

РАЗРЫВЫ ТОКА НА СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КОСМИЧЕСКИХ СТРУНАХ

Э. Троян*, Ю. В. Власов

Московский физико-технический институт
141700, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 сентября 2009 г.
после переработки 30 декабря 2010 г.

Рассмотрено распространение возмущений тока на сверхпроводящих космических струнах. Найдены условия существования разрывов, аналогичных ударным волнам. Получены формулы, связывающие параметры струны и скорость распространения разрывов. Выведен закон возрастания тока в ударной волне. Рассчитаны скорости распространения ударных волн произвольной амплитуды. Объяснена причина отсутствия ударных волн при времениподобных токах (в «электрическом» режиме), что связано с неустойчивостью ударной волны по отношению к возмущениям мировой поверхности струны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Космические струны привлекают пристальный интерес исследователей, как наиболее вероятные объекты, ответственные за происхождение крупномасштабной структуры Вселенной [1, 2]. Возникновение струн относят к ранним временам после Большого взрыва, когда в процессе космологических фазовых переходов, ассоциируемых с моделями Великого объединения, произошло образование устойчивых топологических дефектов в виде вихреподобных решений. Струна является одномерным объектом с массой на единицу длины m . При радиусе кривизны струны, много большем ее толщины, теория струн строится на вариации действия Гото–Намбу

$$S = \int \Lambda \sqrt{|\det h_{ab}|} d\sigma^1 d\sigma^2 \quad (1)$$

с лагранжианом

$$\Lambda = -m^2, \quad (2)$$

где

$$h_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b} = g_{\mu\nu} x^\mu_{,a} x^\nu_{,b} \quad (3)$$

— индуцированная метрика на мировой поверхности струны с локальными координатами σ^a (индексы a и

b могут принимать значения 1 или 2), а $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор глобального пространства (с координатами x^μ , где индексы μ и ν принимают значения 1, 2, 3, 4). Возможность существования сверхпроводящих струн [3] приводит к ряду новых физических эффектов. Например, струны могут быть источниками гамма-всплесков и космических лучей сверхвысоких энергий [4–6]. Сверхпроводящая струна, подобно сверхпроводнику несущая незатухающие токи, обладает дополнительными внутренними степенями свободы, и ее лагранжиан

$$\Lambda = \Lambda(m, \chi) \quad (4)$$

зависит от амплитуды тока

$$\chi = -j^a j_a = -h^{ab} (\phi_{,a} + A_\mu x^\mu_{,a}) (\phi_{,b} + A_\mu x^\mu_{,b}), \quad (5)$$

которая определяется скалярным полем ϕ на мировой поверхности струны и внешним электромагнитным полем A_μ . Для свободной струны, рассматриваемой в настоящей статье, $A_\mu = 0$.

Выражение для $\Lambda(m, \chi)$ называют уравнением состояния сверхпроводящей струны. Очень часто используется «линейная» модель [3, 7, 8]:

$$\Lambda = -m^2 - \frac{\chi}{2}. \quad (6)$$

Зависимость лагранжиана от «токового» члена существенно расширяет фундаментальное представление о теории струн. В частности, при введении в

*E-mail: et@iaaru.astronautiko.org

уравнения движения бесконечно малых возмущений было обнаружено два класса решений [9]: возмущения мировой поверхности струны или поперечные возмущения (получившие название «биений») и возмущения, распространяющиеся внутри мировой поверхности струны, или продольные возмущения, аналогичные звуковым волнам («шумы»). Вопросу устойчивости малых возмущений посвящено несколько исследований [10, 11].

В настоящей работе нас будут интересовать возмущения конечной амплитуды. В этом случае необходимо рассмотреть появление разрывных решений, когда значение тока за разрывом χ_+ не совпадает со значением тока перед разрывом χ_- . Конечная разность токов $\Delta\chi = \chi_+ - \chi_-$ может породить ударную волну, бегущую по мировой поверхности струны. Физически возможность появления ударных волн на струнах связана с зависимостью лагранжиана струны (4) от тока χ . С математической точки зрения ударные волны являются разрывными решениями уравнений движения. В первоначальном предположении [12] была указана возможность существования устойчивых ударных волн в случае пространственноподобных токов $\chi > 0$ (в так называемом «магнитном» режиме) и постулировалось отсутствие ударных волн при времениподобных токах $\chi < 0$ (в «электрическом» режиме). Это было подтверждено при численном моделировании уравнений движения [13, 14]: непрерывный синусоидальный профиль малого возмущения в «магнитном» режиме вырождался в разрыв, тогда как в «электрическом» режиме оставался только плавный скачок тока, сопровождающийся изменением геометрии струны. Чтобы найти причину, по которой ударные волны невозможны в «электрическом» режиме, необходимо исследовать условия существования разрывных решений. Нам потребуются проверить выполнение условия эволюционности и условия возникновения гофрированной неустойчивости фронта ударной волны, а также проанализировать соотношения на разрыве и аналитические выражения для разрывов малой интенсивности в применении к конкретным струнным моделям. Главным результатом настоящей статьи является вывод закона возрастания тока $\Delta\chi > 0$ и анализ устойчивости ударной волны по отношению к колебаниям мировой поверхности струны. Найденные закономерности позволяют понять свойства разрывов тока на сверхпроводящих струнах — малоизученный феномен, который может иметь важное прикладное значение в астрофизике.

В статье будет использоваться релятивистская система единиц, в которой скорость света, гравита-

ционная постоянная и постоянные Планка и Больцмана положены равными единице $c_L = G = \hbar = k_B = 1$, а метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $\text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Для сверхпроводящих струн полевая теория может быть сформулирована по аналогии с механикой сплошных сред [9, 15]. Так, на основании лагранжиана струны (4) строится тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = U u^\mu u^\nu - T v^\mu v^\nu, \quad (7)$$

где параметры U и T , имеющие аналогию с внутренней энергией и давлением жидкости, однозначно определены через Λ , а u^μ и v^μ — взаимно ортогональные времени- и пространственноподобные собственные векторы

$$v^\mu v_\mu = -u^\mu u_\mu = 1, \quad u^\mu v_\mu = 0, \quad (8)$$

связанные с проективным тензором

$$\eta^{\mu\nu} = h^{ab} x^a_{,\mu} x^b_{,\nu} = v^\mu v^\nu - u^\mu u^\nu. \quad (9)$$

Тензор энергии-импульса струны (7) подчиняется закону сохранения [15]:

$$\eta^\rho_\nu \nabla_\rho T^{\mu\nu} = 0. \quad (10)$$

Поперечная проекция уравнения (10) на мировую поверхность струны дает уравнения

$$\begin{aligned} \perp_\sigma^\mu (U u^\nu \nabla_\nu u^\sigma - T v^\nu \nabla_\nu v^\sigma) &= 0, \\ \perp_\sigma^\mu (u^\nu \nabla_\nu v^\sigma - v^\nu \nabla_\nu u^\sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\perp_\sigma^\mu = g_\sigma^\mu - \eta_\sigma^\mu$.

Проекция уравнения (10) вдоль мировой поверхности струны приводит к двум другим уравнениям:

$$\eta_\mu^\nu \nabla_\nu (M v^\mu) = 0, \quad \eta_\mu^\nu \nabla_\nu (n u^\mu) = 0, \quad (12)$$

где параметры

$$M = \frac{dU}{dn}, \quad n = -\frac{dT}{dM} \quad (13)$$

определяются как [16]

$$M^2 = \chi, \quad n^2 = K^2 \chi \quad (14)$$

при пространственноподобных токах $\chi > 0$ (в «магнитном» режиме) или как

$$M^2 = -K^2 \chi, \quad n^2 = -\chi \quad (15)$$

при времениподобных токах $\chi < 0$ (в «электрическом» режиме). Параметр

$$\frac{1}{K} = -2 \frac{d\Lambda}{d\chi} \quad (16)$$

вычисляется исходя из конкретной модели лагранжиана. Для струны Гото–Намбу (2), $U = -T = -m^2$, величины (13) обращаются в нуль и законы сохранения (12) тождественно выполняются.

Для сверхпроводящих струн с током разделение уравнений движений на «внешние» (11) и «внутренние» (12) позволяет не только существенно упростить задачу, но и выявить физический смысл динамики струны. Уравнения (11), (12) допускают нетривиальные решения в форме бесконечно малых возмущений [9]. Уравнения (11) задают возмущения мировой поверхности струны (так называемые «биения»), аналогичные поперечным колебаниям, скорость распространения которых определяется как

$$(c^\perp)^2 = \frac{T}{U}. \quad (17)$$

Уравнения же (12) определяют возмущения, распространяющиеся внутри мировой поверхности струны («шумы»). Эти возмущения аналогичны звуковым волнам, распространяющимся со скоростью

$$c^2 = -\frac{dT}{dU} = \frac{n}{M} \frac{dM}{dn}. \quad (18)$$

Область устойчивости струны, несущей ток, определяется условиями [13]

$$1 \geq c^2 > 0, \quad 1 \geq (c^\perp)^2 > 0. \quad (19)$$

«Биения» имеют чисто геометрическую природу, и каждая отдельная струнная конфигурация требует численного расчета уравнений движения [10, 11, 13, 14]. «Шумы» возможны при любой геометрии сверхпроводящей струны, несущей ток. Именно поэтому встает вопрос о существовании устойчивых разрывов тока, аналогичных ударным волнам.

3. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СТРУНЫ

Из уравнений (14)–(16) и (18) получаются выражения для скорости возмущений внутри мировой поверхности струны [17]:

$$c^2 = \frac{K}{K + 2K'\chi}, \quad \chi > 0, \quad (20)$$

$$c^2 = 1 + 2 \frac{K'\chi}{K}, \quad \chi < 0, \quad (21)$$

где

$$K' = \frac{dK}{d\chi}. \quad (22)$$

Для струны с «линейным» уравнением состояния (6) скорость распространения продольных возмущений постоянна и равна скорости света

$$c = 1. \quad (23)$$

Фактически модель (6) описывает струну в пределе малого тока $\chi \rightarrow 0$ [16]. Совсем иная ситуация складывается, когда лагранжиан сверхпроводящей струны имеет более сложную зависимость. К известным обобщенным моделям относится «трансзвуковая» [18]:

$$\Lambda = -m\sqrt{m^2 + \chi}, \quad (24)$$

«полиномиальная» модель [17, 19]:

$$\Lambda = -m^2 - \frac{\chi}{2} \left(1 - \frac{\chi}{m_*^2}\right), \quad (25)$$

модель «с обратным отношением» [16]:

$$\Lambda = -m^2 - \frac{\chi}{2} \left(1 + \frac{\chi}{m_*^2}\right)^{-1} \quad (26)$$

и «логарифмическая» модель [20]:

$$\Lambda = -m^2 - m_*^2 \ln \left(1 + \frac{\chi}{m_*^2}\right). \quad (27)$$

Здесь параметр $m_* < 2m$, и при слабых токах все четыре нелинейных модели (24)–(27) сводятся к модели (6).

Продольные возмущения, рассчитанные в рамках «трансзвуковой» модели (24) согласно (20)–(22) и (16), будут распространяться со скоростью

$$c^2 = \frac{m^2 + \chi}{m^2 + 2\chi}, \quad \chi > 0 \quad (28)$$

при пространственноподобных токах и

$$c^2 = \frac{m^2 + 2\chi}{m^2 + \chi}, \quad -\frac{m^2}{2} < \chi < 0 \quad (29)$$

при времениподобных токах. Для «полиномиальной» модели (25) скорость звука определяется как

$$c^2 = \frac{m_*^2 - 2\chi}{m_*^2 + 2\chi}, \quad \frac{m_*^2}{2} > \chi > 0, \quad (30)$$

$$c^2 = \frac{m_*^2 + 2\chi}{m_*^2 - 2\chi}, \quad -\frac{m_*^2}{2} < \chi < 0. \quad (31)$$

Для модели «с обратным отношением» (26) имеем

$$c^2 = \frac{m_*^2 + \chi}{m_*^2 + 5\chi}, \quad \chi > 0, \quad (32)$$

$$c^2 = \frac{m_*^2 + 5\chi}{m_*^2 + \chi}, \quad -\frac{m_*^2}{5} < \chi < 0. \quad (33)$$

Скорость же звука, определенная в рамках «логарифмической» модели (27), равна

$$c^2 = \frac{m_*^2 + \chi}{m_*^2 + 3\chi}, \quad \chi > 0, \quad (34)$$

$$c^2 = \frac{m_*^2 + 3\chi}{m_*^2 + \chi}, \quad -\frac{m_*^2}{3} < \chi < 0. \quad (35)$$

В выражениях (29)–(35) ограничения на амплитуду тока χ вызваны условием стабильности струны (19). Таким образом, когда для описания сверхпроводящих струн берутся обобщенные модели с лагранжианами (24)–(27), выражение для скорости распространения продольных возмущений внутри мировой поверхности струны (18) оказывается зависящим от токового члена χ . Отметим, что численное моделирование уравнений движения [13, 14], было проведено только на основании двух нелинейных моделей (24) и (26), поэтому нам важно найти общие закономерности, присущие всем моделям струн (24)–(27).

4. ВОЗНИКНОВЕНИЕ РАЗРЫВОВ

Появление разрывов обусловлено неустойчивостью малых возмущений, когда непрерывное решение уравнений движения делается невозможным, что и приводит к появлению разрывных решений [21, 22]. Физические параметры струны (6), (24)–(27) зависят от постоянных m , m_* и переменной χ (x^μ). Внутри мировой поверхности струны всякое малое возмущение распространяется со скоростями (28)–(35). Рассмотрим возмущение тока конечной величины $\Delta\chi = \chi - \chi_0$. При

$$\frac{dc}{d\chi} \neq 0 \quad (36)$$

скорость распространения конечного возмущения будет зависеть от его амплитуды:

$$c(\chi) = c(\chi_0) + \frac{\partial c}{\partial \chi} \Delta\chi. \quad (37)$$

Это означает, что соседние участки возмущения с заданным профилем

$$\Delta\chi(x^\mu) = f(x^\mu) \quad (38)$$

будут двигаться с разными скоростями и конечное возмущение (38) будет изменяться. В конце концов, начальный гладкий профиль возмущения настолько искажается, что однозначное решение становится невозможным, и тогда возникает разрыв в решении. Численное моделирование уравнений движения сверхпроводящей космической струны [13, 14] показывает, что начальный профиль тока в форме синусоидальной волны превращается в пилообразный профиль — совершенно аналогично возникновению ударных волн в сплошных средах [21, 22]. Таким образом, дисперсия скорости распространения малых возмущений (36) может привести к тому, что конечные возмущения тока будут вырождаться в разрывы или ударные волны.

При рассмотрении сверхпроводящей струны в рамках «линейной» модели (6) скорость распространения продольных возмущений всегда постоянна и равна скорости света, поэтому

$$\frac{dc}{d\chi} = 0 \quad (39)$$

и малые возмущения в уравнениях движения будут оставаться всегда стационарными, не приводя к появлению неустойчивостей. Нелинейность лагранжианов (24)–(27) относительно тока χ играет решающую роль в появлении ударных волн. В частности, в «трансзвуковой» модели (24) малые возмущения, распространяющиеся со скоростью (28), (29), могут развиваться в разрывы, потому что

$$\frac{dc^2}{d\chi} < 0 \quad (40)$$

при пространственноподобных токах $d\chi > 0$, тогда как

$$\frac{dc^2}{d\chi} > 0 \quad (41)$$

при времениподобных токах $d\chi < 0$. Такая же возможность не исключена и для струн, рассматриваемых в рамках более сложной «полиномиальной» модели (25), модели «с обратным отношением» (26) и «логарифмической» модели (27), для которых скорость звука подчиняется тем же закономерностям (40) и (41). В отличие от физики сплошных сред, для космических струн нет принципиальных запретов на осуществление обоих неравенств (40)

и (41). Тем не менее, возможность вырождения конечных возмущений тока в ударную волну еще не гарантирует появление последней. Неустойчивые разрывы могут распадаться на серию волн сжатия (разрежения) в форме плавных скачков тока. Нам требуется выяснить, какие типы разрывов окажутся устойчивыми.

5. УСЛОВИЕ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ

Благодаря дисперсии скорости звука (40), (41) конечное возмущение тока $\Delta\chi$ может привести к возникновению ударной волны. Чтобы ударная волна могла существовать, не распадаясь, необходимо выполнение условия эволюционности [23–25]. Подчеркнем, что это условие необходимое, но недостаточное. Достаточным условием является устойчивость по отношению к возмущениям на фронте ударной волны («гофрировке») [26, 27]. Оно будет обсуждаться в конце статьи, а сейчас исследуем условие эволюционности для ударных волн на сверхпроводящих космических струнах.

Рассмотрим малые звуковые возмущения, возникающие на поверхности разрыва и распространяющиеся параллельно движению ударной волны, но в двух противоположных направлениях от поверхности разрыва со скоростью звука. Пусть c_- — скорость звука перед разрывом, c_+ — скорость звука за разрывом. Эти малые возмущения будут переноситься ударной волной, скорость движения которой обозначим через w_- . В системе отсчета, сопутствующей поверхности разрыва, сам разрыв неподвижен, скорость материи перед разрывом w_- равна скорости ударной волны. Обозначим через w_+ скорость материи за разрывом (в той же сопутствующей системе отсчета). Относительно поверхности разрыва малые возмущения перед фронтом могут двигаться со скоростью

$$C_- = \frac{w_- + c_-}{1 + w_- c_-} \quad (42)$$

или

$$\bar{C}_- = \frac{w_- - c_-}{1 - w_- c_-}. \quad (43)$$

Ситуацию поясняет рис. 1. Малые возмущения за фронтом будут распространяться со скоростью

$$C_+ = \frac{w_+ + c_+}{1 + w_+ c_+} \quad (44)$$

или

$$\bar{C}_+ = \frac{w_+ - c_+}{1 - w_+ c_+}. \quad (45)$$

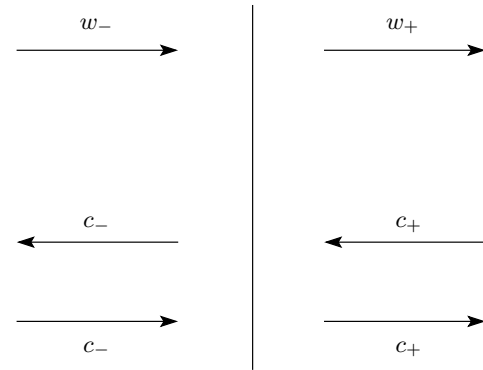


Рис. 1. Направление скорости материи w и скорости звуковых возмущений c перед (индекс «-») и за (индекс «+») фронтом ударной волны

Если возмущение распространяется от поверхности разрыва на бесконечность (в системе отсчета, связанной с фронтом ударной волны, см. рис. 1), это означает, что

$$C_- < 0, \quad \bar{C}_- < 0, \quad C_+ > 0, \quad \bar{C}_+ > 0. \quad (46)$$

При

$$w_- < c_-, \quad w_+ < c_+ \quad (47)$$

таких возмущений два и они распространяются со скоростями (43) и (44). Если

$$w_- > c_-, \quad w_+ < c_+, \quad (48)$$

то остается только одно возмущение (44). При

$$w_- < c_-, \quad w_+ > c_+ \quad (49)$$

имеем три типа возмущений, распространяющихся со скоростями (43)–(45). В случае же

$$w_- > c_-, \quad w_+ > c_+ \quad (50)$$

— опять два возмущения (44) и (45).

Чтобы разрыв не распадался, он должен быть устойчивым по отношению к малым возмущениям, возникающим на его фронте. Малые возмущения, заданные граничными условиями на поверхности разрыва, будут оставаться малыми, когда число уравнений движения в точности совпадает с числом содержащихся в них неизвестных параметров. Если число уравнений больше числа независимых параметров, то задача об эволюции малого возмущения вовсе не имеет решений, если же число уравнений меньше числа параметров, то решений будет бесконечное множество. Для рассматриваемых нами возмущений внутри мировой поверхности струны мы

имеем два закона сохранения (12). Им должны отвечать ровно два независимых параметра. Одним независимым параметром (скоростью w_-) определяется смещение самой ударной волны, на поверхности которой возникло возмущение. Эволюция каждого малого возмущения, заданного граничными условиями на поверхности разрыва, также определяется одним независимым параметром (инфинитезимальным приращением тока χ). Только условие (48), соответствующее одному малому возмущению (44), будет отвечать эволюционности ударной волны. При условиях же (47), (49) или (50) малые возмущения, возникающие на поверхности разрыва, будут характеризоваться числом независимых параметров, большим, чем число уравнений движения (12).

Условие (48) и является условием эволюционности ударной волны на космической струне. Именно при выполнении (48) разрыв, возникший при распространении возмущений на космической струне, не будет распадаться.

Отметим, что в механике сплошных сред трем параметрам возмущения (энтропии, давлению и скорости ударной волны) отвечают три закона сохранения, и условие эволюционности обычных ударных волн [23, 24] совпадает с полученным нами условием эволюционности разрывов на космических струнах (48). Это не более чем совпадение, потому что необходимость неравенства (48) для сплошных сред обусловлена еще и термодинамическими принципами, тогда как в теории космических струн нет принципиальных запретов на все четыре возможности (47)–(50).

6. СООТНОШЕНИЯ НА РАЗРЫВЕ

Выведем соотношения на разрыве. Нам требуется найти скачки величин в уравнениях движения. Будем использовать стандартный математический прием при изучении ударных волн в релятивистской гидродинамике [28, 29]. Рассмотрим возмущение конечной амплитуды и введем единичный вектор нормали к фронту распространения возмущения в виде

$$\lambda_\nu = \frac{wu_\nu + v_\nu}{\sqrt{1-w^2}}. \quad (51)$$

При распространении возмущения по среде приращение градиента произвольной величины $\Delta(\nabla_\mu Q) \rightarrow \lambda_\mu \Delta Q$ происходит вдоль характеристического вектора λ_μ и пропорционально приращению самой этой величины ΔQ . Здесь w имеет смысл скорости ударной волны. В акустическом пределе w превращается в скорость звука, определяемую (18),

а вектор (51) описывает инфинитезимальное возмущение, аналогичное звуковой волне [9].

Снова перейдем в систему отсчета, в которой фронт ударной волны неподвижен. Индексами «-» и «+» обозначим состояния соответственно перед и за фронтом. После подстановки (51) в уравнения движения (12) находим соотношения для скачков величин на фронте разрыва:

$$\eta_{+\mu}^\nu \lambda_{+\nu} M_+ v_+^\mu = \eta_{-\mu}^\nu \lambda_{-\nu} M_- v_-^\mu, \quad (52)$$

$$\eta_{+\mu}^\nu \lambda_{+\nu} n_+ u_+^\mu = \eta_{-\mu}^\nu \lambda_{-\nu} n_- u_-^\mu. \quad (53)$$

Подставляя в (52), (53) выражения для тензора (9) и вектора нормали (51), получаем два уравнения

$$\frac{w_+^2 n_+^2}{w_+^2 - 1} = \frac{w_-^2 n_-^2}{w_-^2 - 1}, \quad (54)$$

$$\frac{M_+^2}{w_+^2 - 1} = \frac{M_-^2}{w_-^2 - 1}, \quad (55)$$

из которых находится скорость перед фронтом разрыва:

$$w_-^2 = \frac{n_+^2}{M_+^2} \frac{M_+^2 - M_-^2}{n_+^2 - n_-^2}, \quad (56)$$

и скорость за фронтом:

$$w_+^2 = \frac{n_-^2}{M_-^2} \frac{M_+^2 - M_-^2}{n_+^2 - n_-^2}. \quad (57)$$

Подставив сюда параметры μ и n , определенные согласно (14), (15) в «магнитном» режиме при $\chi > 0$, имеем

$$w_-^2 = K_+^2 \frac{\chi_+ - \chi_-}{K_+^2 \chi_+ - K_-^2 \chi_-}, \quad (58)$$

$$w_+^2 = K_-^2 \frac{\chi_+ - \chi_-}{K_+^2 \chi_+ - K_-^2 \chi_-}. \quad (59)$$

В «электрическом» же режиме, при $\chi < 0$, скорость перед фронтом ударной волны определяется по формуле

$$w_-^2 = \frac{1}{K_+^2} \frac{K_+^2 \chi_+ - K_-^2 \chi_-}{\chi_+ - \chi_-}, \quad (60)$$

тогда как скорость за фронтом равна

$$w_+^2 = \frac{1}{K_-^2} \frac{K_+^2 \chi_+ - K_-^2 \chi_-}{\chi_+ - \chi_-}. \quad (61)$$

7. ВОЗМУЩЕНИЯ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

В акустическом пределе, когда разность токов $\Delta\chi = \chi_+ - \chi_-$ мала по сравнению с самой величиной $|\chi|$, формулы (60), (61) раскладываются в ряд по малой величине $\Delta\chi$. С учетом определения (22) находим приближенное выражение для скорости (58) в «магнитном» режиме:

$$\frac{w_-^2}{c_-^2} = 1 + c_-^2 \frac{3(K'_-)^2 - K_-K''_-}{K_-^2} \chi_- \Delta\chi, \quad (62)$$

где

$$K'' = \frac{d^2K}{d\chi^2}. \quad (63)$$

Из формулы (59) следует совершенно аналогичное выражение:

$$\frac{w_+^2}{c_+^2} = 1 - c_+^2 \frac{3(K'_+)^2 - K_+K''_+}{K_+^2} \chi_+ \Delta\chi. \quad (64)$$

Соотношения (62) и (64) отвечают условию эволюционности ударной волны (48), когда

$$\left[3(K'_-)^2 - K_-K''_- \right] \Delta\chi > 0 \quad (65)$$

и

$$\left[3(K'_+)^2 - K_+K''_+ \right] \Delta\chi > 0. \quad (66)$$

В «электрическом» режиме, при отрицательных токах $\chi < 0$, выражения (60) и (61) после подстановки малого приращения $\Delta\chi = \chi_+ - \chi_-$ дают

$$\frac{w_-^2}{c_-^2} = 1 + \frac{1}{c_-^2} \frac{K_-K''_- - 3(K'_-)^2}{K_-^2} \chi_- \Delta\chi \quad (67)$$

и

$$\frac{w_+^2}{c_+^2} = 1 - \frac{1}{c_+^2} \frac{K_+K''_+ - 3(K'_+)^2}{K_+^2} \chi_+ \Delta\chi. \quad (68)$$

Отсюда следует, что для ударной волны, распространяющейся по струне в «электрическом» режиме ($\chi_- < 0$ и $\chi_+ < 0$), условие эволюционности (48) снова требует выполнения неравенств (65) и (66). В принципе, ток χ при переходе через фронт ударной волны может менять знак, но условия (65) и (66) остаются в силе. Из (65) и (66) следует, что знак приращения тока в ударной волне $\Delta\chi$ зависит от знака величины

$$\kappa = 3(K')^2 - KK''. \quad (69)$$

Когда κ положительна по обе стороны фронта, то и $\Delta\chi > 0$. Если же $\kappa < 0$, то приращение тока будет отрицательным, $\Delta\chi < 0$. Предположим, что при переходе через фронт ударной волны величина (69) поменяет знак, тогда условия (65) и (66) одновременно будут невыполнимы, что означает невозможность ударных волн.

8. ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ТОКА

«Трансзвуковая» модель (24) применима в области значений тока (28), (29). Вычислив выражения (16), (22), (63) для этой модели и подставив в (69), находим, что

$$\kappa = \frac{1}{(m^2 + \chi)m^2}, \quad \chi > -\frac{m^2}{2}. \quad (70)$$

Точно так же для «полиномиальной» модели (25) с учетом (30), (31) имеем

$$\kappa = \frac{4m_*^4}{(m_*^2 - 2\chi)^4}, \quad \frac{m_*^2}{2} > \chi > -\frac{m_*^2}{2}. \quad (71)$$

Для модели «с обратным отношением» (26), учитывая (32), (33), получаем

$$\kappa = \frac{10(m_*^2 + \chi)^2}{m_*^8}, \quad \chi > -\frac{m_*^2}{5}. \quad (72)$$

И, наконец, для самой сложной «логарифмической» модели (27) вычисление дает

$$\kappa = \frac{3}{m_*^4}. \quad (73)$$

Из (70)–(73) следует, что величина κ положительна во всей области допустимых значений тока χ . С учетом (65), (66) и (69) это означает, что эволюционны только ударные волны, в которых

$$\Delta\chi > 0 \quad (74)$$

независимо от знака тока χ . Таким образом, скачок тока в ударной волне $\Delta\chi = \chi_+ - \chi_-$ всегда положителен. Условие (74) можно назвать законом возрастания тока. Отметим, что вывод и строгое обоснование условия (74) здесь дается впервые, хотя факт возрастания тока можно обнаружить в ударных волнах, рассчитанных численным моделированием уравнений движения [13, 14]. В последнем случае в «магнитном» режиме наблюдалось возрастание параметра $n = K\sqrt{\chi}$, что эквивалентно именно

росту χ , потому что функция $K(\chi)$ строго возрастающая для всех моделей струн (24)–(27). Как и изменение плотности вещества в ударной волне, распространяющейся по сплошной среде, приращение тока $\Delta\chi$, в принципе, может быть отрицательным, но для всех моделей струн (24)–(27) оказалось, что $\kappa > 0$, и потому всегда $\Delta\chi > 0$.

Как мы уже видели, для «линейной» модели сверхпроводящей струны с лагранжианом (6) разрывов существовать не может ввиду отсутствия дисперсии скорости звука (23), которая всегда постоянна и равна $c = 1$.

9. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Несложно проверить, что для всех моделей сверхпроводящих струн (24)–(27) как величина K , так и ее производная (22) всегда положительны. Поэтому в силу закона возрастания тока (74) всегда выполняется условие

$$K_+ > K_- \tag{75}$$

Если перед фронтом ударной волны струна находится в «магнитном» режиме ($\chi_- > 0$), то в силу закона возрастания тока (74) за фронтом всегда $\chi_+ > 0$, и струна останется в «магнитном» режиме. При этом нет никаких ограничений на амплитуду ударной волны, исключение составляет только «полиномиальная» модель (30), применимая при $\chi < m_*^2/2$.

Из (58), (59) находим, что в «магнитном» режиме

$$\frac{w_-^2}{w_+^2} = \frac{K_+^2}{K_-^2} \tag{76}$$

С учетом условия (75) это означает, что

$$w_- > w_+ \tag{77}$$

При $\chi_- \rightarrow 0$ скорости звука (28), (30), (32) и (34) будут приближаться к пределу $c_- \rightarrow 1$, тогда как $w_- \rightarrow 1$ согласно (58) и (59). Результаты численного расчета по формулам (58), (59) для ударных волн произвольной интенсивности показаны на рис. 2. Вычисления скорости w и скорости звука c проведены при $m = 1$ и $m_* = 0.5$, начальное значение тока выбрано равным $\chi_- = 0.4$ (за исключением $\chi_- = 0.025$ при расчете модели (25), которая применима, когда значение тока $\chi < 0.125$).

В акустическом пределе, когда $\Delta\chi \ll \chi_-$, решение совпадает с приближенными выражениями (62) и (64).

Если же перед фронтом ударной волны струна находится в «электрическом» режиме $\chi_- < 0$, то в силу закона возрастания тока (74) за фронтом ударной волны может оказаться $\chi > 0$, т. е. произойдет «переключение» из «электрического» режима в «магнитный». При этом скачок тока в ударной волне $\Delta\chi$ уже не мал по сравнению с самим значением $|\chi_-|$ и аналитическое разложение формул (58)–(61) в ряд по малому параметру недопустимо. Численное решение уравнений (58), (59) показано на рис. 3. Вычисления скорости w и скорости звука c проведены при $m = 1$ и $m_* = 0.5$, начальное значение тока бралось близким к предельно допустимым значениям для каждой модели (29), (31), (33), (35). Устойчивая ударная волна существует только при $\Delta\chi < |\chi_-|$. Если бы за фронтом ударной волны струна находилась в «магнитном» режиме с $\chi_+ > 0$, то обязательно выполнялось бы условие $w_+ > c_+$, что противоречит условию эволюционности (48). Кроме того, скорость звука c_+ была бы больше скорости света. Таким образом, «переключение» из электрического режима в «магнитный» невозможно — ударная волна тут же теряет устойчивость.

Проанализируем переход из «электрического» режима в «магнитный». Для этого в формуле (60) положим $\chi_- = \chi_1 < 0$ и $\chi_+ = 0$, а в формуле (59) — $\chi_- = 0$ и $\chi_+ = \chi_2 > 0$. Тогда имеем

$$\frac{w_-^2}{w_+^2} = K_-^2(\chi_1)K_+^2(\chi_2) \tag{78}$$

Из (60), (61) находим, что в «электрическом» режиме

$$\frac{w_-^2}{w_+^2} = \frac{K_-^2}{K_+^2} \tag{79}$$

откуда, учитывая условие (75), имеем

$$w_- < w_+ \tag{80}$$

В системе отсчета, в которой ударная волна распространяется со скоростью w_- относительно неподвижной струны, за фронтом ударной волны будет присутствовать движение с относительной скоростью

$$w_0 = \frac{w_- - w_+}{1 - w_- w_+} \tag{81}$$

Скорость w_0 , согласно неравенству (80), имеет отрицательный знак, и это означает движение в направлении, противоположном направлению распространения ударной волны. В механике сплошных

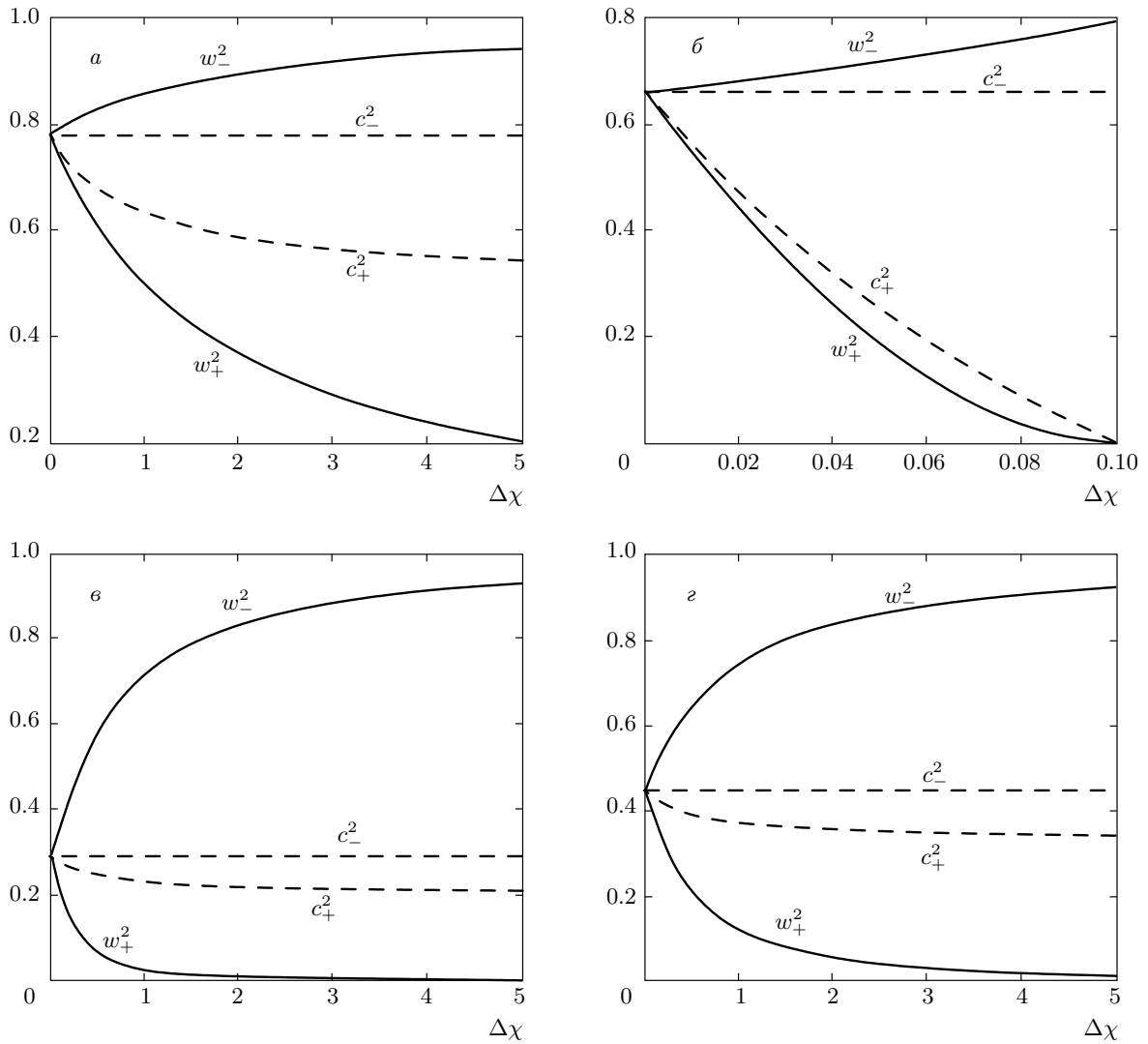


Рис. 2. Скорость w и скорость звука c за (индекс «+») и перед (индекс «-») фронтом ударной волны в зависимости от приращения тока $\Delta\chi$ в «магнитном» режиме: a — для «трансзвуковой» модели (24), b — для «полиномиальной» модели (25), v — для модели «с обратным отношением» (26), z — для «логарифмической» модели (27)

сред [30], как и в «магнитном» режиме сверхпроводящих струн, всегда справедливо обратное неравенство (77), означающее, что среда за фронтом будет увлекаться вслед за движением ударной волны. Но это отнюдь не исключает существования ударных волн в «электрическом» режиме, если скачок тока $\Delta\chi$ в ударной волне не превышает самой величины $|\chi_-|$, соответствующей предельно возможному значению тока за фронтом $\chi_+ \rightarrow 0$. В последнем случае скорость звука стремится к пределу $c_+ \rightarrow 1$, а скорость $w_+ \rightarrow 1$ согласно (60) и (61). Все четыре модели сверхпроводящих струн (29), (31), (33), (35) в «электрическом» режиме имеют ограниченное при-

менение при токе χ , по абсолютной величине не превосходящем определенное значение (соответственно $m^2/2$, $m_*^2/2$, $m_*^2/5$, $m_*^2/3$). Таким образом, в «электрическом» режиме условие эволюционности не запрещает ударные волны конечной амплитуды.

Важно отметить, что ограничение на амплитуду ударных волн в «электрическом» режиме обусловлено требованием (19), определяющим область значений тока, при которых сохраняется устойчивость струны самой по себе, а не устойчивость разрывов. Рисунки 2, 3 показывают качественное сходство ударных волн, рассматриваемых в рамках всех четырех моделей (24)–(27). При этом в «магнитном»

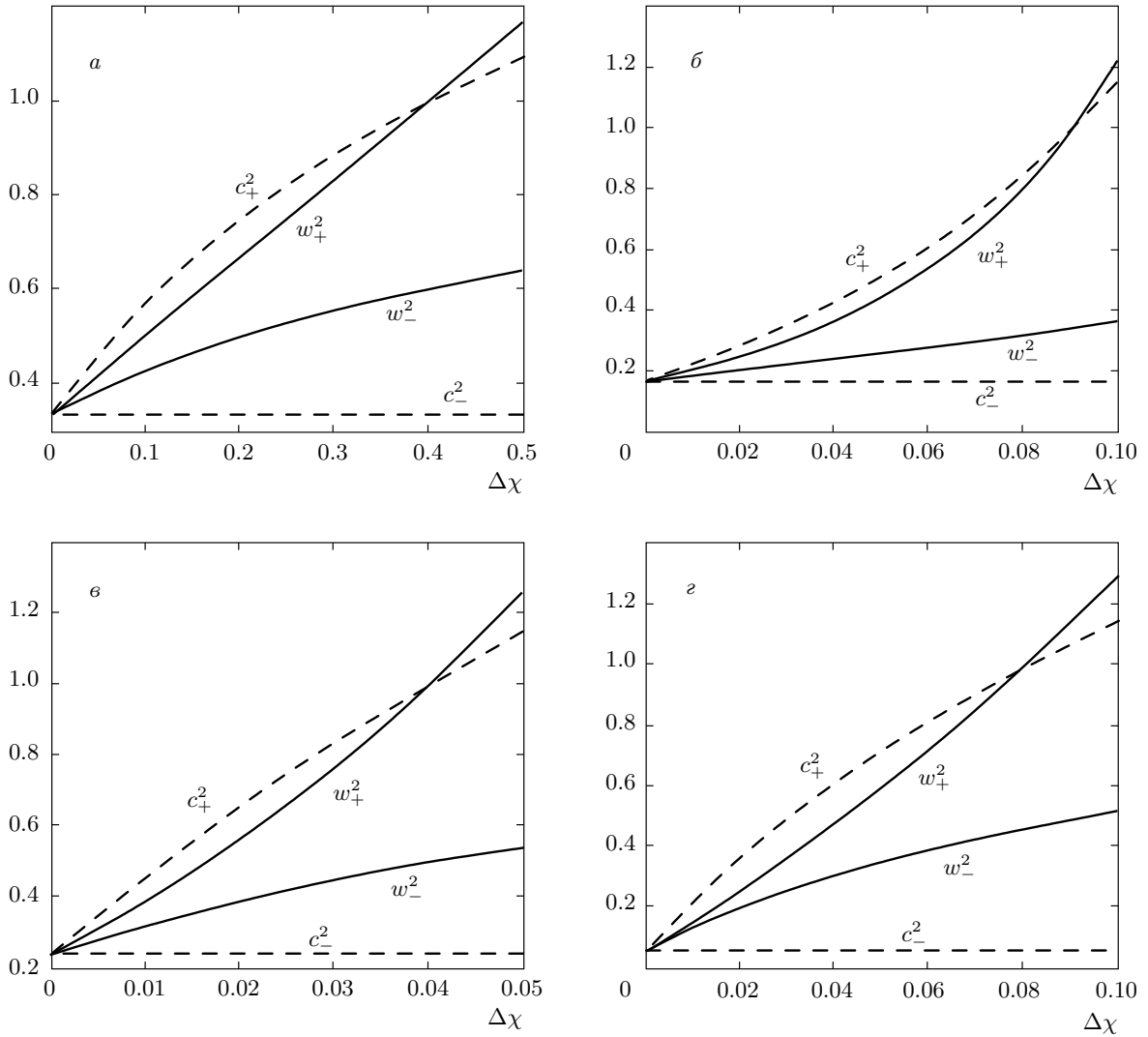


Рис. 3. Те же зависимости что на рис. 2, рассчитанные в «электрическом» режиме при $\chi_- = -0.4$ (а), -0.09 (б), -0.04 (в), -0.08 (г)

режиме справедливо неравенство

$$w_- > c_- > c_+ > w_+, \tag{82}$$

тогда как в «электрическом» режиме всегда

$$c_+ > w_+ > w_- > c_-. \tag{83}$$

При первоначальном анализе [12] постулировалось, что разрывы тока в «электрическом» режиме будут неустойчивы ввиду неравенства (83) и отрицательного знака скорости (81), что нетипично для теории ударных волн [23]. На самом деле, выражения (83) и (81) не оказывают никакого влияния на условие эволюционности (48), и поэтому не могут запретить ударные волны в «электрическом» режиме.

Тем не менее, численное решение уравнений движения [13, 14] не выявило ударных волн в «электрическом» режиме — вместо ударных волн присутствовали плавные скачки тока без возникновения разрыва. Это нельзя объяснить, опираясь исключительно на уравнения движения внутри мировой поверхности струны (12), без учета уравнений движения самой мировой поверхности (11). Условие эволюционности, необходимое для существования ударной волны, может оказаться недостаточным, если ударная волна чувствительна к так называемой гофрированной неустойчивости [26, 27, 31]. Последняя в случае космических струн порождается именно «биениями» мировой поверхности.

10. ГОФРИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

При распространении ударной волны по космической струне состояния за и перед фронтом ударной волны определены однозначно уравнениями, а ток претерпевает скачок от χ_- до χ_+ . Это означает, что скорость распространения «биений» (17) также будет испытывать скачкообразное изменение от c_-^\perp до c_+^\perp . Уравнения движения самой мировой поверхности струны (11) существенно отличны от «внутренних» уравнений движения (12) и результатом изменения скорости поперечных колебаний мировой поверхности будет не возникновение «поперечного» разрыва, а изменение радиуса кривизны [13, 14]. Поскольку стабильность космической струны зависит от ее геометрической конфигурации [10, 11], возникает справедливый вопрос, как отражаются геометрические характеристики струны на устойчивости разрывов тока? Формулы (58), (59) и (60), (61) однозначно определяют разрывное решение, а необходимым условием его устойчивости является закон возрастания тока (74). Нам требуется найти достаточное условие. Для этого придется исследовать неустойчивость разрывного решения по отношению к колебаниям мировой поверхности струны.

Из физики ударных волн известно, что несмотря на выполнение условия эволюционности (48), фронт ударной волны может быть подвержен гофрировочной неустойчивости [26, 27, 31]. Гофрировочная неустойчивость — это неустойчивость разрывов по отношению к возмущениям, распространяющимся в направлении, поперечном к направлению движения ударной волны. Эта неустойчивость выражается в колебаниях геометрии фронта ударной волны, и созданное на фронте возмущение продолжает излучать колебания, унося энергию из ударной волны. Это приводит к нестационарной, расширяющейся со временем области перехода из состояния «-» в состояние «+», т. е. к «размытию» фронта ударной волны, которая превращается в плавный скачок. В трехмерной или двумерной постановке задачи (например, как в случае мембран) неустойчивость будет выражаться в возникновении ряби или «гофрировки» на поверхности ударной волны. Для космических струн аналогом гофрировочной неустойчивости ударной волны могут служить возмущения мировой поверхности струны («биения»), аналогичные поперечным колебаниям (17). Очевидно, что для сохранения устойчивости эти возмущения не должны делаться независимыми и распространяться от фронта ударной волны на бесконечность. По аналогии с гофрировочной неустойчивостью ударных

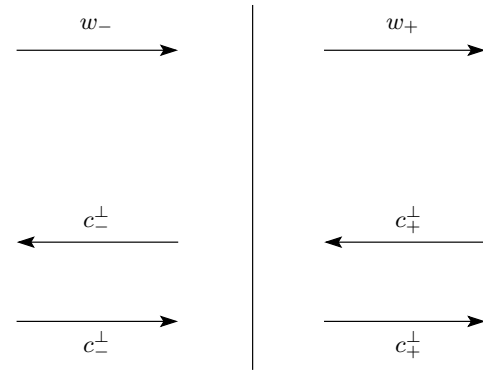


Рис. 4. Направление скорости материи w и скорости распространения «биений» мировой поверхности струны c^\perp перед (индекс «-») и за (индекс «+») фронтом ударной волны

волн в сплошных средах [26, 27, 31] проведем качественный анализ для ударных волн на космических струнах.

Снова перейдем в систему отсчета, связанную с фронтом ударной волны. В этой системе отсчета фронт неподвижен, а скорости перед и за фронтом равны соответственно w_- и w_+ . Рассмотрим возмущения мировой поверхности струны, созданные самой ударной волной и распространяющиеся от фронта в двух различных направлениях, как показано на рис. 4. На передней стороне фронта ударной волны возникают «биения» мировой поверхности струны, идущие со скоростью

$$C_-^\perp = \frac{w_- + c_-^\perp}{1 + w_- c_-^\perp} \tag{84}$$

или

$$\bar{C}_-^\perp = \frac{w_- - c_-^\perp}{1 - w_- c_-^\perp}. \tag{85}$$

На задней стороне фронта ударной волны возникают «биения» мировой поверхности струны, идущие со скоростью

$$C_+^\perp = \frac{w_+ + c_+^\perp}{1 + w_+ c_+^\perp} \tag{86}$$

или

$$\bar{C}_+^\perp = \frac{w_+ - c_+^\perp}{1 - w_+ c_+^\perp}. \tag{87}$$

Отметим, что релятивистские преобразования (84)–(87) аналогичны формулам (42)–(45) для продольных звуковых возмущений (также в системе

отсчета, связанной с фронтом ударной волны). При чисто формальном сходстве формулы имеют совершенно различный физический смысл. Звуковые возмущения (42)–(45) определяют количество независимых параметров в уравнении движения внутри мировой поверхности струны (12), а необходимым условием существования однозначного решения является условие эволюционности (48). Малые колебания мировой поверхности струны не определяют новое условие эволюционности, так как состояния за и перед фронтом ударной волны уже однозначно определены уравнениями (56), (57). Поэтому нет никаких ограничений на знаки скоростей (84)–(87). Тем не менее, соотношения между скоростями определяют условия возникновения гофрировочной неустойчивости.

Что произойдет при $\bar{C}_-^\perp < \bar{C}_+^\perp < 0$? Возмущение, возникшее на передней стороне фронта ударной волны и идущее со скоростью \bar{C}_-^\perp , получит самостоятельный характер, потому что возмущение, приходящее из «тыла» со скоростью \bar{C}_+^\perp , не сможет его догнать и потому не будет влиять на него. Таким образом, фронт ударной волны фактически разделит струну на две независимые друг от друга области. В отличие от гофрировочной неустойчивости ударной волны в сплошной среде [26, 27, 31], энергия рассматриваемой нами ударной волны будет уходить не в звуковые колебания, а в колебания мировой поверхности струны, что, впрочем, не меняет результата. Разрыв тока станет сколь угодно малым и ударная волна, израсходовав свою энергию, прекратит существование. Чтобы этого не случилось, должно выполняться неравенство

$$\bar{C}_-^\perp > \bar{C}_+^\perp. \quad (88)$$

Похожая ситуация неустойчивости возникает при $C_-^\perp < C_+^\perp$, когда «биения», пришедшие из бесконечности, где еще не прошла ударная волна (с индексом «-»), не могут догнать «биения», возникшие на задней стороне фронта ударной волны (с индексом «+»). Здесь критерием устойчивости будет условие

$$C_-^\perp > C_+^\perp. \quad (89)$$

Таким образом, неравенства (88) и (89) являются условиями, достаточными для устойчивости ударной волны на сверхпроводящей космической струне.

Скорость распространения «биений» (17) вычисляется по формулам [17]

$$c^\perp = \sqrt{\frac{\Lambda + \chi/K}{\Lambda}}, \quad \chi > 0, \quad (90)$$

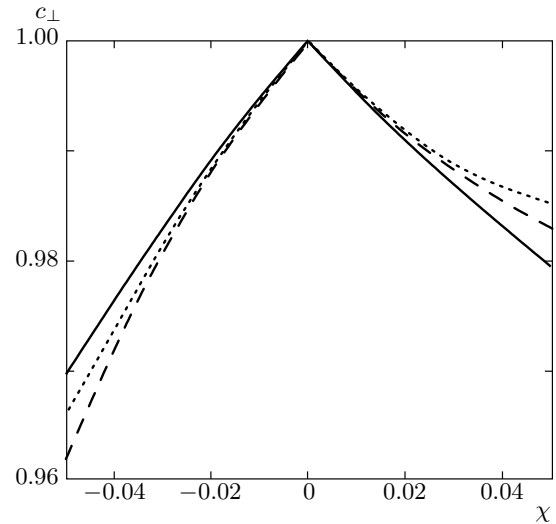


Рис. 5. Скорость c^\perp в зависимости от тока χ . Сплошная, штриховая и пунктирная линии отвечают соответственно моделям (27), (26) и (25)

$$c^\perp = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda + \chi/K}}, \quad \chi < 0. \quad (91)$$

В «трансзвуковой» модели (24) скорости «биений» и «шумов» равны

$$c^\perp = c, \quad (92)$$

а для всех остальных нелинейных моделей (25)–(27) «биения» оказываются сверхзвуковыми [16, 17, 20]: $c^\perp > c$. График зависимости c^\perp от χ изображен на рис. 5 (расчет проведен при $m = 1$ и $m_* = 0.5$). Характер зависимости $c^\perp(\chi)$ во всех моделях одинаков: монотонный рост при $\chi < 0$ и убывание при $\chi > 0$.

С учетом закона возрастания тока в ударной волне (74) имеем $\chi_+ > \chi_-$. Поэтому в «магнитном» режиме всегда выполняется неравенство

$$c_-^\perp > c_+^\perp, \quad (93)$$

тогда как в «электрическом» режиме — всегда

$$c_-^\perp < c_+^\perp. \quad (94)$$

Из (82) и (93) следует, что в «магнитном» режиме $w_- + c_-^\perp > w_+ + c_+^\perp$, и условие (89) всегда справедливо. Условие же (88) требует более тщательной проверки. Согласно (92), условие (88) для «трансзвуковой» модели (24) равносильно неравенству $w_- - c_- > w_+ - c_+$. Но согласно (82), в «магнитном» режиме $w_- > c_-$, тогда как $w_+ < c_+$, и поэтому условие (88) выполняется. Для остальных

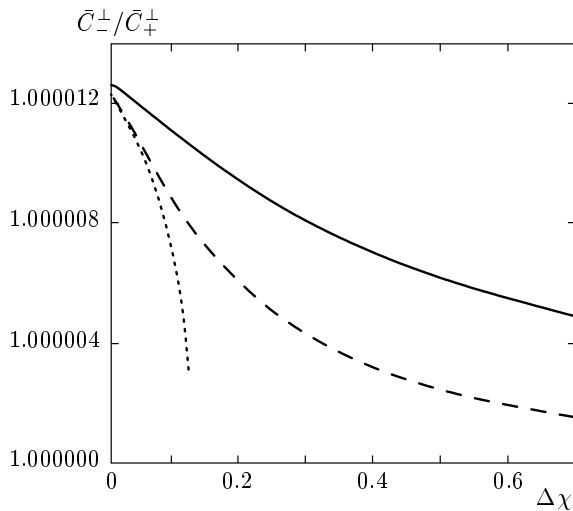


Рис. 6. Отношение $C_{+}^{\perp}/C_{-}^{\perp}$ в зависимости от скачка тока $\Delta\chi_{+}$ в ударной волне в «магнитном» режиме при $\chi_{-} \rightarrow 0-$. Обозначения такие же, как на рис. 5. Модель (25) показана пунктирной линией и применима только при $\Delta\chi < 0.125$

трех моделей струн (25)–(27) условие (88) в «магнитном» режиме также выполняется, что проверяется расчетом (см. рис. 6).

В «электрическом» режиме, как это следует из (83) и (94), условие (89) никогда не выполнимо. Это означает, что ударные волны в «электрическом» режиме невозможны. Нарушение неравенства (89) в «электрическом» режиме фактически выражает нарушение связи между колебаниями мировой поверхности струны по разные стороны разрыва. Это дает объяснение причины изменения внешней геометрии струны, наблюдавшейся при численном решении уравнений движения в «электрическом» режиме [13, 14]. Если же в «электрическом» режиме искусственно создать разрыв тока, то этот разрыв будет неустойчивым, его энергия начнет рассеиваться, уходя в «биения», и разрыв исчезнет.

11. ВЫВОДЫ

Итак, продольные возмущения внутри мировой поверхности сверхпроводящей космической струны могут приводить к появлению устойчивых разрывов, аналогичных ударным волнам. Ударные волны присущи всем моделям струн (24)–(27), которые имеют существенно нелинейную зависимость лагранжиана Λ от тока χ и обобщают линейную модель (6), первоначально предложенную для описания сверхпроводящих струн [3]. Линейная мо-

дель (6) оказывается недостаточной для обнаружения ударных волн, потому что скорость продольных возмущений внутри мировой поверхности струны постоянна и равна скорости света.

Устойчивые разрывы удовлетворяют условию эволюционности (48), которое требует, чтобы скорость ударной волны была сверхзвуковой ($w_{-} > c_{-}$), а скорость течения за фронтом ударной волны — дозвуковой ($w_{+} < c_{+}$) — точно так же, как и в механике сплошных сред. Скорость распространения ударной волны w_{-} определяется уравнениями (58), (59) в «магнитном» режиме (при пространственноподобных токах $\chi > 0$) или уравнениями (60), (61) в «электрическом» режиме (при времениподобных токах $\chi < 0$). Скорость звука перед и за фронтом разрыва (c_{-} и c_{+}), как и параметр $K(\chi)$, рассчитываемый по формуле (16), однозначно определены через лагранжиан сверхпроводящей струны (24)–(27). Акустические пределы для ударных волн малой интенсивности определены соответственно формулами (62), (64) и (67), (68).

Для всех существующих моделей сверхпроводящих струн (24)–(27) условие эволюционности (74) как в «магнитном», так и в «электрическом» режимах, требует возрастания тока в ударной волне, $\Delta\chi > 0$. Важно подчеркнуть, что закон возрастания тока не запрещает существование ударных волн в «электрическом» режиме, хотя условием (74) накладываются существенные ограничения на значения тока перед и за ударной волной.

Причиной невозможности ударных волн в «электрическом» режиме является неустойчивость по отношению к возмущениям мировой поверхности струны, что аналогично гофрировочной неустойчивости ударных волн в сплошных средах. Это накладывает дополнительные требования (88) и (89) на скорость распространения поперечных возмущений (90) и (91). В «магнитном» режиме оба условия (88) и (89) справедливы, и ударные волны могут распространяться без каких-либо ограничений. В «электрическом» режиме ударные волны, удовлетворяющие неравенству (89), существовать не могут. Если же в «электрическом» режиме струны искусственно создан разрыв тока, то энергия будет излучаться в форме колебаний мировой поверхности струны, разрыв будет неустойчивым и превратится в непрерывный скачок.

Хотя уравнения для скорости ударных волн на космических струнах (58), (59) не зависят от геометрических факторов, появление разрывов тока может привести к потере энергии в форме поперечных колебаний («биений») и вызвать изме-

нение конфигурации струны. При этом следствием, важным для наблюдений, будет излучение струны [32], и в случае столкновения струн с разными токами задача расчета существенно усложняется. Отдельный интерес представляет задача о струне под действием внешнего электромагнитного поля [33], а также возникновение ударных волн на такой струне. Эти вопросы однако, выходят за рамки настоящей работы и требуют отдельного рассмотрения. Дальнейшее исследование ударных волн и связанных с ними явлений позволит лучше узнать динамику сверхпроводящих космических струн, что имеет важное значение в прикладных вопросах астрофизики, включая поиск источников гамма-всплесков и наблюдательных данных, необходимых для проверки гипотез современной космологии.

Авторы признательны Л. И. Меньшикову и К. В. Степаньянцу за конструктивные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. W. B. Kibble, Phys. Rep. **67**, 183 (1980).
2. A. Vilenkin, Phys. Rep. **121**, 264 (1985).
3. E. Witten, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).
4. V. Berezhinsky, B. Hnatyk, and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **64**, 043004 (2001).
5. F. Ferrer and T. Vachaspati, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 2399 (2006).
6. О. С. Сажина, М. В. Сажин, В. Н. Семенцов, ЖЭТФ **133**, 1005 (2008).
7. D. N. Spergel, T. Piran, and J. Goodman, Nucl. Phys. B **291**, 847 (1987).
8. E. Copeland, M. Hindmarsh, and N. Turok, Phys. Rev. Lett. **58**, 1910 (1987).
9. B. Carter, Phys. Lett. B **228**, 466 (1989).
10. Y. Lemperiere and E. P. S. Shellard, Nucl. Phys. B **649**, 511 (2003).
11. M. Lilley, X. Martin, and P. Peter, Phys. Rev. D **79**, 103514 (2009).
12. arXiv:hep-th/9905040.
13. X. Martin and P. Peter, Phys. Rev. D **61**, 43510 (2000).
14. A. Cordero-Cid, X. Martin, and P. Peter, Phys. Rev. D **65**, 083522 (2002).
15. B. Carter, Phys. Lett. B **224**, 61 (1989).
16. B. Carter and P. Peter, Phys. Rev. D **52**, 1744 (1995).
17. B. Carter, Ann. Phys. **9**, 247 (2000).
18. N. K. Neilsen and P. Olsen, Nucl. Phys. B **291**, 829 (1987).
19. R. Battye and P. Sutcliffe, Phys. Rev. D **80**, 085024 (2009).
20. B. Hartman and B. Carter, Phys. Rev. D **77**, 103516 (2008).
21. Р. Курант, К. Фридрихс, *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, Изд-во иностр. лит., Москва (1950), с. 105 [R. Courant and K. Friedrichs, *Supersonic Hydrodynamics and Shock Waves*, New York (1948)].
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, Наука, Москва (1986), т. 6, с. 529.
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, Наука, Москва (1986), т. 6, с. 466.
24. K. S. Thorne, Astrophys. J. **179**, 897 (1973).
25. В. И. Жданов, П. В. Титаренко, ЖЭТФ **114**, 881 (1998).
26. С. П. Дьяков, ЖЭТФ **27**, 288 (1954).
27. Н. М. Кузнецов, УФН **159**, 493 (1989).
28. A. N. Taub, Ann. Rev. Fluid Mech. **10**, 301 (1978).
29. Ю. В. Власов, ЖЭТФ **111**, 1320 (1997).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, Наука, Москва (1986), т. 6, с. 463.
31. К. А. Бугаев, М. И. Горенштейн, В. И. Жданов, ТМФ **80**, 138 (1989).
32. Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. Б. Лаврентьев, Письма в ЖЭТФ **59**, 359 (1994).
33. П. О. Казинский, ЖЭТФ **128**, 312 (2005).