относительно рождения электрон-позитронной пары конечны, что обуславливает рождение вторичных пар на расстоянии порядка 10 м от первичной пары. Это расстояние сравнимо с расстоянием ускорения частицы до стационарного лоренц-фактора.

Далее начинается следующая стадия генерации, когда рождение пар происходит из-за интенсивного поглощения изгибных фотонов, рождаемых частицами первичной пары во время своего ускорения. Благодаря высокой интенсивности рождения изгибных фотонов полностью ускоренной частицей эффективное «включение» изгибного излучения происходит спустя время τ_{st} после рождения электрон-позитронной пары. То же относится и к синхротронным фотонам: минимальная длина их свободного пробега сравнима с расстоянием, на котором частица достигает стационарного лоренц-фактора.

Поглощение синхротронных фотонов, рождаемых частицами вторичных электрон-позитронных пар при переходе на нулевой уровень Ландау, дает начало основному этапу генерации электрон-позитронной плазмы, когда ее интенсивность наиболее высока. Высокая интенсивность генерации вторичной плазмы, обусловленная наличием сильного ускоряющего электрического поля, приводит к необходимости учета времени задержки τ . Спустя данное время частицы каждой вновь рожденной электрон-позитронной пары начинают давать вклад в общую интенсивность рождения пар за счет поглощения в

магнитосфере излучаемых ими изгибных и синхротронных фотонов.

Решение дифференциально-разностного уравнения (46) позволяет вычислить эффективный локальный источник электрон-позитронных пар (52), с помощью которого можно корректно учесть наличие временной задержки. Существенно, что наличие задержки приводит к сильному ослаблению интенсивности генерации электрон-позитронной плазмы по сравнению со случаем нулевой временной задержки. Эффективный локальный источник (52) значительно меньше как первоначального источника (45) для случая $B \gtrsim 1$, когда синхротронное излучение отсутствует, так и первоначального источника (40) для случая $B \ll 1$, когда интенсивность синхротронного излучения превышает интенсивность изгибного. При этом время задержки τ и в случае слабого, и в случае сильного магнитных полей практически одно и то же и по порядку величины сравнимо со временем τ_{st} перехода частицы в квазистационарный режим движения.

Детальное исследование формирования плазменной трубки в магнитосфере нейтронной звезды за счет каскадного размножения электрон-позитронной плазмы, запускаемого поглощением фотона высокой энергии внешнего космического гамма-фона, с учетом экранировки внешнего электрического поля требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-01021-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Kramer, A. G. Lyne, J. T. O'Brien et al., *Science* **312**, 549 (2006).
2. M. A. McLaughlin, A. G. Lyne, D. R. Lorimer et al., *Nature* **439**, 817 (2006).
3. E. F. Keane, D. A. Ludovici, R. P. Eatough et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **401**, 1057 (2010).
4. Ю. П. Шитов, А. Д. Кузьмин, Д. В. Думский и др., *Астрон. ж.* **86**, 607 (2009).
5. N. Wang, R. N. Manchester, and S. Johnston, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **377**, 1383 (2007).
6. A. Lyne, G. Hobbs, M. Kramer et al., *Science* **329**, 408 (2010).
7. Yu. P. Shitov, V. D. Pugachev, and S. M. Kutuzov, *ASP Conf. Ser.* **202**, 685 (2000).

8. В. М. Малофеев, О. И. Малов, Д. А. Теплых и др., *Астрон. ж.* **82**, 273 (2005).
9. V. M. Malofeev, O. I. Malov, and D. A. Teplykh, *Astrophys. Space Sci.* **308**, 211 (2007).
10. В. М. Малофеев, Д. А. Теплых, О. И. Малов, *Астрон. ж.* **87**, 1082 (2010).
11. F. Camilo, S. M. Ransom, J. P. Halpern et al., *Nature* **442**, 892 (2006).
12. F. Camilo, S. M. Ransom, J. P. Halpern et al., *Astrophys. J.* **666**, L93 (2007).
13. L. Levin, M. Bailes, S. Bates et al., *Astrophys. J.* **721**, L33 (2010).
14. В. С. Бескин, *УФН* **169**, 1169 (1999).
15. A. V. Gurevich and Ya. N. Istomin, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **377**, 1663 (2007).
16. Я. Н. Истомин, Д. Н. Собьянин, *ЖЭТФ* **136**, 458 (2009).
17. Я. Н. Истомин, Д. Н. Собьянин, *Астрон. ж.* **87**, 379 (2010).
18. Я. Н. Истомин, Д. Н. Собьянин, *Астрон. ж.* **87**, 397 (2010).
19. А. В. Гуревич, Я. Н. Истомин, *ЖЭТФ* **89**, 3 (1985).
20. V. S. Beskin, A. V. Gurevich, and Ya. N. Istomin, *Physics of the Pulsar Magnetosphere*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993), p. 193.
21. A. J. Deutsch, *Ann. Astrophys.* **18**, 1 (1955).
22. C. S. Shukre and V. Radhakrishnan, *Astrophys. J.* **258**, 121 (1982).
23. M. A. Ruderman and P. G. Sutherland, *Astrophys. J.* **196**, 51 (1975).
24. Д. П. Барсуков, Е. М. Кантор, А. И. Цыган, *Астрон. ж.* **84**, 523 (2007).
25. Д. П. Барсуков, П. И. Полякова, А. И. Цыган, *Астрон. ж.* **86**, 95 (2009).
26. Я. Н. Истомин, Д. Н. Собьянин, *Письма в Астрон. ж.* **33**, 740 (2007).
27. В. С. Бескин, *Астрофизика* **18**, 439 (1982).
28. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1974), с. 127.
29. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1963), с. 698.
30. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва (1984), с. 180.
31. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Итоги науки и техники*, сер. Мат. анализ, Наука, Москва (1989), т. 27, с. 3.
32. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, Москва (1977), с. 44.
33. Д. Н. Собьянин, *Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук*, МФТИ, Москва (2010).
34. Э. Пинни, *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961), с. 18.
35. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, Москва (1977), с. 29.